ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉGIER

Géométrie analitique. Théorèmes nouveaux, sur les lignes et surfaces de tous les ordres

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 9 (1818-1819), p. 241-260

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1818-1819__9__241_0>

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Théorèmes nouveaux, sur les lignes et surfaces de tous les ordres ;

Par M. Frégier, professeur de mathématiques au collége de Troyes, ancien élève de l'école polytechnique.

J'ai démontré aux pages 229 et 321 du VI.e volume de ce recueil, et à la page 95 du VII.e, quatre théorèmes assez remarquables sur les lignes et surfaces du second ordre. J'avais dès-lors entrevu que ces théorèmes avaient leurs analogues dans les lignes et surfaces des ordres supérieurs : ce sont ces derniers dont je vais m'occuper ici.

THÉORÈME I. « Soit une ligne quelconque de l'ordre m et » une ligne du second ordre, ayant son centre en un quelconque » des points du périmètre de la première. Soient menés à cette ligne » du second ordre deux diamètres conjugués, dont l'un soit tangent » à la ligne de l'ordre m ; ce dernier coupera cette courbe en » $m-2$ points. Par chacun de ces points, concevons une parallèle » au conjugué de ce diamètre, chacune de ces parallèles pouvant » couper la ligne de l'ordre m en $m-1$ nouveaux points, elles » auront avec cette ligne $(m-1)(m-2)$ points d'intersection fixes, » non situés sur la tangente.

» Cela posé, soient menés à la ligne du second ordre deux nouveaux
» diamètres conjugés quelconques, chacun d'eux aura, avec la ligne
» de l'ordre m, outre le centre de celle du second ordre $m-1$,
» points d'intersection ; ce qui fera, pour les deux $2(m-1)$ nou-
» veaux points, variables avec la direction des diamètres conjugués
» arbitraires.

» On aura donc en tout, sur la ligne de l'ordre m, $(m-1)(m-2)$
» $+2(m-1)$ ou $m(m-1)$ points, dont $(m-1)(m-2)$ fixes et
» $2(m-1)$ variables.

» Or, bien qu'une ligne de l'ordre $m-1$ se trouve complètement
» déterminée par $\frac{1}{2}(m-1)(m+2)$ points seulement de son périmètre,
» il arrivera néanmoins que les $m(m-1)$ points dont il s'agit, soit
» réels, soit imaginaires, se trouveront constamment appartenir à
» une ligne de cet ordre. En outre, cette ligne variable de l'ordre
» $m-1$, qui ne passera pas par le point pris arbitrairement sur
» la ligne de l'ordre m, coupera constamment le conjugué du dia-
» mètre tangent à cette dernière ligne en ce point, aux $m-1$
» mêmes points ; de sorte que toutes les lignes de l'ordre $m-1$ qui
» pourront naître ainsi des changemens de direction des diamètres
» conjugués de celle du second, passeront constamment par un
» même nombre $(m-1)(m-2)+(m-1)$ ou $(m-1)^2$ de points fixes.

» Et, attendu que deux lignes de cet ordre ne sauraient se
» couper en un plus grand nombre de points, ces lignes n'auront
» aucune autre intersection que ces points fixes eux-mêmes ».

Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'une ligne du 3.^{e} ordre, le diamètre tangent la coupera en un seul point, par lequel menant une parallèle à son conjugué, cette parallèle déterminera deux nouveaux points fixes sur la courbe. les deux diamètres conjugués arbitraires en détermineront quatre autres variables et ces six points, quelles que soient d'ailleurs les directions des deux derniers diamètres, appartiendront constamment à une ligne du second ordre, ne passant pas par le point de contact de la tangente, mais coupant constamment cette tangente aux deux mêmes points qui, joints aux deux points fixes de la ligne du 3.e ordre seront les quatre points communs à toutes les lignes du second ordre auxquelles les changemens de direction des diamètres conjugués arbitraires pourront donner naissance.

Démonstration. Soient pris pour origine le centre de la ligne du second ordre, pour axe des x le diamètre de cette courbe tangent à la ligne de l'ordre m, et pour axe des y le conjugué de ce diamètre.

