QUERRET

Algèbre élémentaire. Sur la sommation des termes du développement des puissances d'un binome, pour faire suite aux articles insérés à la page 359 du tome XII.e et à la page 163 du tome XIII.e des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 189-194
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__189_0>

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Sur la sommation des termes du développement des puissances d'un binome, pour faire suite aux articles insérés à la page 359 du tome XII.e et à la page 163 du tome XIII.e des Annales ;

Par M. Querret, ancien chef d'institution.

Représentons par M_i le coefficient numérique du terme affecté de a^ix^{m-i}, dans le développement de $(x+a)^m$; et soit la suite

$$M_1a\ ,\quad M_2a^2\ ,\quad M_3a^3\ ,\quad M_4a^4\ ,\ldots.M_ra^r\ ,\ldots.;\qquad (\alpha)$$

r désignant le rang du terme M_ra^r ; et appelons cette suite (α).

Soit formée une seconde suite (β) dont le premier terme soit le premier terme de (α) augmenté de b ; dont le second terme soit le second terme de (α) augmenté du premier terme de (β) multiplié par b ; dont le troisième terme soit le troisième terme de (α) augmenté du second terme de (β) multiplié par b, et ainsi de suite ; en disposant dans une même colonne toutes les parties d'un même terme de cette deuxième suite, et en disposant ces termes de gauche à droite, suivant leur rang, elle sera

$$\left.\begin{array}{r|r|r|r|l}
M_1 a & M_2 a^2 & M_3 a^3 & M_4 a^4 & \ldots\ldots\ M_r a^r \qquad \ldots\ldots \\
+b & +M_1 ab & +M_2 a^2 b & +M_3 a^3 b & \ldots\ldots+M_{r-1} a^{r-1} b\ \ldots\ldots \\
 & +\quad b^2 & +M_1 ab^2 & +M_2 a^2 b^2 & \ldots\ldots+M_{r-2} a^{r-2} b^2 \ldots\ldots \\
 & & +\quad b^3 & +M_1 ab^3 & \ldots\ldots+M_{r-3} a^{r-3} b^3 \ldots\ldots \\
 & & & +\quad b^4 & \ldots\ldots+M_{r-4} a^{r-4} b^4 \ldots\ldots \\
 & & & & \ldots\ldots+\ \ldots\ldots\ldots \\
 & & & & \qquad +\ \ldots\ldots b^r \ldots
\end{array}\right\} (\beta)$$

Nous appellerons cette suite la *somme première* de (α); en désigant ses termes consécutifs par $\Sigma(1,1)$, $\Sigma(1,2)$, $\Sigma(1,3)$, ... $\Sigma(1,r)$, ...

Si on opère sur la série (β), pour trouver une troisième série (γ) comme on avait opéré sur (α) pour trouver (β), on aura

$$\left.\begin{array}{r|r|r|l}
M_1 a & M_2 a^2 & M_3 a^3 & M_4 a^4\ \ldots\ldots\ M_r a^r \qquad \ldots\ldots \\
+2b & +2M_1 ab & +2M_2 a^2 b & +2M_3 a^3 b\ \ldots\ldots+2M_{r-1} a^{r-1} b\ \ldots\ldots \\
 & +\quad 3b^2 & +3M_1 ab^2 & +3M_2 a^2 b^2 \ldots\ldots+3M_{r-2} a^{r-2} b^2 \ldots\ldots \\
 & & +\quad 4b^3 & +4M_1 ab^3 \ldots\ldots+4M_{r-3} a^{r-3} b^3 \ldots\ldots \\
 & & & +\quad 4b^4 \ldots\ldots+5M_{r-4} a^{r-4} b^4 \ldots\ldots \\
 & & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & & \qquad +(r+1) b^r \ldots\ldots
\end{array}\right\} (\gamma)$$

Nous appellerons indistinctement cette nouvelle suite la *somme première* de (β) ou la *somme seconde* de (α), et nous représenterons ses termes consécutifs par $\Sigma(2, 1)$, $\Sigma(2, 2)$, $\Sigma(2, 3)$, ... $\Sigma(2, r)$.....

En opérant sur (γ), comme sur les précédentes, nous formerons une suite (γ) telle qu'on la voit ici

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l}
M_1 a & M_2 a^2 & M_3 a^3 & M_4 a^4 \ldots\ldots\ldots M_r a^r \ldots\ldots\ldots \\
+3b & +3M_1 ab & +3M_2 a^2 b & +\ 3M_3 a^3 b \ldots\ldots + \ 3M_{r-1} a^{r-1} b \ldots\ldots \\
 & +\ 6\ b^2 & +6M_1 ab^2 & +\ 6M_2 a^2 b^2 \ldots\ldots + \ 6M_{r-2} a^{r-2} b^2 \ldots\ldots \\
 & & +\ 10\ b^3 & +10M_1 ab^3 \ldots\ldots +10M_{r-3} a^{r-3} b^3 \ldots\ldots \\
 & & & +15b^4 \ldots\ldots\ldots +15M_{r-4} a^{r-4} b^4 \ldots\ldots \\
 & & & \qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & & \qquad\qquad\qquad + \frac{(r+1)(r+2)}{2} b^r \ldots\ldots
\end{array}\right\} (\delta)$$

Cette suite sera pareillement la *somme première* de (γ) ou la *somme seconde* de (β) ou la *somme troisième* de (α), et nous représenterons ses termes consécutifs par $\Sigma(3, 1)$, $\Sigma(3, 2)$, $\Sigma(3, 3)$, ... $\Sigma(3, r)$.....

