ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PHILIPPE MAISONOBE

Lieu discriminant d'un germe analytique de corang 1 de $\mathbb{C}^2_{,0}$ vers $\mathbb{C}^2_{,0}$

Annales de l'institut Fourier, tome 32, n° 4 (1982), p. 91-118

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_4_91_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 4 (1982), 91-118.

LIEU DISCRIMINANT D'UN GERME ANALYTIQUE DE CORANG 1 DE $\mathbf{C}^2_{,0}$ VERS $\mathbf{C}^2_{,0}$

par Philippe MAISONOBE

0. INTRODUCTION

1. Plan.

On considère dans cet article des germes de fonctions analytiques de $\mathbf{C}^2_{,0}$ vers $\mathbf{C}^2_{,0}$, de corang 1, finis, à lieux critiques irréductibles.

Dans la première partie, on relie le type topologique du lieu discriminant et celui du lieu critique de tels germes de fonctions analytiques.

Dans la deuxième partie, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un germe de courbe plane irréductible soit le lieu discriminant de tels germes de fonctions analytiques : ce sont des conditions numériques portant sur les exposants de Puiseux (voir Théorème II.0.).

Dans la troisième partie, on classifie topologiquement ces germes de fonctions analytiques, soit à partir du type topologique de leurs lieux critiques, soit à partir du type topologique de leurs lieux discriminants.

2. Lien avec le problème de la représentation d'une variété lagrangienne singulière par une fonction de phase.

Désignons par T^*X le fibré cotangent à une variété X. Un résultat de Hormänder [3] est que toute variété Λ holonome ($=$ lagrangienne) conique, lisse de T^*X peut être représentée localement par une fonction de phase. Dans le cas singulier aucun résultat de ce genre n'a été établi.

Proposons-nous d'étudier ce problème dans le cas où X est un germe analytique complexe de dimension 2 et où Λ est un germe irréductible (non nécessairement lisse), que l'on cherchera à représenter par une fonction de phase à 2 variables seulement.

Λ étant irréductible, nous savons (voir [7]) qu'il est équivalent de dire que Λ est le fibré conormal à un germe de courbe plane irréductible Δ (Δ est en fait la projection canonique de Λ sur X).

D'autre part, dire que Λ est représentable par une fonction de phase $P(x,u)$ de 2 variables signifie (voir [8]) que Δ est le lieu discriminant d'une application de corang 1 de $\mathbf{C}^2_{,0}$ vers $\mathbf{C}^2_{,0}$

$$(x,u) \mapsto (x,P(x,u)).$$

Le problème devient : à quelles conditions un germe de courbe plane est-il le lieu discriminant d'une application de corang 1 de $\mathbf{C}^2_{,0}$ vers $\mathbf{C}^2_{,0}$?

Nous laisserons au lecteur le soin de traduire dans ce langage les résultats obtenus.

Ce travail a été commencé avec J. E. Rombaldi. Nous avions obtenu ensemble les résultats signalés dans l'appendice de cet article et avions examiné par d'autres méthodes certains cas particuliers.

I. EXPOSANTS DE PUISEUX DU LIEU DISCRIMINANT D'UN GERME DE FONCTION ANALYTIQUE DE $\mathbf{C}^2_{,0}$ VERS $\mathbf{C}^2_{,0}$, DE CORANG 1, FINI, A LIEU CRITIQUE IRRÉDUCTIBLE

0. Notations.

Soit f un germe de fonction analytique de $\mathbf{C}^2_{,0}$ vers $\mathbf{C}^2_{,0}$, de corang 1, fini, à lieu critique irréductible, f s'écrit :

$$(x,u) \overset{f}{\mapsto} (x,P(x,u)), \qquad \text{où} \qquad P'_u(0,0) = 0.$$

Désignons par N la valuation de la série $P(0,u)$, $(N=\mathrm{Val}_u(P(0,u)))$, N s'appelle le degré (local) de f. $C = \{(x,u); P'_u(x,u)=0\}$ est le lieu critique de f. Il est irréductible, donc $P'_u(x,u) = (S(x,u))^m$, où S est irréductible dans l'anneau $C\{x,u\}$. m est la multiplicité en un point générique de C et si $n = \mathrm{Val}_u(S(0,u))$: $N = nm + 1$.

Soit $(x=t^n, u=\varphi(t))$ une paramétrisation de C :

$$P'_u(t^n,u) = g(t^n,u)\prod_{k=0}^{n-1}(u-\varphi(\varepsilon^k t))^m,$$

où

$$\varepsilon = e^{2i\pi/n} \qquad \text{et} \qquad g(0,0) \neq 0.$$

Désignons par $(n,\beta_1,\ldots,\beta_g)$ les exposants caractéristiques de cette paramétrisation. En conservant l'ordre des termes, la série $\varphi(t)$ s'écrit :

$$\varphi(t) = \varphi_0(t^n) + t^{\beta_1}\varphi_1(t^{e_1}) + \ldots + t^{\beta_g}\varphi_g(t^{e_g}),$$

où

$$n = n_1e_1; \qquad e_{i-1} = n_ie_i; \qquad e_{g-1} = n_ge_g; \qquad e_g = 1$$
$$\beta_1 = m_1e_1; \qquad \beta_i = m_ie_i; \qquad \beta_g = m_ge_g$$

n_i et m_i sont premiers entre eux et $\varphi_i(0) \neq 0$ pour $i > 0$. On a donc $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_g$. Convenons de poser $e_0 = n$.

f étant un morphisme fini, $f(C)$ est un ensemble analytique. On appelle lieu discriminant de f : $f(C)$ muni de sa structure d'espace analytique réduit. C étant irréductible, $f(C)$ est irréductible. Et on remarque que $x = t^n$, $y = P(t^n,\varphi(t))$ est une paramétrisation de $f(C)$.

1. Calcul de la valuation de $\varphi(\varepsilon^k t)-\varphi(t)$.

1.1. Proposition. — *Soit j un élément de $\{1,2,\ldots,g\}$. $\varphi(\varepsilon^k t) - \varphi(t)$ équivaut au voisinage de $t = 0$ à $(\varepsilon^{k\beta_j}-1)\varphi_j(0)t^{\beta_j}$, si et seulement si, k est multiple de $n_1n_2\ldots n_{j-1}$ et non multiple de $n_1n_2\ldots n_j$. Le nombre d'entiers k de $\{1,2,\ldots,n-1\}$ tels que $\mathrm{Val}(\varphi(\varepsilon^k t)-\varphi(t)) = \beta_j$ est $e_{j-1} - e_j$.*

Notation. — $h_j = e_{j-1} - e_j$.

Preuve de la proposition. — Il suffit d'utiliser la définition des (n_i, m_i, β_i, e_i).

1.2. *Remarque.* — Pour k décrivant $\{1,2,\dots,n-1\}$, on obtient les exposants caractéristiques de $(x=t^n, u=\varphi(t))$ en ordonnant les valuations de $\varphi(\varepsilon^k t) - \varphi(t)$.

2. Calcul de la valuation de $P(t^n,\varphi(\varepsilon^k t)) - P(t^n,\varphi(t))$.

2.0. Rappelons que $P'_u(t^n,u) = g(t^n,u) \prod_{k=0}^{n-1} (u-\varphi(\varepsilon^k t))^m$, où $g(0,0) \neq 0$. $P(t^n,u)$ est analytique par rapport à u, on peut donc écrire :

$$(1) \quad P(t^n,\varphi(\varepsilon^k t)) - P(t^n,\varphi(t)) = \sum_{s=m}^{s=nm} \frac{(\varphi(\varepsilon^k t)-\varphi(t))^{s+1}}{s+1\,!} \frac{d^s P'_u}{du^s}(t^n,\varphi(t)) + h(t)(\varphi(\varepsilon^k t)-\varphi(t))^{nm+2}$$

où $h(t)$ appartient à $\mathbf{C}\{t\}$. Posons :

$$Q(t^n,u) = \prod_{k=0}^{n-1} (u-\varphi(\varepsilon^k t))^m.$$

2.1. *Calcul de la valuation de* $\dfrac{d^sQ}{du^s}(t^n,\varphi(t))$ *et de* $\dfrac{d^sP'_u}{du^s}(t^n,\varphi(t))$.

$$(2) \quad \frac{d^sQ}{du^s}(t^n,\varphi(t)) = s\,! \sum_{\substack{0<k_1\dots<k_{s-m}<nm \\ k_i \text{ non mult. de } n}} \frac{\prod_{l=1}^{n-1} (\varphi(t)-\varphi(\varepsilon^l t))^m}{\prod_{i=1}^{s-m} (\varphi(t)-\varphi(\varepsilon^{k_i} t))}.$$

Supposons $m(h_g+\dots+h_{j+1}) \leqslant s-m \leqslant m(h_g+\dots+h_j)$; c'est-à-dire $me_j \leqslant s \leqslant me_{j-1}$, puisque $h_g+\dots+h_j = e_{j-1}-1$. Les termes de valuation minimum de la somme (2) sont obtenus en prenant :

les mh_g « k_i », tels que Val $(\varphi(t)-\varphi(\varepsilon^{k_i} t)) = \beta_g$