Pour que l'axe des x soit une tangente à une courbe ayant son point de contact à l'origine, il est nécessaire et il suffit que l'équation de cette courbe ne renferme ni le terme tout connu ni le terme du premier degré en x; afin qu'en y posant $y=0$, elle devienne divisible par x^2. Ainsi, d'après les conventions énoncées ci-dessus, l'équation de notre ligne de l'ordre m ne saurait être que de la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{r} ax^m \\ +(a'+b'y)x^{m-1} \\ +(a''+b''y+c''y^2)x^{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(p''+q''y+r''y^2+\ldots+t''y^{m-2})x^2 \\ +(q'y+r'y^2+s'y^3+\ldots\ldots+u'y^{m-1})x \\ +(y+ry^2+sy^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+vy^m) \end{array}\right\}=0\,; \qquad (1)$$

En y faisant $y=0$, et divisant par x^2 l'équation résultante

$$ax^{m-2}+a'x^{m-3}+a''x^{m-4}+\ldots\ldots+p''=0 \qquad (2)$$

sera celle des parallèles menées à l'axe des y, par les $m-2$ points où la tangente à l'origine, c'est-à-dire, l'axe des x, coupe la courbe (1).

Si présentement on mène à la ligne du second ordre deux diamètres conjugués quelconques, les équations de ces diamètres seront de la forme

$$x-gy=0\ ,\qquad x-hy=0\ ;\qquad\qquad (3)$$

g, h étant deux nombres arbitraires, dépendant des directions de ces diamètres, mais liés entre eux par la condition

$$gh=k\ ,\qquad\qquad (4)$$

dans laquelle le nombre constant k ne dépend uniquement que des dimensions de la ligne du second ordre, et de sa situation par rapport aux axes des coordonnées.

Si l'on prend le produit des équations (3), en ayant égard à la condition (4), on obtiendra, pour l'équation du système de deux diamètres conjugués quelconques

$$x^2-(g+h)xy+ky^2=0\ .\qquad\qquad (5)$$

Si ensuite on multiplie l'équation (2) par cette dernière, il viendra pour l'équation du système tant des diamètres conjugués que des parallèles à l'axe des y menées par les $m-2$ points ou l'axe des x coupe la courbe (1)

$$ax^m+a'x^{m-1}+a''x^{m-2}+\ldots\ldots+p''$$

$$-(a^{m-2}+a'x^{m-3}+a''x^{m-4}+\ldots\ldots+p'')[(g+h)xy-ky^2]=0.\qquad (6)$$

Si présentement on veut savoir en quels points le système de droites exprimé par l'équation (6), coupe la courbe exprimée par l'équation (1); il faudra considérer ces deux équations comme celles du même problème déterminé en x, y. Mais, il est clair que, dans cette recherche, il sera permis de substituer à l'une ou à l'autre des équations (1, 6) une combinaison quelconque de ces deux équations

équations ; on pourra donc, en particulier, remplacer l'équation (1) par sa différence avec l'équation (6), laquelle étant divisée par y, ce qui revient à en ôter l'équation de l'axe des x, devient

$$\left.\begin{array}{r}b'x^{m-1}\\ +(b''+c''y)x^{m-2}\\ +(b''+c''y+d''y^2)x^{m-3}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +(q''+r''y+\ldots\ldots+t''y^{m-3})x^2\\ +(q'+r'y+s'y^2+\ldots+u'y^{m-2})x\\ +(1+ry+sy^2+\ldots\ldots+vy^{m-1})\\ +(ax^{m-2}+a'x^{m-3}+a''x^{m-4}+\ldots+p'')[(g+h)x-ky]\end{array}\right\}=0. \qquad (7)$$

Cette équation est donc celle d'une courbe qui est coupée par le système des droites (6) aux mêmes points où ces droites coupent la courbe (1) ; or, cette courbe est du degré $m-1$, quels que soient g, h ; ainsi la première partie du théorème se trouve démontrée. Il est d'ailleurs évident que la courbe (7) ne passe point par l'origine.

Si, dans la vue de savoir où cette courbe est coupée par l'axe des y, c'est-à-dire, par le conjugué du diamètre tangent à l'origine, on fait, dans son équation, $x=0$; elle deviendra

$$vy^{m-1}+\ldots\ldots\ldots+sy^2+(r-p''k)y+1=0, \qquad (8)$$

équation qui fera connaître les ordonnées des intersections demandées; mais, puisque cette équation est indépendante de g, h, ces $m-1$ points d'intersection seront toujours les mêmes, quelles que soient les directions des deux diamètres conjugués donnés par les équations (3), ce qui démontre la seconde partie du théorème.

