ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHRISTIAN KASSEL

JEAN-LOUIS LODAY

Extensions centrales d'algèbres de Lie

Annales de l'institut Fourier, tome 32, nº 4 (1982), p. 119-142

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_4_119_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 4 (1982), 119-142.

EXTENSIONS CENTRALES D'ALGÈBRES DE LIE

par C. KASSEL et J.-L. LODAY

Soient k un anneau commutatif et A une k-algèbre associative. S. Bloch ([1], théorème 3.1) a démontré que le groupe d'homologie $H_2(\mathfrak{sl}_n(A),k)$ de l'algèbre de Lie des matrices de trace nulle sur A est isomorphe au k-module de différentielles $\Omega^1_{A/k}/dA$ lorsque A est commutative et que 2 est inversible dans A (le cas particulier où $A = k[t,t^{-1}]$ a été traité dans [3], théorème 2.36).

Dans ce travail, nous éliminons les hypothèses restrictives de Bloch et nous calculons $H_2(\mathfrak{sl}_n(A),k)$ en toute généralité. Au module $\Omega^1_{A/k}/dA$ qui n'est défini que pour A commutative, on substitue un groupe $HC_2(A)$ construit à partir d'un complexe-quotient du complexe de Hochschild de l'algèbre A. L'idée d'un tel complexe vient des travaux d'A. Connes sur les C*-algèbres. On démontre alors stablement l'isomorphisme

$$H_2(\mathfrak{sl}_n(A),k) \cong HC_2(A) \quad \left(n \geqslant 5 \text{ ou } n \geqslant 2 \text{ et } \frac{1}{2} \in A\right)$$

en étudiant l'extension centrale universelle $\mathfrak{st}_n(A)$ de la k-algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(A)$.

Au § 2 nous développons une version relative des résultats précédents pour une surjection $A \to A/I$. Lorsque A est commutative, on calcule le groupe d'homologie relative $H_3(\mathfrak{sl}_n(A/I),\mathfrak{sl}_n(A);k)$ de la projection $\mathfrak{sl}_n(A) \to \mathfrak{sl}_n(A/I)$ au moyen d'un groupe relatif pour l'homologie de Connes. On montre ainsi que $H_3(\mathfrak{sl}_n(A/I),\mathfrak{sl}_n(A);k)$ est isomorphe (pour n assez grand) au k-module $\Omega^1_{A,I/k}/dI$ engendré par les générateurs $\langle a,b\rangle$ (où l'un au moins des éléments a, b de A est dans l'idéal I) et les relations

$$\langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle = 0,$$
$$\langle a,\lambda b+\mu c\rangle - \lambda\langle a,b\rangle - \mu\langle a,c\rangle = 0, \ \lambda,\ \mu \in k,$$
$$\langle a,bc\rangle + \langle b,ca\rangle + \langle c,ab\rangle = 0, \qquad a \text{ ou } b \text{ ou } c \in I.$$

On se reportera à la proposition 2.11 pour un résultat général lorsque A n'est pas nécessairement commutative.

On peut réinterpréter les résultats du § 1 de la manière suivante : (pour n assez grand), on a une suite exacte fonctorielle en A

$$0 \to H_2(\mathfrak{sl}_n(A),k) \to \mathfrak{st}_n(A) \xrightarrow{\varphi_A} \mathfrak{gl}_n(A) \to H_1(\mathfrak{gl}_n(A),k) \to 0$$

et les groupes $H_1(\mathfrak{sl}_n(A),k)$, $H_1(\mathfrak{st}_n(A),k)$ et $H_2(\mathfrak{st}_n(A),k)$ sont nuls. Par analogie avec les premiers groupes de K-théorie algébrique (voir [9]), nous introduisons les foncteurs

$$K_1^L(A) = H_1(\mathfrak{gl}_n(A),k), \qquad K_2^L(A) = H_2(\mathfrak{sl}_n(A),k)$$

et

$$K_3^L(A) = H_3(\mathfrak{st}_n(A),k)$$

(n assez grand). Alors $K_i^L(A)$ est isomorphe au groupe $HC_i(A)$ d'homologie de Connes ($i=1$ et 2).

Par ailleurs, pour toute surjection $A \to A/I$, on peut construire des groupes relatifs $K_i^L(A,I)$ et $HC_i(A,I)$ ($i=1$ et 2) dont on démontre qu'ils sont isomorphes et qu'ils donnent lieu à une suite exacte de la forme

$$K_3^L(A) \to K_3^L(A/I) \to K_2^L(A,I) \to K_2^L(A) \to \cdots \to K_1^L(A) \to K_1^L(A/I) \to 0.$$

De même qu'au § 1 on utilise la théorie des extensions centrales d'algèbres de Lie, on a besoin au § 2 d'une classification des suites exactes d'algèbres de Lie à quatre termes. Ceci nous amène à introduire des « modules croisés d'algèbres de Lie » par analogie avec une notion similaire définie par J. H. C. Whitehead en théorie des groupes. On présente en appendice les propriétés principales de ces objets.

1. Extensions centrales de $\mathfrak{sl}_n(A)$.

1.1. La donnée d'un anneau commutatif k et d'une k-algèbre A (associative, commutative ou non) permet de définir le complexe de k-modules

$$\cdots \to C_n(A) \xrightarrow{d} C_{n-1}(A) \to \cdots \to C_1(A) \to C_0(A) \to 0$$

où $C_0(A) = k$, $C_1(A) = A$ et si $n \geqslant 2$, $C_n(A)$ est le quotient du k-

module $\underbrace{A \otimes_k A \otimes_k \cdots \otimes_k A}_{n \text{ fois}}$ par le sous-k-module engendré par les éléments $a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n + (-1)^n a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_1$. L'homomorphisme $d : C_n(A) \to C_{n-1}(A)$ est donné par

$$d(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=2}^{n} (-1)^i a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}a_i \otimes \cdots \otimes a_n \\ - a_2 \otimes \cdots \otimes a_n a_1$$

lorsque $n \geqslant 2$ et par $d = 0$ sinon. On vérifie facilement que les homomorphismes d sont bien définis et que $d^2 = 0$. Le complexe $C_*(A)$ est un quotient du complexe de Hochschild de la k-algèbre A ([2], IX.6). Le dual de $C_*(A)$ (décalé d'un cran) a été considéré pour la première fois par A. Connes (non publié).

DÉFINITION 1.2. — *On appelle homologie de Connes de la k-algèbre* A *les groupes d'homologie, notés* $HC_i(A)$, *du complexe précédent.*

On voit aussitôt que $HC_0(A) = k$ et que $HC_1(A) \simeq A/[A,A]$ où $[A,A]$ est le sous-k-module de A engendré par les éléments de la forme $ab - ba (a,b \in A)$.

Lorsque A est commutatif, $a \otimes b \mapsto adb$ induit un isomorphisme $\omega_2 : HC_2(A) \xrightarrow{\cong} \Omega^1_{A/k}/dA$ (1-formes différentielles modulo les formes exactes), qu'on peut encore décrire comme le k-module engendré par les générateurs $\langle a,b \rangle$ $(a,b \in A)$ et les relations

$$\langle a,b \rangle + \langle b,a \rangle = 0$$
$$\langle a,\lambda b + \mu c \rangle = \lambda \langle a,b \rangle + \mu \langle a,c \rangle$$
$$\langle b,ca \rangle - \langle ab,c \rangle + \langle a,bc \rangle = 0$$

pour a, b, $c \in A$ et λ, $\mu \in k$.

Remarque. — Plus généralement (A commutatif), on a pour tout $i \geqslant 2$ un homomorphisme $\omega_i : HC_i(A) \to \Omega^{i-1}_{A/k}/d\Omega^{i-2}_{A/k}$, caractérisé par

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \mapsto a_1\, da_2 \wedge \cdots \wedge da_i .$$

D'autre part, on peut montrer qu'il existe un produit commutatif gradué $HC_i(A) \otimes_k HC_j(A) \xrightarrow{*} HC_{i+j}(A)$ sur l'homologie de Connes. Il vérifie la formule

$$\omega_{i+j}(x * y) = \frac{(i+j-1)!}{(i-1)!(j-1)!}\, \omega_i(x) \wedge d\omega_j(y) \in \Omega^{i+j-1}_{A/k}/d\Omega^{i+j-2}_{A/k} .$$

On en déduit (comme dans [6], prop. 1.3.7) que lorsque A est commutatif et $n \geqslant 3$, ω_n induit une surjection scindée de $HC_n(A) \otimes \mathbf{Z}[1/(n-1)!]$ sur $\Omega^{n-1}_{A/k}/d\Omega^{n-2}_{A/k} \otimes \mathbf{Z}[1/(n-1)!]$.

En général, ω_i n'est pas un isomorphisme pour $i \geqslant 3$. En effet lorsque $A = k$, les différentielles $\Omega^i_{k/k}$ sont nulles alors que

$$HC_i(k) = \begin{cases} k & \text{si } n = 0 \text{ et } 1 \\ 0 & \text{si } n \text{ pair } \geqslant 2 \\ 2k & \text{si } n \text{ impair } \geqslant 3. \end{cases}$$

1.3. Soit ℓ un entier $\geqslant 1$ et $M_\ell(A)$ la k-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans A. Il existe un homomorphisme de complexes $Tr_* : C_*(M_\ell(A)) \to C_*(A)$ qui étend la trace :

Tr_0 = identité, Tr_1 = Trace et si $n \geqslant 2$,

$$Tr_n(m^1 \otimes \cdots \otimes m^n) = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant \ell} m^1_{i_1 i_2} \otimes m^2_{i_2 i_3} \otimes \cdots \otimes m^n_{i_n i_1}.$$

Cet homomorphisme est compatible avec l'inclusion de $M_\ell(A)$ dans $M_{\ell+1}(A)$. On peut vérifier qu'il induit un isomorphisme de $HC_*(M_\ell(A))$ sur $HC_*(A)$.