⋮

les mh_{j+1} « k_i », tels que Val $(\varphi(t)-\varphi(\varepsilon^{k_i} t)) = \beta_{j+1}$

$s - m - m(h_g + \ldots + h_{j+1})$ « k_i » restant parmi ceux vérifiant

$$\mathrm{Val}\,(\varphi(t) - \varphi(\varepsilon^{k_i} t) = \beta_j .$$

La valuation des termes correspondant à un tel choix des « k_i » est donc $m(h_1\beta_1 + \ldots + h_{j-1}\beta_{j-1}) + (me_{j-1}+1)\beta_j$. Le coefficient correspondant à cette puissance de t, dans la somme (2) est $\mathrm{A}_s\mathrm{B}_s$, où :

$$\mathrm{A}_s = \prod_{\substack{k \text{ non multiple de } n_1 \\ 0<k<n}} (1-\varepsilon^{k\beta_1})^m \ldots$$

$$\prod_{\substack{k \text{ non mult. de } n_1 \ldots n_{j-1} \\ k \text{ mult. de } n_1 \ldots n_{j-2} \\ 0<k<n}} (1-\varepsilon^{k\beta_{j-1}})^m \varphi_1^{mh_1}(0) \ldots \varphi_{j-1}^{mh_{j-1}}(0)$$

$$\mathrm{B}_s = s\,! \sum_{\substack{0<k_1<\ldots<k_{s-me_j}<nm \\ k_i \text{ mult. de } n_1\ldots n_{j-1} \\ k_i \text{ non mult. de } n_1\ldots n_j}} \frac{\displaystyle\prod_{\substack{0<k<n \\ k \text{ mult. de } n_1 \ldots n_{j-1} \\ k \text{ non mult. de } n_1 \ldots n_j}} (1-\varepsilon^{k\beta_j})^m}{\displaystyle\prod_{i=1}^{s-me_j} (1-\varepsilon^{k_i\beta_j})} \varphi_j(0)^{me_{j-1}-s}.$$

LEMME. — $$\prod_{\substack{0<k<n \\ k \text{ mult. de } n_1 \ldots n_{p-1} \\ k \text{ non mult. de } n_1 \ldots n_p}} (1-\varepsilon^{k\beta_p}) = (n_p)^{e_p}.$$

Preuve du lemme. — Les entiers k multiples de $n_1 \ldots n_{p-1}$ et non multiples de $n_1 \ldots n_p$, tels que $0 < k < n$, sont les entiers :

$$n_1 \ldots n_{p-1}(jn_p+1), \ldots, n_1 \ldots n_{p-1}(jn_p+n_p-1),$$

où j décrit $\{0, 1, \ldots, e_p-1\}$. Les racines de l'unité $\varepsilon^{k\beta_p}$ décrivent alors l'ensemble $\left(e^{2i\pi\lambda\frac{m_p}{n_p}}\right) \lambda \in \{1, \ldots, n_p-1\}$ e_p fois. D'où

$$\prod_{\substack{0<k<n \\ k \text{ mult. de } n_1 \ldots n_{p-1} \\ k \text{ non mult. de } n_1 \ldots n_p}} (1-\varepsilon^{k\beta_p}) = \prod_{k=1}^{n_p-1} \left(1-e^{2i\pi\frac{k}{n_p}}\right)^{e_p}.$$

On en déduit facilement :

$$\mathrm{A}_s = n_1^{me_1} \ldots n_{j-1}^{me_{j-1}} \varphi_1^{mh_1}(0) \ldots \varphi_{j-1}^{mh_{j-1}}(0).$$

D'autre part on remarque par les mêmes arguments que

$$\left(\frac{X^{n_j}-1}{X-1}\right)^{me_j} = \prod_{\substack{k \text{ mult. de } n_1 \dots n_{j-1} \\ k \text{ non mult. de } n_1 \dots n_j}} (X-\varepsilon^{k\beta_j})^m .$$

On constate alors l'égalité :

$$B_s = \frac{s\,!}{s-me_j\,!}\,\frac{d^{s-me_j}}{dX^{s-me_j}}\left(\frac{X^{n_j}-1}{X-1}\right)^{me_j}(1)\varphi_j^{me_{j-1}-s}(0).$$

2.1.1. A_sB_s est donc non nul, ce qui établit que pour

$$me_j \leqslant s \leqslant me_{j-1}$$

$\dfrac{d^sQ}{du^s}(t^n,\varphi(t))$ équivaut au voisinage de $t=0$ à

$$A_sB_st^{m(h_1\beta_1+\dots+h_{j-1}\beta_{j-1})+(me_{j-1}-s)\beta_j}.$$

Par la formule de dérivation de Leibnitz, on déduit :

2.1.2. Proposition. — *Pour* $me_j \leqslant s \leqslant me_{j-1}$, $\dfrac{d^sP'_u}{du^s}(t^n\,\varphi(t))$ *équivaut au voisinage de* $t=0$ *à*

$$g(0,0)A_sB_st^{m(h_1\beta_1+\dots+h_{j-1}\beta_{j-1})+(me_{j-1}-s)\beta_j}.$$

On déduit de cette proposition un résultat étonnant :

2.1.3. Corollaire. — *Soit* $g(x,u)$ *un élément de* $\mathbf{C}\{x,u\}$ *définissant un germe de courbe plane, irréductible, transverse à l'axe des* u; *soit* m *la multiplicité en un point générique de* $g=0$. *La multiplicité d'intersection de* g *avec ses dérivées successives par rapport á* u *(d'ordre* $\geqslant m$*) ne dépend que de* m *et des paires de Puiseux de* g.

Remarque. — Avec sa dérivée première, si $g(x,u)$ est réduit, ce résultat est bien connu, c'est le sens facile du critère discriminant de Zariski.

2.2. *Calcul de la valuation de* $P(t^n,\varphi(\varepsilon^kt)) - P(t^n,\varphi(t))$.

k appartenant à $\{1,\dots,n-1\}$, appelons j l'entier appartenant à $\{1,2,\dots,g\}$ tel que $\operatorname{Val}(\varphi(\varepsilon^kt)-\varphi(t)) = \beta_j$. Considérons alors l'égalité (1) donnée en 2.0.

2.2.1. LEMME. — *Soit j l'entier tel que* $\operatorname{Val}(\varphi(\varepsilon^k t)-\varphi(t)) = \beta_j$ *alors* $\operatorname{Val}(\varphi(\varepsilon^k t)-\varphi(t))^{s+1} \dfrac{d^s \mathrm{P}'_u}{du^s}(t^n,\varphi(t))$ *est minimum pour* $me_j \leqslant s \leqslant me_{j-1}$, *et cette valuation minimum est*

$$m(h_1\beta_1 + \ldots + h_{j-1}\beta_{j-1}) + (me_{j-1}+1)\beta_j .$$

Preuve du lemme. — Il suffit d'utiliser la proposition 2.1.2.

2.2.2. LEMME. — *Soit j l'entier tel que* $\operatorname{Val}(\varphi(\varepsilon^k t)-\varphi(t)) = \beta_j$. *Alors*

$$\operatorname{Val} h(t)(\varphi(\varepsilon^k t)-\varphi(t))^{nm+2} > m(h_1\beta_1 + \ldots + h_{j-1}\beta_{j-1}) + (me_{j-1}+1)\beta_j .$$

Preuve du lemme.

$$\begin{aligned} m(h_1\beta_1 + \ldots + h_{j-1}\beta_{j-1}) &+ (me_{j-1}+1)\beta_j \\ &< m(h_1 + \ldots + h_{j-1} + e_{j-1})\beta_j + \beta_j ; \end{aligned}$$

or ce dernier terme est égal à $(mn+1)\ \beta_j$; d'où le lemme.

2.2.3. PROPOSITION. — *Soit j l'entier tel que*

$$\operatorname{Val}(\varphi(\varepsilon^k t)-\varphi(t)) = \beta_j .$$

Alors $\mathrm{P}(t^n,\varphi(\varepsilon^k t)) - \mathrm{P}(t^n,\varphi(t))$ *équivaut au voisinage de* $t = 0$ *à :*

$$n_1^{me_1} \ldots n_{j-1}^{me_{j-1}} \varphi_1^{mh_1}(0) \ldots \varphi_{j-1}^{mh_{j-1}}(0)\varphi_j^{me_{j-1}+1}(0) \int_0^1 (u^{n_j}-1)^{me_j}\, du.$$
$$t^{m(h_1\beta_1+\ldots+h_{j-1}\beta_{j-1})+(me_{j-1}+1)\beta_j} .$$

Preuve de la proposition. — D'après les lemmes précédents et la proposition 2.1.2., le terme de plus petite valuation de $\mathrm{P}(t^n,\varphi(\varepsilon^k t)) - \mathrm{P}(t^n,\varphi(t))$ est

$$\mathrm{C.S.}t.^{m(h_1\beta_1+\ldots+h_{j-1}\beta_{j-1})+(me_{j-1}+1)\beta_j},$$

où :

$$\mathrm{C} = n_1^{me_1} \ldots n_{j-1}^{me_{j-1}} \varphi_1^{mh_1}(0) \ldots \varphi_{j-1}^{mh_{j-1}}(0)\varphi_j^{me_{j-1}+1}(0)$$

$$\mathrm{S} = \sum_{s=me_j}^{s=me_{j-1}} \frac{1}{s-me_j\,!}\,\frac{1}{s+1}\,\frac{d^{s-me_j}}{d\mathrm{X}^{s-me_j}}\left(\frac{\mathrm{X}^{n_j}-1}{\mathrm{X}-1}\right)^{me_j}(1)\,(\varepsilon^{k\beta_j}-1)^{s+1} .$$

