VECTEN

Géométrie élémentaire. Recherches diverses de géométrie plane

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 9 (1818-1819), p. 293-305

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1818-1819__9__293_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Recherches diverses de géométrie plane;

Par M. Vecten, licencié ès sciences, ancien professeur de mathématiques spéciales.

Problème. Etant données les trois hauteurs d'un triangle; construire le triangle? (*)

Solution. Ce problème a été traité par M. Carnot dans sa *Géométrie de position* (pag. 371 et suiv., prob. XXXVI). On va voir qu'on peut en obtenir une solution beaucoup plus simple que la sienne.

Pour parvenir à cette solution, considérons les deux triangles ABC, *abc* (fig. 1), dont le premier est supposé le triangle inconnu qu'il s'agit de construire, au moyen de ses trois hauteurs connues AA′, BB′, CC′, tandis que l'autre est un triangle de dimensions arbitraires, supposé seulement semblable à celui-là; et dont les trois hauteurs sont *aa′*, *bb′*, *cc′*.

A cause de la similitude des deux triangles, et parce que, de plus, dans un même triangle, les hauteurs sont en raison inverse des bases, on aura

(*) Ce problème est un des 95 qui ont été proposés à la page 315 du VIII.e volume de ce recueil.

J. D. G.

$$AA' : CC' :: aa' : cc' :: ab : bc = ab \cdot \frac{CC'}{AA'} ,$$

$$BB' : CC' :: bb' : cc' :: ab : ac = ab \cdot \frac{CC'}{BB'} ;$$

or, les rapports $\frac{CC'}{AA'}$, $\frac{CC'}{BB'}$ sont connus; prenant donc arbitrairement le côté ab du triangle acb, on pourra, par des quatrièmes proportionnelles, déterminer les deux autres; ce triangle acb pourra donc être construit; et, par suite, on pourra construire ses trois hauteurs aa', bb', cc'; ces hauteurs, une fois connues, on déterminera les trois côtés du triangle ABC par ces proportions,

$$aa' : bc :: AA' : BC = AA' \cdot \frac{bc}{aa'} ,$$

$$bb' : ca :: BB' : CA = BB' \cdot \frac{ca}{bb'} ,$$

$$cc' : ab :: CC' : AB = CC' \cdot \frac{ab}{cc'} ;$$

le problème se trouvera donc ainsi complétement résolu (*).

(*) Soient a, a', a'' les trois hauteurs données, et x, x', x'' les trois côtés inconnus du triangle cherché. Nous aurons

$$ax = a'x' = a''x'' .$$

Avec ces trois hauteurs, prises comme côtés, soit construit un triangle $aa'a''$, dont les hauteurs soient b, b', b''; nous aurons encore

$$ab = a'b' = a''b'' .$$

Enfin, avec les trois hauteurs b, b', b'' de celui-ci, construisons-en un troisième $bb'b''$, dont les trois hauteurs soient c, c', c'', ce qui nous donnera

$$bc = b'c' = b''c'' ;$$

THÉORÈME. Soient A, A′, A″ *les trois sommets d'un triangle; et* AP, A′P′, A″P″ *ses trois hauteurs, se coupant, comme l'on sait, en un même point* C, *on aura cette suite de rapports égaux*

$$\frac{AA'.A'A''.A''A}{A'P''.AP.A'P'}=\frac{AC.A'C.A''C}{A''P'.AP''.A'P}=\frac{AC.A'C.A''C}{A'P''.A''P.AP'}.$$

Démonstration. Les triangles

APA′, APA″, A′P′A″, A′P′A, A″P″A; A″P″A′;

sont respectivement semblables aux triangles

En divisant l'une par l'autre, les deux premières suites d'égalités, on aura

$$\frac{x}{b}=\frac{x'}{b'}=\frac{x''}{b''};$$

le triangle $bb'b''$ est donc semblable au triangle $xx'x''$; ses hauteurs c, c', c'', doivent donc être proportionnelles aux hauteurs $aa'a''$ de celui-là, on doit donc avoir

