ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Géométrie transcendante. Mémoire sur les développantes successives d'une même courbe quelconque

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 9 (1818-1819), p. 73-90
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1818-1819__9__73_0>

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Mémoire sur les développantes successives d'une même courbe quelconque ;

Par un Ancien élève de l'école polytechnique.

Nous nous proposons ici de démontrer quelques théorèmes relatifs aux développantes successives des courbes quelconques, continues ou discontinues. Quelques-uns des objets qui vont nous occuper ont déjà été traité par L'Hopital, Bernouilli, Euler, et récemment par M. Poinsot. Mais, comme il peut n'être pas sans intérêt de montrer comment on parvient au même but par des routes diverses, nous reprendrons de nouveau les questions traitées par ces illustres géomètres, pour en former un tout avec ce qui nous appartient en propre dans ce mémoire. Le lecteur y trouvera d'ailleurs l'avantage de n'avoir pas besoin de recourir à d'autres écrits pour entendre complètement celui-ci.

THÉORÈME I. Si l'on forme la développante d'un arc de courbe quelconque, puis la développante de cette développante, puis la développante de cette dernière courbe, et ainsi de suite ; en faisant commencer ces développantes consécutives à une même extrémité de la courbe primitive ; on obtiendra ainsi une suite d'arcs de courbes partant d'un même point, alternativement normales et tangentes en ce point à la courbe primitive, et ayant conséquemment pour tangentes et normales communes en ce même point deux droites indéfinies perpendiculaires l'une à l'autre.

Or, 1.° en prenant avec des signes contraires les arcs qui vont dans des directions opposées, la somme infinie des arcs tangens à l'arc primitif est égale à la projection de l'arc donné sur sa tangente à l'extrémité opposée à celle de laquelle partent toutes les développantes.

2.° En prenant également avec des signes contraires les arcs qui vont dans des directions opposées, la somme infinie des développantes normales à la courbe primitive sera égale à la projection de l'arc donné sur sa normale à l'extrémité opposée à celle de laquelle partent toutes les développantes.

Soit AB_0 (fig. 1) un arc de courbe quelconque, dont AX et AY soient la tangente et la normale à l'extrémité A, et dont B_0B_1 et B_0I soient la tangente et la normale à l'autre extrémité B_0. Soient de plus B_0A', B_0A'' les projections de l'arc sur ces deux dernières droites.

Soient AB_0, AB_1, AB_2, AB_3,..... une série d'arcs, tels que chacun soit la développante de celui qui le précède immédiatement. Il s'agit de démontrer, 1.° que

$$AB_0-AB_2+AB_4-AB_6+\ldots\ldots=B_0A' \;;$$

2.° que

$$AB_1-AB_3+AB_5-AB_7+\ldots\ldots=B_0A'' \,.$$

On doit remarquer que le théorème ne suppose pas nécessairement que l'arc primitif AB_0 soit soumis à une loi analitique ; de manière qu'on peut même lui substituer une portion de polygone quelconque, rectiligne, curviligne ou mixtiligne.

M. Poinsot a déjà remarqué la vérité du théorème, dans le cas où l'arc primitif est un arc de cercle ; il s'agit de faire voir qu'il a lieu également, lorsque l'arc primitif est une ligne quelconque.

Démonstration. Soit pris sur l'arc primitif AB_0, à partir de son extrémité A, une partie variable $AM_0=S_0$; soit M_0M_1 la tangente correspondante, terminée en M_1 à la développante AB_1 de AB_0 ;

soit fait $AM_1=S_1$; soit M_1M_2 la tangente à AB_1 en M_1, terminée en M_2 à sa développante AB_2 ; soit fait $AM_2=S_2$, et ainsi de suite. Soit enfin φ l'angle variable que fait la tangente M_0M_1 en M_0, avec la tangente AX en A. Soient de plus pris AX , AY pour les axes des coordonnées.

Cela posé , les choses étant d'ailleurs (fig. 2) comme nous les avons supposées (fig. 1) ; concevons que l'arc $AM_0=S_0$ augmente de la quantité $M_0M_0=dS_0$; l'arc $AM_1=S_1$ augmentera de la quantité $M_1M'_1=dS_1$; et l'on aura l'angle $M_1M'_0M'_1=d\varphi$. De plus, l'arc $M_1M'_1$ pouvant être considéré comme une ligne droite , le triangle $M_1M'_0M_{/1}$, rectangle en M'_1, donnera

$$M_1M'_1=M'_0M_1 Cos.M'_0M_1M'_1=M'_0M_1 Sin.M_1M'_0M'_1\ ;$$

c'est-à-dire ,

$$dS_1=(S_0+dS_0)\mathrm{Sin}.d\varphi\ ;$$

ou simplement

$$dS_1=S_0d\varphi\ ;$$

d'où

$$S_1=\int S_0d\varphi\ ;$$

l'intégrale devant s'évanouir en même temps que φ.

