ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

CH. STURM

Optique. Recherches sur les caustiques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 205-218
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__205_0>

OPTIQUE.

Recherches sur les caustiques ;

Par M. Ch. Sturm.

Soit, dans un milieu homogène, un point lumineux A, d'où émanent, en tous sens, des rayons qui se réfractent, en passant de ce milieu dans un autre milieu également homogène, séparé du premier par une surface plane ou sphérique. Nous nous proposons ici de déterminer la nature de la surface caustique formée par la rencontre consécutive des rayons réfractés.

Supposons d'abord (fig. 1 et 2) que la surface de séparation soit un plan. Abaissons du point A sur ce plan une perpendiculaire AC, que nous prolongerons d'une quantité CB=AC, et par laquelle nous conduirons, à volonté, un plan ACD qui coupera le proposé suivant une droite CD, perpendiculaire à CA. Il est clair que tous les rayons émanés du point A qui tomberont dans ce plan ACD n'en sortiront pas en passant dans le second milieu. Ainsi nous n'avons à considérer que ce qui se passe dans le plan ACD, qui est celui de la figure.

Soient donc AI un rayon incident quelconque, I son point d'incidence, sur la droite CD et IK la direction qu'il prend en se réfractant. Soit IL le prolongement de cette direction IK du côté du point A ; élevons IF perpendiculaire à CD ; les sinus des angles AIF et LIF d'incidence et de réfraction seront entre eux, d'après une loi connue, dans un rapport constant que nous nommerons $\frac{a}{c}$.

Faisons passer par les trois points A, B, I une circonférence de cercle. Cette circonférence touchera IF en I, et coupera de nouveau la droite IL en un point M. Il est aisé de voir que les sinus des angles AIF, MIF que la tangente IF au cercle AIB fait avec les cordes IA, IM sont entre eux comme ces cordes. Donc le rapport de celles-ci est donné et égal à $\frac{a}{c}$; et suivant que a sera plus grand ou plus petit que c, les points I et M seront ou ne seront pas situés tous deux du même côté de AB. Ces deux cas doivent être examinés séparément.

Premier cas (fig. 1). $a>c$, d'où $IA>IM$.

L'angle AMB étant alors égal à l'angle AIB, prenons sur MB une portion MG égale à MA et joignons AG, les deux triangles isocèles AIB, AMG seront semblables; donc l'angle MAG sera égal à l'angle IAB, et par conséquent l'angle BAG égal à l'angle IAM; mais on a aussi l'angle ABG égal à l'angle IAM; donc les deux triangles BAG et AMI sont semblables, et donnent conséquemment cette proportion

$$\frac{BA}{BG}=\frac{IA}{IM}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{BA}{BG}=\frac{a}{c};$$

donc BG est constant et donné de grandeur; et comme

$$BG=MB-MG=MB-MA,$$

on voit que la différence MB—MA est constante, et que par conséquent le point M est à une branche d'hyperbole dont les foyers sont A et B et dont l'axe transverse est égal à BG.

De plus MI est la normale à cette courbe au point M, puisqu'elle fait, avec les deux rayons vecteurs MA, MB, des angles

AMI, BMI, supplémens de l'autre, comme sous-tendus dans le cercle AMB par des cordes égales BI, AI. Tous les rayons réfractés IK sont donc normaux à la branche d'hyperbole dont il s'agit.

Ainsi, *lorsque l'angle de réfraction est moindre que l'angle d'incidence, la caustique formée par les rayons réfractés est la développée d'une branche d'hyperbole dont le foyer est le point de départ des rayons incidens, dont le centre est la projection du même point sur la droite séparatrice des deux milieux, et dont l'excentricité est à l'axe transverse dans le rapport donné du sinus d'incidence au sinus de réfraction.*

Deuxième cas (fig. 2). $a<c$, d'où $IA<IM$.