Déterminons S : Pour cela, posons :

$$S(X) = \sum_{u=0}^{s=m(e_{j-1}-e_j)} \frac{1}{u!} \frac{1}{u+me_j+1} \frac{d^u}{dX^u}\left(\frac{X^{n_j}-1}{X-1}\right)^{me_j}(1)\,(X-1)^{u+me_j+1}$$

$S(\varepsilon^{k\beta_j}) = S$ et on remarque que

$$S'(X) = \left(\frac{X^{n_j}-1}{X-1}\right)^{me_j}(X-1)^{me_j} = (X^{n_j}-1)^{me_j}.$$

On a donc : $S(X) = \int_1^X (u^{n_j}-1)^{me_j}\,du$. D'autre part

$$\mathrm{Val}\,(\varphi(\varepsilon^k t)-\varphi(t)) = \beta_j$$

d'où (proposition 1.1) : k est multiple de $n_1 \dots n_{j-1}$.

On en déduit $S'(\varepsilon^{k\beta_j}X) = S'(X)$ et donc :

$$\frac{1}{\varepsilon^{k\beta_j}} S(\varepsilon^{k\beta_j}X) - S(X) = \left(\frac{1}{\varepsilon^{k\beta_j}}-1\right)S(0).$$

En prenant $X = 1$, il vient : $S = (\varepsilon^{k\beta_j}-1)\int_0^1 (u^{n_j}-1)^{me_j}\,du$

S étant non nul, la proposition 2.2.3 est démontrée.

3.

THÉORÈME. — *Soit* $f : (x,u) \mapsto (x,P(x,u))$ *un germe analytique de* $\mathbf{C}^2_{,0}$ *vers* $\mathbf{C}^2_{,0}$, *de corang* 1, *fini de degré* $N = nm+1$, *à lieu critique* C *irréductible.* m *désigne la multiplicité en un point générique de* C. *Soit* $(x=t^n, u=\varphi(t))$ *une paramétrisation de* C *d'exposants caractéristiques* $(n,\beta_1,\dots,\beta_g)$. *Les exposants de Puiseux du lieu discriminant de* f *sont* $(n,\beta'_1,\dots,\beta'_g)$, *où*

$$\beta'_1 = (nm+1)\beta_1,$$
$$\beta'_j = m((n-e_1)\beta_1 + \dots + (e_{j-2}-e_{j-1})\beta_{j-1}) + (me_{j-1}+1)\beta_j.$$

Preuve du théorème. — $(x=t^n, y=P(t^n,\varphi(t)))$ est une paramétrisation du lieu discriminant de f. D'après la remarque 1.2 et la proposition 2.2.3., puisque $\beta'_1 < \beta'_2 < \ldots < \beta'_g$, les exposants caractéristiques de cette paramétrisation sont $(n, \beta'_1, \ldots, \beta'_g)$. Or β'_1 est strictement supérieur à n. Ces exposants sont donc les exposants de Puiseux du lieu discriminant.

4. Conséquence topologique.

On déduit facilement du théorème précédent :

4.1. COROLLAIRE. — *Soit f un germe analytique de $\mathbf{C}^2_{,0}$ vers $\mathbf{C}^2_{,0}$, de corang 1, fini, à lieu critique irréductible C.*

a) Le type topologique du lieu discriminant de f ne dépend que du degré de f, de la multiplicité en un point générique du lieu critique et du type topologique de C.

b) Le type topologique du lieu critique ne dépend que du degré de f et du type topologique du lieu discriminant.

4.2. *Contre-exemple au corollaire si le lieu critique est réductible.*

Il suffit de considérer $f_1 : (x,u) \mapsto (x, u^5 - 2u^3x^s + x^{2s}u)$ et $f_2 : (x,u) \mapsto (x, u^5 - 5x^{2s}u)$. f_1 et f_2 sont bien de corang 1, finis de même degré; leurs lieux critiques sont topologiquement équivalents et ont même multiplicité en un point générique. Mais, on peut vérifier que leurs lieux discriminants ne sont pas topologiquement équivalents.

4.3. *Contre-exemple au corollaire si le germe est de $\mathbf{C}^3_{,0}$ vers $\mathbf{C}^3_{,0}$.*

Considérons $f_1 : (x,y,u) \mapsto (x,y,z = u^4 + yu)$. Le lieu critique de f_1 est $C_1 : 4u^3 + y = 0$; $f_1(C_1)$ a pour équation : $z^3 + \frac{3^3}{4^3} y^4 = 0$. L'ensemble des points singuliers de $f_1(C_1)$ est donc l'axe des x.

Considérons $f_2 : (x,y,u) \mapsto (x,y,z = u^4 + xu^2 + yu)$. Le lieu critique de f_2 est $C_2 : 4u^3 + 2xu + y = 0$. On remarque que la courbe d'équation $y = 0$ et $x^2 + 4z = 0$, ainsi que la courbe d'équation $(x = -6u^2, y = 8u^3, z = 3u^4)$ sont formées de points singuliers de $f_2(C_2)$. f_1 et f_2 sont bien de corang 1, finis de même degré; leurs lieux critiques sont lisses.

Supposons que $f_1(C_1)$ et $f_2(C_2)$ soient topologiquement équivalents. D'après une remarque de Lê Dung Trang ([4] 3.4. p. 178) et un théorème de

A'Campo ([2], § 1, Théorème 3, p. 114), on en déduit que les lieux singuliers de $f_1(C_1)$ et de $f_2(C_2)$ sont topologiquement équivalents. C'est impossible, l'un est réductible, l'autre non.

4.4. *Le type topologique du lieu critique ne dépend pas que du type topologique du lieu discriminant.*

On prendra $f(x,y) = y^2 - x^9$, puis on utilisera la remarque III.4 et le fait que $9 = (2\times 4)+1 = ((2\times 1)+1).3$.

II. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES SUR LES EXPOSANTS DE PUISEUX D'UN GERME DE COURBE PLANE IRRÉDUCTIBLE POUR ÊTRE LE LIEU DISCRIMINANT D'UN GERME DE FONCTION ANALYTIQUE DE $\mathbf{C}^2_{,0}$ VERS $\mathbf{C}^2_{,0}$, DE CORANG 1, FINI, A LIEU CRITIQUE IRRÉDUCTIBLE

0.

THÉORÈME. — *Un germe de courbe plane irréductible* Δ *est le lieu discriminant d'un germe analytique de* $\mathbf{C}^2_{,0}$ *vers* $\mathbf{C}^2_{,0}$, *de corang* 1, *fini, à lieu critique irréductible si, et seulement si, ses exposants de Puiseux* $(n,\beta'_1,\ldots,\beta'_g)$ *vérifient : il existe un entier* m, *tel que*

β'_1 *soit multiple de* $nm+1$,
$\beta'_j - \beta'_{j-1}$ *soit multiple de* $me'_{j-1}+1$

(*les* e'_i *étant définis à partir des* β'_i, *comme en* I.0).

1. Preuve du théorème : les conditions sont nécessaires.

Reprenons les notations du théorème I.3, $e'_i = e_i$ et on remarque que

$$\beta'_j - \beta'_{j-1} = (me'_{j-1}+1)(\beta_j-\beta_{j-1}).$$

2. Coefficients de la série $P(t^n,\varphi(t))$.

2.1. Reprenons les notations de I.0, mais supposons $g(x,u) = 1$. Quitte à modifier l'ordre des termes de la série $\varphi(t)$, $\varphi(t)$ s'écrit de façon unique :

$$\varphi(t) = \varphi_0(t^n) + \sum_{j=1}^{g} t^{\beta_j}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ie_j}^{(j)} t^{ie_j}\right),$$

où $a_{ie_j}^{(j)} = 0$ si $\beta_j + ie_j$ est multiple de $e_{j-1}(e_0 = n)$.

D'après le théorème I.3, $P(t^n,\varphi(t))$ s'écrit de façon unique :

$$P(t^n,\varphi(t)) = h_0(t^n) + \sum_{j=1}^{g} t^{\beta'_j}\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_{ie_j}^{(j)} t^{ie_j}\right),$$

où $A_{ie_j}^{(j)} = 0$ si $\beta'_j + ie_j$ est multiple de e_{j-1}.