D'après cela, il est clair qu'on devra avoir

$$S_1=\int S_0d\varphi\ ,$$

$$S_2=\int^2 S_0d\varphi^2\ ;$$

$$S_3=\int^3 S_0d\varphi^3\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$S_n=\int^n S_0d\varphi^n\ .$$

Si l'on developpe ces intégrales au moyen de l'intégration par parties ; en se rappelant qu'elles doivent s'évanouir en même temps que φ, on aura

$$S_1=\varphi S_0-\int\varphi dS^o\ ,$$

$$S_2=\frac{\varphi^2}{2!}S_0-\frac{\varphi}{1!}\int\varphi dS_0+\int\frac{\varphi^2}{2!}dS_0\,,$$

$$S_3=\frac{\varphi^3}{3!}S_0-\frac{\varphi^2}{2!}\int\varphi dS_0+\frac{\varphi}{1}\int\frac{\varphi^2}{2!}dS_0-\int\frac{\varphi^3}{3!}dS_0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$S_n=\frac{\varphi^n}{n!}S_0-\frac{\varphi^{n-1}}{(n-1)!}\int\varphi dS_0+\ldots\ldots\pm\frac{\varphi}{1!}\int\frac{\varphi^{n-1}}{(n-1)!}dS_0\mp\int\frac{\varphi^n}{2!}dS_0\,.$$

La série infinie des arcs de rangs pairs, pris avec leurs signes, est

$$S_0-S_2+S_4-S_6+\ldots\ldots$$

Si l'on y substitue pour S_0, S_2, S_4, ... les valeurs ci-dessus, il viendra, en réunissant ce qui multiplie chaque intégrale,

$$S_0-S_2+S_4-S_6+\ldots\ldots=$$

$$\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\ldots\right)\left(S_0-\int\frac{\varphi^2}{2!}dS_0+\int\frac{\varphi^4}{4!}dS_0-\ldots\ldots\right)$$

$$+\left(\frac{\varphi}{1}-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\ldots\right)\left(\int\frac{\varphi}{1}dS_0-\int\frac{\varphi^3}{3!}dS_0+\int\frac{\varphi^5}{5!}dS_0-\ldots\ldots\right);$$

c'est-à-dire,

$$S_0-S_2+S_4-S_6+\ldots\ldots=$$

$$\left(S_0-\int\frac{\varphi^2}{2!}dS_0+\int\frac{\varphi^4}{4!}dS_0-\int\frac{\varphi^6}{6!}dS_0+\ldots\ldots\right)\mathrm{Cos.}\varphi$$

$$+\left(\int\frac{\varphi}{1}dS_0-\int\frac{\varphi^3}{3!}dS_0+\int\frac{\varphi^5}{5!}dS_0-\ldots\ldots\right)\mathrm{Sin}\,\varphi\ ;$$

ou, en faisant tout passer sous le même signe d'intégration, ce qui est permis, puisque les limites sont les mêmes,

$$S_0-S_2+S_4-S_6+\ldots\ldots=\text{Cos}\,\varphi\int dS_0\text{Cos.}\varphi+\text{Sin.}\varphi\int dS_0\text{Sin.}\varphi\ .$$

Or, $\int dS_0\text{Cos.}\varphi$ et $\int dS_0\text{Sin.}\varphi$ sont les projections de la courbe primitive sur les tangente et normale au point A; en représentant donc respectivement ces projections par x et y, on aura

$$S_0-S_2+S_4-S_6+\ldots\ldots=x\text{Cos.}\varphi+y\text{Sin.}\varphi\ ,$$

et on trouverait pareillement

$$S_1-S_3+S_5-S_7+\ldots\ldots=x\text{Sin.}\varphi-y\text{Sin.}\varphi\ .$$

Or, ce sont précisément là les formules au moyen desquelles on passe d'un système rectangulaire à un autre système rectangulaire formant un angle φ avec le premier, d'où il suit que ces deux séries ne sont autre chose que les projections de l'arc AM_0 sur la tangente et sur la normale à son autre extrémité M_0, ainsi que l'énonce le théorème.