L'angle AMB étant alors supplément de AIB, prolongeons BM d'une quantité $MG=MA$ et joignons AG; les triangles isocèles AIB, AMG étant semblables, l'angle MAG sera égal à IAB, et par conséquent l'angle BAG égal à l'angle IAM; mais l'angle ABG est égal à l'angle AIM; donc les deux triangles BAG, IAM sont semblables et donnent conséquemment

$$\frac{BA}{BG}=\frac{IA}{IM}, \quad \text{ou} \quad \frac{BA}{BG}=\frac{a}{c};$$

donc BG est donné de grandeur; et comme

$$BG=MG+MB=MA+MB,$$

on voit que le point M appartient à une ellipse dont A et B sont les foyers et dont le grand axe est égal à BG.

De plus MI est la normale à cette courbe, puisqu'elle fait, avec les rayons vecteurs MA, MB, des angles IMA, IMB égaux entre eux, comme sous-tendant des cordes égales IA, IB du cercle AMB. Tous les rayons réfractés IK sont donc normaux à l'ellipse dont il s'agit.

Ainsi, *lorsque l'angle de réfraction est plus grand que l'angle d'incidence, la caustique formée par les rayons réfractés est la* *développée d'une demi-ellipse, dont le foyer est le point de départ des rayons incidens, dont le centre est la projection du même point sur la droite séparatrice des deux milieux, et dont l'excentricité est au demi-grand axe dans le rapport donné du sinus d'incidence au sinus de réfraction.* Il faut remarquer qu'ici l'angle d'incidence ne saurait croître au-delà d'une certaine limite déterminée par la formule $\mathrm{Sin.AIF}=\frac{a}{c}$.

Comme les résultats que nous venons d'exposer sont déjà connus et ont été démontrés par l'analise (*), nous ne nous y arrêterons pas davantage. Passons donc à d'autres recherches.

Supposons (fig. 3, 4, 5) que la surface séparatrice des deux milieux soit une surface sphérique. Tirons de son centre C au point lumineux A une droite indéfinie CA, par laquelle nous ferons passer un plan CAD, qui coupera cette surface suivant un cercle dDδ, représenté dans la figure. Il est clair que tous les rayons émanés du point A dans ce plan CAD n'en sortiront pas en pénétrant du premier milieu dans le second.

Soient donc AI un rayon incident quelconque, I son point d'incidence sur le cercle dDδ et IK la direction qu'il prend en se réfractant. Soit IL le prolongement de IK dans la direction opposée, et tirons le rayon ou la normale CI. Les sinus des angles AIC, LIC d'incidence et de réfraction sont toujours entre eux dans un rapport donné. Il faut remarquer, en outre, que ces angles doivent toujours être de même espèce, c'est-à-dire, tous deux aigus ou tous deux obtus.

Prenons, sur la direction de la droite CA, un point B tel que

(*) Voyez le mémoire inséré à la page 229 du XI.e volume du présent recueil.

J. D. G.

le produit de CA par CB soit égal au quarré du rayon CI ou Cd. Les triangles CAI, CIB seront semblables et donneront $\frac{IA}{IB}=\frac{CA}{CI}$; le rapport $\frac{IA}{IB}$ sera donc constant. Posons

$$\frac{IA}{IB}=\frac{a}{b} .$$

Le triangle CAI donne encore

$$\frac{Sin.CIA}{Sin.CAI}=\frac{CA}{CI}=\frac{a}{b} ;$$

et comme les angles CAI, CIB sont égaux, on a

$$\frac{Sin.CIA}{Sin.CIB}=\frac{CA}{CI}=\frac{a}{b} .$$

Si le point A est tellement placé, à l'égard de la surface séparatrice, que le rapport de CA au rayon CI soit égal au rapport donné du sinus d'incidence au sinus de réfraction, la formule ci-dessus fait voir que, l'angle d'incidence étant CIA, l'angle de réfraction sera CIB, pourvu toutefois que ces deux angles soient de même espèce. Cette condition n'est remplie qu'autant que le point I tombe sur l'arc δD, déterminé sur le cercle dDδ par la perpendiculaire AD à CA (fig. 3) ou par la tangente AD à ce cercle (fig. 4, 5), suivant que A lui est intérieur ou extérieur. Ce cas particulier, dans lequel la courbure sphérique fait converger en un seul et même point les directions des rayons réfractés, a été signalé par M. le professeur de La Rive fils, dans son mémoire sur les Caustiques, imprimé récemment à Genève (*).

