
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

**Autre solution du même problème et de son analogue
pour les surfaces du second ordre**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 199-204

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__199_1

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1824-1825, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Autre solution du même problème et de son analogue
pour les surfaces du second ordre ;*

Par un A B O N N É.

SOIT une ligne quelconque du second ordre ayant un centre,
rapportée à ses diamètres principaux ; et soit alors son équation

$$ax^2 + by^2 = c . \quad (1)$$

Par son centre O , soient menées arbitrairement deux droites perpendiculaires entre elles, la rencontrant en A et B ; et cherchons l'expression de la perpendiculaire p abaissée du centre O sur la corde AB .

Pour cela, soient pris respectivement OA et OB pour axes des t et des u ; pour passer au nouveau système de coordonnées; il faudra faire

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha t + \beta u, \\ y &= \alpha' t + \beta' u; \end{aligned} \right\} (2)$$

ce qui donnera, en substituant,

$$a(\alpha t + \beta u)^2 + b(\alpha' t + \beta' u)^2 = c. \quad (3)$$

Si, dans cette équation, on fait tour à tour chaque coordonnée égale à zéro, et qu'on tire ensuite la valeur de l'autre, on obtiendra ainsi OA et OB , qu'on trouvera être

$$OA = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a\alpha^2 + b\alpha'^2}}, \quad OB = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a\beta^2 + b\beta'^2}}; \quad (4)$$

Cela posé, l'aire du triangle rectangle ACB ayant également pour expression $\frac{1}{2}OA \cdot OB$ et $\frac{1}{2}p \cdot AB$, on doit avoir

$$p = \frac{OA \cdot OB}{AB},$$

ou bien

$$p = \frac{OA \cdot OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}}};$$

introduisant, dans cette expression, pour OA et OB leurs valeurs (4), elle deviendra

$$p = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a(\alpha^2 + \beta^2) + b(\alpha'^2 + \beta'^2)}} ;$$

mais on sait que

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 &= 1 ; \end{aligned} \right\} (5)$$

donc cette expression se réduit simplement à

$$p = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+b}},$$

quantité constante ; de sorte qu'on a ce théorème :

THÉORÈME 1. Les cordes d'une ligne du second ordre hypothénuses d'une suite de triangles rectangles, ayant pour sommet commun de l'angle droit le centre de la courbe, sont toutes tangentes à un même cercle.

On peut toujours supposer c positif, et conséquemment le numérateur réel ; le cercle ne sera donc réel qu'autant que $a+b$ sera une quantité positive, circonstance qui aura toujours lieu dans l'ellipse.

Soit, en second lieu, une surface quelconque du second ordre ayant un centre, rapportée à ses diamètres principaux ; et soit alors son équation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = d . \quad (1)$$

Par son centre O , soient menées arbitrairement trois droites perpendiculaires entre elles, la rencontrant en A , B , C ; et cherchons l'expression de la perpendiculaire p abaissée de son centre O sur le plan du triangle ABC .

Pour cela, soient pris respectivement OA , OB , OC pour axes

des t, u, v ; pour passer au nouveau système de coordonnées, il faudra faire

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha t + \beta u + \gamma v, \\ y &= \alpha' t + \beta' u + \gamma' v, \\ z &= \alpha'' t + \beta'' u + \gamma'' v; \end{aligned} \right\} (2)$$

ce qui donnera, en substituant,

$$a(\alpha t + \beta u + \gamma v)^2 + b(\alpha' t + \beta' u + \gamma' v)^2 + c(\alpha'' t + \beta'' u + \gamma'' v)^2 = d. \quad (3)$$

Si, dans cette équation, on fait tour-à-tour deux des coordonnées égales à zéro, et qu'on en tire ensuite la valeur de la troisième, on obtiendra ainsi les valeurs de OA, OB, OC, qu'on trouvera être

$$\left. \begin{aligned} \text{OA} &= \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a\alpha^2 + b\alpha'^2 + c\alpha''^2}}, \\ \text{OB} &= \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a\beta^2 + b\beta'^2 + c\beta''^2}}, \\ \text{OC} &= \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a\gamma^2 + b\gamma'^2 + c\gamma''^2}}. \end{aligned} \right\} (4)$$

Cela posé, considérons le tétraèdre rectangle dont le sommet est en O et dont ABC est la face hypothénusale. Les aires des faces rectangulaires de ce tétraèdre sont

$$\frac{1}{2}\text{OB}.\text{OC}, \quad \frac{1}{2}\text{OC}.\text{OA}, \quad \frac{1}{2}\text{OA}.\text{OB};$$

on sait d'ailleurs que la somme de leurs carrés doit être égale au carré de l'aire de la face hypothénusale; d'où il suit qu'on doit avoir

$$ABC = \frac{1}{2} \sqrt{\overline{OB^2 \cdot OC^2 + OC^2 \cdot OA^2 + OA^2 \cdot OB^2}} .$$

Présentement, le volume du tétraèdre peut être indistinctement exprimé par $\frac{1}{3}p \cdot ABC$ ou par $\frac{1}{6}OA \cdot OB \cdot OC$; d'où il suit qu'on doit avoir

$$p = \frac{OA \cdot OB \cdot OC}{2ABC} .$$

c'est-à-dire en substituant,

$$p = \frac{OA \cdot OB \cdot OC}{\sqrt{\overline{OB^2 \cdot OC^2 + OC^2 \cdot OA^2 + OA^2 \cdot OB^2}}} ,$$

ou encore

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}}} ;$$

ce qui donnera, en introduisant pour OA, OB, OC, les valeurs (4),

$$p = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + b(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) + c(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2)}} .$$

Mais on a, dans le cas présent,

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 , \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1 , \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1 ; \end{aligned} \right\} (5)$$

donc cette expression se réduit simplement à

$$p = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}} ,$$

quantité constante; de sorte qu'on a ce théorème:

THÉORÈME II. Les triangles inscrits à une surface du second ordre, faces hypothénusales d'une suite de tétraèdres rectangles, ayant pour sommet commun de l'angle droit trièdre le centre de cette surface, sont tous tangens à une même sphère.

On peut toujours supposer d positif, et conséquemment le numérateur réel; la sphère ne sera donc réelle qu'autant que $a+b+c$ sera une quantité positive; ce qui, en particulier, aura toujours lieu pour l'ellipsoïde.