Les développemens de S_1, S_2, S_3, ..., d'où nous avons conclu ce théorème, ne supposent aucunement que la relation entre les deux variables S_0 et φ, puisse être exprimée par une fonction analitique, unique et continue; ils ne sont fondés, en effet, que sur le principe d'intégration par parties, lequel a toujours lieu quel que puisse être le genre de dépendance entre S_0 et φ. Il faut seulement observer que, dans les séries

$$S_0-S_2+S_4-S_6+\ldots\ldots,$$

$$S_1-S_3+S_5-S_7+\ldots\ldots,$$

les arcs S_0, S_1, S_2, ... doivent se mesurer en prenant négativement les portions de développantes qui répondraient à des décroissemens de l'angle φ, c'est-à-dire, à des mouvemens de la tangente inverses de son mouvement primitif.

Avant de passer à d'autres propositions qu'on peut conclure du précédent théorème, nous ferons remarquer que les arcs de développantes consécutifs, correspondant à un angle donné φ, doivent nécessairement décroître sans cesse, de manière à devenir enfin moindres que toute longueur donnée; du moins tant que l'arc primitif n'est pas infini; car, puisque chacune des séries

$$S_0-S_2+S_4-S_6+\ldots\ldots=S_0-\int^2 S_0\mathrm{d}\varphi^2+\int^4 S_0\mathrm{d}\varphi^4-\ldots\ldots,$$

$$S_1-S_3+S_5-S_6+\ldots\ldots=\int S_0\mathrm{d}x-\int^3 S_0\mathrm{d}\varphi^3+\int^5 S_0\mathrm{d}\varphi^5-\ldots\ldots;$$

se décompose en d'autres dont la sommation ne dépend que de celles de $\mathrm{Sin}.\varphi$, de $\mathrm{Cos}.\varphi$ et des intégrales $\int\mathrm{d}S_0.\mathrm{Cos}.\varphi$, $\int\mathrm{d}S_0.\mathrm{Sin}.\varphi$, lesquelles s'obtiennent toujours, quel que soit φ, lorsque S_0 n'est pas infini; il s'ensuit que ces séries en S_0, S_1, S_2, ... sont toujours convergentes, et qu'ainsi les arcs dont on vient de parler finissent par s'approcher indéfiniment de zéro.

On parviendrait à la même conclusion, en formant la somme

$$S_0+S_1+S_2+S_3+S_4+\ldots\ldots=e^{\varphi}\int e^{-\varphi}\mathrm{d}S_0;$$

cette intégrale devant, en effet, être finie, tant que S_0 le sera lui-même, on est certain que la série dont elle exprime la valeur est convergente, et qu'ainsi les longueurs des développemens successifs, faits dans le même sens, finissent par décroître indéfiniment.

THÉORÈME II. Si l'on forme la développante d'un arc de courbe quelconque, puis la développante de cette développante, puis la développante de cette dernière courbe, et ainsi de suite, en alternant constamment la direction du mouvement de la tangente; c'est-à-dire, en faisant commencer chaque développante au point où finit celle qui la précède immédiatement; ces développantes se trouveront *toutes comprises entre la tangente à l'une des extrémités de l'arc primitif et la normale à son autre extrémité. Cela posé,*

1.° *Si les deux droites indéfinies qui comprennent toutes ces courbes sont* convergentes, *auquel cas les développantes auront des longueurs sans cesse décroissantes ; ces développantes tendront aussi sans cesse à devenir des* épicycloïdes intérieurs ;

2.° *Si ces droites sont* parallèles, *les développantes tendront sans cesse à devenir des* cycloïdes ;

3.° *Enfin, si ces mêmes droites sont* divergentes, *les développantes tendront sans cesse à devenir des* épicycloïdes extérieures.

Soient A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ... une suite indéfinie d'arcs de courbes (fig. 3), dont le premier est quelconque et dont chacun est la développante de celui qui le précède immédiatement ; de telle sorte que le premier développement se fasse de A_1 vers A_2, le second de A_2 vers A_3, le troisième de A_3 vers A_4, et ainsi de suite. Les points A_1, A_3, A_5, ... se trouveront tous sur la normale à la courbe primitive au point A_1, laquelle est rencontrée en I par la normale à son autre extrémité A_0 ; et les points A_0, A_2, A_4, ... seront tous situés sur la tangente menée à la courbe primitive, par cette dernière extrémité, laquelle se trouve coupée en G par la tangente à son autre extrémité A_1.

Soit fait l'angle $A_0IA_1=\omega$; les deux droites $A_1A_3A_5$, ..., $A_0A_2A_4$ ... seront convergentes, parallèles ou divergentes, suivant que l'angle ω sera aigu, droit ou obtus. Il s'agit donc de démontrer que les développantes consécutives tendront à devenir des épicycloïdes intérieurs dans le premier cas, des cycloïdes dans le second et des épicycloïdes extérieures dans le troisième.