(*) Nous aurions déjà annoncé cet intéressant mémoire que nous n'avons reçu au surplus que depuis peu, si nous n'avions voulu faire connaître

Pour rentrer dans la généralité de la question, faisons passer une circonférence par les trois points A, B, I; cette circonférence coupera la droite IL en un second point M; et, à cause de la relation $CA.CB=\overline{CI}^2$, CI lui sera tangente en I. Cela étant, les sinus des angles CIA, CIM, formés par cette tangente CI avec les cordes IA, IM seront entre eux comme ces cordes. Soit $\frac{a}{c}$ le rapport donné de ces sinus; on aura ainsi $\frac{IA}{IM}=\frac{a}{c}$, de sorte que les trois droites IA, IB, IM seront constamment proportionnelles aux trois constantes a, b, c.

La circonférence qui passe par les trois points A, B, I, est divisée par ces points en trois arcs sur chacun desquels le point M peut également se trouver. Voilà donc trois cas distincts qu'il faut discuter séparément.

Premier cas (fig. 3). Le point M tombe sur l'arc AB.

Les angles AIB, AMB étant alors supplémens l'un de l'autre; prolongeons BM d'une longueur MG qui soit à MA dans le rapport donné de b à a ou de IB à IA, et soit menée AG. Les triangles AIB, AMG ayant un angle égal en M et I, compris entre deux côtés proportionnels, seront semblables; d'où il suit que l'angle MAG sera égal à l'angle IAB, et par conséquent l'angle BAG égal à l'angle IAM. Les triangles BAG, IAM ayant en outre les angles ABG, AIM égaux sont donc semblables et donnent

$$\frac{BA}{BG}=\frac{IA}{IM}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{BA}{BG}=\frac{a}{c};$$

donc BG est constante et donnée de grandeur. Or, on a

---

en même temps quelques résultats sur le même sujet que nous avons obtenus depuis long-temps, mais que le défaut de loisir nous a empêché jusqu'ici de mettre en ordre.

J. D. G.

$$BG = MB + MG\,, \qquad MG = \frac{b}{a}MA\,;$$

ainsi

$$MB + \frac{b}{a}MA = BG\,, \qquad \text{ou} \qquad a.MB + b.MA = c.AB\,. \qquad (1)$$

Le lieu géométrique du point M est donc une courbe dans laquelle la somme des produits des rayons vecteurs, rapportés aux points A et B par deux constantes, est elle-même une quantité constante.

Deuxième cas (fig. 4). Le point M se trouve sur l'arc AI.

Les angles AIB, AMB étant alors égaux entre eux, soit prise sur MB, prolongée, s'il est nécessaire, au-delà du point B, une longueur MG qui soit à MA dans le rapport donné de b à a, et soit menée AG. Les triangles AMG, AIB ayant un angle égal en M et I, compris entre deux côtés proportionnels, seront semblables ; d'où il suit que l'angle MAG sera égal à l'angle IAB, et conséquemment plus petit que MAB ; de sorte que G doit réellement tomber entre M et B. Ensuite l'angle BAG sera égal à l'angle IAM ; et, comme les angles ABG, AIM sont aussi égaux, on voit que les triangles BAG, IAM sont aussi semblables, et donnent conséquemment

$$\frac{BA}{BG} = \frac{IA}{IM}\,, \qquad \text{ou} \qquad \frac{BA}{BG} = \frac{a}{c}\,;$$

donc BG est constant et donné de grandeur. Or, on a

$$BG = MB - MG\,, \quad MG = \frac{b}{a}MA\,,$$

ainsi

$$MB - \frac{b}{a}MA = BG\,, \quad \text{ou} \quad a.MB - b.MA = c.AB\,. \qquad (2)$$

Le lieu géométrique du point M est donc une courbe dans laquelle la différence des produits des rayons vecteurs, rapportés aux points A et B, par deux constantes est elle-même une quantité constante.

Troisième cas (fig. 5). Le point M tombe sur l'arc BI.