1.4. Nous faisons maintenant quelques rappels sur la théorie des extensions centrales d'algèbres de Lie (ils sont tirés de [2], [3]).

Une suite exacte de k-algèbres de Lie

$$0 \to \mathfrak{l} \to \mathfrak{u} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{g} \to 0$$

est une *extension centrale* de $\mathfrak{g}$ (par $\mathfrak{l}$) si $\mathfrak{l}$ est dans le centre de $\mathfrak{u}$, i.e. si $[\mathfrak{l},\mathfrak{u}] = 0$. L'extension centrale $\alpha : \mathfrak{u} \to \mathfrak{g}$ est *universelle* (et dans ce cas, elle est unique à isomorphisme près) si pour toute extension centrale $\beta : \mathfrak{v} \to \mathfrak{g}$, il existe un unique homomorphisme d'algèbres de Lie $\gamma : \mathfrak{u} \to \mathfrak{v}$ tel que $\beta\gamma = \alpha$. On a alors la

PROPOSITION 1.5. — *Une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *possède une extension centrale universelle si et seulement si* $\mathfrak{g}$ *est parfaite, i.e.* $\mathfrak{g}$ *est égale à la sous-algèbre* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *de ses commutateurs. Une extension centrale* $\mathfrak{u} \to \mathfrak{g}$ *est universelle si et seulement si* $\mathfrak{u}$ *est parfaite et toute extension centrale* $\alpha : \mathfrak{t} \to \mathfrak{u}$ *de* $\mathfrak{u}$ *est* *inessentielle (i.e. il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie* $\mathfrak{u} \to \mathfrak{t}$ *qui scinde* α).

□

Cette proposition peut se formuler en termes de l'homologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$: en effet, $H_1(\mathfrak{g},k) \simeq \mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. L'algèbre $\mathfrak{g}$ est donc parfaite si et seulement si $H_1(\mathfrak{g},k) = 0$. De plus, si $\alpha : \mathfrak{u} \to \mathfrak{g}$ est l'extension centrale universelle de $\mathfrak{g}$ et si $\mathfrak{g}$ est un k-module libre, alors $\mathrm{Ker}(\alpha) \simeq H_2(\mathfrak{g},k)$. L'extension centrale universelle $\mathfrak{u}$ vérifie donc (si elle est libre sur k) : $H_1(\mathfrak{u},k) = H_2(\mathfrak{u},k) = 0$.

Prenons l'exemple de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(A)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans A. Le crochet de Lie est donné par $[x,y] = xy - yx$. Pour tout $n \geqslant 1$, $[\mathfrak{gl}_n(A),\mathfrak{gl}_n(A)]$ est la sous-algèbre $\mathfrak{sl}_n(A)$ des matrices dont la trace appartient à $[A,A]$. Par conséquent

$$H_1(\mathfrak{gl}_n(A),k) \simeq A/[A,A] \simeq HC_1(A) \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant 1.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(A)$ est parfaite si $n \geqslant 3$ (c'est également le cas de $\mathfrak{sl}_2(A)$ lorsque 2 est inversible dans k) :

$$H_1(\mathfrak{sl}_n(A),k) = 0 \quad (n \geqslant 3).$$

D'après la proposition 1.5, elle possède donc une extension centrale universelle dont l'étude occupe le reste de ce paragraphe. Les résultats qui suivent sont également vrais pour $n = \infty$ où on pose

$$\mathfrak{gl}(A) = \mathfrak{gl}_\infty(A) = \varinjlim_n \mathfrak{gl}_n(A) \quad \text{et} \quad \mathfrak{sl}(A) = \mathfrak{sl}_\infty(A) = \varinjlim_n \mathfrak{sl}_n(A).$$

DÉFINITION 1.6. — *Soit* $3 \leqslant n \leqslant \infty$. *On note* $\mathfrak{st}_n(A)$ *la k-algèbre de Lie engendrée par les générateurs*

$$u_{ij}(a), \qquad a \in A, \qquad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$$

et les relations

a) $u_{ij}(\lambda a + \mu b) = \lambda u_{ij}(a) + \mu u_{ij}(b) \quad a, b \in A \quad \text{et} \quad \lambda, \mu \in k,$

b) $[u_{ij}(a), u_{k\ell}(b)] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq \ell \text{ et } j \neq k, \\ u_{i\ell}(ab) & \text{si } i \neq \ell \text{ et } j = k. \end{cases}$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{st}_n(A)$ possède alors les propriétés suivantes.

THÉORÈME 1.7. — *Soit* $3 \leqslant n \leqslant \infty$. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{st}_n(A)$ *est une extension centrale de* $\mathfrak{sl}_n(A)$ *de noyau isomorphe à* $HC_2(A)$. *Lorsque* A

est commutative (*alors* $HC_2(A) \simeq \Omega^1_{A/k}/dA$), *le 2-cocycle associé à l'extension* $\mathfrak{st}_n(A) \to \mathfrak{sl}_n(A)$ *est donné par l'application*

$$x \wedge y \mapsto \mathrm{Trace}\ (x\, dy)$$

de $\Lambda^2_k \mathfrak{sl}_n(A)$ *dans* $\Omega^1_{A/k}/dA$.

La démonstration du théorème se fait en plusieurs étapes (pour une démonstration analogue, cf. [7], appendice). En 1.12 on montre que l'extension $\mathfrak{st}_n(A) \to \mathfrak{sl}_n(A)$ est centrale, puis en 1.16 on démontre qu'il existe une surjection η de $HC_2(A)$ sur le noyau de l'extension; enfin en 1.17 on établit l'injectivité de η.

Le théorème est complété par l'énoncé suivant.

PROPOSITION 1.8. — *Si de plus* $n \geqslant 5$, *alors* $\mathfrak{st}_n(A)$ *est l'extension centrale universelle de* $\mathfrak{sl}_n(A)$.

La proposition a été établie par S. Bloch ([1], 3.16) pour A commutative et 2 inversible dans k. La démonstration de Bloch s'adapte sans restriction au cas général, une fois qu'on a démontré que l'extension $\mathfrak{st}_n(A) \to \mathfrak{sl}_n(A)$ est centrale.

□

COROLLAIRE 1.9. — *Soit* $5 \leqslant n \leqslant \infty$ *et supposons que, de plus,* A *est un k-module libre. Alors*

$$H_2(\mathfrak{sl}_n(A),k) \cong HC_2(A) \quad et \quad H_2(\mathfrak{gl}_n(A),k) \cong HC_2(A) \oplus \Lambda^2_k(A/[A,A]).$$

Démonstration. — Le premier isomorphisme résulte de 1.4, 1.7, 1.8 et le second de l'examen de la suite spectrale d'homologie associée à l'extension

$$0 \longrightarrow \mathfrak{sl}_n(A) \longrightarrow \mathfrak{gl}_n(A) \longrightarrow A/[A,A] \longrightarrow 0. \qquad \square$$

Remarques. — *a*) Il est possible de définir $\mathfrak{st}_n(A)$ pour $n = 2$. En effet, soit $\mathfrak{st}_2(A)$ la k-algèbre de Lie engendrée par les éléments $u_{12}(a)$, $u_{21}(b)$, $H(a,b)(a,b \in A)$ soumis aux relations

$$\begin{cases} u_{ij}(\lambda a+\mu b) = \lambda u_{ij}(a) + \mu u_{ij}(b), \qquad a, b \in A, \qquad \lambda, \mu \in k \\ H(a,b) = [u_{12}(a),u_{21}(b)] \\ [u_{12}(c),H(a,b)] = -\, u_{12}(cba+abc) \\ [u_{21}(c),H(a,b)] = u_{21}(cab+bca) \\ [u_{ij}(a),u_{ij}(b)] = 0\,. \end{cases}$$

Alors $\mathfrak{st}_2(A)$ est une extension centrale de $\mathfrak{sl}_2(A)$. Si $\frac{1}{2} \in k$, c'est l'extension centrale universelle de $\mathfrak{sl}_2(A)$ et son noyau est isomorphe à $HC_2(A)$. De même si $\frac{1}{2} \in k$, $\mathfrak{st}_3(A)$ (resp. $\mathfrak{st}_4(A)$) est l'extension centrale universelle de $\mathfrak{sl}_3(A)$ (resp. $\mathfrak{sl}_4(A)$).

b) Plus généralement, soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple déployée sur $\mathbf{Q}$ et $\mathfrak{g}_\mathbf{Z}$ un ordre de Chevalley de $\mathfrak{g}$. Posons $\mathfrak{g}(A) = A \otimes_\mathbf{Z} \mathfrak{g}_\mathbf{Z}$ l'algèbre de Lie associée sur la k-algèbre A. Alors en suivant la voie tracée dans [3], pp. 20-24, on montre que, si 2 est inversible dans k, $\mathfrak{g}(A)$ possède une extension centrale universelle de noyau isomorphe à $HC_2(A)$ et donc (si A est libre sur k), $H_2(\mathfrak{g}(A),k) \simeq HC_2(A)$.

c) En termes de stabilité de l'homologie, ces résultats montrent que $H_2(\mathfrak{sl}_n(A),k) \longrightarrow H_2(\mathfrak{sl}_{n+1}(A),k)$ est un isomorphisme pour $n \geqslant 5$ et pour $n \geqslant 2$ si $\frac{1}{2} \in k$.