Remarque. Supposons présentement que les axes des coordonnées soient rectangulaires; c'est-à-dire, supposons que le diamètre de la ligne du second ordre tangent à l'origine à la courbe (1) en soit un des diamètres principaux; alors l'axe des y sera une normale à cette courbe (1) et contiendra conséquemment son centre de courbure répondant à l'origine; soit R le rayon de courbure pour ce point; il est facile de se convaincre qu'on aura

$$R=-\frac{1}{2p''}. \text{ (*)} \qquad (9)$$

Supposons présentement que l'on ait $m=3$, l'équation (8) deviendra

$$p'''x^3+(p''+q''y)x^2+(q'y+r'y^2)x+(y+ry^2+sy^3)=0\,; \qquad (10)$$

on trouvera les intersections de la courbe proposée avec l'axe des y, en faisant, dans cette équation $x=0$, ce qui donnera, en divisant par y,

$$sy^2+ry+1=0\,; \qquad (11)$$

de sorte qu'en désignant par Y, Y' les distances de ces intersections à l'origine, on aura

$$sY^2+rY+1=0\,;$$

$$sY'^2+rY'+1=0\,;$$

d'où on tirera

$$s=\frac{1}{YY'}\,, \quad r=-\frac{Y+Y'}{YY'}\,. \qquad (12)$$

d'un autre côté l'équation (7) devient, dans la même hypothèse,

---

(*) Voyez sur cela la page 154 du présent volume.

$$q''x^2+(q'+r'y)x+(1+ry+sy^2)+(p'''x+p'')[(g+h)x-ky]=0\ ;$$

en y faisant $x=0$, l'équation (8) se trouve remplacée par celle-ci

$$sy^2+(r-p''k)y+1=0\ ;$$

si nous supposons de plus que la ligne du second ordre qui a son centre à l'origine soit un cercle, nous aurons $k=-1$, ce qui réduira cette dernière équation à

$$sy^2+(r+p'')y+1=0\ ; \qquad (13)$$

mais la formule (9) donne $p''=-\frac{1}{2R}$; substituant donc cette valeur, ainsi que les valeurs (12) de s et r, dans l'équation (13), elle deviendra

$$2Ry^2-\{2R(Y+Y')+YY'\}y+2RYY'=0\ ;$$

d'où

$$R=\frac{y}{2}\cdot\frac{Y}{Y-y}\cdot\frac{Y'}{Y'-y}\ ; \qquad (14)$$

formule qui va nous fournir, pour la construction du rayon de courbure, en un quelconque des points d'une ligne du troisième ordre, un procédé tout-à-fait analogue à celui que nous avons déjà indiqué pour celles du second, à la page 232 du VI.e volume de ce recueil : voici en quoi il consiste.

On menera d'abord la tangente et la normale au point dont il s'agit ; la normale coupera la courbe en deux nouveaux points dont on prendra les distances au point de contact de la tangente pour Y, Y'.

La tangente coupera la courbe en un point par lequel on menera à la normale une parallèle qui, par sa rencontre avec la courbe, déterminera *deux points* sur son périmètre. On menera aussi, par le point de contact, deux droites arbitraires et indéfinies, perpendiculaires entre elles déterminant, par leurs intersections avec la courbe, *quatre* nouveaux points sur son périmètre.

Par cinq de ces *six points* on fera passer une ligne du second ordre, laquelle passera aussi par le sixième, et coupera la normale en deux points. la distance de l'un ou de l'autre de ces deux points au point de contact pourra être prise pour y.

Tout sera alors connu dans la formule (14) qu'il ne sera plus question que de construire.

THÉORÈME II. « Par un quelconque des points d'une ligne » quelconque de l'ordre m, soit fait passer deux droites l'une » tangente et l'autre non tangente et de direction arbitraire mais » fixe ; la première coupera de nouveau la courbe en $m-2$ points, » par chacun desquels menant une parallèle à la droite non tan- » gente, cette parallèle déterminera, par sa rencontre avec la » courbe, $m-1$ points sur son périmètre ; de sorte qu'on aura sur » cette courbe $(m-1)(m-2)$ nouveaux points fixes, non situés sur » sa tangente.

» Soit construit ensuite arbitrairement un triangle dont le sommet » soit au point de contact, dont la base soit parallèle à la tangente, » et qui ait le milieu de cette base situé sur la droite non tangente ; » ses deux autres côtés, considérés comme droites indéfinies, déter- » mineront sur la courbe $2(m-1)$ points de son périmètre, variables, » comme le triangle arbitraire qui aura servi à leur détermination.

» On se trouvera donc avoir en tout, hors de la tangente, » $(m-1)(m-2)+2(m-1)$ ou $m(m-1)$ points de la courbe, dont » $(m-1)(m-2)$ fixes et $2(m-1)$ variables.

» Or, bien qu'une ligne de l'ordre $m-1$ se trouve complètement » déterminée par $\frac{1}{2}(m-1)(m+2)$ points de son périmètre, il arri- » vera néanmoins que les $m(m-1)$ points dont il s'agit, soit » réels, soit imaginaires, se trouveront constamment appartenir

» à une ligne de cet ordre. En outre, cette ligne variable de l'ordre » $m-1$, qui ne passera pas par le point de contact, coupera la » tangente en $m-1$ points fixes ; de sorte que toutes les lignes » de l'ordre $m-1$ qui pourront naître du changement de grandeur » et de dimensions du triangle arbitraire, passeront constamment » par un même nombre $(m-1)(m-2)+(m-1)$ ou $(m-1)^2$ de » points fixes.