Soit prise sur BM, prolongée, s'il est nécessaire, au-delà de B une longueur $MG=\frac{b}{a}$ MA, et soit menée. Par là les triangles AMG et AIB seront semblables, l'angle MAG égal à l'angle IAB, et plus grand que l'angle MAB; de sorte que G doit réellement tomber sur le prolongement de MB. Ensuite, l'angle BAG sera égal à l'angle IAM; mais d'ailleurs les angles ABG, AIM sont égaux, comme ayant le même supplément ABM; donc les triangles BAG, IAM sont semblables et donnent

$$\frac{BA}{BG}=\frac{IA}{IM}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{BA}{BG}=\frac{a}{c};$$

donc BG est constant et donné de grandeur. Or, on a

$$BG=MG-MB, \quad MG=\frac{b}{a}MA;$$

ainsi

$$\frac{b}{a}MA-MB=BG, \quad \text{ou} \quad b.MA-a.MB=c.AB. \qquad (3)$$

Le lieu géométrique du point M est donc encore ici une courbe dans laquelle la différence des produits des rayons vecteurs, rapportés aux points A et B, par deux constantes est elle-même une quantité constante; mais ici la différence est inverse de celle du cas précédent.

En résumé, nous voyons que le lieu géométrique du point M est une courbe telle que la somme ou la différence des produits des distances de ses points aux deux points fixes A et B par deux coefficiens déterminés est constante et donnée de grandeur. Il sera donc toujours facile de construire cette courbe, d'après l'équation qui lui correspondra ; on trouvera que c'est une courbe du genre de l'ellipse ou de l'hyperbole, différant d'autant moins de l'une ou de l'autre de celles-ci que le rayon du cercle dont le centre est C sera plus grand par rapport à la distance du point A à sa circonférence, et qu'en même temps les deux coefficiens seront moins inégaux.

Nous allons faire voir présentement que la normale au point M de la courbe dont il s'agit coïncide avec le rayon réfracté MI. Soit en effet MN cette normale (fig. 3), la courbe répondant alors à l'équation (1). Comme on peut toujours, d'un point pris à volonté sur le plan d'une courbe, lui mener une ou plusieurs normales, supposons que la normale MN à la courbe proposée soit celle qui passe par un point fixe P, pris sur son plan. D'après les théories connues, sa portion PM sera un *minimum* ou un *maximum*, entre toutes les droites que l'on peut mener du point P à la même courbe. Donc, en vertu de l'équation (1), la somme

$$p.\mathrm{PM}+a.\mathrm{MB}+b.\mathrm{MA}\ ,$$

dans laquelle p est un coefficient constant arbitraire, sera aussi un *minimum* ou un *maximum*. De là résulte, suivant un théorème général que nous avons démontré ailleurs (*), que, si l'on applique au point M trois forces dirigées suivant les droites PM, BM, AM et proportionnelles aux quantités p, a, b, respectivement, leur résultante sera dirigée suivant la normale MN. Or, l'une d'elles ayant déjà cette direction, les deux autres qui agissent suivant BM et AM devront aussi avoir leur résultante dirigée suivant MN,

(*) Voyez tom. XIV, pag. 115.

avec laquelle elles feront des angles BMN, AMN, dont les sinus devront être conséquemment en raison inverse de leurs intensités, c'est-à-dire, dans le rapport de b à a. Mais MI fait avec MB et MA des angles dont les sinus sont entre eux comme les cordes IB, IA qui les sous-tendent, dans le cercle AMB, c'est-à-dire, dans le rapport de b à a ; donc la normale MN coïncide avec MI. On démontrerait la même chose pour le cas des équations (2) et (3), (fig. 4 et 5) (*).

Cette propriété fait voir que la courbe à laquelle sont tangens les rayons réfractés IK ou IM, est la développée de l'une des courbes (1), (2), (3) ; or, cette courbe n'est autre chose que la caustique formée par ces rayons réfractés, d'où il faut conclure que *la caustique que forment les rayons lumineux qui émanent d'un point, après s'être réfractés à la rencontre d'une circonférence dans le plan de laquelle ce point se trouve situé, est la développée d'une courbe dont la propriété caractéristique est que la somme ou la différence des produits des distances de ses points au point lumineux et à son conjugué par rapport au cercle, par deux coefficiens constans est une quantité constante.* Les courbes de ce genre ayant quelque ressemblance soit avec l'ellipse, soit avec l'hyperbole, on doit en conclure que les caustiques dont il s'agit ici ne doivent pas

---

(*) Si l'on voulait faire usage du calcul différentiel, on aurait, en nommant r, r' les droites MA, MB, et ds l'élément de la courbe

$$br \pm ar' = Const. \quad \text{d'où} \quad b\frac{dr}{ds} \pm a\frac{dr'}{ds} = 0\,;$$

or, $\frac{dr}{ds}$ et $\frac{dr'}{ds}$ sont les sinus des angles que fait la normale avec les rayons vecteurs r et r' ; donc, etc.

différer extrêmement des développées de ces deux courbes (*).

