ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

J. L. WOISARD

Analise transcendante. Note sur l'intégration d'une classe particulière d'équations

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 121-123
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__121_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Note sur l'intégration d'une classe particulière d'équations ;

Par M. J. L. Woisard, professeur aux écoles d'artillerie.

Soit une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$\mathrm{F}(x-M\,,\,y-N)=0\;, \qquad (1)$$

dans laquelle M et N sont supposées des fonctions de p ou $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; si ces fonctions sont telles qu'on ait

$$\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}\right)=p\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p}\right)\,, \qquad (2)$$

l'intégration pourra être exécutée avec la plus grande facilité, ainsi qu'on va le voir.

En différentiant la proposée, elle prendra la forme

$$G\mathrm{d}x+H\mathrm{d}y-G\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p-H\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p=0\;; \qquad (3)$$

G et H étant des fonctions de $x-M$ et $y-N$. Remplaçant dans cette équation $\mathrm{d}y$ par $p\mathrm{d}x$ et $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}$ par $p\,\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p}$, elle deviendra

$$(G+Hp)\mathrm{d}x-(G+Hp)\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p=0,$$

ou bien

$$(G+Hp)\left(\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p\right)=0;$$

équation qui est satisfaite en posant

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p\ ,$$

d'où

$$x=M+a\ . \qquad (4)$$

Si, dans la même équation (3), on met pour $\mathrm{d}x$ sa valeur $\frac{\mathrm{d}y}{p}$, et pour $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p}$ sa valeur $\frac{1}{p}\cdot\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}$, elle deviendra

$$(G+Hp)\mathrm{d}y-(G+Hp)\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p=0\ ,$$

ou bien

$$(G+Hp)\left(\mathrm{d}y-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p\right)=0;$$

équation qui est satisfaite en posant

$$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p\ ,$$

d'où

$$y=N+b\ ; \qquad (5)$$

donc l'intégrale complète de l'équation (1) résultera de l'élimination de p entre les équations (4) et (5). Cette équation renfermera deux constantes arbitraires a et b; mais elles n'équivaudront réellement qu'à une seule ; car, en mettant pour x et y dans l'équation (1) les valeurs données par les équations (4) et (5), on obtient, entre ces deux constantes, l'équation de relation

$$F(a\,,\,b)=0\ .$$

Soit prise, pour exemple, l'équation

$$y-p^2=\text{Log.}(x-2p)\ ,$$

dans laquelle les fonctions p^2 et $2p$ satisfont à la condition que nous avons supposé avoir lieu. Pour en avoir l'intégrale, il suffira d'éliminer p entre les deux équations

$$x=2p+a\ , \qquad y=p^2+b\ ,$$

ce qui donnera

$$4(y-b)=(x-a)^2\ ;$$

équation dans laquelle les deux constantes a et b seront liées par la relation $b=\text{Log.}a$; de sorte qu'on pourra écrire

$$4(y-\text{Log.}a)=(x-a)^2\ ,$$

comme on peut d'ailleurs le vérifier par la différentiation et l'élimination de a (*).

La classe d'équations que nous venons de considérer comprend toutes celles dont l'intégrale complète représente une suite de courbes égales et parallèles.

Metz, 16 juin 1824.

(*) Ce problème est l'inverse de celui qui a été traité à la page 294 du précédent volume.

J. D. G.