1.10. *Démonstration du théorème* 1.7.
Fixons un entier $n \geqslant 3$.

Les matrices élémentaires $E_{ij}(a)$ de $\mathfrak{sl}_n(A)$ $(1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$ vérifient les relations de la définition 1.6. En associant $E_{ij}(a)$ à $u_{ij}(a)$, on définit un homomorphisme surjectif φ de $\mathfrak{st}_n(A)$ sur $\mathfrak{sl}_n(A)$. Soit $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{n}'$) le sous-k-module de $\mathfrak{st}_n(A)$ engendré par les éléments $u_{ij}(a)$ avec $i<j$ (resp. $i>j$). L'image par φ de $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{n}'$) est formée des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) avec éléments diagonaux nuls de $\mathfrak{sl}_n(A)$. Les restrictions de φ à $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}'$ sont injectives.

On pose :

$$H_{ij}(a,b) = [u_{ij}(a),u_{ji}(b)], \qquad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\,; \qquad a,b \in A.$$

Alors :

$$H_{ij}(a,b) = -\,H_{ij}(b,a)$$

et

$$\varphi H_{ij}(a,b) = E_{ii}(ab) - E_{jj}(ba) \quad \text{(matrice diagonale)}.$$

Soit $\mathfrak{h}$ le sous-k-module de $\mathfrak{st}_n(A)$ engendré par les éléments $H_{ij}(a,b)$ $(1 \leqslant i \neq j \leqslant n; a,b \in A)$. Alors on a le

LEMME DE DÉCOMPOSITION 1.11. — *Soit $n \geqslant 3$. Tout élément $x \in \mathfrak{st}_n(A)$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x = u + t + u'$$

avec $u \in \mathfrak{n}$, $u' \in \mathfrak{n}'$ et $t \in \mathfrak{h}$.

Preuve. — Pour montrer l'existence de la décomposition, comme le k-module $\mathfrak{n} + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}'$ contient les générateurs $u_{ij}(a)$ de $\mathfrak{st}_n(A)$, il suffit de démontrer que $\mathfrak{n} + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}'$ est un idéal de $\mathfrak{st}_n(A)$. Il suffit donc de montrer que pour tout x de la forme $u_{k\ell}(b)$ ou $H_{k\ell}(b,c)$, $[u_{ij}(a),x] \in \mathfrak{n} + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}'$, ce qui se fait aisément par un calcul direct utilisant la définition de $H_{k\ell}(b,c)$ et l'identité de Jacobi.

Quant à l'unicité, supposons qu'on ait

$$u + t + u' = 0 \quad \text{avec} \quad u \in \mathfrak{n}, \quad t \in \mathfrak{h} \quad \text{et} \quad u' \in \mathfrak{n}'.$$

Alors $\varphi(u) + \varphi(t) + \varphi(u') = 0$. Or $\varphi(u)$ est la partie triangulaire supérieure de la matrice $\varphi(u+t+u') = 0$.

La matrice $\varphi(u)$ est donc nulle et, d'après la remarque faite plus haut, $u = 0$. De même $u' = 0$ et par conséquent $t = 0$.

□

Si on appelle $\mathfrak{p}_n$ le noyau de $\varphi : \mathfrak{st}_n(A) \to \mathfrak{sl}_n(A)$, on déduit du lemme de décomposition le résultat suivant.

Proposition 1.12. — *Soit* $3 \leqslant n \leqslant \infty$. *Alors le noyau* $\mathfrak{p}_n$ *est contenu dans* $\mathfrak{h}$ *et l'extension* $\varphi : \mathfrak{st}_n(A) \to \mathfrak{sl}_n(A)$ *est centrale, i.e.* $[\mathfrak{p}_n, \mathfrak{st}_n(A)] = 0$.

Preuve. — Soit $x = u + t + u' \in \mathfrak{p}_n$ ($u \in \mathfrak{n}$, $t \in \mathfrak{h}$ et $u' \in \mathfrak{n}$). Alors $0 = \varphi(x) = \varphi(u) + \varphi(t) + \varphi(u')$. En reprenant le raisonnement utilisé plus haut, on a $\varphi(u) = \varphi(u') = 0$ et donc $u = u' = 0; x = t \in \mathfrak{h}$.

Montrons maintenant que $[u_{ij}(a),t] = 0$ pour tout $t \in \mathfrak{h}$ tel que $\varphi(t) = 0$. D'après les relations 1.6.*b*, pour tout $H_{k\ell}(b,c)$

$$[u_{ij}(a), H_{k\ell}(b,c)] = u_{ij}(d)$$

pour un certain $d \in A$. Par conséquent, $[u_{ij}(a),t] = u \in \mathfrak{n} + \mathfrak{n}'$. Si $\varphi(t) = 0$, alors

$$0 = [\varphi(u_{ij}(a)), \varphi(t)] = \varphi(u).$$

Par conséquent $u = 0 = [u_{ij}(a),t]$ et donc $[\mathfrak{p}_n, \mathfrak{st}_n(A)] = 0$.

□

Les éléments $H_{ij}(a,b)$ de $\mathfrak{st}_n(A)$ vérifient les relations suivantes.

Lemme 1.13. — *Soit* $3 \leqslant n \leqslant \infty$ *et* i, j, k *trois entiers distincts compris entre* 1 *et* n. *Alors*

a) $(a,b) \mapsto H_{ij}(a,b)$ *est* k*-bilinéaire,* *b)* $H_{ij}(ab,c) = H_{ik}(a,bc) + H_{kj}(b,ca)$,

c) $H_{ij}(1,a) = -H_{ji}(1,a) = H_{ij}(a,1)$.

Démonstration. — La relation (*a*) est claire. Pour (*b*), on a :

$$\begin{aligned} H_{ij}(ab,c) &= [u_{ij}(ab),u_{ji}(c)] = [[u_{ik}(a),u_{kj}(b)],u_{ji}(c)] && \text{(d'après 1.6.}b\text{)} \\ &= [u_{ik}(a),[u_{kj}(b),u_{ij}(c)]] + [u_{kj}(b),[u_{ji}(c),u_{ik}(a)]] && \text{(Jacobi)} \\ &= [u_{ik}(a),u_{ki}(bc)] + [u_{kj}(b),u_{jk}(ca)] \\ &= H_{ik}(a,bc) + H_{kj}(b,ca). \end{aligned}$$

Pour (*c*), on pose $a = b = 1$ dans la relation (*b*). Alors

$$H_{ij}(1,c) = H_{ik}(1,c) + H_{kj}(1,c).$$

En échangeant j et k :

$$H_{ik}(1,c) = H_{ij}(1,c) + H_{jk}(1,c).$$

Additionnant membre à membre ces deux égalités :

$$H_{kj}(1,c) = -H_{jk}(1,c). \qquad \square$$

En utilisant à nouveau la relation (*b*) du lemme précédent, on observe que

$$\begin{aligned} H_{1j}(a,b) - H_{1j}(1,ba) &= H_{1k}(a,b) + H_{kj}(1,ba) - H_{kj}(1,ba) - H_{1k}(1,ba) \\ &= H_{1k}(a,b) - H_{1k}(1,ba). \end{aligned}$$

Cette expression ne dépend pas de l'indice $j \neq 1$. On pose :

$$h(a,b) = H_{1j}(a,b) - H_{1j}(1,ba).$$

On transcrit le lemme 1.13 sous la forme suivante.

LEMME 1.14. — *Soit* $3 \leqslant n \leqslant \infty$. *Alors*

a) $(a,b) \mapsto h(a,b)$ *est k-bilinéaire,*

b) $h(ab,c) = h(a,bc) + h(b,ca)$,

c) $h(a,1) = h(1,a) = 0$,

d) $h(a,b) = -h(b,a)$. $\square$

Remarque 1.15. — L'élément $I(a,b)$ défini et utilisé par Bloch ([1], 3.9) est le double de $h(a,b)$

$$I(a,b) = 2h(a,b).$$

En effet,

$$\begin{aligned} 2h(a,b) &= \mathrm{H}_{1j}(a,b) - \mathrm{H}_{1j}(1,ba) + \mathrm{H}_{1k}(a,b) - \mathrm{H}_{1k}(1,ba) \\ &= \mathrm{H}_{j1}(1,ba) + \mathrm{H}_{1k}(a,b) + \mathrm{H}_{k1}(1,ba) + \mathrm{H}_{1j}(a,b) \ \text{(d'après 1.13.}c\text{)} \\ &= \mathrm{H}_{jk}(a,b) + \mathrm{H}_{kj}(a,b) \ \text{(d'après 1.13.}b\text{)} \\ &= \mathrm{I}(a,b)\,.\ \text{(d'après [1], 3.9)}. \end{aligned}$$

Ceci explique pourquoi $\mathrm{I}(a,b)$ est alterné (i.e. $\mathrm{I}(a,a)=0$), alors que $h(a,b)$ ne l'est généralement pas.