On a donc l'égalité :

$$P(t^n,\varphi(\varepsilon^{n_1 \cdots n_{j-1}} t)) - P(t^n,\varphi(t)) \underset{t=0}{\sim} A_0^{(j)}(\varepsilon^{n_1 \cdots n_{j-1}\beta_j} - 1)t^{\beta'_j}$$

(car $\varepsilon^{n_1 \cdots n_{j-1}\beta_j} = \varepsilon^{n_1 \cdots n_{j-1}\beta'_j}$), on déduit alors de la proposition I.2.2.3 :

$$A_0^{(1)} = (a_0^{(1)})^{nm+1} \int_0^1 (u^{n_1} - 1)^{me_1}\, du$$

$$\vdots$$

$$A_0^{(j)} = n_1^{me_1} \ldots n_{j-1}^{me_{j-1}} (a_0^{(1)})^{mh_1} \ldots (a_0^{(j-1)})^{mh_{j-1}} (a_0^{(j)})^{me_{j-1}+1} \int_0^1 (u^{n_j} - 1)^{me_j}\, du$$

$$\vdots$$

$$A_0^{(g)} = n_1^{me_1} \ldots n_{g-1}^{me_{g-1}} (a_0^{(1)})^{mh_1} \ldots (a_0^{(g-1)})^{mh_{g-1}} (a_0^{(g)})^{me_{g-1}+1} \int_0^1 (u^{n_g} - 1)^{me_g}\, du$$

2.2. *Détermination de la forme de* $A^{(j_0)}_{i_0 e_{j_0}}$ *(pour* $\beta'_{j_0} + i_0 e_{j_0}$ *non multiple de* e_{j_0-1}*)*

$$P(t^n, \varphi(\varepsilon^{n_1 \cdots n_{j_0-1}} t)) - P(t^n, \varphi(t)) = \sum_{j=j_0}^{j=g} t^{\beta'_j} \left(\sum_{i=0}^{\infty} A^{(j)}_{ie_j} (\varepsilon^{n_1 \cdots n_{j-1}(\beta_j + ie_j)} - 1) t^{ie_j} \right).$$

Le terme en $t^{\beta'_{j_0} + i_0 e_{j_0}}$ dans ce développement est :

$$A^{(j_0)}_{i_0 e_{j_0}} (\varepsilon^{2i\pi n_1 \cdots n_{j_0-1}(\beta_{j_0} + ie_{j_0})} - 1) t^{\beta'_{j_0} + i_0 e_{j_0}}.$$

Nous allons déterminer la forme de ce terme en fonction des $(a^{(j)}_{ie_j})$ en « continuant » les calculs de I.2.

2.2.1. LEMME. — *Pour* s *n'appartenant pas à* $\{me_{j_0}, \ldots, me_{j_0-1}\}$, *le coefficient du terme en* $t^{\beta'_{j_0} + i_0 e_{j_0}}$ *de*

$$d_s(t) = \frac{(\varphi(\varepsilon^{n_1 \cdots n_{j_0-1}} t) - \varphi(t))^{s+1}}{s+1!} \frac{d^s P'_u}{du^s} (t^n, \varphi(t))$$

ne dépend que de l'ensemble

$$\{a^{(j)}_{ie_j}; j \in \{1, 2, \ldots, g\} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant ie_j < i_0 e_{j_0}\}.$$

Preuve du lemme. — $d_s(t)$ est obtenu comme une somme de termes, tous formés par le produit de $mn + 1$ termes de la forme $\varphi(\varepsilon^k t) - \varphi(t)$. Si on trouve dans le terme en $t^{\beta'_{j_0} + i_0 e_{j_0}}$ de $d_s(t)$ un $a^{(j)}_{ie_j}$ où ie_j est supérieur ou égal à $i_0 e_{j_0}$, c'est que ce terme est de valuation supérieure ou égale à $\mathrm{Val}(d_s(t)) + i_0 e_{j_0}$. C'est impossible puisque $\mathrm{Val}(d_s(t)) > \beta'_{j_0}$ (voir I.2.1, où $Q = P'_u$, car $g(x,u) = 1$).

2.2.2. LEMME. — *Soit* s *un entier n'appartenant pas à* $\{me_{j_0}, \ldots, me_{j_0-1}\}$. *Soient* $(k_1, \ldots, k_{s-m})$, $s - m$ *entiers vérifiant :*

$$0 < k_1 < \ldots < k_{s-m} < nm,$$

k_i non multiple de n et tel que la valuation de

$$\frac{(\varphi(\varepsilon^{n_1 \cdots n_{j_0-1}}t)-\varphi(t))^{s+1}}{s+1\,!}\; s\,!\,\frac{\prod_{l=1}^{n-1}(\varphi(t)-\varphi(\varepsilon^{l}t))^{m}}{\prod_{i=1}^{s-m}(\varphi(t)-\varphi(\varepsilon^{k_i}t))}.$$

n'est pas minimum. Le terme en $t^{\beta'_{j_0}+i_0e_{j_0}}$ de cette dernière expression ne dépend que de $\{a^{(j)}_{ie_j}, j \in \{1,2,\ldots,g\}$ et $0 \leqslant ie_j < i_0e_{j_0}\}$.

Preuve du lemme. — Même démonstration que pour le lemme 2.2.1.

2.2.3. LEMME. — *Avec les mêmes notations que dans le lemme précédent, si l'on prend un choix des k_i qui rend minimum la valuation de*

$$\frac{(\varphi(\varepsilon^{n_1 \cdots n_{j_0-1}}t)-\varphi(t))^{s+1}}{s+1\,!}\; s\,!\,\frac{\prod_{l=1}^{n-1}(\varphi(t)-\varphi(\varepsilon^{l}t))^{m}}{\prod_{i=1}^{s-m}(\varphi(t)-\varphi(\varepsilon^{k_i}t))}.$$

Le terme en $t^{\beta'_{j_0}+i_0e_{j_0}}$ ne dépend que de

$$\{a^{(j)}_{ie_j}, j \in \{1,2,\ldots,g\} \quad et \quad 0 \leqslant ie_j < i_0e_{j_0}\}$$

et de $\{a^{(j)}_{i_0e_{j_0}}; j \leqslant j_0\}$.

Preuve du lemme. — La démonstration est analogue à celle des deux lemmes précédents, il suffit de remarquer en plus (voir I.2.1.) que

$$\mathrm{Val}\,(\varphi(t)-\varphi(\varepsilon^{k_i}t)) \geqslant \beta_{j_0}.$$

De ces trois lemmes et en « continuant » les calculs de I.2, on déduit que le coefficient en $t^{\beta'_{j_0}+i_0e_{j_0}}$ de $\mathrm{P}(t^n,\varphi(\varepsilon^{n_1 \cdots n_{j_0-1}}t))-\mathrm{P}(t^n,\varphi(t))$ est de la forme :

$$\mathrm{T}^{(j_0)}_{\lambda_0e_{j_0}}(\{a^{(j)}_{ie_j}; j \in \{1,\ldots,g\} \text{ et } 0 \leqslant ie_j < i_0e_{j_0}\} \cup \{a^{(j)}_{i_0e_{j_0}};\ 1 \leqslant j < j_0\})$$
$$+\,(\mathrm{E}^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}} + \mathrm{M}^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}})a^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}}.$$

Et l'on a :

$$E^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}} = \sum_{s=me_{j_0}}^{s=me_{j_0}-1} \frac{s+1(\varepsilon^{n_1\dots n_{j_0-1}\beta_{j_0}}-1)^s(\varepsilon^{n_1\dots n_{j_0-1}(\beta_{j_0}+i_0e_{j_0})}-1)}{s+1\,!}\;\frac{s\,!}{s-me_{j_0}!}$$

$$\frac{d^{s-me_{j_0}}}{dX^{s-me_{j_0}}}\left(\frac{X^{n_{j_0}}-1}{X-1}\right)^{me_{j_0}} \tag{1}$$

$$n_1^{me_1}\dots n_{j_0-1}^{me_{j_0-1}}(a_0^{(1)})^{mh_1}\dots(a_0^{(j_0-1)})^{mh_{j_0-1}}(a_0^{(j_0)})^{me_{j_0-1}}$$

$$M^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}} = \sum_{s=me_{j_0}}^{s=me_{j_0}-1} \frac{(\varepsilon^{n_1\dots n_{j_0-1}\beta_{j_0}}-1)^{s+1}}{s+1\,!}\,s\,!$$

$$n_1^{me_1}\dots n_{j_0-1}^{me_{j_0-1}}(a_0^{(1)})^{mh_1}\dots(a_0^{(j_0-1)})^{mh_{j_0-1}}(a_0^{(j_0)})^{me_{j_0-1}}C_s,$$

où C_s est le coefficient de $(a_0^{(j_0)})^{me_{j_0-1}}a^{(j_0)}_{a_{i_0e_{j_0}}}\,t^{(me_{j_0-1}+1)\beta_{j_0}+i_0e_{j_0}}$ dans

$$(a_0^{(j_0)}t^{\beta_{j_0}})^{s+1}\sum_{\substack{0<k_1<\dots<k_{s-me_{j_0}}<nm\\ k_i \text{ mult. de } n_1\dots n_{j_0-1}\\ k_i \text{ non mult. de } n_1\dots n_{j_0}}}\frac{\displaystyle\prod_{\substack{0<k<n\\ k \text{ mult. de } n_1\dots n_{j_0-1}\\ k_i \text{ non mult. de } n_1\dots n_{j_0}}}((1-\varepsilon^{k\beta_{j_0}})a_0^{(j_0)}t^{\beta_{j_0}}+(1-\varepsilon^{k(\beta_{j_0}+i_0e_{j_0})})a^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}}t^{\beta_{j_0}+i_0e_{j_0}})^m}{\displaystyle\prod_{i=1}^{s-me_{j_0}}((1-\varepsilon^{k_i\beta_{j_0}})a_0^{(j_0)}t^{\beta_{j_0}}+(1-\varepsilon^{k_i(\beta_{j_0}+i_0e_{j_0})})a^{(j_0)}_{a_{i_0e_{j_0}}}t^{\beta_{j_0}+i_0e_{j_0}})}.$$