» Et, attendu que deux lignes de cet ordre ne sauraient se » couper en un plus grand nombre de points ; ces lignes n'auront » aucune autre intersection que ces points fixes eux-mêmes. »

Démonstration. Ce théorème ayant beaucoup d'analogie avec le précédent, se démontre d'une manière à peu près semblable.

D'abord, en prenant respectivement les deux droites tangente et non tangente pour axes des x et des y ; pour les mêmes raisons que ci-dessus, on pourra prendre pour équation de la courbe proposée l'équation (1), c'est-à-dire,

$$\left.\begin{array}{r} ax^m \\ +(a'+b'y)x^{m-1} \\ +(a''+b''y+c''y^2)x^{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(p''+q''y+r''y^2+\ldots\ldots+t''y^{m-2})x^2 \\ +(q'y+r'y^2+s'y^3+\ldots\ldots+u'y^{m-1})x \\ +(y+ry^2+sy^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+vy^m) \end{array}\right\} = 0 \; ; \qquad (1)$$

Cette courbe coupera encore l'axe des x, c'est-à-dire, la tangente à l'origine, en des points déterminés par l'équation

$$ax^{m-2}+a'x^{m-3}+a''x^{m-4}+\ldots\ldots+p''=0 \; ; \qquad (2)$$

laquelle sera aussi l'équation commune des parallèles à l'axe des y menées par ces points.

D'un autre côté, l'équation commune aux deux côtés du triangle qui passent par le point de contact, sera, d'après les conditions de la construction de ce triangle,

$$x^2-ky^2=0\;; \qquad (15)$$

k étant une quantité variable et tout-à-fait arbitraire.

Voilà donc en tout m droites dont on aura l'équation commune en multipliant les deux dernières, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} ax^m \quad +a'x^{m-1}+a''x^{m-2}+\ldots\ldots+p''x^2 \\ -k(ax^{m-2}+a'x^{m-3}+a''x^{m-4}+\ldots\ldots+p'')y^2 \end{array}\right\} = 0\,. \qquad (16)$$

Si présentement on veut connaître en quels points ces m droites coupent la courbe (1), il faudra considérer comme équations d'un même problème déterminé à deux inconnues x, y, soit les deux équations (1, 16), soit toute combinaison qu'on voudra faire de ces deux-là.

On pourra donc, en particulier, substituer à l'équation (1) sa différence avec l'équation (16) qui est, en divisant par y, ce qui revient à ôter l'équation de l'axe des x du résultat,

$$\left.\begin{array}{r} b'x^{m-1} \\ +(b''+c''y)x^{m-2} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(q''+r''y+\ldots\ldots+t''y^{m-3})x^2 \\ +(q'+r'y+s'y^2+\ldots\ldots+u'y^{m-2})x \\ +(1+ry+sy^2+\ldots\ldots+vy^{m-1}) \\ +k(ax^{m-2}+a'x^{m-3}+a''x^{m-4}+\ldots\ldots+p'')y \end{array}\right\} = 0\,; \qquad (17)$$

On aura donc les points d'intersection demandés en combinant entre elles les équations (16, 17); ce qui prouve que l'équation (17) est celle d'une ligne de l'ordre $m-1$, qui passe par ces $m(m-1)$ points quel que soit k ; ce qui démontre déjà la première partie du théorème.

Si, pour savoir en quels points la ligne (17) coupe l'axe des x, c'est-à-dire, la tangente à l'origine, on fait, dans son équation $y=0$, elle deviendra

$$b'x^{m-1}+b''x^{m-2}+\dots\dots+q''x^2+q'x+1=0\ ; \qquad (18)$$

équation indépendante de k ; ce qui prouve, conformément à la seconde partie de l'énoncé du théorème, que ces points, dont aucun n'est l'origine, sont fixes sur la tangente, quel que soit d'ailleurs le triangle construit sous les conditions indiquées.

THÉORÈME III. « A une surface quelconque de l'ordre m,
» soit mené un plan tangent, par un point tel que la ligne inter-
» section de ce plan avec la surface ne passe pas par ce point. Par
» ce même point, soient menées, sur le même plan tangent, les
» deux tangentes principales.

