GERGONNE

Géométrie élémentaire. Démonstration de quelques propriétés de l'angle plan, du triangle, de l'angle trièdre et du tétraèdre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 9 (1818-1819), p. 271-276
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1818-1819__9__271_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration de quelques propriétés de l'angle plan, du triangle, de l'angle trièdre et du tétraèdre;

Par un ABONNÉ.
GERGONNE

DANS ce qui va suivre, nous adopterons les idées de Bertrand de Genève, sur la nature de l'angle; c'est-à-dire, que nous considérerons l'angle plan comme la portion indéfinie du plan où il est tracé comprise entre ses côtés; et l'angle dièdre ou trièdre comme la portion indéfinie de l'espace comprise entre ses faces. Nous dirons, en conséquence, qu'une droite tracée sur un plan le divise en deux parties égales, qu'un plan tracé dans l'espace le divise aussi en deux parties égales, que tout plan vaut quatre angles droits plans, et que l'espace vaut quatre angles droits dièdres ou huit angles droits trièdres.

I. Soient A, B les deux côtés d'un angle plan que nous désignerons par (AB); soient $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ les prolongemens de ces côtes au-delà du sommet de l'angle; désignons par $(\mathfrak{p}\mathfrak{q})$ l'angle de ces prolongemens, et par $(A\mathfrak{q})$, $(\mathfrak{p}B)$ les angles formés par chaque côté avec le prolongement de l'autre.

Parce que chacune des deux droites $A\mathfrak{p}$, $B\mathfrak{q}$ divise le plan où elle est tracée en deux parties égales, on aura

$$(AB)+(\gamma B)=(\gamma g)+(Ag)\ ,$$

$$(AB)+(Ag)=(\gamma g)+(\gamma B)\ ;$$

prenant successivement la demi-somme et la demi-différence de ces deux équations, il viendra, en réduisant,

$$(AB)=(\gamma g)\ ,\qquad (Ag)=(\gamma B)\ ;$$

c'est-à-dire, *deux droites qui se coupent sur un plan forment des angles opposés par le sommet, égaux entre eux.* C'est la XV.^e proposition d'EUCLIDE, de laquelle on peut facilement conclure que *deux plans qui se coupent dans l'espace forment des angles opposés par l'arète, égaux entre eux.*

II. Soient trois droites indéfinies, tracées sur un même plan, et se coupant deux à deux; elles diviseront ce plan en *sept* régions; dont une seule limitée et triangulaire, que nous désignerons par T; trois autres seront les opposés au sommet des trois angles du triangle, nous les désignerons par A, B, C; enfin, les trois derniers seront les espaces indéfinis compris entre chaque côté du triangle et les prolongemens des deux autres; nous les représenterons par A', B', C', respectivement opposés à A, B, C.

Exprimant que les angles opposés au sommet sont égaux, nous aurons d'abord

$$A=A'+T\ ,$$

$$B=B'+T\ ,$$

$$C=C'+T\ ;$$

d'où, en ajoutant,

$$A+B+C=A'+B'+C'+3T\ ;$$

représentant ensuite par Δ l'angle droit plan ; et exprimant que tout le plan en vaut quatre, nous aurons

$$A+B+C+A'+B'+C'+T=4\Delta\ ;$$

prenant la demi-somme de ces deux équations et transposant, il viendra, en réduisant et divisant par Δ,

$$\frac{A}{\Delta}+\frac{B}{\Delta}+\frac{C}{\Delta}=2+\frac{T}{\Delta}\ .$$

mais la fraction $\frac{T}{\Delta}$ dont le numérateur seul est fini, peut être négligée vis-à-vis du nombre entier 2 ; en la supprimant donc et chassant le dénominateur Δ, il viendra finalement

$$A+B+C=2\Delta\ ;$$

c'est-à-dire, *la somme des trois angles de tout triangle vaut deux angles droits.* C'est la XXXII.ᵉ proposition d'EUCLIDE.

III. Soient A, B, C les trois arètes d'un même angle trièdre T, dont les angles dièdres soient respectivement désignés par (A), (B), (C). Soient désignés par $\forall$, ꓭ, Ɔ les prolongements de ces arètes au-delà du sommet de l'angle. Les trois droites $A\forall$, $B\text{ꓭ}$, $C\text{Ɔ}$, seront les arètes de huit angles trièdres que nous désignerons, d'après leurs arètes, par

$$(ABC)\ ,\quad (AB\text{Ɔ})\ ,\quad (A\text{ꓭ}C)\ ,\quad (\forall BC)\ ,$$

$$(\forall\text{ꓭƆ})\ ,\quad (\forall\text{ꓭ}C)\ ,\quad (\forall B\text{Ɔ})\ ,\quad (A\text{ꓭƆ})\ ;$$

et qui seront tels que ceux de la seconde ligne seront les opposés au sommet de leurs correspondans dans la première, et leur seront conséquemment égaux par ce qui précède ; de sorte qu'on aura