Nous montrons maintenant que $h(a,b)$ permet de définir une surjection η du groupe d'homologie de Connes $\mathrm{HC}_2(\mathrm{A})$ sur le noyau $\mathfrak{p}_n$ de φ. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{HC}_2(\mathrm{A}) \arrow[r] & \mathrm{C}_2(\mathrm{A})/\mathrm{Im}(d) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathrm{C}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{A} \arrow[d, "a \mapsto \mathrm{E}_{11}(a)"] \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{p}_n \arrow[r] & \mathfrak{st}_n(\mathrm{A}) \arrow[r, "\varphi"] & \mathfrak{gl}_n(\mathrm{A}) \end{tikzcd}$$

dont les lignes sont formées de suites exactes et où on pose $\eta(a\otimes b) = h(a,b)$. Par définition de la différentielle dans le complexe de Connes et en vertu du lemme 1.14, η est bien défini.

LEMME 1.16. — *Soit* $3 \leqslant n \leqslant \infty$. *Le diagramme précédent est commutatif et* η *induit une surjection de* $\mathrm{HC}_2(\mathrm{A})$ *sur le noyau* $\mathfrak{p}_n$.

Démonstration. — Calculons $\varphi \circ \eta$.

$$\begin{aligned} \varphi \circ \eta(a\otimes b) &= \varphi \mathrm{H}_{1j}(a,b) - \varphi \mathrm{H}_{1j}(1,ba) \\ &= \mathrm{E}_{11}(ab) - \mathrm{E}_{jj}(ba) - \mathrm{E}_{11}(ba) + \mathrm{E}_{jj}(ba) \\ &= \mathrm{E}_{11}(ab-ba) = \mathrm{E}_{11}(d(a\otimes b))\,. \end{aligned}$$

Le diagramme est donc commutatif et définit, par restriction, un homomorphisme encore noté η de $\mathrm{HC}_2(\mathrm{A})$ dans $\mathfrak{p}_n$.

D'après 1.13.*b*, tout élément $t \in \mathfrak{h}$ se met sous la forme

$$t = \sum_i h(a_i,b_i) + \sum_{j\geqslant 2} \mathrm{H}_{1j}(1,c_j)\,.$$

Si, de plus, $t \in \mathfrak{p}_n$, alors

$$0 = \varphi(t) = \mathrm{E}_{11}\Big(\sum_i (a_ib_i - b_ia_i)\Big) + \sum_{j\geqslant 2} (\mathrm{E}_{11}(c_j) - \mathrm{E}_{jj}(c_j))\,.$$

Par conséquent, $c_j = 0$ pour tout $j \geqslant 2$ et

$$t = \sum_i h(a_i,b_i) = \eta\Big(\sum_i a_i \otimes b_i\Big)$$

avec

$$d\Big(\sum_i a_i \otimes b_i\Big) = \sum_i (a_i b_i - b_i a_i) = 0 . \qquad \square$$

L'injectivité de η (et donc de sa restriction à $HC_2(A)$) est une conséquence immédiate du résultat suivant.

LEMME 1.17. — *Soit* $3 \leqslant n \leqslant \infty$. *Il existe un homomorphisme de k-modules* $\theta : \mathfrak{st}_n(A) \to C_2(A)/\mathrm{Im}\, d$ *rendant le diagramme*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{p}_n \arrow[r] & \mathfrak{st}_n(A) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"] & \mathfrak{gl}_n(A) \arrow[d, "\mathrm{Trace}"] \\ 0 \arrow[r] & HC_2(A) \arrow[r] & C_2(A)/\mathrm{Im}\, d \arrow[r, "d"] & C_1(A) = A \end{tikzcd}$$

commutatif et tel que $\theta \circ \eta$ *soit l'identité.*

Preuve. — On caractérise θ par les conditions suivantes :

— θ est un homomorphisme de k-modules de $\mathfrak{st}_n(A)$ dans $C_2(A)/\mathrm{Im}(d)$,

— $\theta([x,y]) = \sum_{i,j} \varphi(x)_{ij} \otimes \varphi(y)_{ji} = \mathrm{Tr}_2(\varphi(x) \otimes \varphi(y))$ (*voir* 1.3),

— $\theta(u_{ij}(a)) = 0$.

Remarquons tout de suite que $\theta(H_{ij}(a,b)) = a \otimes b$.

Pour montrer que θ est bien défini, il faut vérifier les trois conditions suivantes :

i) $\theta([x,x]) = 0$ dans $C_2(A)/\mathrm{Im}\, d$,

ii) $\theta([x,[y,z]]) + \theta([y,[z,x]]) + \theta([z,[x,y]]) = 0$,

iii) $\theta([u_{ij}(a),u_{k\ell}(b)]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq \ell \text{ et } j \neq k \\ \theta(u_{i\ell}(ab)) & \text{si } i \neq \ell \text{ et } j = k . \end{cases}$

Supposons ces conditions vérifiées. Alors

$$\begin{aligned} \theta \circ \eta(a \otimes b) &= \theta H_{1j}(a,b) - \theta H_{1j}(1,ba) \\ &= a \otimes b - 1 \otimes ba . \end{aligned}$$

Or $1 \otimes ba = -d(a \otimes 1 \otimes b)$ dans $C_2(A)$. Donc $\theta \circ \eta$ est l'identité de $C_2(A)/\mathrm{Im}(d)$. Par ailleurs, l'algèbre de Lie $\mathfrak{st}_n(A)$ est engendrée en tant que k-module par les éléments $u_{ij}(a)$ et $H_{ij}(a,b)$ (1.11). Si donc on veut vérifier la commutativité du diagramme du lemme 1.17, il suffit de le faire sur ces éléments-là.

$$\begin{aligned} d\theta(u_{ij}(a)) &= 0 = \mathrm{Trace}\ (E_{ij}(a)), \\ d\theta(H_{ij}(a,b)) &= d(a \otimes b) \\ &= ab - ba = \mathrm{Trace}\ (E_{ii}(ab) - E_{jj}(ba)) \\ &= \mathrm{Trace}\ (\varphi(H_{ij}(a,b)). \end{aligned}$$

Ce qui démontre le lemme 1.17. Passons maintenant à la vérification des conditions (i), (ii) et (iii) énoncées plus haut.

La condition (iii) est immédiate. Pour la condition (i) il faut calculer dans $C_2(A)/\mathrm{Im}\, d$ l'expression $\mathrm{Tr}_2(m \otimes m)$ pour toute matrice m de $\mathfrak{sl}_n(A)$. Il est facile de se ramener au cas où $m = E_{11}(ab-ba)$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_2(m \otimes m) &= (ab-ba) \otimes (ab-ba) = ab \otimes ab + ba \otimes ba \\ &= d(a \otimes ba \otimes b - ab \otimes a \otimes b) \\ &= 0 \text{ dans } C_2(A)/\mathrm{Im}\, d. \end{aligned}$$

Pour (ii), en sommant sur les permutations cycliques de x, y et z, on a :

$$\begin{aligned} &\Sigma\theta[x,[y,z]] \\ &\quad = \Sigma\, \mathrm{Tr}_2(\varphi(x) \otimes (\varphi(y)\varphi(z) - \varphi(z)\varphi(y)) \\ &\quad = \mathrm{Tr}_2\, d(\varphi(x) \otimes \varphi(z) \otimes \varphi(y)) - \mathrm{Tr}_2\, d(\varphi(x) \otimes \varphi(y) \otimes \varphi(z)) \\ &\quad = d\, \mathrm{Tr}_3(\varphi(x) \otimes \varphi(z) \otimes \varphi(y) - \varphi(x) \otimes \varphi(y) \otimes \varphi(z)) \text{ (d'après 1.3)} \\ &\quad = 0 \text{ dans } C_2(A)/\mathrm{Im}\, d. \qquad \square \end{aligned}$$

Une autre manière de démontrer l'injectivité de η consiste à vérifier que l'application

$$x \wedge y \mapsto f(x,y) = \mathrm{Tr}_2(x \otimes y) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_{ij} \otimes y_{ji}$$

est un 2-cocycle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(A)$ à valeurs dans le module trivial $C_2(A)/\mathrm{Im}\, d$ (pour l'homologie et la cohomologie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on utilise le complexe standard $\cdots \to \Lambda^i_k \mathfrak{g} \to \Lambda^{i-1}_k \mathfrak{g} \to \cdots$ décrit dans [2], XIII, 7). Ce 2-cocycle définit une extension centrale

$\mathfrak{l}_n = C_2(A)/\mathrm{Im}\, d \oplus \mathfrak{sl}_n(A)$ de $\mathfrak{sl}_n(A)$ par la formule $[(c,x),(c',y)] = (f(x,y),[x,y])$. On obtient un homomorphisme ρ de $\mathfrak{st}_n(A)$ dans $\mathfrak{l}_n$ au-dessus de $\mathfrak{sl}_n(A)$ en posant $\rho(u_{ij}(a)) = (0,E_{ij}(a))$. En composant avec η, on a : $\rho\eta(c) = (c,E_{11}(dc))$, d'où on déduit l'injectivité de η.

On observe, par ailleurs, que $\mathfrak{st}_n(A)$ est isomorphe, via ρ, à l'extension centrale $\mathfrak{l}_n$ donnée par le 2-cocycle f si et seulement si l'inclusion $HC_2(A) \to C_2(A)/\mathrm{Im}\, d$ est bijective, ce qui, par définition du complexe $C_*(A)$, est équivalent à la commutativité de A. Dans ce cas, le cocycle f prend bien la forme énoncée au théorème 1.7.