» Considérons la courbe intersection de la surface donnée avec
» son plan tangent comme une section faite par ce plan à une
» surface cylindrique, ayant sa génératrice parallèle au diamètre
» conjugué de ce plan tangent ; cette surface cylindrique coupera
» la surface proposée suivant un certain nombre de courbes fixes.

» Soit fait du point de contact le centre d'une surface quelconque
» du second ordre ; le plan tangent en sera un plan diamétral ; soit
» mené, à la surface du second ordre le diamètre conjugué de
» ce plan ;

» Soit ensuite construite arbitrairement une surface conique du
» second ordre, de manière pourtant qu'elle ait son sommet ou centre
» au point de contact ; qu'elle passe par trois diamètres conjugués
» de la surface du second ordre qui a son centre en ce point ; que

» ses sections parallèles au plan tangent aient leurs diamètres prin-
» cipaux respectivement parallèles aux tangentes principales dont
» il a été question ci-dessus, et en outre proportionnels aux racines
» quarrées des rayons de courbure répondant à ces mêmes tangentes
» principales; cette surface conique coupera la surface courbe dont
» il s'agit suivant plusieurs lignes courbes, variables comme la
» surface conique qui leur aura donné naissance.

» Or, tant ces courbes variables que les courbes fixes dont il a
» été question ci-dessus, se trouveront toujours appartenir à une
» même surface de l'ordre $m-1$ qui, dans toutes les variations
» qu'elle pourra subir, coupera toujours le diamètre conjugué du
» plan tangent en $m-1$ points fixes, differens du point de contact. »

Démonstration. Soient pris le point de contact du plan tangent pour origine et les deux tangentes principales pour axes des x et des y, lesquels seront ainsi perpendiculaires l'un à l'autre; le plan des xy sera un des plan diamétraux de la surface conique qui a son centre à l'origine. Soit pris le diamètre conjugué de ce plan pour axe des z, l'équation de la surface donnée de l'ordre m sera de la forme

$$F_m(x,y)+z.F_{m-1}(x,y)+z^2.F_{m-2}(x,y)+z^3.F_{m-3}(x,y)+\dots$$

$$\dots+z^{m-2}.F_2(x,y)+z^{m-1}.F_1(x,y)+z^mF_0(x,y)=0\,; \quad (19)$$

dans laquelle nous supposons que, en général, $F_k(x,y)$ désigne une fonction rationnelle et entière en x, y du degré k; de sorte que $F_0(x,y)$ doit être une quantité indépendante de ces deux variables.

Si, pour savoir suivant quelle ligne la surface (19) est coupée par le plan des xy, on fait, dans son équation, $z=0$, il viendra, pour l'équation de cette ligne

$$F_m(x,y)=0\,; \quad (20)$$

mais, puisqu'on suppose que le plan des xy est tangent à l'origine, les

les axes des x et des y doivent être respectivement tangens aux ntersections de la surface (19) par les plans des xz et des yz ; d'où il suit que la fonction F_m ne doit renfermer ni le terme constant ini les termes du premier ordre en x et y.

De plus, puisque nous supposons que la courbe intersection de la surface avec son plan tangent ne passe pas par le point de contact ; le premier membre de l'équation (20) doit renfermer un facteur du second degré, en x, y, exprimant ce point de contact, c'est-à-dire, l'origine des coordonnées.

Enfin, puisque les axes des x et des y sont supposé dirigés suivant les tangentes principales ; ce facteur du second degré, qui ne doit d'ailleurs contenir ni termes constans ni termes du premier ordre, ne doit pas non plus renfermer de terme en xy (*), et doit conséquemment être de la forme Px^2+Qy^2 ; au moyen de quoi l'équation (20) devient

$$(Px^2+Qy^2)f_{m-2}(x,y)=0\ ; \qquad (21)$$

f_{m-2} désignant une fonction rationnelle et entière en x et y du degré $m-2$; d'où l'on voit que

$$f_{m-2}(x,y)=0\ , \qquad (22)$$

sera l'équation de l'intersection de la surface (19) par son plan tangent ; ce sera donc aussi l'équation d'une surface cylindrique ayant sa génératrice parallèle à l'axe des z, et coupant le plan des xy suivant cette courbe.