Ici encore, comme dans le précédent théorème, l'arc primitif peut n'être point assujetti à la loi de continuité ; ce peut être même une portion de polygone quelconque, rectiligne, curviligne ou mixtiligne.

Soient $A_1M_0=S_0$, $A_1M_1=S_1$; $A_3M_2=S_2$, $A_3M_3=S_3$, ..., une suite d'arcs variables consécutifs et correspondans, développans les uns des autres ; et soit φ l'angle que fait la tangente M_0M_1 au point M_0 avec la tangente A_1G au point A_1.

Soient enfin Σ_0, Σ_1, Σ_2, ... les longueurs totales des développantes A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 ......

Nous aurons d'abord, comme dans le précédent théorème,

$$S_1=\int S_0 d\varphi\ ,$$

l'intégrale s'évanouissant avec φ. On aurait de même

$$S_2=\int \overline{M_1A_2}.d\varphi\ ;$$

mais $\overline{M_1A_2}=A_1A_2-A_1M_1=\Sigma_1 S_1$; donc

$$S_2=\int(\Sigma_1-S_1)d\varphi=\Sigma_1\varphi-\int S_1 d\varphi\ .$$

Ces valeurs de S_1, S_2 indiquent, en général, comment on peut passer d'une développante à la suivante ; et l'on voit qu'on peut poser cette suite d'équations

$$\begin{array}{ll}
S_1=\int S_0 d\varphi\ , & S_2=\varphi\Sigma_1-\int S_1 d\varphi\ , \\
S_3=\int S_2 d\varphi\ , & S_4=\varphi\Sigma_3-\int S_3 d\varphi\ , \\
S_5=\int S_4 d\varphi\ , & S_6=\varphi\Sigma_5-\int S_5 d\varphi\ , \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Si l'on fait les substitutions, on trouvera

$$\begin{array}{ll}
S_1=\int S_0 d\varphi\ , & S_2=\varphi\Sigma_1-\int^2 S_0 d\varphi^2\ , \\
S_3=\frac{\varphi^2}{2!}\Sigma_1-\int^3 S_0 d\varphi^3\ ; & S_4=\varphi\Sigma_3-\frac{\varphi^3}{3!}\Sigma_1+\int^4 S_0 d\varphi^4\ , \\
S_5=\frac{\varphi^2}{2!}\Sigma_3-\frac{\varphi^4}{4!}\Sigma_1+\int^5 S_0 d\varphi^5\ , & S_6=\varphi\Sigma_5-\frac{\varphi^3}{3!}\Sigma_3+\frac{\varphi^5}{5!}\Sigma_1-\int^6 S_0 d\varphi^6\ ; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

La

La loi de ses développemens se trouve suffisamment établie, par les équations même qui ont servi à les obtenir : on passe d'un arc de numéro pair au suivant, en intégrant à partir de $\phi=0$; et de ce dernier à l'arc de numéro pair qui vient après, en retranchant une integrale semblable du terme correspondant de la suite $\varphi\Sigma_1$, $\varphi\Sigma_3$, $\varphi\Sigma_5$, ...

Comme les développantes de numéros impairs Σ_1, Σ_3, Σ_5,.... entrent seules avec les intégrales successives $\int S_0 d\phi$, $\int^2 S_0 d\varphi^2$, $\int^4 S_0 d\phi^4$,.... dans les expressions de tous ces arcs, nous allons examiner seulement comment varient ces développantes. Comme ω n'est autre chose que la valeur de φ qui répond à l'arc $A_1A_0=\Sigma_0$; il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\Sigma_1=\int S_0 d\varphi\,,$$

$$\Sigma_3=\frac{\omega^2}{2!}\Sigma_1-\int^3 S_0 d\varphi^3\,,$$

$$\Sigma_5=\frac{\omega^2}{2!}\Sigma_3-\frac{\omega^4}{4!}\Sigma_1+\int^5 S_0 d\varphi^5\,,$$

. . . .

$$\Sigma_{2n+1}=\frac{\omega^2}{2!}\Sigma_{2n-1}-\frac{\omega^4}{4!}\Sigma_{2n-3}+\frac{\omega^6}{6!}\Sigma_{2n-5}-\ldots\pm\frac{\omega^{2n}}{(2n)!}\Sigma_1\mp\int^{2n+1}S_0 d\varphi^{2n+1}$$