On peut, par le même procédé, former tant d'autres suites (ε), (ζ), (η), ... qu'on voudra, lesquelles seront dites les *sommes quatrième*, *cinquième*, *sixième*, ... de la suite (α); et il résulte des lois de leur formation,

1.° Que, dans la *somme première* de (α), les coefficiens sont constans et égaux à l'unité;

2.° Que, dans la *somme seconde*, les coefficiens sont les nombres de la suite naturelle 1, 2, 3, ...;

3.° Que, dans la *somme troisième*, les coefficiens sont les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, ...;

4.° Que, dans la *somme quatrième*, les coefficiens sont la somme des nombres tétraèdres 1, 4, 10, 20, ... ;

Et ainsi de suite.

De sorte que généralement, dans la *somme* $n.^{me}$, les coefficiens sont les nombres figurés du $n.^{me}$ ordre.

Si donc nous désignons, en général, par $\varphi(p, q)$ le $q.^{me}$ nombre figuré du $p.^{me}$ ordre, et par $\Sigma(n, r)$ le $r.^{me}$ terme de la somme $n.^{me}$ de (x), nous aurons

$$\Sigma(n,r)=M_r a^r+\varphi(n,2)M_{r-1}a^{r-1}b+\varphi(n,3)M_{r-2}a^{r-2}b^2+\ldots+\varphi(n,r+1)b^r. \quad (X)$$

Le terme général de cette série est $\varphi(n, i+1)M_{r-i}a^{r-i}b^i$.

Cela posé, on sait que

$$M_r=\frac{m-r+1}{r}M_{r-1}, \quad \text{d'où} \quad M_{r-1}=\frac{r}{m-r+1}M_r;$$

de là on tire, en changeant continuellement r en $r-1$

$$M_{r-1}=\frac{r}{m-r+1}M_r,$$

$$M_{r-2}=\frac{r}{m-r+1}\cdot\frac{r-1}{m-r+2}M_r,$$

$$M_{r-3}=\frac{r}{m-r+1}\cdot\frac{r-1}{m-r+2}\cdot\frac{r-2}{m-r+3}M_r,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_{r-i}=\frac{r}{m-r+1}\cdot\frac{r-1}{m-r+2}\cdot\frac{r-2}{m-r+3}\cdots\cdots\frac{r-i+1}{m-r+i}M_r:$$

Par la substitution de ces valeurs, la série (X) deviendra

$$\Sigma(n,r)=M_r\Big\{a^r+\frac{r}{m-r+1}\varphi(n,2)a^{r-1}b+\frac{r}{m-r+1}\cdot\frac{r-1}{m-r+2}\varphi(n,3)a^{r-2}b^2$$

$$+\frac{r}{m-r+1}\cdot\frac{r-1}{m-r+2}\cdot\frac{r-2}{m-r+3}\varphi(n,4)a^{r-3}b^3+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{r}{m-r+1}\cdot\frac{r-1}{m-r+2}\cdot\frac{r-2}{m-r+3}\cdots\frac{r-i+1}{m-r+i}\varphi(n,i+1)a^{r-i}b^i+\ldots+\frac{\varphi(n,r+1)}{M_r}b^r\Big\}.\ (\mathrm{Y})$$

Mais, à cause de la relation connue $\varphi(p,q)=\varphi(q,p)$, on a

$$m-r+1=\varphi(2,m-r+1)=\varphi(m-r+1,2),$$

$$(m-r+1)(m-r+2)=1.2\varphi(3,m-r+1)=1.2\varphi(m-r+1,3),$$

$$(m-r+1)(m-r+2)(m-r+3)=1.2.3\varphi(4,m-r+1)=1.2.3\varphi(m-r+1,4),$$

. . . .

$$(m-r+1)(m-r+2)\ldots(m-r+i)=1.2\ldots i\varphi(i+1,m-r+1)=1.2\ldots i\varphi(m-r+1,i+1);$$

on a de plus

$$M_r=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-r+1}{r}=\varphi(r+1,m-r+1)=\varphi(m-r+1,r+1)$$

Au moyen de ces valeurs, la série (Y) deviendra

$$\Sigma(n,r)=M_r\Big\{a^r+\frac{1}{r}\frac{\varphi(n,n)}{\varphi(m-r+1,2)}a^{r-1}b+\frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdot\frac{\varphi(n,3)}{\varphi(m-r+1,3)}a^{r-2}b^2+$$

$$+\frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdot\frac{r-2}{3}\cdot\frac{\varphi(n,4)}{\varphi(m-r+1,4)}a^{r-3}b^3+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdots\cdots\frac{r-i+1}{i}\cdot\frac{\varphi(n,i+1)}{\varphi(m-r+1,i+1)}a^{r-i}b^i+\ldots+\frac{\varphi(n,r+1)}{\varphi(m-r+1,r+1)}b^r\Big\}.\ (\mathrm{Z})$$

Telle est l'expression générale d'un terme d'un rang quelconque dans une somme quelconque.

Si présentement on suppose $n=m-r+1$, la série (Z) deviendra

$$\Sigma(m-r+1,\, r)=M_r\left\{a^r+\frac{r}{1}a^{r-1}b+\frac{r}{1}\cdot\frac{r-2}{2}a^{r-2}b^2+\ldots\frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdot\ldots\frac{r-i+1}{i}a^{r-i}b^i+\ldots+b^r\right\}$$

c'est-à-dire,

$$\Sigma(m-r+1\,,\, r)=M_r(a+b)^r\ ;$$

de là on conclura

$$(a+b+c)^m=\Sigma(1,\, m)+\Sigma(2,m-1)c+\Sigma(3,m-2)c^2+\ldots+\Sigma(i+1,\, m-i)c^i+\ldots+c^m\ ;$$

ce qui démontre généralement les équations posées tome XIII, (pag. 164 et suiv.), sur lesquelles est fondée la méthode que nous avons développée en cet endroit pour l'extraction des racines.