La proposition que nous venons d'établir doit maintenant être appliquée aux différentes circonstances que peut présenter la question.

(*) Ce qui précède nous conduit à une construction assez simple des courbes (1), (2), (3).

Soit prise (fig. 6) sur la direction de IA une longueur IM'=IM, et soit M'C', parallèle à CI, qui coupe en C' la direction de CA. On a d'abord

$$\frac{\text{IA}}{\text{IM}'}=\frac{a}{c}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{IA}}{\text{M}'\text{A}}=\frac{a}{c-a}.$$

les triangles CIA, C'M'A donnent ensuite

$$\frac{\text{CA}}{\text{C}'\text{A}}=\frac{\text{CI}}{\text{C}'\text{M}'}=\frac{\text{IA}}{\text{M}'\text{A}}=\frac{a}{c-a};$$

donc le point C' est donné de position et la distance C'M' donnée de grandeur ; de sorte que le point M' appartient à une circonférence de cercle dont on connaît le centre C' et le rayon.

Ainsi, décrivons un cercle dont le centre C' et le rayon C'M' soient déterminés par les proportions

$$\frac{\text{CA}}{\text{CC}'}=\frac{a}{c} \quad \text{et} \quad \frac{\text{CI}}{\text{C}'\text{M}'}=\frac{\text{CA}}{\text{C}'\text{A}}=\frac{a}{c-a};$$

le point A sera un centre de similitude des cercles dont C et C' sont les centres. Soient menées par ce point A des droites IM' qui coupent ces deux cercles en des points corrélatifs I et M', de sorte que les rayons CI, C'M' soient parallèles entre eux ; puis, faisant passer par les points A et B une suite de cercles AIB, prenons sur chacun d'eux une corde IM égale à IM', tellement que l'angle CIM soit de même espèce que CIA ; nous obtiendrons, par cette construction, tous les points M de la courbe demandée, et toutes ses normales MI.

Une construction analogue, indiquée (fig. 2), a lieu relativement à l'ellipse et à l'hyperbole dont il a été question (fig. 1 et 2).

Tout étant supposé comme ci-dessus (fig. 3) , soit d'abord supposé le point A dans l'intérieur du cercle réfringent , ce qui donne $a<b$. Elevons la perpendiculaire AD à l'axe CA. L'angle CDB étant égal à l'angle CAD , BD sera tangente au cercle dDδ , et l'angle CDA=CBD , sera la plus grande valeur que puisse prendre l'angle d'incidence CIA, qui est toujours égal à CBI. Concevons décrit le cercle AIB , pour chaque point I d'incidence ; il faudra supposer successivement que le point I tombe sur l'arc dD , puis sur l'arc δD , en se rappelant que l'angle CIM ne peut devenir obtus.

Si l'on a $c<a$, il s'ensuit IM<IA, le point M tombe toujours sur l'arc AI, quel que soit I ; la caustique formée par les rayons réfractés est alors la développée de la courbe (2).

Si l'on a $c>a$ et $<b$, IM est compris entre IA et IB , le point M tombe sur l'arc AB, quel que soit I ; la caustique répond alors à la courbe (1).

Soit enfin $c>a$ et $>b$, d'où IM>IA et >IB. Si le point d'incidence tombe sur l'arc dD , on voit que la caustique est la développée de la courbe (1) ; et , s'il tombe sur δD , elle devient celle de la courbe (3). L'angle d'incidence a ici une limite au-dessous de CDA , qu'on obtient en faisant Sin.CIM=1 , dans la formule $\frac{Sin.\,CIA}{Sin.\,CIM}=\frac{a}{c}$, d'où $Sin.\text{CIA}=\frac{a}{c}<\frac{a}{b}$ ou $<$Sin.CDA.