Pour avoir le développement du terme général Σ_{2n+1}, après qu'on en a éliminé tous ceux Σ_{2n-3}, Σ_{2n-5}, ... Σ_1 qui le précèdent, soient multipliées ces équations, excepté la dernière, par des coefficiens a_{2n}, a_{2n-2}, a_{2n-4}, ... a_4, a_2, et formons-en la somme, en égalant à zéro les quantités qui multiplient Σ_{2n-1}, Σ_{2n-3}, Σ_{2n-5}, ... Σ_3, Σ_1 ; nous aurons ainsi

$$\Sigma_{2n+1}=a_{2n}\int S_0 d\phi-a_{2n-2}\int^3 S_0 d\phi^3+a_{2n-4}\int^5 S_0 d\phi^5-\ldots\pm\int^{2n+1}S_0 d\phi^{2n+1}$$

les coefficiens a_2, a_4, a_6, ... a_{2n} étant déterminés par les équations

$$a_2=\frac{\omega^2}{2!},$$

$$a_4=\frac{\omega^2}{2!}a_2-\frac{\omega^4}{4!},$$

$$a_6=\frac{\omega^2}{2!}a_4-\frac{\omega^4}{4!}a_2+\frac{\omega^6}{6!},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{2n}=\frac{\omega^2}{2!}a_{2n-2}-\frac{\omega^4}{4!}a_{2n-4}+\frac{\omega^6}{6!}a_{2n-6}-\ldots\ldots\pm\frac{\omega^{2n-2}}{(2n-2)!}a_2\mp\frac{\omega^{2n}}{(2n)!}.$$

Comme tous ces coefficiens contiendront des termes homogènes en ω; nous ferons $a_{2n}=A_{2n}\omega^{2n}$; les nouveaux coefficiens $A_2, A_4, A_6, \ldots A_{2n}$, se trouveront ainsi donnés par les équations

$$A_2=\frac{1}{2!},$$

$$A_4=\frac{A^2}{2!}-\frac{1}{4!},$$

$$A_6=\frac{A^4}{2!}-\frac{A^2}{4!}+\frac{1}{6!},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$A_{2n}=\frac{A^{2n-2}}{2!}-\frac{A^{2n-4}}{4!}+\frac{A^{2n-6}}{6!}-\ldots\pm\frac{A_2}{(2n-2)!}\mp\frac{1}{(2n)!}.$$

L'inspection de l'équation qui donne le coefficient A_{2n}, en fonction des précédens suffit pour faire voir que les nombres A_2, A_4, A_6, ...A_{2n} sont les coefficiens du développement de $\frac{1}{\text{Cos}.x}$; car, en posant

$$1=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)\left(1+A_2x^2+A_4x^4+A_6x^6+\ldots\right);$$

le terme général du produit, égalé à zéro, donnera pour A_{2n} la valeur précédente.

Les coefficiens du développement de $\frac{1}{\mathrm{Cos}.x}$ peuvent s'obtenir d'une manière qui en fait connaître la loi; il suffit de multiplier $\mathrm{Cos}.x$ par le produit indefini

$$\left\{1-\left(\frac{x}{q}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x}{3q}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x}{5q}\right)^2\right\}\ldots\ldots$$

q désignant le quart du cercle, ou $\frac{1}{2}\varpi$. Ce produit étant convergent pour $x<q$, on peut poser, dans cette limite de x,

$$\frac{1}{\left\{1-\left(\frac{x}{q}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x}{3q}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{x}{5q}\right)^2\right\}\ldots}=1+A_2x^2+A_4x^4+A_6x^6+\ldots+A_{2n}x^{2n}+\ldots$$

mais, à cause de la convergence du produit qui donne le cosinus, on peut appliquer, à la fraction précédente, la décomposition en fractions simples, et poser, en vertu de ce que $\mathrm{Cos}.x$ est une fonction paire,

$$\frac{1}{\mathrm{Cos}.x}=\frac{B_1}{\left\{1-\left(\frac{x}{q}\right)^2\right\}}+\frac{B_3}{\left\{1-\left(\frac{x}{3q}\right)^2\right\}}+\ldots\ldots\frac{B_m}{\left\{1-\left(\frac{x}{mq}\right)^2\right\}}+\ldots,$$

m représentant un nombre impair quelconque. On déterminera B_m par la valeur que prendra $\dfrac{1-\left(\frac{x}{mq}\right)^2}{\mathrm{Cos}.x}$ pour $x=mq$. En différentiant les deux termes on a

$$\frac{\frac{2x}{(mq)^2}}{\text{Sin}.x};$$

faisant $x=mq$, on a, suivant que $m-1$ est divisible par deux seulement ou par quatre,

$$B_m=\pm\frac{2}{mq};$$

ainsi

$$\frac{1}{\text{Cos}.x}=\frac{2}{q}\left\{\frac{1}{1-\left(\frac{x}{q}\right)^2}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\left(\frac{x}{3q}\right)^2}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{1-\left(\frac{x}{5q}\right)^2}-\ldots\pm\frac{1}{m}\,\frac{1}{1-\left(\frac{x}{mq}\right)^2}\mp\ldots\right\}$$