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{c}, \quad \frac{x'}{a'}=\frac{b'}{c'}, \quad \frac{x''}{a''}=\frac{b''}{c''};$$

d'où

$$x=\frac{ab}{c}, \quad x'=\frac{a'b'}{c'}, \quad x''=\frac{a''b''}{c''},$$

ce qui fournit une construction assez élégante. Au surplus, la construction peut être réduite à ce qui suit :

Avec les trois hauteurs données, prises pour côtés, formez un triangle, dont vous menerez les trois hauteurs; avec ces trois nouvelles hauteurs, prises également pour côtés, formez un second triangle, dont vous menerez une seule hauteur quelconque; et prolongez-là au-dessous de la base, de manière qu'elle devienne égale à la hauteur correspondante du triangle cherché. En menant, par l'extrémité de ce prolongement, une parallèle à la base, elle formera, avec les deux autres côtés prolongés, le triangle demandé.

J. D. G.

$$AP''C\,,\quad AP'C\,,\quad A'PC\,,\quad A'P''C\,,\quad A''P'C\,,\quad A''PC\,,$$

(fig. 2) puisque les uns et les autres sont rectangles et ont de plus un angle commun ; on a donc

$$\frac{AA'}{AP}=\frac{AC}{AP''}\,,\quad \frac{A''A}{AP}=\frac{AC}{AP'}\,,\quad \frac{A'A''}{A'P'}=\frac{A'C}{A'P}\,,$$

$$\frac{AA'}{A'P'}=\frac{A'C}{A'P''}\,,\quad \frac{A''A}{A''P''}=\frac{A''C}{A''P'}\,,\quad \frac{A'A''}{A''P''}=\frac{A''C}{A''P}\,.$$

équations qui, étant multipliées membre à membre, donneront

$$\frac{\overline{AA'}^2.\overline{A'A''}^2.\overline{AA''}^2}{\overline{AP}^2.\overline{A'P'}^2.\overline{A''P''}^2}=\frac{\overline{AC}^2.\overline{A'C}^2.\overline{A''C}^2}{AP'.A'P''.A''P.A'P.A''P'.AP''}\,;$$

mais, d'après un théorème connu (Voyez, en particulier, la *Théorie des transversales* de M. Carnot), on a

$$AP'.A'P''.A''P=A'P.A''P'.AP''\,;$$

donc

$$\frac{\overline{AA'}^2.\overline{A'A''}^2.\overline{A''A}^2}{\overline{A''P''}^2.\overline{AP}^2.\overline{A'P'}^2}=\frac{\overline{AC}^2.\overline{A'C}^2.\overline{A''C}^2}{\overline{A'P''}^2.\overline{A''P}^2.\overline{A'P}^2}=\frac{\overline{AC}^2.\overline{A'C}^2.\overline{A''C}^2}{\overline{A''P'}^2.\overline{AP''}^2.\overline{A'P}^2}\,;$$

d'où, en extrayant la racine quarrée, on conclura le théorème énoncé.

THÉORÈME. Soit pris arbitrairement sur le plan d'un triangle ABC *un point* P, *par lequel soient menées les droites* AP, BP, CP, *dont les prolongemens rencontrent respectivement en* A′, B′, C′ *les directions* BC, CA, AD ; *soit formé le triangle* A′B′C′ *dont les côtés* B′C′, C′A′, A′B′, *sont coupés respectivement en* A″, B″, C″, *par* PA, PB, PC ; *soit formé le triangle* A″B″C″, *dont les côtés* B″C″, C″A″, A″B″, *sont coupés respectivement en* A‴, B‴, C‴, *par les droites* PA, PB, PC, *et ainsi de suite.*

1.° *Les droites* BC, B′C′, B″C″, B‴C‴, ... *concourront en un même point* a; *les droites* CA, C′A′, C″A″, C‴A‴, ... *concourront en un même point* b; *et les droites* AB, A′B′, A″B″, A‴, B‴, ... *concourront en un même point* c.