Supposons que, dans F_{m-1}, le terme indépendant de x et y soit l'unité, ce qui est permis, puisque nous donnons des coefficiens à tous les autres termes ; si alors nous représentons par R, R' le

(*) Voyez là dessus la page 179 de ce volume.

plus grand et le moindre rayons de courbure à l'origine ; nous aurons (9)

$$R=-\frac{1}{2P}\,; \qquad R'=-\frac{1}{2Q}\,;$$

d'où

$$P=-\frac{1}{2R}\,, \qquad Q=-\frac{1}{2R'}\,;$$

on aura donc

$$\mathrm{F}_m(x\,,y)=-\frac{R'x^2+Ry^2}{2RR'}.f_{m-2}(x\,,y)\ ;$$

au moyen de quoi l'équation (19) deviendra

$$(R'x^2+Ry^2).f_{m-2}(x,y)-2RR'z[\mathrm{F}_{m-1}(x\,,y)+z\mathrm{F}_{m-2}(x\,,y)$$

$$+z^2.\mathrm{F}_{m-3}(x\,,y)+\ldots\ldots+z^{m-2}.\mathrm{F}_1(x\,,y)+z^{m-1}.\mathrm{F}_0(x\,,y)]=0. \qquad (23)$$

Considérons présentement la surface du second ordre que nous avons supposé avoir son centre à l'origine. Puisque nous avons supposé que l'axe des z était le conjugué du plan diamétral qui coïncide avec le plan des xy, il s'ensuit que les sections de cette surface par les plans des xz et des yz doivent être des lignes du second ordre rapportées à leurs centres et à leurs diamètres conjugués ; et que par conséquent l'équation de cette surface ne saurait être que de la forme

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Fxy=k\,, \qquad (24)$$

Soient

$$\left\{\begin{array}{l} x=gz\,,\\ y=hz\,; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=g'z\,,\\ y=h'z\,; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=g''z\,;\\ y=h''z\,; \end{array}\right. \qquad (25)$$

les équations de trois de ses diamètres, conjugués les uns aux autres. L'équation de son plan tangent en un point $(x'\,,y'\,,z')$ sera

$$2Axx'+2Byy'+2CCz'+F(xy'+x'y)=2k\ , \qquad (26)$$

sous la condition

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2+Fx'y'=k\ ; \qquad (27)$$

et le plan diamétral parallèle à ce plan tangent aura pour équation

$$2Axx'+2Byy'+2Czz'+F(xy'+x'y)=0\ . \qquad (28)$$

Pour que le premier des diamètres (25) soit conjugué au plan des deux autres, il suffira que, ces deux-ci étant dans le plan (28), le premier passe par le point (x', y', z'), ce qui donnera les quatre conditions

$$x'=gz'\ , \qquad y'=hz'\ ;$$

$$(2Ag+Fh')x'+(2Bh'+Fg')y'+2Cz'=0\ ,$$

$$(2Ag''+Fh'')x'+(2Bh''+Fg'')y'+2Cz'=0\ .$$

Eliminant x', y' des deux dernières, au moyen des deux premières ; et divisant par z', il viendra

$$(2Ag'+Fh')g+(2Bh'+Fg')h+2C=0\ ,$$

$$(2Ag''+Fh'')g+(2Bh''+Fg'')h+2C=0\ .$$

Pour que les trois diamètres fussent conjugués les uns aux autres, il faudrait qu'on eût trois systèmes de deux pareilles équations ; mais il est aisé de voir que les six équations qu'on obtiendrait ainsi seraient deux à deux identiquement les mêmes ; de sorte qu'elles se réduiraient aux trois suivantes.

$$\left.\begin{array}{l}2Agg'+2Bhh'+F(gh'+hg')+2C=0\ ,\\ 2Ag'g''+2Bh'h''+F(g'h''+h'g'')+2C=0\ ,\\ 2Ag''g+2Bh''h+F(g''h+h''g)+2C=0\ ;\end{array}\right\}\quad(29)$$

Ce sont donc là les équations nécessaires et suffisantes pour exprimer que les diamètres (25) sont conjugués les uns aux autres. On voit que des six quantités g, g', g'', h', h', h'', il y en a trois qui demeurent tout-à-fait indéterminées.

Considérons présentement la surface conique du second ordre, ayant pour équation

$$R'x^2+Ry^2+rz^2+pxz+qyz=0\ : \quad (30)$$

Cette surface conique a évidemment son sommet ou centre à l'origine; en outre, puisque son équation ne renferme point le terme en xy, toutes ses sections parallèles au plan des xy sont des lignes du second ordre ayant leurs diamètres principaux parallèles aux axes des x et des y, c'est-à-dire, aux tangentes principales menées à la surface (19) par l'origine; enfin, à cause des coefficiens R', R, de x^2, y^2 les longueurs de ces diamètres principaux sont proportionnelles aux racines quarrées des rayons de plus grande et de moindre courbure de la surface (19) à l'origine.