On obtiendra donc le terme général de $\frac{1}{\text{Cos}.x}$, en développant toutes ces fractions en progression, et en réunissant les coefficiens de x^{2n} dans les progressions. Il viendra ainsi

$$A_{2n}=\frac{2}{q}\left\{\frac{1}{q^{2n}}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{(3q)^{2n}}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{(5q)^{2n}}-\frac{1}{7}\,\frac{1}{(7q)^{2n}}-\ldots\right\}.$$

ou bien, en mettant $\frac{1}{q^{2n}}$ en facteur commun, et multipliant de part et d'autre par ω^{2n}

$$A_{2n}\omega^{2n}=a_{2n}=\frac{2}{q}\left(\frac{\omega}{q}\right)^{2n}\left\{1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\ldots\right\}; \quad (*)$$

(*) On peut déduire assez simplement de ceci la sommation de la série

$$1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\ldots\ldots;$$

car on a

$$A_{2n}=\frac{2}{q^{2n+1}}\left\{1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\ldots\right\};$$

or, on peut obtenir A_{2n}, soit par les équations successives et telle est l'expression generale des coefficiens a_2, a_4, a_6, ... a_{2n} qui, comme on l'a vu, donnent la valeur de la developpante Σ_{2n+1}; savoir

$$\Sigma_{2n+1}=a_{2n}\int S_0 d\varphi - a_{2n-2}\int^3 S_0 d\varphi^3 + a_{2n-4}\int^5 S_0 d\varphi^5 - \ldots \pm \int^{2n+1} S_0 d\varphi^{2n+1}$$

Pour appliquer cette formule à la démonstration du théorème énoncé, nous prendrons d'abord le cas le plus simple, c'est-à-dire, celui où l'angle $\varpi = q$; il est visible qu'alors a_{2n} tendra vers la limite constante $\frac{2}{q}$, puisqu'alors $\left(\frac{\varpi}{q}\right)^{2n}$ sera l'unité, et que la série numérique qui entre dans l'expression de a_{2n} converge très-promptement vers l'unité. Et, comme les premiers coefficiens a_2, a_4, a_6, ... n'affectent que les intégrales $\int^{2n-1} S_0 d\varphi^{2n-1}$, $\int^{2n-3} S_0 d\varphi^{2n-3}$,... qui, comme on l'a démontré, décroissent indéfiniment; il en résulte que, pour n très-grand, on aura sensiblement

$$\Sigma_{2n+1} = \frac{2}{q}\left\{\int S_0 d\varphi - \int^3 S_0 d\varphi^3 + \int^5 S_0 d\varphi^5 - \ldots\ldots\right\}.$$

$$A_2 = \frac{1}{2!},$$

$$A_4 = \frac{1}{2!} A_2 - \frac{1}{4!},$$

$$A_6 = \frac{1}{2!} A_4 - \frac{1}{4!} A_2 + \frac{1}{6!},$$

. . . .

Soit par $\frac{d^{2n}.\text{Séc}.x}{dx^{2n}}$, en y faisant $x=0$; en sorte qu'on a

$$1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \frac{1}{9^{2n+1}} - \ldots = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} . \frac{d^{2n}.(\text{Séc}x=0)}{d^{2n}}$$

La série formée par ces intégrales a été trouvée (*Théor. I*) égale à la projection de la courbe primitive sur la dernière normale A_0I. Dans le cas où $\varpi = q$, cette projection devient la distance entre deux parallèles qui comprennent les développantes. En la désignant par D, on a, à la limite,

$$\Sigma_{2n+1} = \frac{2D}{q};$$

ainsi, les longueurs des développantes finissent par être constantes. L'équation de ces courbes limites est, d'après cela, facile à obtenir, puisque la relation entre les arcs et les angles φ est donnée, pour les développantes de numéros pairs, par

$$S_{2n} = \varphi\Sigma_{2n-1} - \frac{\varphi^2}{2!}\Sigma_{2n-3} + \frac{\varphi^4}{4!}\Sigma_{2n-4} - \ldots \pm \frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!}\Sigma_1 \mp \int^{2n} S_0 d\varphi^{2n}.$$