Calcul de $E^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}}$: Dans $E^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}}$, il y a donc en facteur :

$$\sum_{s=me_{j_0}}^{me_{j_0}-1}\frac{1}{s-me_{j_0}!}\,\frac{d^{s-me_{j_0}}}{dX^{s-me_{j_0}}}\left(\frac{X^{n_{j_0}}-1}{X-1}\right)^{me_{j_0}}(1)\,(\varepsilon^{n_1\dots n_{j_0-1}\beta_{j_0}}-1)^{s-me_{j_0}},$$

c'est-à-dire, d'après la formule de Taylor :

$$\left(\frac{X^{n_{j_0}}-1}{X-1}\right)^{me_{j_0}}(\varepsilon^{n_1\dots n_{j_0-1}\beta_{j_0}}).$$

Or cette expression est nulle, donc $E^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}}=0$.

Calcul de $M^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}}$: Posons $\varepsilon_0 = e^{\frac{2i\pi}{n_{j_0}}}$.

$$M^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}} = n_1^{me_1}\dots n_{j_0-1}^{m_{j_0-1}}(a_0^{(1)})^{mh_1}\dots(a_0^{(j_0-1)})^{mh_{j_0-1}}(a_0^{(j_0)})^{me_{j_0-1}} \sum_{s=me_{j_0}}^{(me_{j_0})n_{j_0}} \frac{(\varepsilon_0^{m_{j_0}}-1)^{s+1}}{(s+1)(s-me_{j_0}!)}\, C^{(s)}_{n_{j_0},me_{j_0},m_{j_0},i_0}$$

où $C^{(s)}_{n_{j_0},me_{j_0},m_{j_0},i_0}$ est le coefficient de $t^{(me_{j_0}+1)m_{j_0}+i_0}$ dans

$$\sum_{\substack{0<k_1<\dots<k_{s-me_{j_0}}<(me_{j_0})n_{j_0}\\ k_i \text{ non mult. de } n_{j_0}}} t^{(s+1)m_{j_0}} \frac{\prod\limits_{0<k<n_{j_0}}((1-\varepsilon_0^{km_{j_0}})t^{m_{j_0}} + (1-\varepsilon_0^{k(m_{j_0}+i_0)})\, t^{m_{j_0}+i_0})^{me_{j_0}}}{\prod\limits_{i=1}^{s-me_{j_0}}((1-\varepsilon_0)^{k_im_{j_0}})t^{m_{j_0}} + (1-\varepsilon_0^{k_i(m_{j_0}+i_0)})t^{m_{j_0}+i_0})}$$

$M^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}}$ s'écrit donc :

$$M^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}} = n_1^{me_1}\dots n_{j_0-1}^{me_{j_0-1}}(a_0^{(1)})^{mh_1}\dots(a_0^{(j_0-1)})^{mh_{j_0-1}}(a_0^{(j_0)})^{me_{j_0-1}}\, C_{n_{j_0},me_{j_0},m_{j_0},i_0}.$$

2.2.4. LEMME AU « FRIGO ». — $C_{n_{j_0},me_{j_0},m_{j_0},i_0}$ *est non nul pour* $m_{j_0} + i_0$ *non multiple de* n_{j_0}.

Preuve du lemme. — Le lemme sera démontré dans le paragraphe 5.

On a donc la formule :

$$A^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}} = T^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}}(\{a^{(j)}_{ie_j}; j\in\{1,2,\dots,g\} \text{ et } 0 \leqslant ie_j < i_0e_{j_0}\} \cup \{a^{(j)}_{i_0e_{j_0}}; 1\leqslant j<j_0\}) + (C_{n_{j_0},me_{j_0},m_{j_0},i_0}.n_1^{me_1}\dots n_{j_0-1}^{me_{j_0-1}}(a_0^{(1)})^{mh_1}\dots(a_0^{(j_0-1)})^{mh_{j_0-1}}(a_0^{j_0})^{me_{j_0-1}}\, a^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}}.$$

3. Preuve du théorème : les conditions sont suffisantes.

On reprend les notations du théorème. Soient $\beta_1, \dots, \beta_g$ les entiers tels que

$$\beta'_1 = (nm+1)\beta_1, \dots, \beta'_j - \beta'_{j-1} = (me'_{j-1}+1)(\beta_j-\beta_{j-1}), \dots$$

On a alors $e'_i = e_i$ pour tout i appartenant à $\{1,2,\ldots,g\}$, où e_i est la suite associée à $(n,\beta_1,\ldots,\beta_g)$ (voir I.0). Δ admet une paramétrisation sous la forme

$$x = t^n,\ y = \psi(t) = \sum_{j=1}^{g} t^{\beta'_j}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{(j)}_{ie_j} t^{ie_j}\right),$$

où $\lambda^{(j)}_{ie_j} = 0$ si $\beta'_j + ie_j$ est multiple de e_{j-1}.

En utilisant les calculs du paragraphe précédent, on montre qu'on peut trouver une suite $a^{(j)}_{ie_j}$ de nombres, nuls si ie_j est multiple de e_{j-1}, et tels que

$$\lambda^{(1)}_0 = (a^{(1)}_0)^{nm+1} \int_0^1 (u^{n_1}-1)^{me_1}\,du$$

$$\vdots$$

$$\lambda^{(g)}_0 = n_1^{me_1} \ldots n_{g-1}^{me_{g-1}}(a^{(1)}_0)^{mh_1} \ldots (a^{(g-1)}_0)^{mh_{g-1}}(a^{(g)}_0)^{me_{g-1}+1} \int_0^1 (u^{n_g}-1)^{me_g}\,du$$

$$\vdots$$

$$\lambda^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}} = \mathrm{T}^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}}(\{a^{(j)}_{ie_j}, j\in\{1,2,\ldots,g\} \text{ et } 0\leqslant ie_j<i_0e_{j_0}\} \cup \{a^{(j)}_{i_0e_{j_0}}; 1\leqslant j<j_0\})$$
$$+ (\mathrm{C}_{n_{j_0},me_{j_0},i_0}\, n_1^{me_1} \ldots n_{j_0}^{me_{j_0-1}}(a^{(1)}_0)^{mh_1} \ldots (a^{(j_0-1)}_0)^{mh_{j_0-1}}(a^{j_0}_0)^{me_{j_0-1}})a^{(j_0)}_{i_0e_{j_0}}.$$

(Pour $\beta'_{j_0} + i_0e_{j_0}$ non multiple de e_{j_0-1}, $m_{j_0} + i_0$ est bien non multiple de n_{j_0}, donc : $\mathrm{C}_{n_{j_0},me_{j_0},m_{j_0},i_0} \neq 0)$.

On en déduit qu'il existe $\varphi(t)$ appartenant à $\mathbf{C}[[t]]$:

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{g} t^{\beta_j}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a^{(j)}_{ie_j} t^{ie_j}\right),$$

(où $a^{(j)}_{ie_j} = 0$ si β_j+ie_j est multiple de e_{j-1}), tel que si $\mathrm{P}(x,u)$ désigne une primitive de $\prod_{k=0}^{n-1} (u-\varphi(\varepsilon^k t))^m$:

$$\mathrm{P}(t^n,\varphi(t)) = \lambda(t^n) + \psi(t).$$

Mais par choix d'une bonne primitive, on a :

$$\mathrm{P}(t^n,\varphi(t)) = \psi(t).$$

On sait donc résoudre le problème suivant :

Trouver $P(x,u)$ élément de $C[[x]][u]$ et $S(x,u)$ élément irréductible réduit de $C[[x]][u]$ tel que, en notant $\mathrm{Discr}_u(T(u))$ le discriminant d'un polynôme en u,

$$\mathrm{Discr}_u(P(x,u)-y) = \text{cste}\,(d_{\text{red}}(x,y))^m$$

$$\frac{dP}{du}(x,u) = (S(x,u))^m,$$

où

$$d_{\text{red}}(t^n,y) = \prod_{k=0}^{n-1} (y-\psi(\varepsilon^k t)).$$

C'est un problème algèbrique par rapport aux coefficients $\bar{a}_i(x)$ et $\bar{b}_j(x)$ définis par : $P(x,u) = u^{nm+1} + \bar{a}_1(x)u^{nm} + \ldots + \bar{a}_{nm+1}(x)$ et $S(x,u) = u^n + \bar{b}_1(x)u^{n-1} + \ldots + \bar{b}_n(x)$. D'après le théorème de M. Artin ([1] p. 277 à 291), on peut donc trouver des solutions convergentes $P(x,u)$ et $S(x,u)$ (éléments de $C\{x\}[u]$) satisfaisant le même problème algébrique et coïncidant à un ordre donné, aussi grand que l'on veut, avec les solutions formelles. On peut alors fixer cet ordre pour que $S(x,u)$ soit toujours irréductible réduit.