2.° *Les trois points de concours* a, b, c, *appartiendront à une même ligne droite.*

Démonstration. Par un théorème connu, si a, b, c sont respectivement les points de concours de BC et B′C′, de CA et C′A′, de AB et A′B′, ces trois points a, b, c seront en ligne droite. En outre, chacun des triangles de la série indéfinie ABC, A′B′C′, A″B″C″, A‴B‴C‴, ... se trouvant dépendre de la même manière de celui qui le précède, tout se réduira à prouver que B″C″ passe par a, C″A″ par b, et A″B″ par c; ou plutôt à démontrer simplement que B″C″ passe par a, puisque les trois côtés du triangle A″B″C″ se trouvent dans des circonstances absolument semblables.

Il s'agit simplement de prouver qu'une droite menée par B″ et par a (fig. 3) doit passer par A″. Pour y parvenir, remarquons que les deux droites CBa et B′C′a, qui se coupent en a, d'après l'hypothèse, forment, avec les deux droites BB′, C′A′, le quadrilatère complet B′C′aBA′B″B′, dont les trois diagonales sont B″a, BC′, A′B′; or, il est connu que l'une quelconque des diagonales d'un quadrilatère complet est coupée harmoniquement par les deux autres (Voyez la *Theorie des transversales* de M Carnot); donc le point de rencontre c de BC′ ou BA avec A′B′, et le point de rencontre du prolongement de aB″ avec la même droite A′B′, sont ceux où la diagonale A′B′ est divisée harmoniquement. Mais la figure AB′CA′BPA est aussi un quadrilatère complet, dont les trois diagonales sont A′B, A′B′, CP; par conséquent, la diagonale A′B′ est divisée harmoniquement aux points c et C″; donc la droite

aB″ doit passer par le point C″, et l'on démontrerait la même chose pour les deux autres (*).

THÉORÈME. Soit un quadrilatère complet dont les quatre côtés soient ABC′, BCA′, CAB′, A′B′C′, *et dont les trois diagonales soient conséquemment* AA′, BB′, CC′. *Soient de plus*, a *l'intersection de* BB′ *et* CC′, b *l'intersection de* CC′ *et* AA′, c *celle de* AA′ *et* BB′; *concevons, en outre, que les trois diagonales soient indéfiniment prolongées; et soit enfin une droite fixe et indéfinie* MN, *donnée arbitrairement sur le plan du quadrilatère.*

Par les deux extrémités de chacune des diagonales soient menées des parallèles à la droite fixe MN, *prolongées jusqu'à leur rencontre avec les deux autres diagonales.*

Chaque diagonale, les parallèles partant de ses deux extrémités et l'une quelconque des deux autres diagonales seront quatre droites dont l'ensemble formera un quadrilatère simple, dont on pourra mener les deux diagonales, lesquelles se couperont en un certain point.

(*) On peut aussi parvenir, assez simplement, à la démonstration de ce théorème à l'aide des considérations suivantes.

Soient considérés le triangle ABC comme la perspective d'un triangle équilatéral, et le P comme la perspective de son centre, ce qui est permis; les droites BC, B′C′, B″C″,.... seront des perspectives de droites parallèles, et devront conséquemment concourir en un même point a. Pour la même raison, les droites CA, C′A′, C″A″,.... concourent en un même point b; et les droites AB, A′B′, A″B″,..... concourent en un même point c.

Soient présentement considérés les deux triangles ABC, A″B″C″ comme les perspectives des deux bases d'un tronc de tétraèdre, à bases non parallèles; P étant la perspective de son sommet. Alors les points a, b, c seront les perspectives de ceux où les côtés de la base supérieure du tronc rencontrent leurs correspondans dans la base inférieure; ce sera donc les perspectives de trois points de l'intersection des plans des deux bases; et conséquemment ils devront être en ligne droite, comme ces trois points eux-mêmes.

J. D. G.

Or, comme chacune des trois diagonales AA′, BB′, CC′ *du quadrilatère complet, combinée tour-à-tour avec les deux autres, donnera naissance à deux de ces quadrilatères simples ; il arrivera qu'ils seront en tout au nombre de six.*

Cependant les intersections des diagonales de ces six quadrilatères simples ne seront qu'au nombre de trois seulement, c'est-à-dire, que pour les deux quadrilatères dont un côté sera segment d'une même diagonale et dont les côtés opposés seront les deux autres diagonales entières, les quatre diagonales se couperont au même point.