On a démontré que les intégrales $\int^{2n} S_0 d\varphi^{2n}$, dont toutes les origines étaient $\varphi = 0$, décroissaient indéfiniment; ce dernier terme disparaîtra donc à la limite. De plus, les arcs Σ^{2n-5}, Σ^{2n-3}, ... ne s'écartant sensiblement de $\frac{2D}{q}$ que lorsqu'ils portent sur la portion négligeable de la série : on peut écrire, pour n infini,

$$S_{2n} = \frac{2D}{q}\left(\frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right) = \frac{2D}{q}\,\text{Sin.}\varphi.$$

Cette relation appartient à la cycloïde dont la longueur totale est $\frac{4r}{q}$ ou $\frac{4D}{\varpi}$, et dont le demi-grand axe est D. Il résulte d'ailleurs du mode de génération des développantes de numéros impairs qu'elles seront aussi des cycloïdes égales; c'est d'ailleurs ce que l'on trouverait directement, par l'expression de S_{2n+1}.

Reprenons présentement le cas général, où l'angle ϖ, formé par les normales extrêmes, est quelconque. On a vu qu'une développante de numéro impair quelconque était donnée par la formule

$$\Sigma_{2n+1}=a_{2n}.\int S_0 d\varphi - a_{2n-2}.\int^3 S_0 d\varphi^3 + a_{2n-4}.\int^5 S_0 d\varphi^5 - \ldots \pm \int^{2n+1} S_0 d\varphi^{2n+1}$$

et qu'on avait généralement

$$a_{2n}=\frac{2}{q}\left(\frac{\omega}{q}\right)^{2n}\left\{1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\ldots\right\}.$$

Pour n très-grand, la série se réduit à l'unité, et l'on a, à la limite

$$a_{2n}=\frac{2}{q}\left(\frac{\omega}{q}\right)^{2n},$$

on peut donc, en vertu de la convergence de la série

$$\int S_0 d\varphi - \int^3 S_0 d\varphi^3 + \int^5 S_0 d\varphi^5 - \ldots\ldots,$$

poser, pour n infini

$$\Sigma_{2n+1}=\frac{2}{q}\left(\frac{\omega}{q}\right)^{2n}\left\{\frac{q}{\omega}\int S_0 d\varphi - \left(\frac{q}{\omega}\right)^3\int^3 S_0 d\varphi^3 + \left(\frac{q}{\omega}\right)^5\int^5 S_0 d\varphi^5 - \ldots\right\}.$$

On conclut de là que le rapport $\frac{\Sigma_{2n-1}}{\Sigma_{2n+1}}$ de deux développantes successives d'ordre impair est, à la limite, égal à $\frac{q^2}{\omega^2}$; mais comme on a, pour un arc variable, correspondant à l'angle φ,

$$S_{2n}=\varphi\Sigma_{2n-1}-\frac{\varphi^3}{3!}\Sigma_{2n-3}+\ldots\ldots\pm\frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!}\Sigma_1\mp\int^{2n}S_0 d\varphi^{2n};$$

on pourra poser, à la limite,

$$S_{2n}=\frac{\omega}{q}\Sigma_{2n-1}=\left\{\frac{\varphi}{1}\frac{q}{\omega}-\frac{\varphi^3}{3!}\left(\frac{q}{\omega}\right)^3+\frac{\varphi^5}{5!}\left(\frac{q}{\omega}\right)^5-\ldots\right\}=\Sigma_{2n-1}.\frac{\omega}{q}\text{Sin.}\frac{\varphi q}{\omega}.$$

En faisant, dans cette équation, $\varphi=\omega$, on aura l'arc total $\Sigma_{2n}=\frac{\omega}{q}\Sigma_{2n-1}$; on peut donc écrire

$$S_{2n} = \Sigma_{2n}.\mathrm{Sin.}\left(\frac{\phi q}{\omega}\right).$$

Telle est donc l'équation de la courbe vers laquelle tendent les développantes d'ordre pair. On trouverait, soit en intégrant cette équation, soit en prenant directement la formule qui donne S_{2n+1},

$$S_{2n+1} = \Sigma_{2n+1}\left\{1 - \mathrm{Cos.}\left(\frac{\phi q}{\omega}\right)\right\}, \text{ ou } \Sigma_{2n+1} - S_{2n+1} = \Sigma_{2n+1}.\mathrm{Sin.}\frac{(\varpi-\phi)q}{\omega}$$

Cette équation, comparée avec la précédente, qui donne S_{2n}, fait voir que la courbe limite est telle que sa développante est une courbe semblable, mais dans une position inverse. Le rapport de grandeur des arcs correspondans, dans l'un à φ et dans l'autre à $\omega - \varphi$, est $\frac{\Sigma_{2n}}{\Sigma_{2n+1}} = \frac{q}{\omega}$.