Examinons maintenant ce qui a lieu (fig. 4 et 5) , quand le point A est extérieur au cercle, d'où résulte $a>b$. Soit alors AD tangente au cercle dDδ ; il est clair que les rayons qui partent du point A ne pourront pas tomber , à la fois , sur les deux arcs dD et δD ; ils tomberont seulement sur l'un ou sur l'autre. D'après cela , si l'on suppose décrit le cercle AIB pour chaque point I, en se rappelant que les angles CIA , CIM sont toujours de même espèce , et que le premier est obtus ou aigu , suivant que I tombe sur dD ou sur δD, on parviendra aux résultats suivans.

Les rayons incidens tombant sur l'arc dD , si l'on a $c<a$, la

caustique est la développée de la courbe (2) ; mais, si l'on a $c>a$, elle répondra à la courbe (1) ; les rayons incidens susceptibles de réfraction n'atteindront pas AD, et leur limite sera donnée par la formule $Sin.\mathrm{CIA}=\frac{a}{c}$.

Les rayons incidens tombant sur l'arc δD, si l'on a $c<a$, la caustique se rapporte à la courbe (1) ou à la courbe (3), suivant qu'on a $c>$ ou $<b$. Mais $c>a$ se rapporte à la courbe (2). Dans ce dernier cas, l'angle d'incidence CIA a une limite au-dessous de l'angle droit CDA, donnée par la formule $Sin.\mathrm{CIA}=\frac{a}{c}$.

Outre les suppositions que nous venons de parcourir, il reste celle de $c=b$. Nous avons vu qu'alors, tant que les rayons incidens tombent sur l'arc δD, la caustique se réduit à un point unique B ; mais, à l'égard de ceux qui tombent sur l'autre arc dD, la caustique devient la développée de la courbe (1) ou de la courbe (2), suivant que le point A est intérieur ou extérieur au cercle dDδ.

Pour compléter ces recherches, nous allons encore considérer la surface sphérique comme surface réfléchissante, ou, ce qui revient au même, le cercle comme courbe réfléchissante, et nous ferons connaître la nature de la caustique que forment alors les rayons réfléchis.

En admettant les mêmes notations et constructions que ci-dessus, on parvient aisément alors aux conclusions que voici :

Si la distance du point A au centre du miroir est plus petite que son rayon, la caustique formée par les rayons réfléchis est la développée de la courbe définie par l'équation $\frac{b}{a}\mathrm{MA}-\mathrm{MB}=\mathrm{AB}$.

Si la distance du point A au centre du miroir est plus grande que son rayon, la caustique est la développée de la courbe

$MB + \frac{b}{a} MA = AB$ ou de la courbe $MB - \frac{b}{a} = AB$, suivant que le miroir est convexe ou concave à l'égard du point A.

Il convient de rappeler ici une autre propriété optique dont jouissent en commun les courbes désignées par (2) et (3) dans ce qui précède, et qui se trouve énoncée dans les *Œuvres de Descartes*; propriété qui découle de celle que nous avons exposée relativement aux normales de ces courbes. En voici l'énoncé. Soient A et B deux points donnés de position, et soit $\frac{b}{a}$ un rapport donné; soit construite une courbe telle que, pour chacun de ses points M, la quantité $b.MA - a.MB$ soit égale à une constante arbitraire qu'on peut prendre positive, négative ou nulle. Si des rayons lumineux, partant du point A, se réfractent à la rencontre de cette courbe, de telle sorte que les sinus des angles d'incidence et de réfraction soient entre eux dans le rapport donné de a à b, les directions des rayons réfractés convergeront vers le point fixe B (*).

(*) Nous avons déjà insinué ailleurs (tom. V, pag. 289) qu'il se pourrait bien que la plupart des caustiques, d'ordinaire d'une figure si compliquée, ne fussent que des développées de courbes beaucoup plus simples. Cette pensée semble avoir présidé au beau travail qu'on vient de lire; et c'est sans doute ce qui a conduit son estimable auteur aux élégans résultats auxquels il est parvenu, et qui jettent tant de jour sur un des plus épineux sujets que puisse offrir l'analise appliquée.

J. D. G.