Soit x *le point commun d'intersection des quatre diagonales des deux quadrilatères simples qui, s'appuyant sur* AA′, *ont pour leurs côtés opposés* BB′, CC′.

Soit y *le point commun d'intersection des quatre diagonales des deux quadrilatères simples qui, s'appuyant sur* BB′, *ont pour leurs côtés opposés* CC′, AA′.

Soit enfin z *le point commun d'intersection des quatre diagonales des deux quadrilatères simples qui, s'appuyant sur* CC′, *ont pour leurs côtés opposés* AA′, BB′.

Si l'on mène les droites ax, by, cz, *elles seront parallèles entre elles et à la droite fixe* MN.

En outre, les points a, b, c *seront respectivement en ligne droite avec* y *et* z, z *et* x, x *et* y (*).

(*) M. Vecten aurait pu considérer aussi les trois quadrilatères simples que forme chaque couple de diagonales avec les parallèles à MN menées par les extrémités de la troisième.

Appelant x' l'intersection des diagonales de celui dont les côtés parallèles passent par A, A′; appelant y' l'intersection des diagonales de celui dont les côtés parallèles passent par B, B′, et appelant enfin z' l'intersection des deux diagonales de celui dont les côtés parallèles passent par CC′; il arrive que x', y', z' sont respectivement sur les droites yza, zxb, xyc.

M. Vecten aurait pu ajouter encore que tout ce qui précède ne cesse pas

Démonstration. On s'assurera facilement de la vérité de ce théorème en remarquant que la détermination de chacun des points x, y, z, du point x, par exemple, revient à celle que donne M. Brianchon, dans son *Mémoire sur les lignes du second ordre*, où il propose (Art. LIV) de *décrire une hyperbole qui touche quatre droites données*; *et qui ait l'une de ses asymptotes parallèle à une droite donnée de position*; car, si nous supposons que les quatre droites BC', CB', BC, BC' (fig. 4) soient les tangentes données à l'hyperbole cherchée, qui doit avoir en outre, une de ses asymptotes parallèle à la droite MN; la parallèle à cette dernière droite conduite par B, rencontrera la courbe cherchée en un point que nous représenterons par U, et qui sera situé à l'infini; on connaîtra donc quatre tangentes et un point de l'hyperbole cherchée; on pourra donc la construire d'après l'article LI de l'ouvrage cité. Pour cela, il faudra joindre le point a au point U, c'est-à-dire, mener par a une parallèle ax à MN, puis mener par B l'une des diagonales du quadrilatère simple qui, ayant BB' pour l'un de ses deux côtés non parallèles, a son opposé sur AA'; et le point x de rencontre de cette droite avec la première sera un des points de la courbe. Or, on aurait tout aussi bien pu mener l'autre diagonale du quadrilatère; et son intersection avec ax aurait été également un point de la courbe; or, cette cette courbe, ayant déjà un point U sur ax n'en saurait avoir deux autres sur cette droite; donc, l'autre diagonale doit également passer par le point x, qui est évidemment le milieu de la portion de la parallèle à MN conduite par a, interceptée entre AA' et BB'; ce qui démontre la première partie de

---

d'être vrai, lorsque les droites, au lieu d'être parallèles à une droite fixe MN, concourent en un point fixe quelconque.

Tout cela paraît pouvoir se démontrer facilement, au moyen de ce qui a été dit à la page 183 du VII.e volume de ce recueil.