Puisque dans le cas de $\mathfrak{sl}_n(A)$, on a l'isomorphisme

$$H^2(\mathfrak{sl}_n(A),C) \simeq \mathrm{Hom}_k(H_2(\mathfrak{sl}_n(A),k),C)$$

pour tout $\mathfrak{sl}_n(A)$-module trivial C, il résulte de ce qui précède qu'on a la

PROPOSITION 1.18. — *Soit* $3 \leqslant n \leqslant \infty$ *et* A *un k-module libre. Alors l'application de* $H_2(\mathfrak{sl}_n(A),k)$ *dans le noyau* $\mathfrak{p}_n \simeq HC_2(A)$ *de l'extension centrale* $\mathfrak{st}_n(A)$ *de* $\mathfrak{sl}_n(A)$ *est induite par*

$$x \wedge y \mapsto \mathrm{Tr}_2(x \otimes y) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_{ij} \otimes y_{ji}$$

$(x,y \in \mathfrak{sl}_n(A))$. *Lorsque* A *est commutative et que* $HC_2(A) \simeq \Omega^1_{A/k}/dA$, *elle se met sous la forme* $x \wedge y \mapsto \mathrm{Trace}\,(xdy)$.

2. Extensions relatives.

Par analogie avec la K-théorie algébrique définie à partir du groupe linéaire, il est naturel de définir la K-théorie algébrique de l'algèbre de Lie des matrices comme suit.

DÉFINITIONS 2.1. — *Soient* k *un anneau commutatif et* A *une k-algèbre unitaire associative. On considère l'homomorphisme* $\varphi_A : \mathfrak{st}(A) \longrightarrow \mathfrak{gl}(A)$ (*dont l'image est* $\mathfrak{sl}(A)$) *défini en* 1.10 *et on pose*

$$K_1^L(A) = \mathrm{Coker}\, \varphi_A \qquad et \qquad K_2^L(A) = \mathrm{Ker}\, \varphi_A .$$

On a évidemment $K_1^L(A) \cong HC_1(A)$ et le théorème 1.7 se reformule en

$K_2^L(A) \cong HC_2(A)$. Lorsque A est libre sur k, on a aussi $K_1^L(A) \cong H_1(\mathfrak{gl}(A),k)$ et $K_2^L(A) \cong H_2(\mathfrak{sl}(A),k)$. Il est naturel de poser $K_3^L(A) = H_3(\mathfrak{st}(A),k)$.

On se propose d'étudier des groupes analogues définis pour un idéal bilatère I de A. Dans toutes les constructions de ce paragraphe, il est possible de remplacer $\mathfrak{gl}$ (resp. $\mathfrak{sl}$, resp. $\mathfrak{st}$) par $\mathfrak{gl}_n$ (resp. $\mathfrak{sl}_n$, resp. $\mathfrak{st}_n$) où n est un entier supérieur ou égal à 5 ou supérieur ou égal à 2 si $\frac{1}{2} \in k$. Tous les énoncés restent vrais dans ces cas-là.

Soit $D = A \times_{A/I} A$ le produit fibré de A par lui-même au-dessus de A/I. On note p_1 (resp. p_2) la première (resp. seconde) projection et p_{1*} (resp. p_{2*}) l'application induite $\mathfrak{st}(D) \to \mathfrak{st}(A)$. Ces deux projections sont scindées par la diagonale $\Delta : A \to D$, $a \mapsto (a, a)$.

Soit $\mathfrak{c}(I) = [\operatorname{Ker} p_{1*}, \operatorname{Ker} p_{2*}]$ l'idéal de $\mathfrak{st}(D)$ engendré par les crochets $[x,y]$ d'éléments x et y de l'algèbre de Lie $\mathfrak{st}(D)$ tels que $p_{1*}(x) = 0$ et $p_{2*}(y) = 0$.

On pose

$$\begin{aligned}
\mathfrak{st}(A,I) &= \operatorname{Ker}(p_{1*} : \mathfrak{st}(D)/\mathfrak{c}(I) \to \mathfrak{st}(A)) \\
\mathfrak{sl}(A,I) &= \operatorname{Ker}(p_{1*}^{\mathfrak{sl}} : \mathfrak{sl}(D) \to \mathfrak{sl}(A)) \quad \text{et} \\
\mathfrak{gl}(A,I) &= \operatorname{Ker}(p_{1*}^{\mathfrak{gl}} : \mathfrak{gl}(D) \to \mathfrak{gl}(A)) = \mathfrak{gl}(I).
\end{aligned}$$

L'homomorphisme φ_D induit $\varphi_{A,I} : \mathfrak{st}(A,I) \to \mathfrak{gl}(A,I)$ dont l'image est $\mathfrak{sl}(A,I)$. Si A est commutative, $\mathfrak{sl}(A,I) \cong \mathfrak{sl}(I)$.

DÉFINITION 2.2. — *Pour tout idéal bilatère* I *de* A *on définit les groupes relatifs* $K_i^L(A,I)$ *lorsque* $i = 1$ *et* 2 *par*

$$\begin{aligned}
K_1^L(A,I) &= \operatorname{Coker}(\varphi_{A,I} : \mathfrak{st}(A,I) \to \mathfrak{gl}(A,I)) \\
K_2^L(A,I) &= \operatorname{Ker}(\varphi_{A,I} : \mathfrak{st}(A,I) \to \mathfrak{gl}(A,I)).
\end{aligned}$$

Un calcul direct utilisant l'isomorphisme $K_1^L(A) \simeq A/[A,A]$ montre que $K_1^L(A,I) \simeq I/[A,I]$.

THÉORÈME 2.3. — *Pour tout épimorphisme* $A \to A/I$ *de k-algèbres associatives, libres sur* k, *on a une suite exacte*

$$K_3^L(A) \to K_3^L(A/I) \to K_2^L(A,I) \to K_2^L(A) \to \cdots \to K_1^L(A/I) \to 0.$$

Démonstration. — On considère le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& K_2^L(A,I) \arrow[r] \arrow[d] & K_2^L(A) \arrow[r] \arrow[d] & K_2^L(A/I) \arrow[d] & \\
& \mathfrak{st}(A,I) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{st}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{st}(A/I) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{gl}(A,I) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{gl}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{gl}(A/I) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& K_1^L(A,I) \arrow[r] \arrow[d] & K_1^L(A) \arrow[r] \arrow[d] & K_1^L(A/I) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Les applications $\mathfrak{st}(A,I) \to \mathfrak{st}(A)$ et $\mathfrak{gl}(A,I) \to \mathfrak{gl}(A)$ sont induites par p_2.

Les deux colonnes de droite sont exactes d'après (*).

La colonne de gauche est exacte par définition.

La ligne en $\mathfrak{gl}$ est exacte car $\mathfrak{gl}(A,I) = \mathfrak{gl}(I)$.

Montrons l'exactitude de la ligne en $\mathfrak{st}$.

LEMME 2.4. — *La suite* $\mathfrak{st}(A,I) \to \mathfrak{st}(A) \to \mathfrak{st}(A/I) \to 0$ *est exacte.*

Démonstration. — Puisque l'image par p_{2*} de $\mathfrak{c}(I)$ dans $\mathfrak{st}(A)$ est triviale, il suffit de montrer l'exactitude de la suite

$$\operatorname{Ker}(p_{1*} : \mathfrak{st}(D) \to \mathfrak{st}(A)) \xrightarrow{p_{2*}} \mathfrak{st}(A) \to \mathfrak{st}(A/I) \to 0.$$

Pour cela on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{st}(D) \arrow[r, "p_{2*}"] \arrow[d, shift right, "p_{1*}"'] & \mathfrak{st}(A) \arrow[d] \\
\mathfrak{st}(A) \arrow[r] \arrow[u, dashed, shift right, "\Delta_*"'] & \mathfrak{st}(A/I)
\end{tikzcd}$$

où Δ_* est induit par l'application diagonale Δ.

Tout générateur $u_{ij}(a,b)$ de $\mathfrak{st}(D)$ s'écrit

$$u_{ij}(a,a) + u_{ij}(0,b-a),$$

soit encore

$$u_{ij}(a,b) = \Delta_*(u_{ij}(a)) + u_{ij}(0,t) \qquad \text{avec} \qquad t = b - a \in \mathrm{I}.$$

Ainsi $\operatorname{Ker} p_{1*} \simeq \operatorname{Coker} \Delta_*$ est engendré, en tant que sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{st}(\mathrm{D})$ par les $u_{ij}(0,t)$ avec $t \in \mathrm{I}$ (Comparer avec [9], p. 53). Il est immédiat d'après 1.6. que si l'on ajoute $u_{ij}(t) = 0$ pour $t \in \mathrm{I}$ aux relations de définition de $\mathfrak{st}(\mathrm{A})$ on trouve une présentation de $\mathfrak{st}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$. Ceci montre l'exactitude cherchée.

□

Suite et fin de la démonstration du théorème 2.3. — Comme conséquence du lemme précédent on déduit, par le lemme du serpent, l'exactitude de la suite

$$\mathrm{K}_2^{\mathrm{L}}(\mathrm{A},\mathrm{I}) \to \mathrm{K}_2^{\mathrm{L}}(\mathrm{A}) \to \cdots \to \mathrm{K}_1^{\mathrm{L}}(\mathrm{A}/\mathrm{I}) \to 0.$$

La fin de la démonstration découle immédiatement du lemme ci-dessous et de la définition de $\mathrm{K}_3^{\mathrm{L}}$.