Remarquons présentement que, quels que soient p, q, r, que nous supposons ici tout-à-fait indéterminés, on pourra toujours assujettir la surface conique (30) à passer par trois diamètres conjugués de la surface (24), puisque, pour déterminer les six coefficiens g, g', g'', h, h', h'' des équations (25) de ces diamètres, on aura seulement, outre les trois équations (29), les trois équations

$$\left.\begin{array}{l}R'g^2+Rh^2+K+pg+qh\ ,\\ R'g'^2+Rh'^2+K+pg'+qh'\ ,\\ R'g''^2+Rh''^2+K+pg''+qh''\ ,\end{array}\right\}\quad(31)$$

qui expriment que les diamètres (25) sont sur la surface (30)

Ainsi, en supposant, dans l'équation de cette surface conique, que p, q, r sont tout-à-fait indéterminés, cette surface sera exactement conditionnée comme l'exige l'énoncé du théorème. Elle coupera la surface (19) suivant un système de courbes, variables comme les coefficiens p, q, r, qui la déterminent.

Veut-on avoir l'équation commune à cette surface conique et à la surface cylindrique (22); il ne s'agira pour cela que de prendre le produit des équations de ces deux surfaces; ce qui donnera

$$(R'x^2+Ry^2+rz^2+pxz+qyz).f_{m-2}(x,y)=0 \; . \qquad (32)$$

Si l'on veut présentement savoir suivant quelles courbes le système de ces surfaces conique et cylindrique coupe la surface donnée de l'ordre m, il ne s'agira que de considérer comme équations d'un même problème indéterminé à trois variables, soit les deux équations (23, 32), soit toutes combinaisons de ces deux équations qu'on voudra leur substituer; on pourra donc, en particulier, substituer à l'équation (23) sa différence avec l'équation (32), qui est, en divisant par z, ce qui revient à exclure le plan des xy,

$$2RR'[F_{m-1}(x,y)+z.F_{m-2}(x,y)+\ldots+z^{m-2}.F_1(x,y)+z^{m-1}.F_0(x,y)]$$
$$(rz+px+qy).f_{m-2}(x,y)=0 \; ; \qquad (33)$$

d'où il suit que ces courbes seront toutes situées sur la surface (33), c'est-à-dire, sur une surface du degré $m-1$, laquelle ne passe ni par l'origine ni par la courbe (22), conformément à l'énoncé du théorème.

Si, dans la vue de savoir en quels points cette surface coupe l'axe des z, on suppose, à la fois, dans l'équation (33) $x=0$, $y=0$, l'équation résultante en z ne renfermera plus les indéterminées p, q, r, ce qui prouve que, la surface conique variant, ces points restent fixes sur l'axe des z; ce qui est encore conforme à l'énoncé du théorème, qui se trouve ainsi complètement démontré.

Il est aisé de voir, au surplus, que, pour chaque surface conique, en particulier, la condition de passer par les intersections tant de cette surface que de la surface cylindrique avec la surface proposée déterminera complètement la surface (33). Concevons, en effet, un plan quelconque passant par l'axe des z; ce plan coupera la surface proposée suivant une ligne de l'ordre m, et la surface (33) suivant une ligne de l'ordre $m-1$; il coupera de plus la surface cylindrique (22) suivant $m-2$ droites, toutes parallèles à l'axe des z, lesquelles couperont la courbe de l'ordre m en $(m-1)(m-2)$ points; il coupera enfin la surface conique suivant deux droites qui seront deux diamètres conjugués de la section faite dans la surface du second ordre qui a son centre à l'origine; et ces deux droites détermineront, sur la ligne de l'ordre m, $2(m-1)$ nouveaux points; ce qui fera en tout $m(m-1)$ points, lesquels se trouveront aussi sur la ligne de l'ordre $m-1$. Or, nous avons vu (*Théor. I*) que, par la condition de passer par ces $m(m-1)$, points, cette courbe est complètement déterminée; toutes les sections faites dans la surface (33) sont donc déterminées; cette surface est donc elle-même déterminée.

THÉORÈME IV. « A une surface quelconque de l'ordre m, » soit mené un plan tangent, par un point tel que la ligne, in- » tersection de ce plan avec la surface, ne passe pas par ce point. » Par ce même point, soient menées, sur le même plan tangent, » les deux tangentes principales.

» Considérons la courbe insersection de la surface donnée avec » son plan tangent comme une section faite par ce plan à une surface » cylindrique ayant sa génératrice parallèle à une droite fixe, menée » par le point de contact, dans une direction quelconque; cette » surface cylindrique coupera la surface proposée suivant un certain » nombre de courbes fixes.