J. D. G.

notre

notre théorème, et en même temps le théorème LIV de l'ouvrage de M. Brianchon. Il est clair, d'ailleurs, qu'on pourrait faire le même raisonnement sur l'intersection des deux diagonales du quadrilatère simple qui, ayant CC′ pour l'un de ses côtés, a aussi son opposé sur AA′, et qu'ainsi cette intersection doit se confondre avec le point x qui se trouve ainsi l'intersection des quatre diagonales de deux quadrilatères simples et d'une parallèle à MN conduite par a. On demontrerait évidemment des choses analogues des points y, z. Quant à la seconde partie du théorème, on voit que les trois points x, y, z appartenant avec le point U à la section conique qui touche à la fois les quatre droites B′C′, B′C, BC, CB′, il résulte de l'article XXIII de l'ouvrage cité que deux quelconques de ces trois points sont toujours en ligne droite avec un des trois points a, b, c.

THÉORÈME. Si l'on prolonge, dans un même sens, les trois côtés d'un triangle ABC, *des quantités* BC′, CA′, AB′, *respectivement égales aux côtés consécutifs* BC, CA, AB; *que l'on prolonge les mêmes côtés en sens inverse, des quantités* AC″, CB″, BA″ *respectivement égales aux côtés consécutifs* AC, CB, BA; *que l'on mène les six droites* AA′, BB′, CC′, AA″, BB″, CC″, *et qu'enfin on mène les trois droites* Aa, Bb, Cc *divisant les angles du triangle en deux parties égales, et se terminant en* a, b, c, *aux côtés opposés, on aura*

$$\frac{AA'.BB'.CC'}{Aa.Bb.Cc}=\frac{AA''BB''.CC''}{Aa.Bb.Cc}=\frac{BC+CA}{AB}\cdot\frac{CA+AB}{BC}\cdot\frac{AB+BC}{CA}\,.$$

Démonstration. Par la construction (fig. 5), les droites AA′, BB′, CC′ sont respectivement parallèles aux droites BB″, CC″, AA″; d'où il résulte que les triangles ACA′, BAB′, CBC′ sont respectivement semblables aux triangles BCB″, CAC″, ABA″, et qu'ainsi on a

$$\frac{AA'}{BB''}=\frac{CA}{BC}\,,\quad \frac{BB'}{CC''}=\frac{AB}{CA}\,,\quad \frac{CC'}{AA''}=\frac{BC}{AB}\,;$$

ce qui donne, en multipliant,

$$\frac{AA'.\,BB'.\,CC'}{AA''.BB''.CC''}=1\,,$$

ou

$$AA'.BB'.CC'=AA''.BB''.CC''\;;$$

et démontre ainsi la première partie de la double égalité ci-dessus.

Par la même construction, les droites Aa, Bb, Cc sont respectivement parallèles aux droites BB', CC', AA' ; d'où il résulte que les triangles CBB', BAA', ACC' sont respectivement semblables aux triangles CaA, BcC, AbB, et qu'ainsi on a

$$\frac{BB'}{Aa}=\frac{CB'}{CA}\,,\quad \frac{AA'}{Cc}=\frac{BA'}{BC}\,,\frac{CC'}{Bb}=\frac{AC'}{AB}\;;$$

ce qui donne, en multipliant

$$\frac{AA'.BB'.CC'}{Aa.Bb.Cc}=\frac{BA'.CB'.AC'}{AB.BC.CA}\,,$$

mais, d'après la construction, on a

$$BA'=BC+CA\;,\quad CB'=CA+AB\;,\quad AC'=AB+BC\;;$$

donc enfin

$$\frac{AA'.BB'.CC'}{Aa.Bb.Cc}=\frac{BC+CA}{AB}\cdot\frac{CA+AB}{BC}\cdot\frac{AB+BC}{CA}\;;$$

ce qui démontre la seconde partie de notre double égalité.

Soient B, B', B'', respectivement, les points où les côtés $A'A''$, $A''A$, AA' d'un triangle $AA'A''$ sont rencontrés par les droites qui, partant de ses sommets, divisent ses angles en deux parties égales. Suivant un théorème connu (Voyez la *Géométrie* de M. LEGENDRE), on aura