□

LEMME 2.5. — *Si* A *et* A/I *sont libres sur* k, *le noyau de* $\mathfrak{st}(\mathrm{A},\mathrm{I}) \to \mathfrak{st}(\mathrm{A})$ (*et donc de* $\mathrm{K}_2^{\mathrm{L}}(\mathrm{A},\mathrm{I}) \to \mathrm{K}_2^{\mathrm{L}}(\mathrm{A})$) *est isomorphe à* $\operatorname{Coker}(\mathrm{H}_3(\mathfrak{st}(\mathrm{A}),k) \to \mathrm{H}_3(\mathfrak{st}(\mathrm{A}/\mathrm{I}),k))$.

Démonstration. — Considérons les homomorphismes d'algèbres de Lie p_{1*} et $p_{2*} : \mathfrak{st}(\mathrm{D}) \to \mathfrak{st}(\mathrm{A})$ et $\Delta_* : \mathfrak{st}(\mathrm{A}) \to \mathfrak{st}(\mathrm{D})$. Nous allons montrer que nous sommes dans les conditions de la proposition A.5 de l'appendice avec $\mathfrak{g} = \mathfrak{st}(\mathrm{D})$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{st}(\mathrm{A})$, $s = p_{1*}$, $b = p_{2*}$ et $i = \Delta_*$.

Tout d'abord il est clair que $p_{1*}\Delta_* = p_2\Delta_* = \mathrm{id}$. D'autre part, d'après 1.8 et 1.4, $\mathrm{H}_1(\mathfrak{st}(\mathrm{D}),k) = \mathrm{H}_2(\mathfrak{st}(\mathrm{D}),k) = 0$.

Enfin le sous-groupe $\operatorname{Ker} p_{1*} \cap \operatorname{Ker} p_{2*}$ de $\mathfrak{st}(\mathrm{D})$ a une image triviale dans $\mathfrak{sl}(\mathrm{D})$, il appartient donc au centre de $\mathfrak{st}(\mathrm{D})$, en particulier

$$[\Delta_*(\mathfrak{st}(\mathrm{A})), \operatorname{Ker} p_{1*} \cap \operatorname{Ker} p_{2*}] = 0.$$

L'application de la proposition A.5 montre que

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(\operatorname{Ker} p_{1*}/\mathfrak{c}(\mathrm{I}) \xrightarrow{p_{2*}} \mathfrak{st}(\mathrm{A})) &\cong \operatorname{Ker}(\mathfrak{st}(\mathrm{A},\mathrm{I}) \to \mathfrak{st}(\mathrm{A})) \\ &= \operatorname{Ker}(\mathrm{K}_2^{\mathrm{L}}(\mathrm{A},\mathrm{I}) \to \mathrm{K}_2^{\mathrm{L}}(\mathrm{A}))\end{aligned}$$

est isomorphe à $\operatorname{Coker}(\mathrm{H}_3(\mathfrak{st}(\mathrm{A}),k) \to \mathrm{H}_3(\mathfrak{st}(\mathrm{A}/\mathrm{I}),k))$. □

2.6. La surjection $A \to A/I$ induit un homomorphisme surjectif de complexes de Connes $C_*(A) \to C_*(A/I)$ (voir 1.1). On note $C_*(A,I)$ le complexe noyau et $HC_*(A,I)$ les groupes d'homologie de ce complexe.

On remarque que $C_0(A,I)=0$, $C_1(A,I) = I$ et $C_2(A,I)$ est l'image de $A \underset{k}{\otimes} I + I \underset{k}{\otimes} A$ dans $C_2(A)$. On en déduit

$$HC_0(A,I) = 0 \qquad \text{et} \qquad HC_1(A,I) = I/[A,I] \simeq K_1^L(A,I)\,.$$

THÉORÈME 2.7. — *Pour toute surjection de k-algèbres libres* $A \to A/I$ *on a un isomorphisme*

$$K_2^L(A,I) \xrightarrow{\sim} HC_2(A,I)\,.$$

En particulier si A *est commutatif* $K_2^L(A,I)$ *est le quotient du sous-groupe* $I \underset{k}{\otimes} A + A \underset{k}{\otimes} I$ *de* $A \underset{k}{\otimes} A$ *par les relations*

$$\begin{array}{ll} a \otimes b + b \otimes a = 0 & (a \text{ ou } b \in I) \\ ab \otimes c - a \otimes bc + ca \otimes b = 0 & (a \text{ ou } b \text{ ou } c \in I)\,. \end{array}$$

Dans ce cas particulier le symbolisme des formes différentielles permet d'écrire ce groupe sous la forme $\Omega^1_{A,I/k}/dI$.

Démonstration. — Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathfrak{st}(A,I) & \to & \mathfrak{st}(D)/\mathfrak{c}(I) & \to & \mathfrak{st}(A) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathfrak{sl}(A,I) & \to & \mathfrak{sl}(D) & \to & \mathfrak{sl}(A) & \to & 0 \end{array}$$

les lignes sont exactes et scindées. Par conséquent les noyaux des flèches verticales forment une suite exacte (scindée), on a donc

$$K_2^L(A,I) = \operatorname{Ker}\,(K_2^L(D)/\mathfrak{c}(I) \xrightarrow{p_{1*}} K_2^L(A))\,.$$

La longue suite exacte de la projection p_1 pour l'homologie de Connes nous donne $HC_2(D,I_1) = \operatorname{Ker}\,(HC_2(D) \to HC_2(A))$ où $I_1 = \operatorname{Ker} p_1$.

Le corollaire 1.9. nous permet donc d'affirmer que $K_2^L(A,I)$ est isomorphe à $HC_2(D,I_1)/\text{image de } \mathfrak{c}(I)$.

Le théorème résulte immédiatement du lemme 2.8. □

LEMME 2.8. — *L'image de* $\mathfrak{c}(\mathrm{I})$ *dans* $\mathrm{HC}_2(\mathrm{D})$ *est*

$$c(\mathrm{I}) = \{\Sigma(0,t) \otimes (s,0) | s,t \in \mathrm{I}\}$$

et $\mathrm{HC}_2(\mathrm{D},\mathrm{I}_1)/c(\mathrm{I})$ *est isomorphe à* $\mathrm{HC}_2(\mathrm{A},\mathrm{I})$.

Démonstration. — Soient $x, y \in \mathfrak{st}(\mathrm{D})$ tels que $p_{1*}(x) = 0 = p_{2*}(y)$. D'après la démonstration de la proposition 1.18 l'image du commutateur $[x,y] \in \mathfrak{c}(\mathrm{I}) \subset \operatorname{Ker} \varphi_{\mathrm{D}}$ dans $\mathrm{HC}_2(\mathrm{D})$ est la classe de $\sum_{i,j} \varphi_{\mathrm{D}}(x)_{ij} \otimes \varphi_{\mathrm{D}}(y)_{ji}$. Puisque $p_{1*}(x) = 0 = p_{2*}(y)$ on a

$$\varphi_{\mathrm{D}}(x)_{ij} = (0,t_{ij}) \qquad \text{et} \qquad \varphi_{\mathrm{D}}(y)_{ji} = (s_{ji},0) \qquad \text{avec} \qquad t_{ij},s_{ji} \in \mathrm{I}.$$

On en conclut que l'image de $\mathfrak{c}(\mathrm{I})$ dans $\mathrm{HC}_2(\mathrm{D})$ est $c(\mathrm{I})$.

Pour démontrer la seconde partie du lemme on remarque que l'homomorphisme $\mathrm{HC}_2(\mathrm{D},\mathrm{I}_1) \to \mathrm{HC}_2(\mathrm{A},\mathrm{I})$ induit par p_2 passe au quotient par $c(\mathrm{I})$. On construit un homomorphisme de $\mathrm{HC}_2(\mathrm{A},\mathrm{I})$ vers $\mathrm{HC}_2(\mathrm{D},\mathrm{I}_1)/c(\mathrm{I})$ en envoyant $a \otimes t$ sur $(a,a) \otimes (0,t)$ et $t \otimes a$ sur $(0,t) \otimes (a,a)$ lorsque $t \in \mathrm{I}$ et $a \in \mathrm{A}$. Il n'y a pas d'ambiguité car si t et $a \in \mathrm{I}$ on a

$$\begin{aligned}(a,a) &\otimes (0,t) - (0,a) \otimes (t,t) \\ &= (a,0) \otimes (0,t) - (0,a) \otimes (t,0) = 0 \mod c(\mathrm{I}).\end{aligned}$$

On vérifie aisément qu'on a défini un homomorphisme inverse du précédent. □

Remarque. — On peut définir des groupes birelatifs $\mathrm{K}_i^{\mathrm{L}}(\mathrm{A};\mathrm{I},\mathrm{J})$ $i = 1,2$ lorsque I et J sont des idéaux bilatères de A comme dans le cas de la K-théorie algébrique ([4]). Si l'intersection $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ est nulle on trouve

$$\mathrm{K}_2^{\mathrm{L}}(\mathrm{A};\mathrm{I},\mathrm{J}) \simeq \mathrm{I} \underset{\mathrm{A}^e}{\otimes} \mathrm{J} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{A}^e = \mathrm{A} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathrm{A}^{op}.$$

2.9. Le théorème 2.7. permet de donner une interprétation homologique du groupe $\mathrm{K}_2^{\mathrm{L}}(\mathrm{A},\mathrm{I})$ lorsque A et A/I sont libres sur k et par suite de calculer un groupe d'homologie relative d'algèbres de Lie en termes de l'homologie de Connes (plus facile à calculer).