$$(ABC)=(\text{ꓯꓭꓛ}), \quad (A\text{ꓭ}C)=(\text{ꓯ}B\text{ꓛ}),$$

$$(AB\text{ꓛ})=(\text{ꓯꓭ}C), \quad (\text{ꓯ}BC)=(A\text{ꓭꓛ}).$$

Présentement, chacun de nos trois angles dièdres (A), (B), (C), considéré comme indéfini, se trouvant composé de deux angles trièdres, on doit avoir, en ayant égard aux relations ci-dessus,

$$(ABC)+(\text{ꓯ}BC)=(A),$$

$$(ABC)+(A\text{ꓭ}C)=(B),$$

$$(ABC)+(AB\text{ꓛ}) \quad \text{ou} \quad (ABC)+(\text{ꓯꓭ}C)=(C);$$

d'où, en ajoutant,

$$2(ABC)+(ABC)+(\text{ꓯ}BC)+(A\text{ꓭ}C)+(\text{ꓯꓭ}C)=(A)+(B)+(C);$$

mais, la somme des angles trièdres de même sommet situés d'un même côté d'un plan devant valoir quatre angles droits trièdres; on aura, en représentant l'angle droit trièdre par Δ

$$(ABC)+(\text{ꓯ}BC)+(A\text{ꓭ}C)+(\text{ꓯꓭ}C)=4\Delta,$$

retranchant cette équation de la précédente, il viendra en divisant par 2Δ

$$\frac{(ABC)}{\Delta}=\frac{(A)}{2\Delta}+\frac{(B)}{2\Delta}+\frac{(C)}{2\Delta}-2.$$

Si l'on représente par D l'angle droit dièdre, on aura $2\Delta=D$, et par conséquent

$$\frac{(ABC)}{\Delta}=\frac{(A)}{D}+\frac{(B)}{D}+\frac{(C)}{D}-2;$$

c'est à-dire, en prenant respectivement les angles droits dièdre et trièdre pour mesures des angles dièdres et trièdres, *un angle trièdre quelconque a pour mesure la somme de ses trois angles dièdres diminuée de deux unités :* C'est le théorème de CAVALLERI, sur la mesure du triangle sphérique.

IV. Soit présentement $ABCD$ un tétraèdre quelconque. Désignons par (A), (B), (C), (D) les rapports de ses angles trièdres à l'angle droit trièdre, et par (AB), (AC), (BC), (AD), (BD), (CD) les rapports de ses angles dièdres à l'angle dièdre droit ; nous aurons, par ce qui précède,

$$(A)=(AB)+(AC)+(AD)-2\ ;$$

$$(B)=(AB)+(BC)+(BD)-2\ ,$$

$$(C)=(AC)+(BC)+(CD)-2\ ,$$

$$(D)=(AD)+(BD)+(CD)-2\ .$$

En ajoutant d'abord toutes ces équations et transposant, nous aurons

$$2\{(AB)+(AC)+(BC)+(AD)+(BD)+(CD)\}-(A)-(B)-(C)-(D)=8\ ;$$

c'est-à-dire, *la somme des angles dièdres d'un tétraèdre, moins la somme de ses angles trièdres vaut huit angles droits trièdres, ou l'espace entier.*

Si l'on ajoute seulement les trois premières équations, il viendra, en transposant,

$$2[(AB)+(AC)+(BC)]-(A)-(B)-(C)=6-(AD)-(BD)-(CD)\ ;$$

c'est-à-dire, *l'excès de six angles droits trièdres ou des trois quarts de l'espace sur la somme des trois angles dièdres d'un même* *angle d'un tétraèdre est égal à l'excès du double de la somme des trois angles dièdres adjacens à la face opposée sur les angles trièdres de la même face.*

Si l'on prend seulement la somme des deux premières, il viendra

$$2(AB)-(A)-(B)=4-(AC)-(AD)-(BC)-(BD) \;;$$

c'est-à-dire, *le double de l'excès de l'un des angles dièdres d'un tétraèdre sur les deux angles trièdres adjacens est égal à l'excès de huit angles droits trièdres ou de l'espace entier sur la somme des quatre angles dièdres adjacens à celui-là.*

Si de la somme des trois premières on retranche le triple de la dernière, il viendra

$$(A)+(B)+(C)-3(D)=2\{(AB)+(AC)+(BC)-(AD)-(BD)-(CD)\} \;;$$

c'est-à-dire, *l'excès de la somme de trois des angles trièdres d'un tétraèdre sur le triple du quatrième est égal à l'excès de la somme des trois angles dièdres adjacens à la face opposée à ce dernier sur la somme des trois autres.*

Si de la somme des deux premières on retranche celle des deux dernières, il viendra

$$2[(AB)-(CD)]=(A)+(B)-(C)-(D) \;;$$

c'est-à-dire, *la différence entre deux angles dièdres opposés d'un tétraèdre est égale à l'excès de la somme des deux angles trièdres adjacens au premier sur la somme des deux angles trièdres adjacens au dernier.*

La plupart de ces propositions ont été démontrées par l'abbé DE GUA, dans les *Mémoires de l'académie royale des sciences de Paris*, pour 1783; on pourrait en augmenter indéfiniment le nombre; mais toutes celles qu'on obtiendrait se trouvent implicitement comprises dans les quatre équations fondamentales d'où nous avons déduit celles que nous venons d'énoncer.

QUESTIONS