» Soit ensuite construit arbitrairement une surface conique du » second ordre, de manière pourtant qu'elle ait son sommet ou » centre au point de contact, et que ses sections, par des plans » parallèles au plan tangent, aient leur centre sur la droite fixe » dont il vient d'être question, leurs diamètres principaux parallèles

» aux tangentes principales, et les longueurs de ces diamètres propor-
» tionnelles aux racines quarrées des rayons de plus grande et de moindre
» courbure qui répondent au point de contact; cette surface conique
» coupera la surface proposée suivant un certain nombre de courbes,
» variables comme la surface conique qui leur aura donné naissance.

» Or, tant ces courbes variables que les courbes fixes dont il
» a été question ci-dessus, se trouveront toujours appartenir à une
» surface de l'ordre $m-1$ qui, dans toutes les variations qu'elle pourra
» subir, coupera toujours le plan tangent suivant une même ligne
» fixe de l'ordre $m-1$, qui ne passera pas par le point de contact. »

Démonstration. Soient pris encore, comme ci-dessus, pour axes des x et des y les deux tangentes principales; et soit prise pour axe des z la droite fixe, menée par le point de contact; si l'on représente toujours par R, R' les deux rayons de plus grande et de moindre courbure en ce point, on pourra prendre de nouveau pour équation de la surface proposée l'équation (23), c'est-à-dire, l'équation

$$\begin{gathered}(R'x^2+Ry^2)f_{m-2}(x,y)-2RR'z[\mathrm{F}_{m-1}(x,y)+z.\mathrm{F}_{m-2}(x,y)+z^2.\mathrm{F}_{m-3}(x,y)\\ +\ldots\ldots+z^{m-2}.\mathrm{F}_1(x,y)+z^{m-1}.\mathrm{F}_0(x,y)]=0\ ; \qquad (23)\end{gathered}$$

et le plan des xy, c'est-à-dire, le plan tangent à l'origine sera encore coupé par cette surface suivant une ligne de l'ordre $m-2$, ayant pour équation

$$f_{m-2}(x,y)=0\ , \qquad (22)$$

laquelle sera aussi l'équation d'une surface cylindrique ayant sa directrice parallèle à l'axe des z, et coupant le plan tangent suivant cette courbe.

Quant à la surface conique du second ordre, ayant les centres de toutes ses sections parallèles au plan des xy sur l'axe des z, et les diamètres principaux de ces mêmes sections respectivement parallèles aux axes des x et des y, et proportionnels aux racines quarrées des rayons de plus grande et de moindre courbure de la surface (23) à l'origine; il est clair que l'équation de cette surface conique sera

$$R'x^2+Ry^2+rz^2=0\ ; \qquad (34)$$

dans laquelle r sera une quantité tout-à-fait arbitraire. L'équation du système de cette surface conique et de la surface cylindrique (22) sera donc

$$(R'x^2+Ry^2+rz^2).f_{m-2}(x,y)=0. \qquad (35)$$

Si, présentement, on veut savoir suivant quelles courbes ce système de surfaces conique et cylindrique coupe la surface proposée, tout se réduira à considérer comme équations d'un même problème indéterminé à trois variables, soit les deux équations (23, 35) soit toute combinaison qu'on voudra faire de ces deux-là. On pourra donc, en particulier, dans cette recherche, substituer à l'équation (23) sa différence avec l'équation (35), qui est, en divisant par z, ce qui revient à exclure le plan des xy,

$$\begin{aligned}2RR'[\mathrm{F}_{m-1}(x,y)+z.\mathrm{F}_{m-2}(x,y)+\ldots+z^{m-2}.\mathrm{F}_1(x,y)+z^{m-1}.\mathrm{F}_0(x,y)]\\ +rz.f_{m-2}(x,y)=0\ ; \qquad (36)\end{aligned}$$

d'où il suit que ces courbes seront toutes situées sur la surface (36); c'est-à-dire, sur une surface de l'ordre $m-1$, laquelle ne passe ni par l'origine ni par la courbe (22), conformément à l'énoncé du théorème.

Si, dans la vue de savoir suivant quelle ligne cette surface coupe le plan des xy, c'est-à-dire le plan tangent, on fait, dans cette équation, $z=0$; l'équation résultante en x, y, qui sera

$$\mathrm{F}_{m-1}(x,y)=0,$$

ne renfermant plus l'indéterminée r, sera celle d'une ligne de l'ordre $m-1$ tout-à-fait fixe, quelle que soit la surface conique (34), et ne passant pas par le point de contact; ce qui est encore conforme à l'énoncé du théorème qui se trouve ainsi complètement démontré.

En se fondant sur le *Théorème II*, on démontrera aisément, comme nous l'avons fait pour le *Théorème III*, que, pour chaque surface conique en particulier, la condition de passer par les intersections tant de cette surface conique que de la surface cylindrique (22) avec la surface proposée, détermine complètement la surface (36).