On peut faire voir assez simplement, par des considérations géométriques, que l'épicycloïde est la courbe qui jouit de cette propriété, et qui a pour équation $S = \Sigma \mathrm{Sin.}\left(\frac{\phi q}{\omega}\right)$.

Concevons, en effet, une épicycloïde AB (fig. 4) décrite par la demi-révolution d'un cercle dont le rayon est r sur R; et proposons-nous de trouver le centre de courbure pour un point M de cette courbe. On sait que la normale au point M passe par le point de contact P des deux cercles; il ne reste donc, pour connaître le rayon de courbure, qu'à chercher le point d'intersection de deux normales consécutives.

Soient AOP $= \beta$ et APM $= \alpha$. Si le rayon OP tourne de $d\beta$, la normale MN tournera de $d\beta + d\alpha$; or, il est facile de voir que

$$\beta R = 2\alpha r, \quad \text{d'où} \quad d\alpha = \frac{R}{2r}d\beta;$$

l'angle des deux normales consécutives sera donc

dβ

$$d\beta + \frac{R}{2r}d\beta \quad \text{ou} \quad d\beta.\frac{R+2r}{2r}.$$

Le point P s'est déplacé, dans le sens du cercle fixe AH, de $Rd\beta$; pour avoir ce déplacement, mesuré perpendiculairement à la normale, on le multipliera par Sin.α, ou par $\frac{\overline{MP}}{2r}$; ce qui fera $d\beta.\frac{R}{2r}.\overline{MP}$. Or, à la limite, ce même déplacement est égal à $\overline{PN}$, multiplié par l'angle des deux normales; on a donc

$$\overline{PN}.d\beta\frac{R+2r}{2r}=d\beta.\frac{R}{2r}.\overline{MP}.$$

d'où

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{NP}}=\frac{R+2r}{r}.$$

Il est facile de conclure du rapport constant des deux lignes $\overline{MP}$, $\overline{PN}$ que, si l'on décrit, au-dessous du cercle générateur, un autre cercle, dont le diamètre soit à celui du premier dans le rapport $\frac{R}{R+2r}$; c'est-à-dire, dans le rapport des distances au centre O, le point N de la développée se trouvera toujours sur ce cercle; et comme l'arc QN sera toujours égal à QC, le point N décrira une nouvelle épicycloïde semblable, mais réduite, dans le rapport $\frac{R}{R+2r}$. On peut aisément se convaincre, d'après cela, que cette propriété identifie l'épicycloïde avec la courbe limite de notre théorème; car, en désignant par S l'arc AN, et par φ l'angle décrit par la normale ou la tangente, on aura

$$AN=S=MN=\overline{QS}\text{Sin}\,\alpha;$$

mais QS=CB, et CB est précisément la courbe totale ANC; en l'appelant donc Σ, on a

$$S=\Sigma\text{Sin.}\,\alpha\;;$$

l'angle φ, dont la tangente MN a tourné, est précisément $\alpha+\beta$ ou $\frac{R+2r}{R}\alpha$; on a donc

$$\varphi=\alpha.\frac{R+2r}{r}\;,\quad\text{d'où}\quad \alpha=\frac{R}{R+2r}\varphi\,.$$

Si ϖ est l'angle total formé par les tangentes extrêmes; comme α qui lui correspond $=\frac{\varpi}{2}=q$, on aura

$$q=\frac{R}{R+2r}\varpi\;,\quad\text{d'où}\quad \frac{R}{R+2r}=\frac{q}{\varpi}\;;$$

on a donc, en substituant,

$$\alpha=\frac{q\varphi}{\varpi}\;;$$

d'où l'on conclut, pour l'équation de l'épicycloïde,

$$S=\Sigma\text{Sin.}\,\frac{q\varphi}{\varpi}\;;$$

équation qui est précisément celle de la courbe vers laquelle tendent les développantes successives. Et, comme les considérations précédentes s'appliquent aux épycicloïdes intérieures, pourvu qu'on prenne $d\alpha$ et $d\beta$ de signes contraires; on voit facilement que leurs équations seront de même

$$S=\Sigma\text{Sin.}\,\frac{q\varphi}{\varpi}\;;$$

l'angle ϖ étant alors plus petit que q. Le théorème se trouve donc ainsi complètement démontré.

Paris, le 13 de juillet 1818.