On considère la surjection $\nu : \mathfrak{sl}(\mathrm{A}) \to \mathfrak{sl}(\mathrm{A})/\mathfrak{sl}(\mathrm{A},\mathrm{I})$ qui s'identifie dans le cas commutatif à $\mathfrak{sl}(\mathrm{A}) \to \mathfrak{sl}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$.

PROPOSITION 2.10. — *Le groupe* $K_2^L(A,I)$ *est isomorphe au groupe d'homologie relative d'algèbres de Lie* $H_3(\mathfrak{sl}(A)/\mathfrak{sl}(A,I),\mathfrak{sl}(A);k)$.

COROLLAIRE 2.11. — *Le groupe d'homologie relative*

$$H_3(\mathfrak{sl}(A)/\mathfrak{sl}(A,I),\mathfrak{sl}(A);k)$$

est isomorphe à $HC_2(A,I)$. *En particulier si* A *est une k-algèbre commutative* $H_3(\mathfrak{sl}(A/I),\mathfrak{sl}(A);k) \simeq HC_2(A,I)$.

□

Démonstration de 2.10. — Le groupe $H_2(\mathfrak{sl}(A)/\mathfrak{sl}(A,I),\mathfrak{sl}(A);k)$ est nul. En effet c'est le conoyau de

$$H_2(\mathfrak{sl}(A),k) \to H_2(\mathfrak{sl}(A)/\mathfrak{sl}(A,I),k), \text{ c'est-à-dire (théorème 2.3)}$$

le conoyau de la surjection $K_2^L(A) \to \operatorname{Im}(K_2^L(A) \to K_2^L(A(I))$ (on utilise ici le fait que $\mathfrak{st}(A/I)$ est l'extension centrale universelle de $\mathfrak{sl}(A)/\mathfrak{sl}(A,I))$.

D'après A.4, il existe donc un module croisé central universel de conoyau ν. C'est

$$0 \to K_2^L(A,I) \to \mathfrak{st}(A,I) \xrightarrow{\mu} \mathfrak{sl}(A) \xrightarrow{\nu} \mathfrak{sl}(A)/\mathfrak{sl}(A,I) \to 0$$

où μ est le composé de la projection sur $\mathfrak{sl}(A,I)$ avec l'inclusion de $\mathfrak{sl}(A,I)$ dans $\mathfrak{sl}(A)$. L'action de $\mathfrak{sl}(A)$ sur $\mathfrak{st}(A,I)$ se décrit à partir de celle de $\mathfrak{st}(A)$ sur $\mathfrak{st}(A,I)$. On en conclut d'après A.4 que $K_2^L(A,I)$ est isomorphe à $H_3(\mathfrak{sl}(A)/\mathfrak{sl}(A,I),\mathfrak{sl}(A);k)$.

□

Remarque 2.12. — On peut montrer qu'il existe un homomorphisme naturel $K_3^L(A) \to HC_3(A)$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc}
K_3^L(A) & \to & K_3^L(A/I) & \to & K_2^L(A,I) & \to & K_2^L(A) & \to \cdots \to & K_1^L(A/I) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & \\
HC_3(A) & \to & HC_3(A/I) & \to & HC_2(A,I) & \to & HC_2(A) & \to \cdots \to & HC_1(A/I) & \to & 0
\end{array}$$

Appendice : Modules croisés d'algèbres de Lie.

Le but de cet appendice est de démontrer quelques résultats concernant les groupes d'homologie relative d'algèbres de Lie que l'on utilise dans le paragraphe 2. On est amené à regarder des suites exactes à quatre termes munies d'une structure supplémentaire : les modules croisés d'algèbres de Lie. Dans [8] on a démontré pour les modules croisés de groupes des résultats similaires à ceux exposés ici, aussi renvoie-t-on le lecteur à cette référence pour les démonstrations où les seules modifications consistent à remplacer « groupe » par « algèbre de Lie ».

Dans cet appendice k est un anneau commutatif avec unité et toutes les k-algèbres de Lie sont des k-modules libres.

DÉFINITION A.1. — Un *module croisé d'algèbres de Lie* est la donnée d'un homomorphisme de k-algèbres de Lie $\mu : \mathfrak{m} \to \mathfrak{n}$ et d'une action de $\mathfrak{n}$ sur $\mathfrak{m}$, soit $\eta : \mathfrak{n} \to \mathfrak{Der}\, \mathfrak{m}$ (= algèbre de Lie des dérivations) tels que

1) $\mu(\eta(n).m) = [n,\mu(m)]$,

2) $\eta(\mu(m)).m' = [m, m']$, $n \in \mathfrak{n}$ et $m, m' \in \mathfrak{m}$.

Ces conditions impliquent que dans la suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to \mathrm{L} \to \mathfrak{m} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{n} \to \mathfrak{p} \to 0$$

L est une sous-algèbre centrale de $\mathfrak{m}$ et que $\mathfrak{p}$ opère sur L (via η). On dit que le module croisé est *central* si l'action de $\mathfrak{p}$ sur L est triviale. Désormais on se fixe un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie $\nu : \mathfrak{n} \to \mathfrak{p}$ et un $\mathfrak{p}$-module L. On considère tous les modules croisés (μ) qui admettent ν comme application conoyau et L comme noyau (avec sa structure de $\mathfrak{p}$-module). Deux tels modules croisés (μ) et (μ') seront dits *équivalents* s'il existe un isomorphisme $f : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}'$ compatible avec les actions η et η' et qui vérifie $\mu' \circ f = \mu$ et $f_{|\mathrm{L}} = \mathrm{id}_{\mathrm{L}}$. On note $\mathrm{CML}(\mathfrak{p},\mathfrak{n};\mathrm{L})$ l'ensemble des classes d'équivalence de modules croisés d'algèbres de Lie d'application conoyau ν et de noyau L.

THÉORÈME A.2. — *Il y a une bijection naturelle* $\mathrm{CML}(\mathfrak{p},\mathfrak{n};\mathrm{L}) \simeq \mathrm{H}^3(\mathfrak{p},\mathfrak{n};\mathrm{L})$ *où le groupe de droite est un groupe de cohomologie relative d'algèbres de Lie à coefficients dans le* $\mathfrak{p}$*-module* L.

Explicitement le groupe $\mathrm{H}^3(\mathfrak{p},\mathfrak{n};\mathrm{L})$ se décrit de la manière suivante. Soit $\mathrm{C}^*(\mathfrak{p};\mathrm{L})$ (resp. $\mathrm{C}^*(\mathfrak{n};\mathrm{L})$) le complexe standard $(\mathrm{C}^n(\mathfrak{p};\mathrm{L}) = \mathrm{Hom}_k(\Lambda_k^n\mathfrak{p},\mathrm{L}))$ donnant la cohomologie de $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{n}$) à coefficients dans L. La suite exacte

$$0 \to \mathrm{C}^*(\mathfrak{p};\mathrm{L}) \xrightarrow{\nu^*} \mathrm{C}^*(\mathfrak{n};\mathrm{L}) \xrightarrow{\kappa^*} \mathrm{C}^*(\mathfrak{p},\mathfrak{n};\mathrm{L}) \to 0$$

définit le complexe $C^*(\mathfrak{p},\mathfrak{n};L)$. L'homologie en $C^2(\mathfrak{p},\mathfrak{n};L)$ est notée $H^3(\mathfrak{p},\mathfrak{n};L)$. On définit de manière analogue les groupes d'homologie relative $H_*(\mathfrak{p},\mathfrak{n};L)$.

Démonstration. — Nous allons tout d'abord établir l'existence d'une application $CML(\mathfrak{p},\mathfrak{n};L) \to H^3(\mathfrak{p},\mathfrak{n};L)$, puis nous construirons une application en sens inverse.

Classe de cohomologie relative d'un module croisé d'algèbres de Lie. Soit $(\mu : \mathfrak{m} \to \mathfrak{n})$ un module croisé d'algèbres de Lie d'application conoyau ν et de noyau L. On note $n.m$ l'action de $n \in \mathfrak{n}$ sur $m \in \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{v} = \operatorname{Im} \mu = \operatorname{Ker} \nu$. Puisque toutes ces algèbres de Lie sont libres sur k il existe des sections k-linéaires $s : \mathfrak{p} \to \mathfrak{n}$ et $\sigma : \mathfrak{v} \to \mathfrak{m}$. Pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathfrak{p}$ on pose

$$g(x,y) = \sigma([s(x),s(y)] - s[x,y]) \in \mathfrak{m}\,.$$

Pour tout $n \in \mathfrak{n}$ on pose $\Psi(n) = \sigma(n - s\nu(n)) \in \mathfrak{m}$.