Le théorème est démontré; il suffit en effet de considérer l'application $(x,u) \mapsto (x,P(x,u))$ ainsi construite.

4. Remarques.

4.1. *Remarques pour les germes de courbes planes quasi-homogènes irréductibles.*

Les conditions du théorème 0 se traduisent pour $y^n - x^P = 0$, germe de courbe plane quasihomogène irréductible, par : il existe un entier m tel que p soit multiple de $nm+1$. Posons β l'entier vérifiant alors : $p = (nm+1)\beta$. La méthode décrite dans le paragraphe 3 est particulièrement simple pour déterminer l'application de corang 1, finie, à lieu critique irréductible dont $y^n - x^P = 0$ est le lieu discriminant. En effet la paramétrisation de $y^n - x^P = 0$ ne comporte qu'un terme $(x=t^n,\ y=t^{(n+m+1)\beta})$. On trouve :

$$(x,u) \mapsto (x,P(x,u)), \qquad \text{où} \qquad P(x,u) = \int_0^u (v^n + \lambda x^\beta)^m\, dv$$

pour

$$\lambda = \left(\int_0^1 (s^n-1)^m\, ds\right)^{-\frac{n}{nm+1}}.$$

4.2. Un germe de courbe plane irréductible peut être lieu discriminant d'un germe de corang 1 fini à lieu critique réductible. En effet, on vérifie après un simple calcul, que pour $\alpha^2 - 5\beta = 0$ et $9\alpha^2 - 20\beta \neq 0$ le lieu discriminant de $(x,u) \mapsto (x,u^5+\alpha u^3x^s+\beta ux^{2s})$ est irréductible, mais le lieu critique est réductible.

4.3. D'après le théorème 0, $y^3 - x^5$ n'est pas le lieu discriminant d'un germe analytique de $\mathbf{C}^2_{,0}$ vers $\mathbf{C}^2_{,0}$, de corang 1, fini, à lieu critique irréductible. Dans [6] (appendices A.II), on montre que $y^3 - x^5$ n'est pas le lieu discriminant d'un germe analytique de $\mathbf{C}^2_{,0}$ vers $\mathbf{C}^2_{,0}$ de corang 1 fini.

5. Preuve du lemme 2.2.4. « au frigo ».

Soit n et β deux entiers premiers entre eux. Il existe alors un entier b appartenant à $\{0,1,\ldots,n-1\}$ et un entier a, uniques, tels que :

$$na + (b-n)\beta = h.$$

Il est alors facile de constater que

$$P'_u(x,u) = (u^n - na_hx^au^b - x^\beta)^m$$

admet une paramétrisation sous la forme :

$$(x=t^n, u=\varphi(t)=t^\beta(1+a_ht^h+\ldots)).$$

Soit $P(x,u)$ une primitive de $P'_u(x,u)$. Déterminons le coefficient constant du terme en $a_ht^{(nm+1)\beta+h}$ de $P(t^n,\varphi(t))$. On peut écrire :

$$P(t^n,\varphi(t)) = \int_0^{t^\beta} (v^n - na_ht^{na}v^b - t^{n\beta})^m\, dv + \int_t^{t^\beta+a_ht^{\beta+h}+\ldots} (v^n - na_ht^{na}v^b - t^{n\beta})^m\, dv.$$

Le deuxième terme de cette somme contient a_h^2 en facteur, donc n'apporte pas de contribution au coefficient cherché. Par contre, on peut isoler les termes qui contiennent a_h, et non a_h^2, en facteur dans la première intégrale :

$$- mnt^{na} \int_0^{t^\beta} (v^n - t^{n\beta})^{m-1} v^b \, dv, \text{ ou encore en posant } v = t^\beta s :$$

$- mnt^{(nm+1)\beta+h} \int_0^1 (s^n - 1)^{m-1} s^b \, ds$. Le coefficient du terme en $a_h t^{(nm+1)\beta+h}$ est donc : $- mn \int_0^1 (s^n - 1)^{m-1} s^b \, ds$.

On en déduit que :

$$C_{n,m,\beta,h} = mn(1-\varepsilon^{\beta+h}) \int_0^1 (s^n - 1)^{m-1} s^b \, ds .$$

Donc pour $\beta + h$ non multiple de n : $C_{n,m,\beta,h} \neq 0$. D'où le lemme.

III. CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DES GERMES ANALYTIQUES DE $C^2_{,0}$ VERS $C^2_{,0}$, FINIS, DE CORANG 1, A LIEUX CRITIQUES IRRÉDUCTIBLES

0. Notations.

Étant donné f_0 et f_1 deux tels germes :

$$f_0 : (x,u) \mapsto (x, P_0(x,u))$$
$$f_1 : (x,u) \mapsto (x, P_1(x,u)) .$$

On désigne par N_0 le degré de f_0, m_0 la multiplicité en un point générique du lieu critique C_0 de f_0, n_0 la multiplicité à l'origine de $f_0(C_0)(N_0 = n_0 m_0 + 1)$ N_1, m_1, C_1, n_1 sont définis de façon analogue pour f_1.

1. Conditions nécessaires à l'équivalence topologique de f_0 et f_1.

1.0. Supposons donc f_0 et f_1 topologiquement équivalents; c'est-à-dire qu'il existe deux homéomorphismes locaux p et q tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}^2_{,0} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_0"] & \mathbf{C}^2_{,0} \arrow[d, "f_1"] \\ \mathbf{C}^2_{,0} \arrow[r, "q"] & \mathbf{C}^2_{,0} \end{tikzcd}.$$

1.1. PROPOSITION. — *Pour que* f_0 *et* f_1 *soient topologiquement équivalents, il est nécessaire que* $N_0 = N_1$, $m_0 = m_1$ *et que* C_0 *et* C_1 *soient topologiquement équivalents.*

Preuve de la proposition. — Dire que (x,u) n'appartient pas à C_0 équivaut au fait que f_0 est un homéomorphisme local au voisinage de (x,u). Or cette propriété se transporte bien par les homéomorphismes p et q; on en déduit $p(C_0) \subset C_1$. On montre de même que $p^{-1}(C_1) \subset C_0$, d'où $p(C_0) = C_1$. Un point générique de C_0 et de C_1 ont même degré local de ramification (à la source). D'où $m_0 + 1 = m_1 + 1$, donc : $m_0 = m_1$. Le diagramme de 1.0. commutant, on déduit de l'égalité $p(C_0) = C_1$, l'égalité $q(f_0(C_0)) = f_1(C_1)$. Les lieux discriminants de f_0 et f_1 ont donc même multiplicité à l'origine, donc $n_0 = n_1$. Comme on vient de montrer que $m_0 = m_1$, on déduit : $N_0 = N_1$. La proposition est démontrée.

1.2. *Remarque.* — Il est également facile de voir qu'une condition nécessaire est : $p(f_0^{-1}(f_0(C_0)) = f_1^{-1}(f_1(C_1))$.

2. Les conditions de la proposition 1.1. sont suffisantes à l'équivalence topologique de f_0 et f_1.

Supposons que f_0 et f_1, définis en O, vérifient les conditions nécessaires de la proposition 1.1. On se propose de démontrer que ces conditions sont nécessaires.

2.1. *Construction d'une bonne déformation de* f_0 *sur* f_1.

Posons

$$N = N_0 = N_1, \qquad m = m_0 = m_1, \qquad n = n_0 = n_1$$

f_0 et f_1 s'écrivent :

$$f_0 : (x,u) \mapsto (x,P_0(x,u)),\ f_1 : (x,u) \mapsto (x,P_1(x,u)),$$

où $(P_0)'_u$ et $(P_1)'_u$ sont de la forme :

$$(P_0)'_u(s^n,u) = a(s^n,u)\prod_{k=0}^{n-1}(u-\varphi(\varepsilon^k s))^m$$
$$(P_1)'_u(s^n,u) = b(s^n,u)\prod_{k=0}^{n-1}(u-\psi(\varepsilon^k s))^m$$

et les deux séries $\psi(s)$ et $\varphi(s)$ ont les mêmes exposants caractéristiques. Donc, en reprenant les notations de I :

$$\varphi(s) = \varphi_0(s^n) + s^{\beta_1}\varphi_1(s^{e_1}) + \ldots + s^{\beta_g}\varphi_g(s^{e_g})$$
$$\psi(s) = \psi_0(s^n) + s^{\beta_1}\psi_1(s^{e_1}) + \ldots + s^{\beta_g}\psi_g(s^{e_g}).$$

$a(x,u)$ et $b(x,u)$ désignent deux unités de l'anneau $\mathbf{C}\{x,u\}$.

Posons alors :

$$\mathrm{R}(x,u,t) = (\gamma(t)b(x,u)+(1-\gamma(t))a(x,u))\prod_{k=0}^{n-1}(u-(\gamma(t)\psi(\varepsilon^k x^{\frac{1}{n}}) + (1-\gamma(t))\varphi(\varepsilon^k x^{\frac{1}{n}})))^m,$$

où $\gamma(t)$ est un chemin analytique de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ tel que :

1) $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$,

2) $\gamma(t)\psi_j(0) + (1-\gamma(t))\varphi_j(0)$ est non nul pour tout t appartenant à $[0,1]$ et pour tout j appartenant à $\{1,2,\ldots,g\}$.

