ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉGIER

Démonstration du théorème d'analise indéterminée énoncé à la page 228 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 9 (1818-1819), p. 285-288
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1818-1819__9__285_0>

Démonstration du théorème d'analise indéterminée énoncé à la page 228 de ce volume ;

Par M. Frégier, professeur de mathématiques au collége de Troye, ancien élève de l'école polytechnique.

THÉORÈME. Toute puissance paire d'un nombre impair, diminué d'une unité, est toujours divisible par une puissance de deux supérieure de deux unités à celle qui divise son exposant.

Démonstration. Tout se réduit évidemment à démontrer que, quels que soient d'ailleurs les trois nombres entiers positifs a, k, n, l'expression

$$\frac{(1+2a)^{2^n.k}-1}{2^{n+2}}$$

est toujours un nombre entier.

D'abord, comme on a

$$(1+2a)^{2^n.k}=\{(1+2a)^k\}^{2^n},$$

et comme d'ailleurs $(1+2a)^k$ est nécessairement un nombre impair, que l'on peut représenter par $1+2A$; tout se réduit à démontrer que l'expression

$$\frac{(1+2A)^{2^n}-1}{2^{n+2}}$$

est un nombre entier.

On a, en second lieu,

$$(1+2A)^{2^n}=\{(1+2A)^2\}^{2^{n-1}}\ ;$$

mais

$$(1+2A)^2=1+4A+4A^2=1+4A(1+A)\ ;$$

et comme, quel que soit A, $A(1+A)$ est nécessairement un nombre pair, que l'on peut représenter par $2B$, on aura

$$(1+2A)^2=1+8B\ ,$$

et, par suite

$$(1+2A)^{2^n}=(1+8B)^{2^{n-1}}\ ;$$

tout se réduit donc à démontrer que la formule

$$\frac{(1+8B)^{2^{n-1}}-1}{2^{n+2}}$$

est un nombre entier.

Cela est d'abord évident, pour le cas où $n=1$; puisqu'alors elle se réduit à B. On trouve de plus

$$(1+8B)^2=1+16B+64B^2=1+16B(1+4B)\ ,$$

que l'on peut représenter par $1+16B'$

$$(1+8B)^4=(1+16B')^2=1+32B'+256B'^2=1+32B'(1+8B')\ ,$$

que l'on peut représenter par $1+32B''$, et ainsi de suite, ce qui est déjà conforme à l'énoncé du théorème. Or, si, en général, suivant cet énoncé, on a

$$(1+8B)^{2^{k-1}}=1+2^{k+2}G\ ,$$

on aura

$$(1+8B)^{2^k}=(1+2^{k+2}G)^2\ ,$$

ou

$$(1+8B)^{2^k}=1+2^{k+3}G+2^{2k+4}G^2$$

ou encore

$$(1+8B)^{2^k}=1+2^{k+3}G(1+2^{k+1}G)$$

quantité de la forme $1+2^{k+3}G'$. Il demeure donc établi que, si la puisssance 2^{k-1} de $1+8B$, diminuée d'une unité, est divisible par 2^{k+2}, sa puissance 2^k, diminuée également d'une unité, le sera par 2^{k+3}, puis donc que ces puissances 2^0, 2^1, 2^2, diminuées d'une unité, le sont respectivement par 2^3, 2^4, 2^5, il s'ensuit que sa puissance du degré 2^{n-1}, diminuée d'une unité, le sera par 2^{n+2}; l'expression

$$\frac{(1+8B)^{2^{n-1}}-1}{2^{n+2}}$$

est donc un nombre entier; l'expression

$$\frac{(1+2A)^{2^n}-1}{2^{n+2}}$$

en sera donc un aussi, et, conséquemment, il en sera de même de

$$\frac{(1+2a)^{2^n.k}-1}{2^{n+2}}\ ;$$

le théorème est donc démontré en toute rigueur.

Soient les deux formules

$$\frac{(1+2a)^{2^p.g}-1}{2^{p+2}}\ ,\qquad \frac{(1+2b)^{2^q h}-1}{2^{q+2}}\ ,$$

elles seront l'une et l'autre des nombres entiers, par ce qui précède. Si p n'est pas moindre que q, à plus forte raison la formule

$$\frac{(1+2a)^{2^p g}-1}{2^{q+2}}$$

sera aussi un nombre entier, d'où il suit que sa différence avec la seconde des deux ci-dessus sera également un nombre entier. Ainsi, la formule

$$\frac{(1+2a)^{2^p.g}-(1+2b)^{2^q h}}{2^{q+2}},$$

dans laquelle on suppose $p>q-1$ est nécessairement un nombre entier; et l'on prouverait évidemment la même chose de la formule

$$\frac{(1+2a)^{2^p g}-(1+2b)^{2^q h}}{2^{p+2}},$$

dans laquelle on aurait $q>p-1$.

Si l'on suppose $p=q=1$, on aura la formule

$$\frac{[(1+2a)^g]^2-[(1+2b)^h]^2}{8},$$

ou, plus simplement, la formule

$$\frac{(1+2A)^2-(1+2B)^2}{8},$$

qui devra être un nombre entier; c'est-à-dire, que *la différence de deux quarrés impairs est toujours divisible par huit.*

Donc, *la somme de deux nombres impairs multipliés par leur différence donne un produit divisible par huit;* d'où il suit encore que *la somme ou la différence de deux nombres impairs doit nécessairement être divisible par quatre* (*).

(*) Cette vérité s'aperçoit immédiatement en observant que tout nombre impair est compris dans la double formule $4n\pm1$; ou, ce qui revient au même, que tout nombre impair, augmenté ou diminué d'une unité, devient divisible par quatre.

J. D. G.