$$AA'.AA''=\overline{AB}^2+A'B.A''B\ ;$$

on aura de plus, par un autre théorème connu,

$$AA':AA''::A'B:A''B\ ,$$

et par suite

$$AA'+AA'':A'B+A''B::AA':A'B::AA'':A''B\ ;$$

ou

$$AA'+AA'':A'A''::AA':A'B::AA'':A''B$$

de cette double proportion on tirera

$$A'B=\frac{AA'.A'A''}{AA'+AA''}\ ,\qquad A''B=\frac{AA''.A'A''}{AA'+AA''}\ ;$$

substituant ces deux valeurs dans la première équation ci-dessus on en tirera

$$\overline{AB}^2=AA'.AA''-\frac{AA'.AA''.\overline{A'A''}^2}{(AA'+AA'')^2}\ ;$$

ou encore

$$\overline{AB}^2=AA'.AA''.\frac{(AA'+AA'')^2-\overline{A'A''}^2}{(AA'+AA'')^2}$$

$$=AA'.AA''.\frac{(AA'+AA''+A'A'')(AA'+AA''-A'A'')}{(AA'+AA'')^2}\ .$$

Cela posé, désignons simplement par c, c', c'' les trois côtés d'un triangle et par d, d', d'' les droites qui, divisant ses angles en deux parties égales, se terminent aux côtés opposés; nous aurons, par ce qui précède

$$d^2=c'c''.\frac{(c+c'+c'')(c'+c''-c)}{(c'+c'')^2}\ ,$$

$$d'^2=c''c.\frac{(c+c'+c'')(c''+c-c')}{(c''+c)^2}\ ,$$

$$d''^2=cc'.\frac{(c+c'+c'')(c+c-c'')}{(c+c')^2}\ ;$$

prenant donc la racine quarrée du produit de ces trois équations, il viendra

$$\frac{dd'd''}{cc'c''}=\frac{c+c'+c'')\sqrt{(c+c'+c'')(c'+c''-c)(c''+c-c')(c+c'-c'')}}{(c'+c'')(c''+c)(c+c')}\ ; \qquad (1)$$

équation qui donne, sous une forme élégante, le produit des droites qui divisent les angles d'un triangle en deux parties égales, en fonction des côtés de ce triangle.

On peut simplier cette équation en remarquant que le radical du second membre est le quadruple de l'aire du triangle. En représentant ainsi cette aire par T, il vient

$$\frac{dd'd''}{cc'c''}=\frac{4(c+c'+c'')T}{(c'+c'')(c''+c)(c+c')}\ . \qquad (2)$$

On peut, dans cette dernière expression, introduire le rayon du cercle circonscrit; on sait, en effet, qu'en représentant ce rayon par R, on a $cc'c''=4TR$, ce qui donne, en substituant,

$$dd'd''=\frac{16(c+c'+c'')RT^2}{(c'+c'')(c''+c)(c+c')}\ . \qquad (3)$$

Si l'on veut y introduire, au contraire, le rayon du cercle inscrit, en le désignant par r, il suffira de se rappeler que $2T=r(c+c'+c'')$, ce qui donnera

$$dd'd''=\frac{32RT^3}{r(c'+c'')(c''+c)(c+c')} \; ; \qquad (4)$$

Si l'on désigne par p, p', p'' les trois hauteurs du triangle, on aura

$$2T=cp \;, \quad 2T=c'p' \;, \quad 2T=c''p'' \;,$$

d'où

$$8T^3=cc'c''pp'p''=4pp'p''TR \;;$$

substituant donc, dans la dernière expression, elle deviendra

$$dd'd''=\frac{16pp'p''TR^2}{r(c'+c'')(c''+c)(c+c')} \; . \qquad (5)$$

En comparant cette dernière formule à la formule (3), on en déduit

$$(c+c'+c'')r \;, \quad T=pp'p''R \;;$$

et par suite

$$2T^2=Rpp'p'' \;; \qquad (6)$$

relation remarquable par sa simplicité.

Il est d'ailleurs connu qu'en désignant par r, r', r'', r''' les rayons des quatre cercles qui touchent à la fois les trois côtés du triangle, on a $rr'r''r'''=T^2$; substituant donc, dans cette dernière formule, elle deviendra

$$2rr'r''r'''=pp'p''R \;; \qquad (7)$$

formule également digne d'être remarquée.