3) $\gamma(t)\,b(0,0) + (1-\gamma(t))a(0,0)$ est non nul pour tout t appartenant à $[0,1]$.

Ces deux dernières conditions se traduisent en disant que γ doit éviter $g+1$ points.

En prenant

$$\mathrm{F}_t(x,u) = \int_0^u \mathrm{R}(x,v,t)\,dv + \gamma(t)\mathrm{P}_1(x,0) + (1-\gamma(t))\mathrm{P}_0(x,0),$$

on montre la proposition suivante.

2.1.1. Proposition. — *Il existe une déformation analytique à un paramètre,* $f_t : \mathbf{C}^2_{,0} \to \mathbf{C}^2_{,0}$ $(x,u) \mapsto (x,\mathrm{F}_t(x,u))$ *de* f_0 *sur* f_1 *pour* t *appartenant à un ouvert de* $\mathbf{C}$ *contenant* $[0,1]$. *Les germes analytiques* f_t

sont de corang 1, *tous finis de degré* N, *de même multiplicité* m *en un point générique de leurs lieux critiques* C_t *et le type topologique des lieux critiques* C_t *est constant.*

2.2. *Idée de la démonstration.*

Introduisons maintenant l'application H de $\mathbf{C}^2_{,0} \times W$ vers $\mathbf{C}^2_{,0} \times W$:

$(x,u,t) \mapsto (x,F_t(x,u),t)$. On désignera par C le lieu critique de H, $C = \{(x,u,t) \in \mathbf{C}^2_{,0} \times W;\ (x,u) \in C_t\}$, et par H(C) son lieu discriminant.

Pour montrer que f_0 et f_1 sont topologiquement équivalents nous allons montrer en fait qu'il existe un homéomorphisme q de $\mathbf{C}^2_{,0} \times W$ sur lui-même de la forme

$$(x,y,t) \mapsto (x,q_t(x,y),t)$$

tel que $q(f_0(C_0),t) = (f_t(C_t),t)$ et $q(x,y,0) = (x,y,0)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}^2_{,0} \times W \arrow[rrr, "p"] \arrow[dd, "f_0 \times I_d"'] & (x,u,t) \arrow[d, mapsto] & (x,u,t) \arrow[d, mapsto] & \mathbf{C}^2_{,0} \times W \arrow[dd, "H"] \\
& (x,F_0(x,u),t) & (x,F_t(x,u),t) & \\
\mathbf{C}^2_{,0} \times W \arrow[rrr, "q"] & & & \mathbf{C}^2_{,0} \times W \\
(x,y,t) \arrow[rrr, mapsto] & & & (x,q_t(x,y),t)
\end{tikzcd}$$

On remontera alors q par un homéomorphisme p vérifiant $p(x,u,0) = (x,u,0)$ et tel que le diagramme ci-dessus commute.

2.3. *Construction de l'homéomorphisme* q.

En utilisant le théorème de préparation de Weierstrass, on obtient :

2.3.1. Lemme. — $F_t(x,u) - y = U(x,y,t,u)T(x,y,t,u)$ *où* T *est un polynôme distingué en* u *de la forme*

$$T(x,y,t,u) = u^{nm+1} + \lambda_1(x,y,t)u^{nm} + \dots \qquad \text{où} \quad \lambda_i(0,0,t) = 0$$

et il existe ε_1, ε_2, ε_3 *et* W *ouvert de* $\mathbf{C}$ *contenant* [0,1] *tels que* $U(x,y,t,u) \neq 0$ *pour* (x,y,t,u) *appartenant à* $\bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times W \times \bar{D}_{\varepsilon_3}$.

(On a noté : $\bar{D}_\varepsilon = \{x \in \mathbf{C}; |x| \leqslant \varepsilon)$. Quitte à diminuer ε_1 et W, on a la propriété :

2.3.2. LEMME. — *La fibre de la restriction de* H *à* $\bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times W$ *en un point de*

$$H(C) - \{(0,0,t);\ t \in W\} \cap \bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times W$$

contient un point de C *d'ordre* $m + 1$ *et* $m(n-1)$ *points simples.*

Preuve du lemme 2.3.2. — Dans la construction de F_t, on a donné une paramétrisation $(x = s^n, u = \varphi(s,t))$ en famille de C_t. On en déduit (voir I) que $(x = s^n, y = P(s^n, \varphi(\varepsilon^k s,t))$ sont pour k appartenant à $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ « les » n paramétrisations de $f_t(C_t)$. Quitte à diminuer ε_1 et W, on a pour tout couple (k,k') de $\{0, 1, \ldots, n-1\}^2$ formés d'entiers distincts :

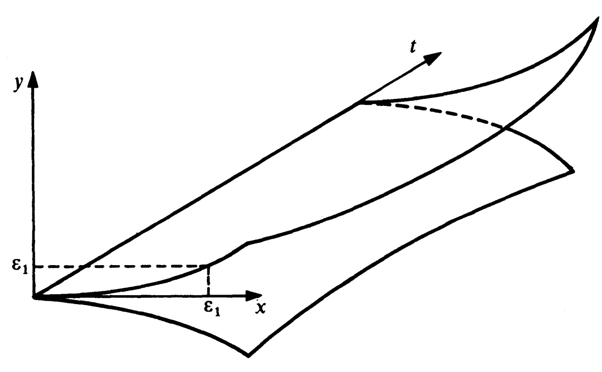
$$P(s^n, \varphi(\varepsilon^k s,t)) \neq P(s^n, \varphi(\varepsilon^{k'} s,t)) \quad \text{pour} \quad (s^n,t)$$

appartenant à $\bar{D}_{\varepsilon_1} \times W$. La restriction de H à $C \cap \bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times W$ est donc injective. On en déduit alors facilement le lemme.

On sait d'après les calculs de I que n est la multiplicité de $f_t(C_t)$ avec l'axe des y. D'après le corollaire I.4.1., vu les propriétés de f_t, le type topologique de $f_t(C_t)$ est indépendant de t; c'est-a-dire que le lieu discriminant de f_t est équisingulier le long de l'axe des t au sens de Zariski. En utilisant des résultats classiques établis dans [9], on démontre :

2.3.3. PROPOSITION. — $H(C) - \{(0,0,t); t \in W\} \cap \bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times W$ *est une variété lisse et un revêtement à* n *feuillets de* $\bar{D}_{\varepsilon_1} - \{0\} \times W$. *Il existe un homéomorphisme* q *de* $\bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times W$ *sur lui-même de la forme* $q : (x,y,t) \mapsto (x, q_t(x,y), t)$, *tel que*

$$q(f_0(C_0), t) = (f_t(C_t), t) \quad \textit{et} \quad q(x,y,0) = (x,y,0)$$



2.4. *Construction de l'homéomorphisme* p.

Posons $X = \{(x,y,t,u) \in \bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times [0,1] \times \bar{D}_{\varepsilon_3};\ F_t(x,u) = q_t(x,y)\}$

$$X_0 = \{(x,y,t,u) \in \bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times [0,1] \times \bar{D}_{\varepsilon_3};\ F_0(x,u) = y\}.$$

Soit π (resp. π_0) la projection canonique de X (resp. X_0) sur $\bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times [0,1]$.

Il est facile de voir que la construction de l'homéomorphisme local $\bar{p}$ est équivalente à la construction d'un homéomorphisme p de X_0 sur X tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr, "\bar{p}"] \arrow[dr, "\pi_0"'] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & \bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times [0,1] & \end{tikzcd} \qquad \text{où} \qquad \bar{p}(x,y,0,u) = (x,y,0,u)$$

avec les notations du lemme 2.3.1., on a les égalités :

$$X = \{(x,y,t,u) \in \bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times [0,1] \times \mathbf{C};\ T(x,q_t(x,y),t,u) = 0\}$$
$$X_0 = \{(x,y,t,u) \in \bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times [0,1] \times \mathbf{C};\ T(x,y,0,u) = 0\}.$$

2.4.1. Lemme. — *Pour* (x,y) *appartenant à* $\bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2}$, *les coefficients* $(\lambda_i(x,y,t))_{i \in \{1,\dots,nm+1\}}$ *du polynôme en* u $T(x,q_t(x,y),t,u)$ *appartiennent pour* t *variant dans* $[0,1]$ *à la même strate de la stratification universelle des polynômes de degré* $nm+1$.

Preuve du lemme. — $\{(x,y,t) \in \bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times [0,1];\ (x,q_t(x,y)) \notin f_t(C_t)\}$ est l'ensemble des triplets (x,y,t) de $\bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times [0,1]$ tels que le polynôme $T(x,q_t(x,y),t,u)$ n'ait que des racines simples. Cet ensemble, vu les propriétés de q, est : $(\bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} - f_0(C_0)) \times [0,1]$. De même l'ensemble des triplets (x,y,t) de $\bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2} \times [0,1]$ tels que $T(x,q_t(x,y),t,u)$ ait au moins une racine multiple est $f_0(C_0) \times [0,1]$. Du lemme 2.3.2., on déduit qu'il y a dans ce cas : 1 racine multiple appartenant à C_0 d'ordre $m+1$ et $m(n-1)$ racines simples.

2.4.2. LEMME. — *Soit* $K = \bar{D}_{\varepsilon_1} \times \bar{D}_{\varepsilon_2}$ *et* $(P_{a,t}(u))_{(a,t)\in K\times[0,1]}$ *une famille de polynômes unitaires du même degré* N *dépendant continûment de* t *et de* a.

Posons

$$X = \{(a,t,u) \in K \times [0,1] \times \mathbf{C};\ P_{a,t}(u) = 0\}$$
$$X_0 = \{(a,t,u) \in K \times [0,1] \times \mathbf{C};\ P_{a,0}(u) = 0\}.$$

Supposons que pour tout a *fixé, les coefficients* $(\lambda_i(a,t))_{i\in\{1,\dots,N\}}$ *de* $P_{a,t}(u)$ *restent dans la même strate de la stratification universelle des polynômes pour* t *variant dans* $[0,1]$. *Alors il existe un unique homéomorphisme* p *tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "(a,t,u)\mapsto(a,t)"'] & & X \arrow[dl, "(a,t,u)\mapsto(a,t)"] \\ & K \times [0,1] & \end{tikzcd}$$

et où $p(a,0,u) = (a,0,u)$.

La démonstration de ce lemme est basée sur le théorème de continuité des racines d'un polynôme. Le détail est laissé au lecteur (voir aussi[6]).

On a donc démontré le théorème :

2.5. THÉORÈME. — *Soient* f_0 *et* f_1 *deux germes analytiques de* $\mathbf{C}^2_{,0}$ *vers* $\mathbf{C}^2_{,0}$, *finis, de corang* 1, *à lieux critiques irréductibles. Pour que* f_0 *et* f_1 *soient topologiquement équivalents, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient réalisées :*

— *leurs lieux critiques sont topologiquement équivalents,*
— *leurs lieux critiques ont la même multiplicité en un point générique,*
— f_0 *et* f_1 *sont finis de même degré.*

2.5.1. *Remarque.* — Rappelons (corollaire I.4.1.) que ces trois conditions précédentes peuvent être remplacées par : f_0 et f_1 sont finis de même degré et leurs lieux discriminants sont topologiquement équivalents.

3. Image réciproque du lieu discriminant d'un germe analytique.

En utilisant la remarque 1.2 et le théorème précédent, on obtient le corollaire :

3.1. COROLLAIRE. — *Soit f un germe analytique de $\mathbf{C}^2_{,0}$ vers $\mathbf{C}^2_{,0}$, de corang 1, fini, à lieu critique irréductible. Le type topologique de l'image réciproque $f^{-1}(f(\mathrm{C})$ du lieu discriminant de f, ne dépend que du degré de f, de la multiplicité en un point générique du lieu critique, et du type topologique de C.*

3.2. *Résultats sans démonstration.*

Reprenons les notations de I.

3.2.1. PROPOSITION. — *$f^{-1}(f(\mathrm{C}))$ est formé de $m(n-1)+1$ branches irréductibles distinctes définies l'une par :*

$$\prod_{k=0}^{n-1}(u-\varphi(\varepsilon^k x^{1/n})) = 0 \quad (\textit{équation réduite de } \mathrm{C})$$

et les $m(n-1)$ autres, pour j élément de $\{1,2,\ldots,g\}$ et i élément de $\{1,\ldots,mh_j\}$ par $\prod_{k=0}^{n-1}(u-\psi_{j,i}(\varepsilon^k x^{1/n})) = 0$ où les exposants caractéristiques de $(x=t^n, u=\psi_{j,i}(t))$ sont :

$$\begin{aligned}&(n,\beta_1,\ldots,\beta_j,(me_j+1)\beta_{j+1}-me_j\beta_j,\ldots,m(h_{j+1}\beta_{j+1}+\ldots+h_p\beta_p)\\&\quad+(me_p+1)\beta_{p+1}-me_j\beta_j,\ldots,m(h_{j+1}\beta_{j+1}+\ldots+h_{g-1}\beta_{g-1})\\&\quad+(me_{g-1}+1)\beta_g-me_j\beta_j).\end{aligned}$$

La démonstration de cette proposition est basée sur des calculs analogues à ceux de I (voir [6]).

3.2.2. *Remarque.* — Par ces calculs, on peut établir directement le corollaire 3.1. On peut alors donner facilement une deuxième démonstration du théorème 2.5.1. par le deuxième lemme d'isotopie de Thom (H est topologiquement trivial au-dessus de $\bar{\mathrm{D}}_{\varepsilon_1}\times[0,1]$), voir [5].

APPENDICE

Conditions suffisantes pour qu'une courbe plane quasihomogène soit le lieu discriminant d'une application analytique, finie, de corang 1, de $\mathbf{C}^2$ vers $\mathbf{C}^2$.

Nous désignerons par $f(x,y) = y^n + \lambda_1 x^\alpha y^{n-1} + \ldots + \lambda_n x^{n\alpha}$ un polynôme quasihomogène (y a le poids α et x le poids 1, α appartient à $\mathbf{Q}$ et $\lambda_i = 0$ si $i\alpha$ n'appartient pas à $\mathbf{N}$). Soient $f_1, \ldots, f_p$ les polynômes quasihomogènes de même poids que f apparaissant dans la décomposition de f en facteurs irréductibles. Les $f_i(x,y)$ s'écrivent donc : $f_i(x,y) = y^{n_i} + \mu_i x^{n_i\alpha}$.

Pour que $f(x,y)$ soit le lieu discriminant d'une application analytique, fini, de corang 1, de $\mathbf{C}^2$ vers $\mathbf{C}^2$, il suffit de trouver

$$P(x,u) = u^{n+1} + a_1(x)u^n + \ldots + a_{n+1}(x),$$

élément de $\mathbf{C}[x,u]$, tel que $\mathrm{Discr}_u\,(P(x,u)-y) = 0$ équivaut à $f(x,y) = 0$.

Ce problème est équivalent à l'existence de $(r_1, \ldots, r_p)$ entiers non nuls tels que $\mathrm{Discr}_u\,(P(x,u)-y) = \mathrm{cste}\, f_1^{r_1} \ldots f_p^{r_p}$. En développant ce discriminant, on se ramène à un système d'équations dont les inconnues sont les $a_i(x)$.

Signalons par cette méthode le résultat obtenu dans [6].

PROPOSITION. — *Soit Δ une courbe plane quasihomogène d'équation réduite $\prod_{i=1}^{p} (y^{n_i}+\lambda_i x^{n_i\alpha}) = 0$ (α appartient à $\mathbf{Q}$, $n_i\alpha$ appartient à $\mathbf{N}$ et est premier avec n_i). Δ est le lieu discriminant d'une application finie de corang 1 de $\mathbf{C}^2$ vers $\mathbf{C}^2$ si il existe p entiers non nuls $r_1, \ldots, r_p$ tels que le rationnel α soit multiple de $n_1r_1 + \ldots + n_pr_p + 1$.*

Ces conditions ne sont que suffisantes; on vérifie en effet que $\mathrm{Discr}_u(u^4+2\sqrt{2}xu^2+x^2-y) = \mathrm{cste}\,(y-x^2)(y+x^2)^2$. Signalons pour finir

(Appendice [6]) que $y^3 - x^5$ et $y^2 - x^2$ ne peuvent pas être de tels lieux discriminants.

Remarque. – Dans le cas Δ quasihomogène irréductible, on retrouve la condition II.4.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin, *Inventiones Mathematics*, Vol. 5 (1968).
[2] N. A'Campo, Le nombre de Lefschetz d'une monodromie, *Indagationes Mathematicae*, Volume 35, Fasc. 2 (1973).
[3] L. Hormänder, *Acta Mathematica*, Vol. 127 (1971).
[4] Le Dung Trang, Topologie des singularités des hypersurfaces complexes, Singularités à Cargèse, *Astérisque*, N° 7 et 8 (1973).
[5] J. Mather, *Notes on topological stability*, Harvard University, 1970.
[6] Ph. Maisonobe, *Lieu discriminant d'une application de corang* 1 *de* $\mathbf{C}^2$ *vers* $\mathbf{C}^2$, Thèse de troisième cycle soutenue à l'Université de Nice le 10 Juin 1981.
[7] F. Pham, Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, *Progress in Mathematics*, Volume 2, Birkhaüser, 1979.
[8] F. Pham, Remarque sur l'équivalence des fonctions de phase, *C.R.A.S.*, Tome 290, Série A (Juin 1980).
[9] O. Zariski, Studies in Equisingularity I et II, *American Journal of Mathematics*, Vol. 87 (1965). Studies in Equisingularity III, *American Journal of Mathematics*, Vol. 90 (1968).

Manuscrit reçu le 13 janvier 1982.

Philippe Maisonobe,
Université de Nice
I.M.S.P.
Département de Mathématiques
Parc Valrose
06034 Nice Cedex.