Pour tout n et $n' \in \mathfrak{n}$ on pose

$$f(n,n') = g(\nu n,\nu n') - n'.\Psi(n) + n.\Psi(n') - [\Psi(n),\ \Psi(n')] + \Psi[n,n']\,.$$

On constate que f est à valeurs dans L et qu'il définit donc une cochaîne $f \in C^2(\mathfrak{n},L)$. Son image $\kappa^*f \in C^2(\mathfrak{p},\mathfrak{n};L)$ est la cochaîne cherchée. Nous allons montrer que κ^*f est un cocycle dont la classe de cohomologie dans $H^3(\mathfrak{p},\mathfrak{n};L)$ est indépendante du choix des sections s et σ. Posons pour tout $x, y, z \in \mathfrak{p}$

$$k(x,y,z) = \Sigma g(x,[y,z]) + \Sigma s(x).g(y,z) \in L\,,$$

les sommes étant étendues aux permutations cycliques des trois lettres x, y et z.

$$\begin{array}{ccc}
C^2(\mathfrak{p},L) & \xrightarrow{\delta} & C^3(\mathfrak{p},L) \\
\downarrow{\scriptstyle \nu^*} & & \downarrow{\scriptstyle \nu^*} \\
C^2(\mathfrak{n},L) & \xrightarrow{\delta} & C^3(\mathfrak{n},L) \\
\downarrow{\scriptstyle \kappa^*} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa^*} \\
C^2(\mathfrak{p},\mathfrak{n};L) & \xrightarrow{\delta} & C^3(\mathfrak{p},\mathfrak{n};L)
\end{array}$$

Un calcul direct montre que $\delta f = \nu^* k \in C^3(\mathfrak{n},L)$. Ainsi on a $\delta\kappa^* f = \kappa^*\delta f = \kappa^*\nu^* f = 0$, c'est-à-dire que $\kappa^* f$ est un cocycle.

Supposons que l'on choisisse une autre section σ' à la place de σ, alors $\kappa^* f$ est modifié par l'addition d'un cobord. Si l'on modifie s en s', alors il existe une modification de σ qui laisse $\kappa^* f$ inchangé (on pourra se reporter à [10] pour les calculs explicites).

D'autre part, si l'on a deux modules croisés équivalents, il est clair que l'on peut choisir les sections de telle manière que les cocycles associés soient les mêmes. Ainsi l'application qui au module croisé d'algèbres de Lie associe la classe de $\kappa^* f$ est une application bien définie

$$\mathrm{CML}(\mathfrak{p},\mathfrak{n};L) \to H^3(\mathfrak{p},\mathfrak{n};L).$$

Module croisé d'invariant donné.

Inversement supposons donné un cocycle dans $C^2(\mathfrak{p},\mathfrak{n};L)$ que l'on relève en une cochaîne $f \in C^2(\mathfrak{n},L)$.

L'hypothèse que $\kappa^* f$ est un cocycle implique l'existence de $k \in C^3(\mathfrak{p},L)$ tel que $\delta f = \nu^* k$. En particulier la restriction de f à $\mathfrak{v} = \mathrm{Ker}\,\nu$ fournit un cocycle de $C^2(\mathfrak{v},L)$. On en déduit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{m} = L \times \mathfrak{v}$ donné par

$$[(\ell,v),(\ell',v')] = (f(v,v'),[v,v']).$$

Il nous faut maintenant définir l'action de $\mathfrak{n}$ sur $\mathfrak{m}$. On pose $n.(\ell,v) = ((\nu n).\ell + f(n,v),[n,v])$.

On vérifie en utilisant les propriétés de f que cette action est bien définie et qu'elle fait de $\mu : \mathfrak{m} \to \mathfrak{n}$, $(\ell,v) \mapsto v$ un module croisé d'algèbres de Lie.

L'addition à f d'un cobord n'affecte pas la classe d'équivalence du module croisé.

Enfin il est facile de voir que l'invariant de ce module croisé est la classe de cohomologie de $H^3(\mathfrak{p},\mathfrak{n};L)$ dont on est parti (comparer avec [8], p. 186-187).

Pour montrer que la composition dans l'autre sens est l'identité on construit explicitement un morphisme du module croisé de départ (μ) vers le module croisé (μ') construit à partir de l'invariant de (μ) (cf. loc. cit.).

Une version « absolue » du théorème précédent a été démontrée sous une forme un peu différente par Hochschild dans [5]. On en donne simplement l'énoncé, sa démonstration résultant sans difficultés du théorème A.2.

THÉORÈME A.3. — *Soit* $\mathfrak{p}$ *une k-algèbre de Lie libre et* L *un* $\mathfrak{p}$*-module. Sur l'ensemble des modules croisés* (μ) *de conoyau* $\mathfrak{p}$ *et de noyau (en tant que* $\mathfrak{p}$*-module)* L, *on met la relation d'équivalence engendrée par la relation* $(\mu) \sim (\mu')$ *si et seulement s'il existe un homomorphisme induisant l'identité sur* $\mathfrak{p}$ *et sur le* $\mathfrak{p}$*-module* L. *Alors il y a une bijection naturelle entre l'ensemble quotient* $\mathrm{CML}(\mathfrak{p},\mathrm{L})$ *et le groupe* $\mathrm{H}^3(\mathfrak{p},\mathrm{L})$.

□

Le théorème A.2. permet de développer une théorie des extensions centrales universelles des modules croisés d'algèbres de Lie, similaire à celle qui existe pour les groupes [8]. Nous ne traiterons ici que la partie nécessaire aux démonstrations du paragraphe 2.

Fixons un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie $\nu : \mathfrak{n} \to \mathfrak{p}$. Un module croisé $\mu : \mathfrak{m} \to \mathfrak{n}$ d'application conoyau ν est dit *universel* si pour tout autre module croisé (μ') d'application conoyau ν il existe un unique morphisme de (μ) dans (μ') qui induit l'identité sur $\mathfrak{n}$ et sur $\mathfrak{p}$. En utilisant le théorème A.2. et des arguments classiques [8] [3] on montre le

THÉORÈME A.4. — *La surjection d'algèbres de Lie* $\nu : \mathfrak{n} \to \mathfrak{p}$ *est le conoyau d'un module croisé central universel si et seulement si le groupe d'homologie relative* $\mathrm{H}_2(\mathfrak{p},\mathfrak{n};k)$ *est nul. Dans ce cas le noyau de ce module croisé est* $\mathrm{H}_3(\mathfrak{p},\mathfrak{n};k)$ *et son invariant est*

$$\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}\,(\mathrm{H}_3(\mathfrak{p},\mathfrak{n};k),\mathrm{H}_3(\mathfrak{p},\mathfrak{n};k)) \simeq \mathrm{H}^3(\mathfrak{p},\mathfrak{n};\mathrm{H}_3(\mathfrak{p},\mathfrak{n};k)).$$

Le résultat suivant, dont on se sert dans le paragraphe 2, indique comment dans un cas particulier, on peut construire le module croisé central universel à partir d'une certaine extension centrale universelle d'algèbres de Lie.

PROPOSITION A.5. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{n}$ *des k-algèbres de Lie (libres en tant que k-modules) et* $s, b : \mathfrak{g} \to \mathfrak{n}$, $i : \mathfrak{n} \to \mathfrak{g}$ *des homomorphismes vérifiant* $s \circ i = b \circ i = \mathrm{id}_{\mathfrak{n}}$ *et* $[i(\mathfrak{n}), \mathrm{Ker}\, s \cap \mathrm{Ker}\, b] = 0$. *Alors* $\bar{b} : \mathrm{Ker}\, s/[\mathrm{Ker}\, s, \mathrm{Ker}\, b] \to \mathfrak{n}$ *(induit par* b*) est un module croisé central de conoyau* $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}/s(\mathrm{Ker}\, b)$.

Si de plus $H_1(\mathfrak{g},k) = H_2(\mathfrak{g},k) = 0$, *alors le module croisé* $(\bar{b})$ *est universel et son noyau* $\operatorname{Ker} \bar{b}$ *est isomorphe à* $\operatorname{Coker}(H_3(\mathfrak{n},k) \to H_3(\mathfrak{p},k))$.

Démonstration. – On procède comme dans [8],p. 192-194 en utilisant le théorème A.4 et le fait que l'hypothèse $H_1(\mathfrak{g},k) = H_2(\mathfrak{g},k) = 0$ implique l'universalité de $\mathfrak{g}$ (cf. [3]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Bloch, The dilogarithm and extensions of Lie algebras, Alg. K-theory, Evanston 1980, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° 854 (1981), 1-23.

[2] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press (1956).

[3] H. Garland, *The arithmetic theory of loop groups*, *Publ. I.H.E.S.*, n° 52 (1980), 5-136.

[4] D. Guin-Walery et J.-L. Loday, Obstruction à l'excision en K-théorie algébrique, Alg. K-theory, Evanston 1980, *Springer Lect. Notes in Math.*, n° 854 (1981), 179-216.

[5] G. Hochschild, Lie algebra kernels and cohomology, *Amer. J. Math.*, 76 (1954), 698-716.

[6] C. Kassel, *Homologie du groupe linéaire général et* K*-théorie stable*, thèse, Université de Strasbourg, juin 1981.

[7] C. Kassel, Calcul algébrique de l'homologie de certains groupes de matrices, *J. of Algebra*, 80, n° 1 (1983).

[8] J.-L. Loday, Cohomologie et groupe de Steinberg relatifs, *J. of Algebra*, 54 (1978), 178-202.

[9] J. Milnor, Introduction to algebraic K-theory, *Ann. of Math. Studies*, n° 72, Princeton University Press (1971).

[10] M. Mori, On the three dimensional cohomology group of Lie algebras, *J. Math. Soc. Japan*, 5 (1953), 171-183.

Manuscrit reçu le 23 juin 1982.

C. Kassel et J.-L. Loday,
Institut de Recherche
Mathématique Avancée
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex.