ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN MERRIEN

Faisceaux analytiques semi-cohérents

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 4 (1980), p. 165-219

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_4_165_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 4 (1980) 165-219.

FAISCEAUX ANALYTIQUES SEMI-COHÉRENTS

par Jean MERRIEN

Le but de cet article est d'obtenir en géométrie analytique réelle des théorèmes analogues à ceux connus dans le cas complexe (théorème de cohérence d'Oka, cohérence d'un ensemble analytique complexe, théorème de l'image directe). Pour cela nous définissons deux notions nouvelles, celle de fonction Nash-analytique et celle de faisceau analytique semi-cohérent.

La notion de fonction Nash-analytique transporte dans le domaine analytique la notion de fonction de Nash utilisée en géométrie algébrique réelle. Une fonction analytique sur une partie localement fermée X de $\mathbf{R}^n$ est Nash-analytique si elle est algébrique sur $\mathcal{O}_x$, pour tout x du bord de X (définition I.1.1.).

Un faisceau analytique $\mathcal{M}$ sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ est semi-cohérent si, pour tout x_0 de Ω, il existe un voisinage U de x_0 et une partition finie de U en parties semi-analytiques localement fermées, tels que $\mathcal{M}_U \simeq \mathcal{O}^q_U/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est engendré sur chaque Λ de la partition par un nombre fini d'éléments Nash-analytiques sur Λ (définitions II.6.1 et II.6.2).

Les principaux résultats sont les suivants :

1° Si f est Nash-analytique sur un ouvert Ω, $|f(x)|$ est majorée par une puissance, négative, de la distance de x au bord de Ω (théorème I.2.1.).

2° L'image directe, par un morphisme propre et fini, d'un faisceau semi-cohérent est semi-cohérent (théorème II.7.1).

3° Si X est une partie semi-analytique, et $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux des germes nuls sur X, $\mathcal{O}/\mathcal{I}$ est semi-cohérent (théorème III.7.1).

Dans un article ultérieur nous appliquerons ces résultats au domaine des fonctions différentiables.

Le plan général est le suivant :

Chapitre I. — Le paragraphe 1 définit les fonctions Nash-analytiques. Les paragraphes 2, 3 et 4 sont consacrés à la démonstration de l'inégalité I.2.1, obtenue par un passage au domaine complexe et une intégrale de Cauchy.

Le reste du chapitre comporte une étude un peu fastidieuse des parties semi-analytiques en suivant les méthodes de Łojasiewicz. Les résultats à noter sont le théorème I.5.1, qui permet de prolonger une fonction Nash-analytique sur une partie semi-analytique à un ouvert semi-analytique, et le lemme I.8.1.

Chapitre II. — Les trois premiers paragraphes introduisent les outils utilisés dans les démonstrations ultérieures. Ces démonstrations se font souvent par récurrence sur la dimension, en utilisant, pour le passage de $(n-1)$ à n, un polynôme P distingué en la dernière variable. On stratifie V(P) suivant la multiplicité des zéros de P (paragraphe 1) et on définit la notion de partie compatible avec P (II.2.1). Sur une telle partie, on démontre un théorème de division par P dans le domaine Nash-analytique (II.2.4.).

Le paragraphe 4 montre un théorème sur les relations entre fonctions Nash-analytiques, analogue au théorème de cohérence d'Oka (II.4.1), et le paragraphe 5 contient un théorème de recollement.

Le paragraphe 6 donne la définition et les propriétés les plus simples des faisceaux semi-cohérents et le paragraphe 7 contient le théorème de l'image directe.

Chapitre III. — Le but essentiel du chapitre III est le théorème de semi-cohérence III.7.1.

Pour y parvenir, on commence (trois premiers paragraphes) par décrire la décomposition primaire de $\mathfrak{p}_x$, pour x voisin de 0, $\mathfrak{p}$ étant un idéal premier de $\mathcal{O}_n$ (théorème III.3.2).

Les paragraphes 4 et 5 permettent, en utilisant la normalisation, de recoller ces décompositions par des fonctions Nash-analytiques (théorème III.5.3.). Le paragraphe 6 donne un corollaire de III.5.3 qui ne sera pas utilisé au paragraphe suivant.

Le paragraphe 7 contient la démonstration de III.7.1. On retrouve en corollaire un théorème de M. Galbiati sur la semi-analyticité de l'ensemble des points de cohérence d'un ensemble analytique réel.

CHAPITRE PREMIER

FONCTIONS NASH-ANALYTIQUES

1. Fonctions Nash-analytiques.

On note $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions analytiques réelles sur $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{O}_x$ sa fibre en un point x.

Si X est une partie de $\mathbf{R}^n$, on note $\mathcal{O}(\mathrm{X})$ l'anneau des fonctions analytiques sur X, i.e. l'anneau des sections sur X de $\mathcal{O}$. Si X_x est le germe de X en x, on note $\mathcal{O}_x(\mathrm{X}_x)$ l'anneau des germes en x de fonctions analytiques sur X_x. Alors $\mathcal{O}_x$ est un sous-anneau de $\mathcal{O}_x(\mathrm{X}_x)$.

De la même manière on notera $\tilde{\mathcal{O}}_x$, $\tilde{\mathcal{O}}$, $\tilde{\mathcal{O}}(\mathrm{X})$, $\tilde{\mathcal{O}}_x(\mathrm{X}_x)$ les notions analogues dans le cas analytique complexe.

Pour tout X de $\mathbf{R}^n$ on note $\partial \mathrm{X} = \bar{\mathrm{X}} \backslash \mathrm{X}$ le bord de X. Si X est localement fermé, $\partial \mathrm{X}$ est fermé.

Nous travaillerons le plus souvent sur des parties semi-analytiques localement fermées (en abrégé s.a.l.f.). L'ouvrage de référence sera [2].

DÉFINITION 1.1. — *Une fonction analytique f sur une partie localement fermée* X *de* $\mathbf{R}^n$ *est Nash-analytique si, pour tout* x de $\partial \mathrm{X}$, *le germe de* f *en* x *est algébrique sur* $\mathcal{O}_x$, *i.e. vérifie une équation* $\sum_{i=0}^{p} a_i f^i = 0$, *où les* a_i *de* $\mathcal{O}_x$ *sont non tous nuls.*

On notera $\mathcal{N}(\mathrm{X})$ l'ensemble des fonctions Nash-analytiques sur X, et $\mathcal{N}_x(\mathrm{X}_x)$ l'ensemble des germes en x de fonctions Nash-analytiques sur X_x.

Il est clair que $\mathcal{N}(\mathrm{X})$ est un anneau, stable par dérivation, et que, si Y est une partie localement fermée contenue dans X, la restriction à Y d'un élément de $\mathcal{N}(\mathrm{X})$ appartient à $\mathcal{N}(\mathrm{Y})$.

En général, le composé de deux fonctions Nash-analytiques n'est pas Nash-analytique. Par exemple la fonction $e^{\frac{1}{x}}$ est composée de $\frac{1}{x}$ qui appartient à $\mathcal{N}(X)$, $X = \{x \in \mathbf{R}\,; x > 0\}$, et de l'exponentielle, et elle n'appartient pas à $\mathcal{N}(X)$.

On étudiera cependant un cas particulier dans lequel on pourra composer (théorème II.3.1).

2. Croissance au bord d'une fonction Nash-analytique.

THÉORÈME 2.1. — *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *et* f *un élément de* $\mathcal{N}(\Omega)$. *Alors, pour tout compact* K *de* $\mathbf{R}^n$, *il existe des constantes positives* C *et* α *telles que :*

$$\forall x \in \Omega \cap K, \quad |f(x)| \leqslant C.d(x, \partial\Omega)^{-\alpha}.$$

Le corollaire suivant est analogue à l'inégalité de Łojasiewicz.

COROLLAIRE 2.2. — *Sous les hypothèses de* 2.1. *il existe, pour tout compact* K *de* $\mathbf{R}^n$, *des constantes positives* C *et* α *telles que :*

$$\forall x \in \Omega \cap K, \quad |f(x)| \geqslant C\, d(x, V(f) \cup \partial\Omega)^{\alpha}.$$

Ici $V(f)$ désigne l'ensemble des zéros de f. Le corollaire s'obtient en appliquant le théorème à la fonction $\dfrac{1}{f}$ sur $\Omega \backslash V(f)$.

Démonstration de 2.1. — La question étant locale, on va travailler au voisinage d'un point de $\partial\Omega$, qu'on supposera être l'origine de $\mathbf{R}^n$. On supposera aussi $n > 1$, le cas $n = 1$ étant immédiat.

D'après la définition 1.1, il existe des fonctions a_i, $i \in [0,p]$, analytiques sur un voisinage U de 0, avec $a_0 \neq 0$ et $P(x, f(x)) = 0$ sur $U \cap \Omega$, où $P(x, X) = \sum_{i=0}^{p} a_i X^{p-i}$.

On peut supposer que P est sans facteur multiple, donc que son discriminant δ est non nul. On peut donc, par le théorème de préparation de Weierstrass, trouver un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que $a_0\delta$ soit égal, modulo un facteur inversible, à un polynôme distingué en x_n, $Q(x', x_n)$, de degré q (on note $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$). On supposera Q défini sur U, ce qui est possible en diminuant U, ce qu'on fera plusieurs fois par la suite. On supposera aussi $\Omega \subset U$.

On pose, pour $i \in [1,q]$:

$$V_i = \{(x',x_n) \in U\,;\ x_n \text{ est racine de } Q \text{ d'ordre } \geqslant i\}$$
$$= \left\{x \in U\,;\ \frac{\partial^j Q}{\partial x_n^j}(x) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant i-1\right\}.$$

On pose aussi : $V_0 = U$, $V_{q+1} = \varnothing$ et $d(x,V_{q+1}) = 1$.

La démonstration de 2.1. repose sur le lemme suivant :

LEMME 2.3. — *Il existe des constantes* α, β, γ, *positives, telles que, pour* $i \in [0,q]$:

$$\forall x \in \Omega \backslash V_{i+1}, \quad d(x,V_i) \leqslant d(x,V_{i+1} \cup \partial\Omega)^\alpha \Rightarrow |f(x)| \leqslant \gamma d(x,V_{i+1})^{-\beta}.$$

Les deux paragraphes suivants seront consacrés à la démonstration de 2.3.

Terminons la démonstration de 2.1.

Soit $x \in \Omega$. Si $d(x,V_q) \leqslant d(x,\partial\Omega)^\alpha$ on a $|f(x)| \leqslant \gamma$ en prenant $i = q$ dans 2.3.

Sinon, il existe $i \in [0,q-1]$ avec :

$$d(x,V_j) > d(x,V_{j+1} \cup \partial\Omega)^\alpha \qquad \text{pour} \qquad q \geqslant j > i,$$

et

$$d(x,V_i) \leqslant d(x,V_{i+1} \cup \partial\Omega)^\alpha.$$

On a alors d'après 2.3. : $|f(x)| \leqslant \gamma d(x,V_{i+1})^{-\beta} < \gamma d(x,V_{i+2} \cup \partial\Omega)^{-\alpha\beta}$. Si $d(x,V_{i+2} \cup \partial\Omega) = d(x,\partial\Omega)$, *on a* $|f(x)| < \gamma d(x,\partial\Omega)^{-\alpha\beta}$.

Sinon on a :

$$|f(x)| < \gamma d(x, V_{i+2})^{-\alpha\beta} < \gamma d(x,V_{i+3} \cup \partial\Omega)^{-\alpha^2\beta}$$

d'après 2.3. En itérant ce raisonnement, on peut majorer $|f(x)|$ par : $\gamma \sup\limits_{k \in [1,q-i]} d(x,\partial\Omega)^{-\alpha^k\beta}$, ce qui démontre 2.1.

Remarque 2.4. — Si ω est un indice de dérivation on a $\delta^{|\omega|}\dfrac{\partial^{|\omega|} f}{\partial x^\omega} = R_\omega(f)$, où R_ω est un polynôme de degré au plus $2|\omega|P$, à coefficients analytiques au voisinage de 0.

La démonstration de 2.3. (faite au paragraphe 4) montre alors qu'il existe une constante γ_ω telle que :

$$\forall x \in \Omega \backslash V_{i+1}, \quad d(x,V_i) \leqslant d(x,V_{i+1} \cup \partial\Omega)^\alpha \Rightarrow \left|\frac{\partial^{|\omega|} f}{\partial x^\omega}(x)\right| \leqslant \gamma_\omega d(x,V_{i+1})^{-|\omega|\beta}.$$

Il en résulte que le théorème 2.1. peut être précisé de la manière suivante :

Pour tout compact K de $\mathbf{R}^n$ il existe des constantes positives α et C_ω, $\omega \in \mathbf{N}^n$, telles que :

$$\forall x \in \Omega \cap K, \quad \forall \omega \in \mathbf{N}^n, \quad \left|\frac{\partial^{|\omega|} f}{\partial x^\omega}(x)\right| \leqslant C_\omega\, d(x,\partial\Omega)^{-|\omega|\alpha}.$$

3. Un lemme de prolongement.

Pour montrer 2.3. nous allons passer au domaine complexe, en prolongeant les fonctions a_i et le polynôme Q en des fonctions holomorphes $\tilde{a}_i$ et $\tilde{Q}$ sur un voisinage $\tilde{U}$ de 0 dans $\mathbf{C}^n$. On désignera par $\tilde{V}$ l'ensemble des zéros de $\tilde{Q}$ dans $\tilde{U}$.

On a alors :

LEMME 3.1. — *Il existe des constantes positives* a, b, c, ρ, $\sigma(\rho > \sigma)$, *telles que, pour* $i \in [1,q]$, *et* $(x',x_n) = x \in (V_i \backslash V_{i+1}) \cap \Omega$:

1) *Il existe une fonction holomorphe* $\tilde{f}_x$ *sur un voisinage de*

$$\tilde{\mathcal{D}}_x = \{y' \in \mathbf{C}^{n-1};\ \|x'-y'\| \leqslant a\, d(x,V_{i+1})^\rho\} \times \{y_n \in \mathbf{C};\ |x_n - y_n| \leqslant b\, d(x,V_{i+1})^\sigma\},$$

égale à f *au voisinage de* x *dans* $\mathbf{R}^n$.

2) *Pour tout* $y = (y',y_n)$ *de* $\mathbf{C}^n$, *tel que* $\|y'-x'\| \leqslant a\, d(x,V_{i+1})^\rho$ *et* $|y_n - x_n| = b\, d(x,V_{i+1})^\sigma$, *on a* $d(y,\tilde{V}) \geqslant c\, d(x,V_{i+1})^\rho$.

Démonstration de 3.1. — La démonstration est faite pour $i \leqslant q-1$. Le cas où $i = q$ est analogue.

Soit $x \in (V_i \backslash V_{i+1}) \cap \Omega$. Alors x_n est racine d'ordre exactement i de l'équation $Q(x',t) = 0$.

Soit ξ_j, $1 \leqslant j \leqslant q$, les racines, réelles ou non, de cette équation avec $\xi_j = x_n$ pour $1 \leqslant j \leqslant i$.

On a : $\tilde{Q}(x',t) = \prod_{j=1}^{q} (t-\xi_j) = (t-x_n)^i \prod_{j=i+1}^{q} (t-\xi_j)$

$$\frac{\partial^i \tilde{Q}}{\partial x_n^i}(x',x_n) = i\,! \prod_{j=i+1}^{q} (x_n-\xi_j).$$

Les racines de $\tilde{Q}$ étant bornées, il existe une constante C_0 (indépendante de x) telle que :

$$\operatorname*{Inf}_{j>i} |x_n-\xi_j| \geqslant C_0 \left|\frac{\partial^i \tilde{Q}}{\partial x_n^i}(x)\right|.$$

En appliquant l'inégalité de Łojasiewicz à $\dfrac{\partial^i Q}{\partial x_n^i}$, on trouve des constantes positives C_1 et ρ_1 avec :

$$\operatorname*{Inf}_{j>i} |x_n - \xi_j| \geqslant C_1\, d\left(x,\left\{\frac{\partial^i Q}{\partial x_n^i}=0\right\}\right)^{\rho_1}.$$

D'après la régulière situation de V_i et de $\left\{\dfrac{\partial^i Q}{\partial x_n^i}=0\right\}$, d'intersection V_{i+1}, on a des constantes C_2 et ρ_2 avec :

$$\operatorname*{Inf}_{j>i} |x_n-\xi_j| \geqslant C_2\, d(x,V_{i+1})^{\rho_2}.$$

Posons $R = C_2\, d(x,V_{i+1})^{\rho_2}$. Pour tout t de $\mathbf{C}$ tel que $\dfrac{R}{4} \leqslant |t-x_n| \leqslant \dfrac{3R}{4}$ on a $|\tilde{Q}(x',t)| \geqslant \left(\dfrac{R}{4}\right)^q$.

On en déduit, par le théorème des accroissements finis, l'existence de constantes positives C_3 et $\rho_3 = \rho_2 q$, telles que :

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{R}{4} \leqslant |t-x_n| \leqslant \dfrac{3R}{4} \\ \|y'-x'\| \leqslant C_3\, d(x,V_{i+1})^{\rho_3} \end{array}\right. \Rightarrow \tilde{Q}(y',t) \neq 0.$$

On pose alors $\rho = \rho_3$, $\sigma = \rho_2$, $a = \dfrac{C_3}{2}$, $b = \dfrac{C_2}{2}$.

La condition 3.1.2° est alors vérifiée avec $C = \operatorname{Inf}\left(\dfrac{C_3}{2}, \dfrac{C_2}{4}\right)$.

Pour montrer 3.1.1°, nous allons utiliser un prolongement de f à un ouvert simplement connexe, et une intégrale de Cauchy.

Puisque f est analytique au voisinage de x, il existe $\varepsilon = (\varepsilon', \varepsilon_n)$, dépendant de x, et une fonction $\tilde{g}_x$ holomorphe sur :

$$\tilde{\mathbf{B}}_\varepsilon = \{y' \in \mathbf{C}^{n-1} ; \ \|y'-x'\| < \varepsilon'\} \times \{y_n \in \mathbf{C} ; \ |y_n - x_n| < \varepsilon_n\},$$

égale à f sur $\tilde{\mathbf{B}}_\varepsilon \cap \mathbf{R}^n$.

On peut supposer ε tel que $\tilde{\mathbf{B}}_\varepsilon \subset \tilde{\mathscr{D}}_x$ et que $\tilde{\mathrm{Q}}$ ne s'annule pas sur

$$\{\|y'-x'\| < \varepsilon'\} \times \left\{\varepsilon_n \leqslant |y_n - x_n| < \frac{3\mathrm{R}}{4}\right\}.$$

Soit alors

$$\tilde{\mathscr{C}}_x = \left\{y \in \mathbf{C}^n ; \ \|y'-x'\| < \varepsilon' \text{ et } |y_n - x_n| < \frac{3\mathrm{R}}{4}\right\}$$
$$\cup \left\{y \in \mathbf{C}^n ; \ \|y'-x'\| < \mathrm{C}_3\, d(x, \mathrm{V}_{i+1})^{\rho_3} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{R}}{4} < |y_n - x_n| < \frac{3\mathrm{R}}{4}\right\}.$$

On a $\tilde{\mathbf{B}}_\varepsilon \subset \tilde{\mathscr{C}}_x$ et tout chemin fermé de $\tilde{\mathscr{C}}_x$ est homotope à un chemin fermé dans $\tilde{\mathbf{B}}_\varepsilon$. Au voisinage de tout y n'annulant pas $\tilde{\mathrm{Q}}$, les solutions du polynôme $\tilde{\mathrm{P}}$ sont p fonctions holomorphes distinctes. D'après (1) on peut donc prolonger $\tilde{g}_x$ le long de tout chemin contenu dans $\tilde{\mathscr{C}}_x$. D'après la propriété d'homotopie, ce prolongement est indépendant du chemin. Il en résulte qu'il existe une fonction holomorphe $\tilde{h}_x$ sur $\tilde{\mathscr{C}}_x$ dont la restriction à $\tilde{\mathbf{B}}_\varepsilon$ est $\tilde{g}_x$.

Soit alors la fonction $\tilde{f}_x$ définie au voisinage de $\tilde{\mathscr{D}}_x$ par :

$$\tilde{f}_x(y', y_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|t-x_n| = \frac{2\mathrm{R}}{3}} \frac{\tilde{h}_x(y', t)}{t - y_n}\, dt.$$

Il est clair que $\tilde{f}_x$ est holomorphe. De plus, puisque $\tilde{h}_x$ est holomorphe sur $\{\|y'-x'\| < \varepsilon'\} \times \left\{|y_n - x_n| < \frac{3\mathrm{R}}{4}\right\}$ on a :

$$\tilde{f}_x = \tilde{h}_x \text{ sur } \{\|y'-x'\| < \varepsilon'\} \times \left\{|y_n - x_n| < \frac{2\mathrm{R}}{3}\right\}.$$

Donc $\tilde{f}_x = \tilde{g}_x$ sur $\tilde{\mathbf{B}}_\varepsilon$ et $\tilde{f}_x = f$ sur $\tilde{\mathbf{B}}_\varepsilon \cap \mathbf{R}^n$.

4. Démonstration de 2.3.

Le cas $i = 0$ de 2.3 résulte de la majoration :

$$|f(x)| \leqslant 2 \operatorname*{Sup}_{1 \leqslant i \leqslant p} \left|\frac{a_i(x)}{a_0(x)}\right|^{\frac{1}{i}} \qquad \text{si} \qquad a_0(x) \neq 0,$$

et de l'inégalité de Łojasiewicz appliquée à la fonction a_0, dont les zéros sont contenus dans V_1.

Soit donc $i \in [1,q]$. Avec les notations de 3.1, on choisit $\alpha > \operatorname{Sup}(\rho,1)$. Soit $y = (y',y_n) \in \Omega \backslash V_{i+1}$, tel que

$$d(y,V_i) \leqslant d(y,V_{i+1} \cup \partial\Omega)^\alpha$$

(on remplace x par y dans 2.3).

Soit $x \in V_i$ avec $\|y-x\| = d(y,V_i)$.

Puisque $\alpha > 1$, on a $x \in \Omega\backslash V_{i+1}$, et on applique 3.1 à x. Pour U assez petit on a :

$$\begin{aligned} d(x,V_{i+1} \cup \partial\Omega) &\geqslant d(y,V_{i+1} \cup \partial\Omega) - \|y-x\| \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|y-x\|^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Soit B_x la boule, dans $\mathbf{R}^n$, de centre x et de rayon $2^\alpha d(x,V_{i+1} \cup \partial\Omega)^\alpha$. Alors $y \in B_x$ et, pour U assez petit, $B_x \subset \tilde{\mathscr{D}}_x \cap \mathbf{R}^n$ et $B_x \subset \Omega$. Puisque $\tilde{f}_x = f$ au voisinage de x, on a $\tilde{f}_x = f$ sur B_x.

Donc, d'après 3.1 :

$$f(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|t-x_n| = b\, d(x,V_{i+1})^\sigma} \frac{\tilde{f}_x(y',t)}{t-y_n}\, dt.$$

Ceci nous permet de majorer $|f(x)|$.

En effet, puisque $\tilde{P}(y, \tilde{f}_x(y)) = 0$ sur $\tilde{\mathscr{D}}_x$, on a :

$$|\tilde{f}_x(y',t)| \leqslant 2 \operatorname*{Sup}_{1 \leqslant i \leqslant p} \left|\frac{\tilde{a}_i(y',t)}{\tilde{a}_0(y',t)}\right|^{\frac{1}{i}}.$$

Donc, d'après 3.1.2°, il existe des constantes C' et α' avec :

$$|\tilde{f}_x(y',t)| \leqslant C'\, d((y',t),\tilde{V})^{-\alpha'} \leqslant C'\, C^{-\alpha'} d(x,V_{i+1})^{-\alpha'\rho}.$$

D'autre part :

$$|t-y_n| \geqslant |t-x_n| - |x_n-y_n| \geqslant b\, d(x,V_{i+1})^\sigma - (2d(x,V_{i+1}))^\alpha$$
$$\geqslant \frac{b}{2} d(x,V_{i+1})^\sigma \quad \text{pour U assez petit.}$$

Donc : $|f(y)| \leqslant 2C' C^{-\alpha'} d(x,V_{i+1})^{-\alpha'\rho}$.

Puisque, pour U assez petit, $d(x,V_{i+1}) \geqslant \frac{1}{2} d(y,V_{i+1})$, on a :

$$|f(y)| \leqslant 2C' C^{-\alpha'} 2^{\alpha'\rho} d(y,V_{i+1})^{-\alpha'\rho},$$

ce qui montre 2.3.

5. Prolongement d'une fonction Nash-analytique à un ouvert semi-analytique.

Le but des paragraphes 5, 6 et 7 est de démontrer le théorème de prolongement suivant.

THÉORÈME 5.1. — *Soit* X *une partie s.a.l.f. et* f *un élément de* $\mathcal{N}(X)$. *Alors, pour tout* x_0 *de* ∂X, *il existe un voisinage* U *de* x_0, *un ouvert semi-analytique* Ω, *avec* $X \cap U \subset \Omega$, *et un élément* g *de* $\mathcal{N}(\Omega)$ *égal à* f *au voisinage de* $X \cap U$.

Pour montrer 5.1., nous aurons besoin de la description locale des ensembles semi-analytiques donnée par les *partition normales* de Łojasiewicz [2].

Nous allons rappeler rapidement les résultats dont nous aurons besoin.

Soit X un ensemble semi-analytique au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$. Alors il existe un système de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$, un voisinage $U = \prod_{k=1}^{n} \{|x_k| < \delta_k\}$ de 0, et une partition de $X \cap U$ en $\bigcup_{i=1}^{r} \Gamma_i$, Γ_i sous-variété de U, tels que :

a) Si $\dim \Gamma_i = k < n$, il existe, pour $j \in [k+1,n]$, des polynômes $P_j(x_1,\ldots,x_k\,;\, x_j)$, distingués par rapport à x_j, à coefficients analytiques au voisinage de $\overline{\Pi(U)}$, où $\Pi(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_k)$, et une fonction H analytique au voisinage de $\overline{\Pi(U)}$ tels que :

1° Pour tout $j \in [k+1,n]$, H appartient à l'idéal engendré par P_j et

$\dfrac{\partial P_j}{\partial x_j}$. En particulier, en un point où H est non nul, les racines de P_j sont simples.

2° Γ_i est une composante connexe de :

$$U \cap \{P_{k+1} = P_{k+2} = \cdots = P_n = 0, \;\; H \neq 0\}.$$

3° $\Pi(\Gamma_i) = \Gamma'_i$ est une composante connexe de $\Pi(U) \cap \{H \neq 0\}$. Il en résulte que Γ_i et Γ'_i sont des parties s.a.l.f. et qu'il existe des fonctions φ_j, analytiques sur Γ'_i, avec :

$$\Gamma_i = \{x_j = \varphi_j(x_1,\ldots,x_k), \;\; j \in [k+1,n], \;\; (x_1,\ldots,x_k) \in \Gamma'_i\}.$$

On a aussi $\Pi(\overline{\Gamma_i}) = \overline{\Gamma'_i}$, $\Pi(\partial\Gamma_i) = \partial\Gamma'_i$ et $\overline{\Gamma_i} \cap (\partial\Gamma'_i \times \mathbf{R}^{n-k}) = \partial\Gamma_i$.

b) Si $\dim \Gamma_i = n$, il existe un polynôme distingué en x_n, H, analytique au voisinage de $\bar{U}$, tel que Γ_i soit une composante connexe de $U \cap \{H \neq 0\}$.

De plus les Γ_i sont tels que : $\partial\Gamma_i \cap U \subset (\bigcup_{j<i} \Gamma_j) \cup \partial X$.

On dira que U est un voisinage normal, et les Γ_i seront les membres de la partition normale.

Remarque 5.2. — Si un ouvert semi-analytique Ω contient une partie semi-analytique X, il existe, pour tout compact K de $\mathbf{R}^n$, des constantes C et α telles que :

$$\forall x \in X \cap K, \;\; B(x, Cd(x,\partial X)^\alpha) = \{y;\; \|x-y\| < Cd(x,\partial X)^\alpha\} \subset \Omega.$$

Cela résulte de la régulière situation de $\bar{X}$ et $\complement\Omega$ dont l'intersection est contenue dans ∂X.

Réciproquement on a :

LEMME 5.3. — *Soit* X *une partie s.a.l.f.,* $x_0 \in \partial X$ *et des constantes* C *et* α *positives. Alors il existe un ouvert semi-analytique* Ω *et un voisinage* U *de* x_0 *tels que :*

$$X \cap U \subset \Omega \subset \bigcup_{x \in X} B(x, C\, d(x,\partial X)^\alpha).$$

Démontration. — Avec les notations ci-dessus il suffit de faire la démonstration dans le cas où X est un membre Γ_i de dimension k, $k < n$. Dans ce cas, on pose $f = \Sigma\, P_j^2$, $g = f + H^2$ et

$$\Omega' = \{x\,;\ |f(x)| < C'|g(x)|^{\alpha'}\} \cap \{\Gamma'_i \times \mathbf{R}^{n-k}\},\ \alpha' \text{ rationnel.}$$

Alors Ω' est un ouvert semi-analytique, et pour C' et α' convenables, la composante connexe Ω de Ω', contenant Γ, vérifie la conclusion de 5.3.

6. Membre d'une partition normale et fonctions Nash-analytiques.

Nous montrons quelques lemmes préparatoires à la démonstration de 5.1.

LEMME 6.1. — *Soit Γ un membre d'une partition normale. Alors il existe C_1 et α_1, positifs, tels que, pour tout x de Γ, et tout $r < C_1\, d(x, \partial\Gamma)^{\alpha_1}$, il existe une partie connexe A_x avec :*

$$B(x,r^2) \cap \Gamma \subset A_x \subset B(x,r) \cap \Gamma.$$

Démonstration. — On peut supposer que $\dim \Gamma = k < n$, et on conserve les notations du paragraphe 5.

En appliquant l'inégalité de Łojasiewicz à H sur Γ, on obtient, puisque H est combinaison de P_j et $\dfrac{\partial P_j}{\partial x_j}$:

$$\begin{aligned}\forall x' \in \Gamma',\quad \left|\frac{\partial P_j}{\partial x_j}(x',\varphi_j(x'))\right| &\geqslant K_1\, d(x',\{H = 0\})^{\rho}\\ &\geqslant K_1\, d(x',\partial\Gamma')^{\rho}\end{aligned}$$

où K_1 et ρ sont des constantes positives.

Il en résulte qu'on a une constante K_2 avec :

$$\text{(1)}\qquad \forall x' \in \Gamma',\ \ \forall j > k,\ \ \|\varphi'_j(x')\| \leqslant K_2\, d(x',\partial\Gamma')^{-\rho}.$$

D'autre part, la régulière situation de $\bar{\Gamma}$ et $\partial\Gamma' \times \mathbf{R}^{n-k}$, d'intersection $\partial\Gamma$, implique l'existence de C et α avec :

$$\text{(2)}\quad \forall x \in \Gamma,\ \ d(x,\partial\Gamma) \geqslant d(x',\partial\Gamma') \geqslant C\, d(x,\partial\Gamma)^{\alpha},\ \text{où } x' = \Pi(x).$$

Il résulte de cette dernière inégalité qu'il existe C_1 et α_1, positifs, tels que, pour tout x de Γ, tout $r < C_1\, d(x,\partial\Gamma)^{\alpha_1}$ et tout $y' \in B(x',r^2)$, on a $d(x',\partial\Gamma') \leqslant 2\, d(y',\partial\Gamma')$.

L'inégalité (1) et le théorème des accroissements finis impliquent alors l'existence de K_3 avec :

$$(3)\quad \forall x \in \Gamma,\ \forall y \in \Gamma \cap \Pi^{-1}(B(x',r^2)),$$
$$\|x-y\| \leqslant K_3 \|x'-y'\|\, d(x',\partial\Gamma')^{-\rho}.$$

On pose, pour $x \in \Gamma$: $A_x = \Gamma \cap \Pi^{-1}(B(x',r^2))$.

C'est une partie connexe d'après la continuité des φ_j, et on a

$$A_x \supset B(x,r^2) \cap \Gamma.$$

Il résulte facilement de (2) et (3) qu'on peut trouver C_1 et α_1 tels que $A_x \subset B(x,r) \cap \Gamma$, d'où 6.1.

Soit maintenant $f \in \mathcal{N}(\Gamma)$. On peut appliquer à f, sur un voisinage de Γ, les résultats des paragraphes 2 et 3. On a donc un voisinage U de 0, une suite V_i d'ensembles analytiques dans U, $\varnothing = V_{q+1} \subset V_q \subset \cdots \subset V_1 \subset V_0 = U$, et des constantes C et α telles que, pour tout x de $\Gamma \cap (V_i \backslash V_{i+1})$, $i \in [0,q]$, il existe une fonction f_x analytique sur $B(x, C\, d(x,V_{i+1})^{\alpha})$, égale à f au voisinage de x (lemme 3.1.).

LEMME 6.2. — *Il existe des constantes positives* C_2, C_3, α_2, α_3 *telles que :*

$$\forall i \in [0,q],$$
$$\forall x \in \Gamma\backslash V_{i+1} \quad \textit{vérifiant} \quad d(x,V_i \cap \bar{\Gamma}) \leqslant C_2\, d(x,V_{i+1} \cup \partial\Gamma)^{\alpha_2},$$

il existe une fonction g_x *analytique sur* $B_x = B(x, C_3\, d(x,V_{i+1} \cup \partial\Gamma)^{\alpha_3})$, *égale à* f *au voisinage de* $B_x \cap \Gamma$.

Démonstration. — Soit $i \geqslant 1$, et $x \in \Gamma\backslash V_{i+1}$. Prenons $y \in V_i \cap \bar{\Gamma}$ avec $\|y-x\| = d(x,V_i \cap \bar{\Gamma})$. Pour C_2 et α_2 convenables, la condition $\|y-x\| \leqslant C_2\, d(x,V_{i+1} \cup \partial\Gamma)^{\alpha_2}$ implique $y \in \Gamma \cap (V_i \backslash V_{i+1})$. Alors il existe f_y, analytique sur $B(y, C\, d(y,V_{i+1} \cup \partial\Gamma)^{\alpha})$, égale à f au voisinage de y. D'après 6.1 on peut modifier C et α de telle sorte que f_y soit égale à f au voisinage de

$$B(y, C^2\, d(y,V_{i+1} \cup \partial\Gamma)^{2\alpha}) \cap \Gamma.$$

Il est alors facile de prendre C_2, C_3, α_2, α_3 de sorte que la condition

$$\|y-x\| \leqslant C_2\, d(x,V_{i+1} \cup \partial\Gamma)^{\alpha_2}$$

implique que la boule

$$B_x = B(x,C_3\, d(x,V_{i+1} \cup \partial\Gamma)^{\alpha_3})$$

soit contenue dans $B(y,C^2\, d(y,V_{i+1} \cup \partial\Gamma)^{\alpha_2})$, ce qui montre 6.2 dans ce cas.

Le cas $i = 0$ est analogue.

LEMME 6.3. — *Il existe C_4 et α_4 positifs tels que, pour tout x de Γ, il existe une fonction g_x, analytique sur $B(x,C_4\, d(x,\partial\Gamma)^{\alpha_4})$, égale à f au voisinage de $B(x,C_4\, d(x,\partial\Gamma)^{\alpha_4}) \cap \Gamma$.*

Démonstration. — Soit $x \in \Gamma$. Avec les notations de 6.2., il existe $i \in [0,q]$ avec :

$$\begin{cases} d(x,V_j \cap \bar{\Gamma}) > C_2\, d(x,V_{j+1} \cup \partial\Gamma)^{\alpha_2} & \text{pour} \quad q \geqslant j > i \\ d(x,V_i \cap \bar{\Gamma}) \leqslant C_2\, d(x,V_{i+1} \cup \partial\Gamma)^{\alpha_2}. \end{cases}$$

D'après 6.2., il existe g_x, analytique sur

$$B_x = B(x,C_3\, d(x,V_{i+1} \cup \partial\Gamma)^{\alpha_3})$$

égale à f au voisinage de $B_x \cap \Gamma$.

Le système d'inégalités ci-dessus, et la régulière situation de V_j et $\bar{\Gamma}$, permettent de minorer $d(x,V_{i+1} \cup \partial\Gamma)$ par une puissance de $d(x,\partial\Gamma)$ (voir la démonstration de 2.1. à partir de 2.3.), ce qui prouve 6.3.

COROLLAIRE 6.4. — *Il existe un ouvert semi-analytique Ω, contenant Γ, et une fonction analytique g sur Ω, égale à f au voisinage de Γ.*

Le corollaire résulte de 6.3., de 5.3., et du lemme, immédiat, ci-dessous.

LEMME 6.5. — *Soit Γ une partie localement fermée, et bornée, de $\mathbf{R}^n$, C et α des constantes positives. Soit, pour tout x de Γ, une fonction g_x analytique sur $B_x = B(x, Cd(x,\partial X)^{\alpha})$. On suppose que, si $y \in \Gamma \cap B_x$, on a $g_x = g_y$ au voisinage de y. Alors il existe $C' > 0$ et une fonction g, analytique sur $\bigcup_{x\in\Gamma} B(x, C'\, d(x,\partial\Gamma)^{\alpha})$, tels que, pour tout x de Γ, $g = g_x$ au voisinage de x.*

7. Démonstration de 5.1.

On suppose $x_0 = 0$. Il suffit de trouver Ω ouvert semi-analytique, et un prolongement g de f dans $\mathcal{O}(\Omega)$. En effet, grâce à 5.2. et 5.3., on pourra diminuer Ω de sorte que g appartienne à $\mathcal{N}(\Omega)$. D'après 6.4 on peut trouver un voisinage normal U de 0, une partition de $X \cap U$ en des membres Γ_i, $i \in [1,r]$, et, pour chaque Γ_i, un ouvert semi-analytique $\Omega_i \supset \Gamma_i$ et une fonction g_i, analytique sur Ω_i, égale à f au voisinage de Γ_i.

On pose $X_i = \bigcup_{j \leq i} \Gamma_j$ et on va montrer, par récurrence sur i, qu'il existe un ouvert semi-analytique $W_i \supset X_i$ et une fonction h_i, analytique sur W_i, égale à f au voisinage de X_i. Pour $i = r$ on aura 5.1.

Le résultat est vrai pour $i = 1$, puisque $X_1 = \Gamma_1$.

Passage de i *à* $i+1$: $X_{i+1} = X_i \cup \Gamma_{i+1}$.

L'ensemble semi-analytique $\Gamma_{i+1} \cap W_i$ a une famille finie de composantes connexes Z_k.

Soit $K_1 = \{k ; \bar{Z}_k \cap X_i \neq \emptyset\}$, $K_2 = \{k ; \bar{Z}_k \cap X_i = \emptyset\}$.

Si $k \in K_1$, on note V_k la composante connexe de $W_i \cap \Omega_{i+1}$ qui contient Z_k. C'est un ouvert semi-analytique et on vérifie facilement que g_{i+1} est égal à h_i sur V_k.

On peut trouver un ouvert semi-analytique W'_i tel que :

$$X_i \subset W'_i \subset W_i, \qquad \overline{W'_i} \subset W_i \cup \partial X_i$$
$$\overline{W'_i} \cap \overline{Z_k} \subset \partial X_i \qquad \text{pour} \quad k \in K_2.$$

On pose alors : $W_{i+1} = W'_i \cup (\Omega_{i+1} \backslash \overline{W'_i}) \cup (\bigcup_{k \in K_1} V_k)$.

C'est un ouvert semi-analytique. Il contient X_{i+1}, car tout élément de $\Gamma_{i+1} \cap \overline{W'_i}$ appartient à un Z_k, avec $k \in K_1$.

Il suffit alors de poser :

$$\begin{cases} h_{i+1} = h_i & \text{sur} \quad W'_i \\ h_{i+1} = g_{i+1} & \text{sur} \quad (\Omega_i \backslash \overline{W'_i}) \cup (\bigcup_{k \in K_1} V_k). \end{cases}$$

THÉORÈME 7.1. — *Soit* X *une partie s.a.l.f., et* f *un élément de* $\mathcal{N}(X)$. *Alors* $\{x \in X\,;\ f(x)=0\}$ *est semi-analytique.*

Démonstration. — D'après 5.1, et puisque le problème est local, on peut supposer X ouvert. On peut supposer de plus que f est racine d'un polynôme P, sans facteurs multiples, à coefficients analytiques au voisinage de $\bar{X}$.

Il suffit de montrer que le graphe G de f est semi-analytique dans $\mathbf{R}^{n+1}$.

Soit δ le discriminant, non nul, de P et $Y = \{x \in X, \delta(x) \neq 0\}$. Il est clair que $G \cap (Y \times \mathbf{R})$ est une union de composantes connexes de $V(P) \cap (Y \times \mathbf{R})$, donc est semi-analytique.

Alors, d'après la continuité de f, $G = \overline{G \cap (Y \times \mathbf{R})} \cap (X \times \mathbf{R})$, et G est semi-analytique.

8. Partition en parties simplement connexes.

La démonstration du lemme suivant, utilisé au chapitre III, est analogue aux précédentes.

LEMME 8.1. — *Soit* X *une partie semi-analytique, adhérente à* 0, *dans* $\mathbf{R}^n$. *Alors il existe un voisinage* U *de* 0 *et une partition finie de* $U \cap X$ *en parties semi-analytiques simplement connexes.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur n. Le résultat est évident pour $n = 1$.

Supposons le vrai en dimension inférieure à n, et prenons X dans $\mathbf{R}^n$.

1^er^ *cas :* La dimension de X en 0 est inférieure à n. On prend alors une partition normale de X au voisinage de 0, et il suffit de montrer 8.1., pour chaque membre Γ de la partition.

Supposons $\dim \Gamma = k$. Avec les notations du paragraphe 5, on applique l'hypothèse de récurrence à $\Gamma' = \Pi(\Gamma)$ dans $\mathbf{R}^k$. Puisque, par Π, Γ est homéomorphe à Γ', le lemme est vrai pour Γ, donc aussi pour X.

2^e^ *cas :* $\dim X = n$.

On prend encore une partition normale de X au voisinage de 0. D'après le 1^er^ cas le lemme est vrai pour la réunion des membres de dimension inférieure à n. Il suffit donc de le montrer pour un membre Γ de dimension n.

Un tel Γ est une composante connexe de $U \cap \{H \neq 0\}$, où H est un polynôme en x_n de discriminant non nul.

Soit Δ l'ensemble des zéros du discriminant.

On décompose Γ en $(\Gamma \cap (\Delta \times \mathbf{R})) \cup (\Gamma \cap ((\mathbf{R}^{n-1} \backslash \Delta) \times \mathbf{R}))$.

D'après le 1er cas, le lemme est vrai pour $\Gamma \cap (\Delta \times \mathbf{R})$ qui est de dimension inférieure à n.

D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathbf{R}^{n-1} \backslash \Delta$ est, au voisinage de 0, union disjointe de semi-analytiques Γ'_i, simplement connexes. Au-dessus de chaque Γ'_i le polynôme H a des racines simples, et on peut écrire $\Gamma \cap (\Gamma'_i \times \mathbf{R})$ sous la forme d'une union finie, disjointe, de parties semi-analytiques simplement connexes (parties comprises entre deux nappes de zéros de H).

CHAPITRE II

FAISCEAUX SEMI-COHÉRENTS

1. Stratifications des zéros d'un polynôme.

Soit U' un compact semi-analytique de $\mathbf{R}^{n-1}$, $U = \Pi^{-1}(U')$, où Π est la projection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^{n-1}$, P un polynôme unitaire en X_n à coefficients dans $\mathcal{O}(U')$, de degré p.

On pose, pour $q \in [1,p+1]$, $V_q = \left\{ x \in U ; \dfrac{\partial^i P}{\partial X_n^i}(x) = 0, 0 \leqslant i \leqslant q-1 \right\}$.

En particulier, $V_1 = V(P)$ est l'ensemble des zéros de P, et $V_{p+1} = \varnothing$. Nous allons stratifier U' suivant la somme des multiplicités des racines de P au-dessus d'un point de U'.

Soit $i \in [0,p-1]$. On désigne par Γ'_i l'ensemble des x' de U' tels que les polynômes $P(x',X_n)$ et $\dfrac{\partial P}{\partial X_n}(x',X_n)$ aient un P.G.C.D. de degré au moins i. On voit facilement que Γ'_i est défini par l'annulation de certains déterminants en les coefficients de P. En particulier Γ'_1 est l'ensemble des zéros du discriminant de P.

Si $x' \in \Gamma'_i \backslash \Gamma'_{i+1}$, et si ξ_j, $j \in [1,r]$, sont les racines distinctes, complexes, de $P(x',x_n) = 0$, de multiplicités μ_j, on a $\sum_{j=1}^{r} (\mu_j - 1) = i$.

Soit Γ' *une composante connexe de* $\Gamma'_i \backslash \Gamma'_{i+1}$.

C'est une partie s.a.l.f., et la famille de ces composantes est finie. Au-dessus de Γ', de polynôme $P(x',X_n)$ a un nombre constant s de racines réelles,

$$\xi_1(x') < \xi_2(x') < \cdots < \xi_s(x'),$$

de multiplicités constantes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$, et les fonctions $\xi_j(x')$ sont continues sur Γ'.

Il en résulte que $V_1 \cap \Pi^{-1}(\Gamma')$ est réunion de s composantes connexes distinctes (avec éventuellement $s = 0$), chacune étant une partie s.a.l.f. dans $\mathbf{R}^n$, homéomorphe par Π à Γ'.

Soit Γ *une composante connexe de* $V_1 \cap \Pi^{-1}(\Gamma')$.

Il existe $q \in [1,p]$ avec $\Gamma \subset V_q \backslash V_{q+1}$.

On a : $\Pi(\Gamma) = \Gamma'$, $\Pi(\bar{\Gamma}) = \bar{\Gamma}'$ car la restriction de Π à V_1 est propre, et $\Pi(\partial\Gamma) = \partial\Gamma'$ car $\Pi|_\Gamma$ est un homéomorphisme. On remarque cependant que $\Pi|_{\partial\Gamma}$ n'est pas nécessairement injective. D'autre part, il est clair que $\partial\Gamma' \subset \Gamma'_{i+1}$. On peut donc ordonner les Γ en une suite Γ_k telle que $\partial\Gamma_k \subset \bigcup_{j<k} \Gamma_j$.

On a ainsi obtenu une stratification de $V_1 \cap U$. L'élément Γ sera appelé strate de degré q de $V_1 \cap U$.

THÉORÈME 1.1. — *Soit* Γ *une strate de degré* q *de la stratification de* $V_1 \cap U$, *et* $\Gamma' = \Pi(\Gamma)$. *Alors il existe* R *et* S, *polynômes unitaires dans* $\mathcal{N}(\Gamma')[X_n]$, *de degrés respectifs* q *et* $(p-q)$, *tels que :*

1° $P = RS$ *dans* $\mathcal{N}(\Gamma')[X_n]$.

2° R *est distingué sur* Γ, *i.e.* $\dfrac{\partial^i R}{\partial X_n^i}(x) = 0$ *pour* $i \in [0, q-1]$ *et* $x \in \Gamma$.

3° S *ne s'annule pas sur* Γ.

Démonstration. — Soit $x \in \Gamma$. En x le polynôme P a une racine d'ordre q. D'après le théorème de préparation de Weierstrass, il existe des polynômes unitaires R_x et S_x dans $\mathcal{O}_{x'}[X_n]$, de degrés respectifs q et $(p-q)$, avec $S_x(x) \neq 0$ et $P = R_x S_x$.

L'unicité de cette décomposition en tout point de Γ montre qu'il existe des polynômes unitaires R et S dans $\mathcal{O}(\Gamma')[X_n]$, de degrés respectifs q et $(p-q)$, avec $P = RS$, R distingué sur Γ et S ne s'annulant pas sur Γ.

Il reste seulement à vérifier que les coefficients de R et S sont dans $\mathcal{N}(\Gamma')$. Or l'identité $P = RS$ montre que ces coefficients sont fonctions symétriques élémentaires de certaines racines de P dans une extension de $\mathcal{O}(\Gamma')$. Donc ces coefficients sont algébriques sur $\mathcal{O}(U')$.

Remarque 1.2. — Chacun des polynômes R et S appartient à $\mathcal{N}(\Gamma)$, et S est inversible dans $\mathcal{N}(\Gamma)$.

2. Théorème de division.

Les notations sont celles du paragraphe 1.

DÉFINITION 2.1. — *Une partie* Λ de $U \cap V_1$ *est compatible avec* P, *si elle est contenue dans une strate* Γ *de la stratification de* $U \cap V_1$. *On dit que* Λ *est de degré* q *si* Γ *est de degré* q.

Remarque. — En pratique les parties U' et U seront rarement précisées, i.e. une partie sera compatible avec P s'il existe U pour lequel 2.1 est vérifié.

Prenons Λ une partie semi-analytique compatible avec P. Alors $\Pi(\Lambda)$ *est semi-analytique :* en effet Λ est relativement compact, et, au voisinage de tout point de $\bar{\Lambda}$, Λ peut être défini par des fonctions polynomiales en X_n (car $\Lambda \subset V_1$).

PROPRIÉTÉS 2.2. — *Soit* Λ *une partie s.a.l.f. compatible avec* P, $\Lambda' = \Pi(\Lambda)$ *on a :*

2.2.1. $$\Pi(\bar{\Lambda}) = \bar{\Lambda}', \qquad \Pi(\partial\Lambda) = \partial\Lambda'$$

Λ' *est s.a.l.f. dans* $\mathbf{R}^{n-1}$.

2.2.2. *Il existe* C *et* α, *positifs, tels que :*

$$\forall x \in \Lambda,\ x' = \Pi(x) : \quad d(x,\partial\Lambda) \geqslant d(x',\partial\Lambda') \geqslant C\, d(x,\partial\Lambda)^{\alpha}.$$

La dernière inégalité résulte de la régulière situation de $\bar{\Lambda}$ *et de* $\partial\Lambda' \times \mathbf{R}$, *d'intersection* $\partial\Lambda$.

2.2.3. *Si* Λ *est de degré* q, *il existe* C *et* α *positifs avec :*

$$\forall x \in \Lambda, \quad d(x,V_{q+1}) \geqslant C\, d(x,V_{q+1} \cap \bar{\Lambda})^{\alpha} \geqslant C\, d(x,\partial\Lambda)^{\alpha}.$$

PROPRIÉTÉ 2.3. — *Soit* X *une partie s.a.l.f. dans* $\mathbf{R}^n$. *Soit* Λ *une composante connexe de* $\Gamma \cap X$, *où* Γ *est une strate de* $V_1 \cap U$.

Alors Λ *est s.a.l.f. et on a* $\partial\Lambda \subset \partial\Gamma \cup \partial X$.

D'où, si $\Gamma' \subset \Gamma'_i \backslash \Gamma'_{i+1}$:

$$\partial\Lambda \subset ((\Gamma'_{i+1} \times \mathbf{R}) \cap X) \cup \partial X.$$

Il existe donc une partition de $X \cap V_1 \cap U$ *en parties s.a.l.f.* Λ_k, *telle que :*

$$\partial\Lambda_k \subset (\bigcup_{j<k} \Lambda_j) \cup \partial X.$$

THÉORÈME 2.4. — *Soit* Λ *une partie s.a.l.f. compatible avec* P, *de degré* q, *et* f *un élément de* $\mathcal{N}(\Lambda)$. *Alors il existe* g *dans* $\mathcal{N}(\Lambda)$ *et* h_i *dans* $\mathcal{N}(\Lambda')$, $i \in [1,q]$, *avec :*

$$f = Pg + \sum_{i=1}^{q} h_i X_n^{q-i}.$$

Ces éléments sont uniques.

Démonstration. — L'unicité est claire.

Il est clair aussi, par application locale du théorème de préparation de Weierstrass et recollement, qu'il existe g dans $\mathcal{O}(\Lambda)$ et h_i dans $\mathcal{O}(\Lambda')$, $i \in [1,q]$, avec :

$$f = Pg + \sum_{i=1}^{q} h_i X_n^{q-i} \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{O}(\Lambda).$$

Il faut montrer les propriétés d'algébricité au bord de g et des h_i. On remarque que, au voisinage d'un x de $\partial\Lambda$ (Resp. d'un x' de $\partial\Lambda'$), Λ (Resp. Λ') a une famille finie de composantes connexes, i.e. de parties dont les restrictions à une base de voisinages de x (Resp. x') sont connexes. Il suffit de montrer que g (Resp. h_i), restreint à une telle composante connexe locale, est algébrique sur $\mathcal{O}_x$ (Resp. $\mathcal{O}_{x'}$).

On voit facilement que σ_Λ, fonction réciproque de $\Pi|_\Lambda$, restreint à une composante connexe locale de Λ' en x', a une limite en x'. Il en résulte que les composantes connexes locales de Λ' en x', et les composantes connexes locales de Λ en les points x de V_1 tels que $\Pi(x) = x'$, sont en correspondance bijective par Π.

Il suffit alors de démontrer l'algébricité de g sur $\mathcal{O}_x$ et des h_i sur $\mathcal{O}_{x'}$ sous les hypothèses suivantes : $\Pi(x) = x'$, Λ est connexe au voisinage de x et Λ' connexe au voisinage de x'.

Dans cette hypothèse, écrivons la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathcal{O}_{x'}[X_n]$:

$$P = \left(\prod_{j=1}^{r} P_j\right)\left(\prod_{k=1}^{s} Q_k\right)$$

où les P_j et Q_k sont unitaires, P_j distingué en x, $Q_k(x) \neq 0$. Notons Λ_x (Resp. $\Lambda'_{x'}$) le germe de Λ en x (Resp. Λ' en x'). Chaque facteur P_j a sur Λ_x une racine de multiplicité constante q_j (éventuellement nulle), avec $\sum_{j=1}^{r} q_j = q$. On peut appliquer à P_j, sur Λ, au voisinage de x, le théorème 1.1.

D'après ce théorème, il existe R_j et S_j, polynômes unitaires dans $\mathcal{N}_{x'}(\Lambda'_{x'})[X_n]$, R_j distingué de degré q_j sur Λ_x, S_j ne s'annulant pas sur Λ_x, et tels que $P_j = R_j S_j$ dans $\mathcal{N}_{x'}(\Lambda'_{x'})[X_n]$.

Avec ces notations on a :

Lemme 2.5. — *Pour tout* F *de* $\mathcal{N}_x(\Lambda_x)$, *et tout* $j \in [1,r]$, *il existe* g_j *dans* $\mathcal{N}_x(\Lambda_x)$ *et* h_{ij} *dans* $\mathcal{N}_{x'}(\Lambda'_{x'})$, $i \in [1,q_j]$, avec :

$$F = R_j g_j + \sum_{i=1}^{q_j} h_{ij} X_n^{q_j - i} \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{N}_x(\Lambda_x).$$

On appliquera 2.5 successivement pour diviser f par R_1, puis le quotient obtenu par R_2, et ainsi jusqu'à $j = r$.

En regroupant les identités ainsi obtenues on aura :

$$f = \left(\prod_{j=1}^{r} R_j\right) G + \sum_{i=1}^{q} H_i X_n^{q-i},$$

avec

$$G \in \mathcal{N}_x(\Lambda_x) \qquad \text{et} \qquad H_i \in \mathcal{N}_{x'}(\Lambda'_{x'}).$$

D'où :

$$f = P \frac{G}{\left(\prod_{j=1}^{r} S_j\right)\left(\prod_{k=1}^{s} Q_k\right)} + \sum_{i=1}^{q} H_i X_n^{q-i} = PG_1 + \sum_{i=1}^{q} H_i X_n^{q-i}.$$

Dans cette dernière identité le facteur de P appartient à $\mathcal{N}_x(\Lambda_x)$, puisque S_j et Q_k sont inversibles dans $\mathcal{N}_x(\Lambda_x)$.

L'unicité de la division par P en un point de Λ implique alors que G_1 (Resp. H_i) est égal au germe de g en x (Resp. au germe de h_i en x'). Cela montre 2.4.

Démonstration de 2.5. — Par division par R_j aux points de Λ voisins de x, on voit qu'il existe g_j dans $\mathcal{O}_x(\Lambda_x)$ et h_{ij} dans $\mathcal{O}_{x'}(\Lambda'_{x'})$ avec :

$$\text{(1)} \qquad F = R_j g_j + \sum_{i=1}^{q_j} h_{ij} X_n^{q_j - i} \quad \text{dans} \quad \mathcal{O}_x(\Lambda_x).$$

On passe au domaine complexe : il existe un ouvert W (Resp. W′) dans $\mathbf{C}^n$ (Resp. $\mathbf{C}^{n-1}$), dont le germe en x (Resp. x') contient Λ_x (Resp. $\Lambda'_{x'}$), et des fonctions $\tilde{F}$, $\tilde{R}_j$, $\tilde{g}_j$ (Resp. $\tilde{h}_{ij}$) holomorphes sur W (Resp. W′) induisant F, R_j, g_j (Resp. h_{ij}) sur Λ_x (Resp. $\Lambda'_{x'}$).

On peut supposer W connexe, $\Pi(W) = W'$, et que, pour tout y' de W′, les q_j racines de $\tilde{R}_j(y', X_n)$, notées $\xi_k(y')$, appartiennent à W.

On a : $\tilde{F} = \tilde{R}_j \tilde{g}_j + \sum_{i=1}^{q_j} \tilde{h}_{ij} X_n^{q_j - i}$ sur W. D'où, pour $k \in [1, q_j]$ et $y' \in W'$:

$$\tilde{F}(y', \xi_k(y')) = \sum_{i=1}^{q_j} \tilde{h}_{ij}(y') \xi_k(y')^{q_j - i}. \tag{2}$$

Le déterminant de ce système, carré d'ordre q_j, en les $\tilde{h}_{ij}(y')$, est le discriminant de $\tilde{R}_j$. Ce discriminant est non nul puisque P_j est irréductible dans $\mathcal{O}_{x'}[X_n]$. Le système (2) est donc de Cramer sur un ouvert partout dense dans W′.

Il existe un ouvert $\Omega' \subset W'$, $\bar{\Omega}' \ni x'$, sur lequel le déterminant de (2) ne s'annule pas, et tel que les racines $\xi_k(y')$ définissent, sur Ω', q_j fonctions holomorphes.

Alors le théorème 3.1 du paragraphe suivant implique, puisque F est algébrique sur $\mathcal{O}_x$, que $\tilde{F}(y', \xi_k(y'))$, sur Ω', est algébrique sur $\tilde{\mathcal{O}}_{x'}$. Il en est de même du déterminant de (2), puisque les coefficients de R_j sont dans $\mathcal{N}_{x'}(\Lambda'_{x'})$. Les solutions $\tilde{h}_{ij}$ de (2) sur Ω' sont donc algébriques sur $\tilde{\mathcal{O}}_{x'}$. Par connexité il en est de même des $\tilde{h}_{ij}$ sur W′, et donc h_{ij} appartient à $\mathcal{N}_{x'}(\Lambda'_{x'})$. En revenant à (1) on en déduit que g_j appartient à $\mathcal{N}_x(\Lambda_x)$. La démonstration de 2.5, et donc de 2.4, sera complète grâce à 3.1.

3. Un théorème de composition.

THÉORÈME 3.1. — *Soit Ω' un ouvert de $\mathbf{R}^m$ (Resp. $\mathbf{C}^m$), Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ (Resp. $\mathbf{C}^n$), et g une application analytique de Ω' dans Ω. On suppose que, pour tout x de $\partial\Omega'$, les germes en x des composantes de g sont entiers sur $\mathcal{O}_x$. Alors, pour tout f de $\mathcal{N}(\Omega)$, $f \circ g$ appartient à $\mathcal{N}(\Omega')$.*

Démonstration. — On fait la démonstration dans le cas réel. Le cas complexe est identique. On raisonne au voisinage d'un point de $\partial\Omega'$ qu'on suppose être l'origine de $\mathbf{R}^m$, et on note $\mathcal{O}_m$ l'anneau des germes de fonctions analytiques en ce point.

Chaque composante de g est solution d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathcal{O}_m$. En décomposant ces polynômes en facteurs irréductibles on peut écrire Ω' au voisinage de x, comme union finie d'ouverts sur lesquels chaque composante de g est solution d'un polynôme unitaire irréductible de $\mathcal{O}_m[X]$. Il suffit de faire la démonstration quand Ω est égal à l'un de ces ouverts.

On suppose donc qu'il existe un polynôme distingué $P(x,X)$ dans $\mathcal{O}_m[X]$, de degré p, tel que chaque composante de g annule P. En particulier $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

a) Supposons d'abord f analytique au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$. Alors d'après le théorème de préparation :

$$f(y) = \sum_{\alpha_i < p} a_\alpha(x) y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n} \bmod (P(x,y_1), \dots, P(x,y_n))$$

avec des a_α appartenant à $\mathcal{O}_m$.

D'où : $f(g(x)) = \sum\limits_{\alpha_i < p} a_\alpha(x) g_1^{\alpha_1}(x) \dots g_n^{\alpha_n}(x)$. Puisque chaque g_i est entier sur $\mathcal{O}_m$, $f \circ g$ est aussi entier sur $\mathcal{O}_m$.

b) Dans le cas général f est solution d'une équation $\sum\limits_{k=0}^{r} b_k f^k = 0$ où les b_k sont analytiques au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$, et $b_r \neq 0$.

Il existe un multi-indice $\omega \in \mathbf{N}^n$ tel que $\dfrac{\partial^{|\omega|} b_r}{\partial y^\omega}(0) \neq 0$. On en déduit, par dérivation, que, pour tout x de Ω' assez voisin de 0, il existe un multi-indice $\alpha \leqslant \omega$ tel que $\sum\limits_0^r \dfrac{\partial^{|\alpha|} b_k}{\partial y^\alpha} \circ g (f \circ g)^k$ soit nul au voisinage de x, avec des $\dfrac{\partial^{|\alpha|} b_k}{\partial y^\alpha} \circ g$ non tous nuls au voisinage de x.

On peut donc écrire Ω', au voisinage de 0, comme union finie d'ouverts Ω'_i sur lesquels on a $\sum\limits_{k=0}^{s} C_k(x)(f(g(x)))^k = 0$, avec des C_k analytiques sur Ω'_i, entiers sur $\mathcal{O}_m$ d'après le *a*), et C_s non diviseur de zéro dans $\mathcal{O}(\Omega'_i)$.

Il en résulte que $f \circ g$, restreint à Ω'_i, est algébrique sur $\mathcal{O}_m$, d'où le théorème.

4. Relations entre fonctions Nash-analytiques.

Le théorème suivant est analogue au théorème de cohérence d'Oka.

THÉORÈME 4.1. — *Soit* X *une partie s.a.l.f. de* $\mathbf{R}^n$ *et* f_j, $j \in [1,s]$, *des éléments de* $\mathcal{N}(\mathrm{X})^r$. *Alors il existe une partition* $\mathcal{P}$, *localement finie, de* X *en parties s.a.l.f., et, pour tout* Y *de* $\mathcal{P}$, *une famille finie d'éléments* r_k *de* $\mathcal{N}(\mathrm{Y})^s$ *tels que :*

1° *Les* r_k *sont des relations entre les* f_j *sur* Y.

2° *Pour toute partie s.a.l.f.* $\Lambda \subset \mathrm{Y}$, *et toute relation* $\lambda \in \mathcal{N}(\Lambda)^s$ *entre les* f_j, λ *est combinaison des* r_k *à coefficients dans* $\mathcal{N}(\Lambda)$.

Démonstration. — Elle se fait en plusieurs étapes que nous allons détailler. Plusieurs démonstrations ultérieures suivront le même schéma.

On raisonne par récurrence sur n.

Le résultat est évident pour $n = 0$. Nous le supposons vrai pour $n - 1$, et nous prenons X et f_j comme dans l'énoncé.

La question étant locale, nous nous plaçons au voisinage de 0, élément de $\partial \mathrm{X}$.

Le but des points *a*), *b*), *c*), et *d*) est d'introduire un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ et un polynôme distingué $\mathrm{P}(x', x_n)$ qui permettra d'utiliser le théorème de division 2.4 et l'hypothèse de récurrence.

a) On peut supposer X connexe au voisinage de 0. Il suffit pour cela de considérer les composantes connexes locales de X en 0. En particulier $\mathcal{N}(\mathrm{X})$ sera sans diviseur de 0.

Soit alors $k \leqslant \mathrm{Inf}\,(r,s)$ le rang de la matrice $[f_1, \ldots, f_s]$ sur le corps des fractions de $\mathcal{N}(\mathrm{X})$.

b) Il suffit de montrer 4.1 dans l'hypothèse $k = r$.

En effet, supposons le déterminant δ formé par les k premières composantes de $f_1, \ldots, f_k$, non nul. Pour tout f de $\mathcal{N}(\mathrm{X})^r$, on note f' (Resp. f'') la projection de f sur $\mathcal{N}(\mathrm{X})^k$ (Resp. $\mathcal{N}(\mathrm{X})^{r-k}$), en prenant les k premières composantes (Resp. les $(r-k)$ dernières).

Il existe une matrice E, de type $(r-k,k)$, à coefficients dans $\mathcal{N}(X)$ avec :

$$\delta f_j'' = E f_j' \qquad \text{pour} \qquad j \in [1,s].$$

Puisque δ n'est pas diviseur de 0, les relations entre les f_j' sont les mêmes que les relations entre les f_j. D'où le *b*) en appliquant 4.1 à $f_1', \ldots, f_s'$.

On supposera désormais $k = r$, et $[f_1,\ldots,f_r]$ de déterminant non nul.

c) Il suffit de montrer 4.1 dans l'hypothèse où $[f_1,\ldots,f_r] = \delta I_r$ où I_r est la matrice unité d'ordre r, et δ un élément non nul de $\mathcal{N}(X)$.

En effet, écrivons $[f_1,\ldots,f_s] = [A\ B]$ où A est carrée d'ordre r, de déterminant $\delta \neq 0$, et B de type $(r, s-r)$.

Soit $\tilde{A}$ telle que $\tilde{A}\,A = A\,\tilde{A} = \delta I_r$.

On pose $g_j = \tilde{A} f_j$, $j \in [1,s]$. On a $[g_1,\ldots,g_r] = \delta I_r$. Puisque $A g_j = \delta f_j$, les relations entre les f_j et les relations entre les g_j sont les mêmes. D'où le *c*) en appliquant 4.1 aux g_j.

d) On peut supposer que l'élément δ du *c*) appartient à $\mathcal{O}_0$, et donc aussi que c'est, dans un système de coordonnées convenable, un polynôme P distingué en x_n.

En effet, δ est solution d'une équation $\sum_{i=0}^{P} a_i \delta^i = 0$, avec des a_i dans $\mathcal{O}_0$, non tous nuls. On peut supposer $a_0 \neq 0$, puisque δ n'est pas diviseur de 0.

On pose alors $g_j = \left(\sum_{i=1}^{P}{}' a_i \delta^{i-1} \right) f_j$, $j \in [1,s]$.

Alors $[g_1,\ldots,g_r] = -a_0 I_r$, et les relations entre les f_j sont les mêmes que les relations entre les g_j. Le *d*) en résulte.

e) On va montrer 4.1, au voisinage de 0, dans le cas où $[f_1,\ldots,f_r] = P I_r$, $r \leqslant s$, P polynôme distingué en 0.

Puisque P est inversible dans $\mathcal{N}(X \backslash V(P))$, les relations entre les f_j sur toute partie s.a.l.f. contenue dans $X \backslash V(P)$ sont engendrées par les relations σ_ℓ, $r < \ell \leqslant s$:

$$\sigma_\ell = (f_{1\ell}, f_{2\ell}, \ldots, f_{r\ell}, 0, \ldots, -P, 0 \ldots)$$

où $(-P)$ est au $\ell^{\text{ième}}$ rang et où $f_\ell = (f_{i\ell})_{1 \leqslant i \leqslant r}$.

Il suffit donc de travailler sur $X \cap V(P)$.

D'après 2.3, il existe une partition finie de $X \cap V(P)$, restreint à un voisinage de 0, en parties s.a.l.f. compatibles avec P.

Soit Z un élément, de degré q, de cette partition, $Z' = \Pi(Z)$ sa projection sur $\mathbf{R}^{n-1}$.

D'après 1.1, on a $P = RS$, avec R et S éléments unitaires de $\mathcal{N}(Z')[X_n]$, R de degré q et S inversible dans $\mathcal{N}(Z)$.

Il en résulte, par récurrence sur $k \geqslant q$, qu'il existe a_{ik} dans $\mathcal{N}(Z')$, $i \in [1,q]$, et b_k dans $\mathcal{N}(Z)$ avec :

$$(1) \qquad x_n^k = \sum_{i=1}^{q} a_{ik} x_n^{q-i} + b_k P \qquad \text{pour} \qquad k \geqslant q.$$

D'après 2.4, il existe g_j dans $\mathcal{N}(Z)^r$ et h_{ij} dans $\mathcal{N}(Z')^r$ avec :

$$(2) \qquad f_j = Pg_j + \sum_{i=1}^{q} h_{ij} x_n^{q-i} \qquad \text{pour} \qquad j \in [r+1,s].$$

Soit N_{ij}, $i \in [1,q]$, $j \in [r+1,s]$, des indéterminées.

De (1) on déduit :

$$(3) \quad \sum_{j=r+1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{q} N_{ij} x_n^{q-i} \right)\left(\sum_{i=1}^{q} h_{ij} x_n^{q-i} \right) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=r+1}^{s} N_{ij} \left(\sum_{\ell=1}^{q} A_{ij\ell} x_n^{q-\ell} \right) + B(N_{ij})P,$$

où $A_{ij\ell}$ appartient à $\mathcal{N}(Z')^r$, et $B(N_{ij})$ est combinaison des N_{ij} à coefficients dans $\mathcal{N}(Z)^r$.

Soit A_{ij}, $i \in [1,q]$, $j \in [r+1,s]$, les $q(s-r)$ éléments de $\mathcal{N}(Z')^{qr}$ définis par : $A_{ij} = (A_{ij1}, A_{ij2}, \ldots, A_{ijq})$.

Nous allons appliquer l'hypothèse de récurrence aux A_{ij} sur Z'.

Il existe donc une partition finie de Z', au voisinage de 0, et, pour tout élément Y' de cette partition, une famille finie d'éléments $r'_k = (r'_{ijk})$ de $\mathcal{N}(Y')^{q(s-r)}$ formant un système de générateurs des relations entre les A_{ij} dans $\mathcal{N}(\Lambda')$, pour tout Λ' s.a.l.f. contenu dans Y'.

Pour tout k on a : $\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=r+1}^{s} r'_{ijk} A_{ij} = 0$. D'où :

(4)
$$\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=r+1}^{s} \sum_{\ell=1}^{q} r'_{ijk} A_{ij\ell} x_n^{q-\ell} = 0.$$

On pose $Y = \Pi^{-1}(Y') \cap Z$. C'est une partie s.a.l.f. de $\mathbf{R}^n$.

On obtient, en faisant varier Z et $Y' \subset Z'$, une partition finie de $X \cap V(P)$ au voisinage de 0. On va montrer que cette partition satisfait aux conclusions de 4.1.

Nous construisons d'abord, à partir des r'_k, des éléments r_k de $\mathcal{N}(Y)^s$, relations entre les f_j.

On pose :

(5)
$$r_{jk} = \sum_{i=1}^{q} r'_{ijk} x_n^{q-i} \in \mathcal{N}(Y), \qquad \text{pour} \qquad j \in [r+1,s].$$

D'après (2), (5) et (3) :

$$\sum_{j=r+1}^{s} r_{jk} f_j = \sum_{j=r+1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{q} r'_{ijk} x_n^{q-i} \right) \left(P g_j + \sum_{i=1}^{q} h_{ij} x_n^{q-i} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=r+1}^{s} r'_{ijk} \left(\sum_{\ell=1}^{q} A_{ij\ell} x_n^{q-\ell} \right) \text{mod. } P\mathcal{N}(Y)^r.$$

Donc, d'après (4) :

$$\sum_{j=r+1}^{s} r_{jk} f_j \in P\mathcal{N}(Y)^r.$$

Puisque $[f_1, \ldots, f_r] = PI_r$, il existe, pour $j \in [1,r]$, des éléments r_{jk} tels que :

$$\forall k \quad \sum_{j=1}^{s} r_{jk} f_j = 0.$$

On pose $r_k = (r_{jk}) \in \mathcal{N}(Y)^s$. C'est une relation entre les f_j Nous allons montrer que les r_k et les σ_ℓ, définis au début de e), engendrent les relations dans $\mathcal{N}(\Lambda)$ entre les f_j, pour tout Λ s.a.l.f. contenu dans Y.

Soit $\lambda = (\lambda_j) \in \mathcal{N}(\Lambda)^s$ avec $\sum_{j=1}^{s} \lambda_j f_j = 0$.

D'après 2.4, il existe μ_j dans $\mathcal{N}(\Lambda)$ et ν_{ij} dans $\mathcal{N}(\Lambda')$, $\Lambda' = \Pi(\Lambda)$, avec :

$$(6) \qquad \lambda_j = P\mu_j + \sum_{i=1}^{q} \nu_{ij} x_n^{q-i}, \qquad \text{pour} \qquad j \in [r+1,s].$$

D'après (6), (2) et (3) :

$$\sum_{j=r+1}^{s} \lambda_j f_j = \sum_{j=r+1}^{s} \left(P\mu_j + \sum_{i=1}^{q} \nu_{ij} x_n^{q-i}\right)\left(Pg_i + \sum_{i=1}^{q} h_{ij} x_n^{q-i}\right)$$

$$(7) \qquad \sum_{j=r+1}^{s} \lambda_j f_j = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=r+1}^{s} \nu_{ij}\left(\sum_{\ell=1}^{q} A_{ij\ell} x_n^{q-\ell}\right) \text{mod. } P\mathcal{N}(\Lambda)^r.$$

Comme on a aussi : $\sum_{j=r+1}^{s} \lambda_j f_j = 0 \bmod P\mathcal{N}(\Lambda)^r$, on a, d'après l'unicité de la division :

$$\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=r+1}^{s} \nu_{ij} A_{ij\ell} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=r+1}^{s} \nu_{ij} A_{ij} = 0.$$

Puisque (ν_{ij}) est une relation entre les A_{ij} dans $\mathcal{N}(\Lambda')$, il existe des α_k dans $\mathcal{N}(\Lambda')$ avec :

$$\forall i \in [1,q], \quad \forall j \in [r+1,s], \qquad \nu_{ij} = \sum_k \alpha_k r'_{ijk}.$$

Donc, d'après (6) et (5) :

$$\lambda_j = P\mu_j + \sum_{i=1}^{q} \sum_k \alpha_k r'_{ijk} x_n^{q-i} \qquad \text{pour} \qquad j \in [r+1,s].$$

$$\lambda_j = P\mu_j + \sum_k \alpha_k r_{jk}.$$

La relation $\lambda - \sum_k \alpha_k r_k$ a donc ses composantes, d'indices supérieurs à r, multiples de P dans $\mathcal{N}(\Lambda)$. Elle est donc combinaison dans $\mathcal{N}(\Lambda)$ des relations σ_ℓ, d'où 4.1.

COROLLAIRE 4.2. — *Soit* X *une partie s.a.l.f. de* $\mathbf{R}^n$, f_i, $i \in [1,p]$, *et* g_j, $j \in [1,q]$, *deux familles finies d'éléments de* $\mathcal{N}(X)^r$. *Alors il existe une partition localement finie de* X *en parties s.a.l.f., et, pour tout* Y *de la partition, une famille finie d'éléments* h_k *de* $\mathcal{N}(Y)^r$, *engendrant* $(f)\mathcal{N}(\Lambda) \cap (g)\mathcal{N}(\Lambda)$ *pour tout* Λ *s.a.l.f. contenu dans* Y.

La notation $(f)\mathcal{N}(\Lambda)$ désigne le sous-module de $\mathcal{N}(\Lambda)^r$ engendré par les f_i.

Démonstration. — On applique 4.1 aux éléments $f_1,\dots,f_p$, $-g_1,\dots,-g_q$. Il existe alors une partition en éléments Y, et, pour chaque Y, des relations $t_k = (r_{1k},\dots,r_{pk},s_{1k},\dots,s_{qk}) \in \mathcal{N}(Y)^{p+q}$ engendrant les relations sur tout $\Lambda \subset Y$.

On pose

$$h_k = \sum_{i=1}^{p} r_{ik}f_i = \sum_{j=1}^{q} s_{jk}g_j \in (f)\mathcal{N}(Y) \cap (g)\mathcal{N}(Y).$$

On vérifie immédiatement que les h_k engendrent $(f)\mathcal{N}(\Lambda) \cap (g)\mathcal{N}(\Lambda)$, pour tout $\Lambda \subset Y$.

Remarque 4.3. — Les résultats 4.1 et 4.2 seront surtout utilisés en prenant Λ réduit à un point.

THÉORÈME 4.4. — *Soit* X *une partie s.a.l.f. de* $\mathbf{R}^n$, f *et* g_i, $i \in [1,p]$, *des éléments de* $\mathcal{N}(X)^r$. *Alors l'ensemble* Z *des* x *de* X *tels que* $f_x \in (g)\mathcal{O}_x$ *est semi-analytique.*

Démonstration. — On applique 4.1 aux éléments f, $g_1,\dots,g_p$. Il existe une partition localement finie de X en parties s.a.l.f. Y, et, pour chaque Y, une famille finie de relations $r_k = (\alpha_k,\beta_{1k},\dots,\beta_{pk})$ dans $\mathcal{N}(Y)^{p+1}$, engendrant les relations en tout x de Y. Il suffit de montrer que $Z \cap Y$ est semi-analytique.

Or un élément x de Y appartient à Z si, et seulement si, l'idéal de $\mathcal{O}_x$ engendré par les α_k est impropre, i.e. si, et seulement si, $\sum_k \alpha_k^2(x) \neq 0$.

Le théorème résulte donc de I.7.1.

5. Passage du local au global.

THÉORÈME 5.1. — *Soit* X *une partie s.a.l.f. de* $\mathbf{R}^n$ *et* f_j, $j \in [1,s]$, *des éléments de* $\mathcal{N}(X)^r$. *Alors il existe une partition localement finie de* X *en parties s.a.l.f. telle que, pour tout élément* Y *de la partition, et toute partie s.a.l.f.* Λ *contenue dans* Y, *on ait :*

Tout élément φ *de* $\mathcal{N}(\Lambda)^r$, *tel que* $\varphi_x \in (f)\mathcal{O}_x$ *pour tout* x *de* Λ, *appartient à* $(f)\mathcal{N}(\Lambda)$.

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur n, et est analogue à celle de 4.1.

Comme dans celle-ci (points *a*), *b*), *c*) et *d*)) on raisonne au voisinage de 0 et on se ramène au cas où $r \leqslant s$ et $[f_1,\ldots,f_r] = \mathrm{PI}_r$ avec un polynôme distingué P.

Ensuite, comme au début du *e*) dans 4.1, on prend une partition de $\mathrm{X} \cap \mathrm{V(P)}$ en parties s.a.l.f. compatibles avec P. Si Z, de degré q, est une telle partie, et $\mathrm{Z}' = \Pi(\mathrm{Z})$, on applique l'hypothèse de récurrence aux éléments A_{ij} définis en 4.1 (3). Soit Y′ un élément de la partition de Z′ ainsi obtenue, $\mathrm{Y} = \Pi^{-1}(\mathrm{Y}') \cap \mathrm{Z}$ et $\Lambda \subset \mathrm{Y}$, $\Lambda' = \Pi(\Lambda)$.

Nous allons terminer la démonstration de 5.1. sur un tel Λ. Nous utilisons la notation suivante : si F est une partie quelconque de $\mathbf{R}^n$, on note $\hat{\mathcal{O}}(\mathrm{F})$ l'ensemble des $\hat{\lambda} = (\lambda_x)_{x\in\mathrm{F}}$, où chaque λ_x appartient à $\mathcal{O}_x$.

Par hypothèse il existe $\hat{\lambda}_j \in \hat{\mathcal{O}}(\Lambda)$ avec :

$$\varphi = \sum_{j=1}^{s} \hat{\lambda}_j f_j \qquad \text{dans} \qquad \hat{\mathcal{O}}(\Lambda). \tag{1}$$

Par division en tout x de Λ on a :

$$\hat{\lambda}_j = \mathrm{P}\hat{\mu}_j + \sum_{i=1}^{q} \hat{\nu}_{ij} x_n^{q-i} \qquad \text{pour} \qquad j \in [r+1,s],$$

où $\hat{\mu}_j \in \hat{\mathcal{O}}(\Lambda)$ et $\hat{\nu}_{ij} \in \hat{\mathcal{O}}(\Lambda')$.

D'où

$$\varphi = \sum_{j=r+1}^{s} \left(\mathrm{P}\hat{\mu}_j + \sum_{i=1}^{q} \hat{\nu}_{ij} x_n^{q-i}\right)\left(\mathrm{P}g_j + \sum_{i=1}^{q} h_{ij} x_n^{q-i}\right) \mathrm{mod.}\ \mathrm{P}\hat{\mathcal{O}}(\Lambda).$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=r+1}^{s} \hat{\nu}_{ij}\left(\sum_{\ell=1}^{q} \mathrm{A}_{ij\ell} x_n^{q-\ell}\right) \mathrm{mod.}\ \mathrm{P}\hat{\mathcal{O}}(\Lambda), \tag{2}$$

d'après 4.1. (3).

Par ailleurs, d'après 2.4, il existe ψ dans $\mathcal{N}(\Lambda)^r$ et χ_i dans $\mathcal{N}(\Lambda')^r$ avec :

$$\varphi = \mathrm{P}\psi + \sum_{i=1}^{q} \chi_i x_n^{q-i}. \tag{3}$$

En comparant (2) et (3) on obtient :

$$\chi_\ell = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=r+1}^{s} \hat{\nu}_{ij} \mathrm{A}_{ij\ell}.$$

Donc $(\chi_1,\ldots,\chi_q)$ appartient localement, sur Λ', au sous-module de $\mathcal{N}(\Lambda')^{qr}$ engendré par les A_{ij}.

D'après la définition de Y' il existe donc ν_{ij} dans $\mathcal{N}(\Lambda')$ avec :

$$\chi_\ell = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=r+1}^{s} \nu_{ij} A_{ij\ell}, \quad \ell \in [1,q].$$

En reportant cette valeur dans (3) on a :

$$\varphi = \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=r+1}^{s} \nu_{ij} A_{ij\ell} x_n^{q-\ell} \bmod. \ P \ \mathcal{N}(\Lambda)^r$$

et

$$\varphi = \sum_{j=r+1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{q} \nu_{ij} x_n^{q-i} \right) \left(\sum_{i=1}^{q} h_{ij} x_n^{q-i} \right) \bmod. \ P\mathcal{N}(\Lambda)^r,$$

d'après 4.1 (3).

D'où :

$$\varphi = \sum_{j=r+1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{q} \nu_{ij} x_n^{q-i} \right) f_j \bmod. \ P\mathcal{N}(\Lambda)^r.$$

Donc $\varphi \in (f)\mathcal{N}(\Lambda)$, puisque $[f_1,\ldots,f_r] = PI_r$, et on a montré 5.1.

Le théorème suivant, qui ne sera pas utilisé par la suite, se démontre par des procédés analogues à ceux de 4.1 et 5.1.

THÉORÈME 5.2. — *Soit* X *une partie s.a.l.f. de* $\mathbf{R}^n$ *et* $\mathcal{M}$ *un sous-module de* $\mathcal{N}(X)^r$. *Alors il existe une partition localement finie de* X *en parties s.a.l.f., telle que, pour tout* Y *de la partition,* $\mathcal{M}\ \mathcal{N}Y)$ *soit un* $\mathcal{N}(Y)$*-module de type fini.*

6. Faisceaux semi-cohérents.

DÉFINITION 6.1. — *Soit* X *une partie semi-analytique d'un ouvert* Ω *de* $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{R}$ *un sous-faisceau analytique de* $\mathcal{O}_X^p$. *On dit que* $\mathcal{R}$ *est de type semi-fini s'il existe une partition de* X, *localement finie dans* Ω, *en parties s.a.l.f., et, pour tout* Λ *de la partition, une famille finie d'éléments* r_k *de* $\mathcal{N}(\Lambda)^p$ *engendrant* $\mathcal{R}$ *sur* Λ.

DÉFINITION 6.2. — *Un faisceau analytique* $\mathcal{M}$ *sur un ouvert* Ω *de* $\mathbf{R}^n$ *est semi-cohérent si* $\mathcal{M}$ *est, localement dans* Ω, *de la forme* $\mathcal{O}^p/\mathcal{R}$, *où* $\mathcal{R}$ *est de type semi-fini.*

Donc, si $\mathcal{M}$ est semi-cohérent, il existe une partition localement finie de Ω en parties s.a.l.f., et, pour tout élément Λ de la partition, une suite exacte :

$$\mathcal{O}_\Lambda^q \xrightarrow{r_\Lambda} \mathcal{O}_\Lambda^q \to \mathcal{M}_\Lambda \to 0$$

où r_Λ est définie par une matrice à coefficients dans $\mathcal{N}(\Lambda)$.

Tout faisceau cohérent est bien entendu semi-cohérent. Par contre, si X est un ensemble analytique dans Ω, et si $\mathcal{I}$ est le faisceau d'idéaux des germes analytiques nuls sur X, $\mathcal{I}$ n'est en général pas de type fini. On verra au chapitre III qu'il est de type semi-fini et donc, $\mathcal{O}/\mathcal{I}$ est semi-cohérent.

Exemple 6.3. — Soit $n = 1$ et soit $\mathcal{R}$ le sous-module de $\mathcal{O}^2$ défini par :

$$\begin{cases} \mathcal{R} = 0 \quad \text{sur} \quad \Lambda_1 = \{x \leqslant 0\} \\ \mathcal{R} \text{ est engendré par l'élément } (e^{\frac{1}{x}}, 1) \text{ sur } \Lambda_2 = \{x > 0\}. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{M} = \mathcal{O}^2/\mathcal{R}$.

C'est un faisceau de type fini, et, pour $i = 1, 2, \mathcal{M}_{\Lambda_i}$ admet une présentation finie :

$$\mathcal{O}_{\Lambda_i}^{q_i} \xrightarrow{r_{\Lambda_i}} \mathcal{O}_{\Lambda_i}^{p_i} \longrightarrow \mathcal{M}_{\Lambda_i} \longrightarrow 0$$

avec r_{Λ_i} matrice à coefficients dans $\mathcal{N}(\Lambda_i)$.

Cependant $\mathcal{M}$ n'est pas semi-cohérent. Cela résultera de 6.6. puisque $\mathcal{R}_{\Lambda_2}$ n'admet pas de sections Nash-analytiques autres que la section nulle $(e^{\frac{1}{x}} \notin \mathcal{N}(\Lambda_2))$.

THÉORÈME 6.4. — *Soit* $\tau : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ *un morphisme de faisceaux analytiques. Si* $\mathcal{M}'$ *est de type fini et* $\mathcal{M}$ *semi-cohérent,* coker τ *est semi-cohérent.*

Démonstration. — On a une suite exacte :

$$\mathcal{M}' \xrightarrow{\tau} \mathcal{M} \xrightarrow{\rho} \mathcal{F} \to 0, \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{F} = \operatorname{coker} \tau.$$

Soit $x_0 \in \Omega$. Alors, sur un voisinage Ω_0 de x_0 on a des morphismes surjectifs, $\mathcal{O}_{\Omega_0}^{p'} \xrightarrow{m'} \mathcal{M}'_{\Omega_0}$ et $\mathcal{O}_{\Omega_0}^{p} \xrightarrow{m} \mathcal{M}_{\Omega_0}$ où $\operatorname{Ker} m$ est de type semi-fini. Le morphisme $\rho_0 m : \mathcal{O}_{\Omega_0}^p \longrightarrow \mathcal{F}_{\Omega_0}$ est surjectif. On va montrer que son noyau est de type semi-fini.

Il existe, pour Ω_0 assez petit, un morphisme $a : \mathcal{O}^{p'}_{\Omega_0} \longrightarrow \mathcal{O}^{p}_{\Omega_0}$, défini par p' éléments a_j de $\mathcal{O}(\Omega_0)^p$, tel que $\tau_0 m' = m_0 a$.

Soit $\Lambda \subset \Omega_0$, s.a.l.f. et $r_k \in \mathcal{N}(\Lambda)^p$, $k \in [1,q]$, engendrant Ker m sur Λ. On a le diagramme commutatif, à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 \\
\mathcal{M}'_\Lambda \arrow[u] \arrow[r, "\tau"] & \mathcal{M}_\Lambda \arrow[u] \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{F}_\Lambda \arrow[r] & 0 \\
\mathcal{O}^{p'}_\Lambda \arrow[u, "m'"] \arrow[r, "a"] & \mathcal{O}^{p}_\Lambda \arrow[u, "m"'] \arrow[ur, "\rho_0 m"'] \\
& \mathcal{O}^{q}_\Lambda \arrow[u, "r"']
\end{tikzcd}$$

Il est clair que, sur Λ, Ker $\rho_0 m$ est égal à Im a + Im r et est donc engendré par les $a_j \in \mathcal{O}(\Omega_0)^p$ et les $r_k \in \mathcal{N}(\Lambda)^p$.

Cela montre 6.4. puisque, par hypothèse, Ω_0 admet une partition finie en de tels Λ.

THÉORÈME 6.5. — *Soit* X *une partie s.a.l.f.,* $\mathcal{R}$ *un sous-faisceau de type semi-fini de* $\mathcal{O}^p_X$ *et* a_j, $j \in [1,q]$, *des éléments de* $\mathcal{N}(X)^p$. *Alors, si* $a : \mathcal{O}^q_X \to \mathcal{O}^p_X/\mathcal{R}$ *est le morphisme défini par les* a_j, Ker a *est de type semi-fini.*

La démonstration est immédiate à partir de 4.1.

COROLLAIRE 6.6. — 1° *Le module des relations entre un nombre fini de sections d'un faisceau semi-cohérent est de type semi-fini.*

2° *Tout sous-faisceau de type fini d'un faisceau semi-cohérent est semi-cohérent.*

3° *Soit* $\mathcal{M}' \to \mathcal{M}$ *un morphisme de faisceaux analytiques. Si* $\mathcal{M}'$ *est de type fini et* $\mathcal{M}$ *semi-cohérent,* Im τ *est semi-cohérent.*

Remarque 6.7. — Il est clair que le noyau d'un morphisme entre faisceaux semi-cohérents n'est pas de type fini en général.

THÉORÈME 6.8. — *Soit $\mathscr{R}$ un sous-faisceau de type semi-fini de $\mathcal{O}^p_\Omega$. Alors il existe une partition de Ω, localement finie, en parties s.a.l.f., et, pour tout élément Λ de la partition, un ouvert semi-analytique $\cup \supset \Lambda$ et une famille finie d'éléments r_k de $\mathscr{R}(\mathrm{U}) \cap \mathcal{N}(\mathrm{U})^p$ engendrant $\mathscr{R}$ sur Λ.*

Démonstration. — La définition 6.1. montre l'existence de la partition en parties s.a.l.f. Λ et des r_k de $\mathcal{N}(\Lambda)^p$ engendrant $\mathscr{R}$ sur Λ.

Le théorème I.5.1 montre qu'on peut prolonger les r_k en des éléments de $\mathcal{N}(\mathrm{U})^p$, pour un ouvert semi-analytique U contenant Λ (en diminuant éventuellement Λ, ce qui est possible en raffinant la partition).

On pose $\mathrm{U}' = \{x \in \mathrm{U}\,;\ r_{kx} \in \mathscr{R}_x \text{ pour tout } k\}$.

Il est clair que U′ est un ouvert contenant Λ, puisque la famille des indices k est finie. On va montrer que U′ est semi-analytique, ce qui montrera 6.8.

Pour cela, notons (Λ_j) la famille, finie, des éléments de la partition rencontrant U. On montre que chaque $\mathrm{U}' \cap \Lambda_j$ est semi-analytique.

Il existe une famille finie d'éléments s_ℓ de $\mathcal{N}(\Lambda_j)^p$ engendrant $\mathscr{R}$ sur Λ_j. Les éléments r_k et s_ℓ appartiennent à $\mathcal{N}(\Lambda_j \cap \mathrm{U})^p$, et un x de $\Lambda_j \cap \mathrm{U}$ appartient à U′ si, et seulement si, chaque r_{kx} appartient à $(s)\mathcal{O}_x$.

La semi-analyticité de $\mathrm{U}' \cap \Lambda_j$ résulte donc de 4.4.

7. Le théorème de l'image directe.

Soit Ω (Resp. Ω') un ouvert de $\mathbf{R}^n$ (Resp. $\mathbf{R}^m$), et f une application analytique propre et finie de Ω' dans Ω (f est finie si, pour tout x' de Ω', $\mathcal{O}_{x'}$ est, par f, un module de type fini sur $\mathcal{O}_{f(x')}$). En général, l'image directe par f d'un faisceau cohérent sur Ω' n'est pas cohérente sur Ω, ce qui est vrai dans le cas complexe. On a cependant :

THÉORÈME 7.1. — *Soit f une application analytique propre et finie d'un ouvert Ω' de $\mathbf{R}^m$ dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$. Alors l'image directe par f d'un faisceau semi-cohérent sur Ω' est un faisceau semi-cohérent sur Ω.*

Démonstration. — On désigne par $x' = (x'_1,\ldots,x'_m)$ un point de Ω' et par $x = (x_1,\ldots,x_n)$ un point de $\mathbf{R}^n$. L'application f est définie par les relations $x_i = f_i(x')$, $i \in [1,n]$.

On note Π (Resp. Π') la projection de $\Omega \times \Omega'$ sur Ω (Resp. Ω'). Soit $\mathscr{M}$ semi-cohérent sur Ω'. La propriété de semi-cohérence de $f_*(\mathscr{M})$ est locale sur Ω.

Soit $x \in \Omega$. On veut montrer que $f_*(\mathscr{M})$ est semi-cohérent au voisinage de x. L'ensemble $f^{-1}(x)$ est fini, car compact et discret, et il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f^{-1}(\mathrm{U}) = \bigcup\limits_i \mathrm{U}'_i$, où (U'_i) est une famille finie d'ouverts disjoints, chaque U'_i contenant un élément unique de $f^{-1}(x)$. La restriction $f|_{\mathrm{U}'_i} : \mathrm{U}'_i \to \mathrm{U}$ est propre et on a :

$$f_*(\mathscr{M})_{\mathrm{U}} = \bigoplus_i f_*(\mathscr{M}_{\mathrm{U}'_i}).$$

Il suffit de montrer que chaque $f_*(\mathscr{M}_{\mathrm{U}'_i})$ *est* semi-cohérent au voisinage de x.

On pourra donc supposer que $x = 0$ et $f^{-1}(x) = 0$.

Soit $i : \Omega' \to \Omega \times \Omega'$ défini par $i(x') = (f(x'),x')$, $\mathrm{V} = i(\Omega')$ et $\mathscr{M}^* = i_*(\mathscr{M})$. On a $f_*(\mathscr{M}) = \Pi_*(\mathscr{M}^*)$.

Si $\mathscr{I}$ est le faisceau d'idéaux des germes nuls sur V, engendré par les fonctions $x_i - f_i(x')$, on a $\mathscr{I}.\mathscr{M}^* = 0$, et, pour tout (x,x') de V, $\mathscr{O}_{(x,x')}/\mathscr{I}_{(x,x')}$ est isomorphe à $\mathscr{O}_{x'}$.

On montre facilement que $\mathscr{M}^*$ est semi-cohérent sur $\Omega \times \Omega'$. En effet $\mathscr{M}^*$ est nul sur $\complement\mathrm{V}$. Si des m_j, $j \in [1,r]$, engendrent $\mathscr{M}$ au voisinage de x', elles engendrent $\mathscr{M}^*$ au voisinage de $(f(x'),x')$. Si des r_k engendrent les relations entre les m_j sur Λ', les relations entre les m_j sur $i(\Lambda')$ sont engendrées par les $r_k \circ \Pi'$ et les σ_{ij}, dont toutes les composantes sont nulles, sauf celle d'indice j *qui vaut* $x_i - f_i(x')$.

D'après l'hypothèse de finitude, il existe, pour $i \in [1,m]$, un polynôme $\mathrm{P}_i(x,x'_i)$ distingué en x'_i, à coefficients analytiques au voisinage de 0 dans Ω, section de $\mathscr{I}$ au voisinage de 0 dans $\Omega \times \Omega'$. On a donc $\mathrm{P}_i\mathscr{M}^* = 0$ au voisinage de 0.

On peut, sans modifier $\Pi_*(\mathscr{M}^*)$ au voisinage de 0, diminuer Ω et Ω' de sorte que :

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathrm{P}_i\mathscr{M}^* = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \times \Omega' \\ \Omega = \prod\limits_{i=1}^{n} \{|x_i| < \delta_i\}, \quad \Omega' = \prod\limits_{i=1}^{m} \{|x'_i| < \varepsilon_i\} \\ x \in \Omega \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_i(x,x'_i) = 0 \Rightarrow |x'_i| < \varepsilon_i . \end{cases}$$

Il suffit alors de montrer :

LEMME 7.2. – *Soit* Ω, Ω', P_i *et* $\mathcal{M}^*$ *satisfaisant aux conditions* (1), $\mathcal{M}^*$ *étant semi-cohérent au voisinage de* 0 *dans* $\Omega \times \Omega'$. *Alors* $\Pi_*(\mathcal{M}^*)$ *est semi-cohérent au voisinage de* 0.

Il suffit de montrer ce résultat pour $m = 1$, la récurrence étant immédiate.

On posera désormais $x'_i = y$, $P_1 = P$ de degré p.
Soit m_j, $j \in [1,r]$, des générateurs de $\mathcal{M}^*$ au voisinage de 0.

1° Les éléments $y^i m_j$, $i \in [0,p-1]$, $j \in [1,r]$, engendrent $\Pi_*(\mathcal{M}^*)$ au voisinage de 0.

Soit en effet x_0 dans Ω et y_k, $k \in [1,s]$, les racines réelles de $P(x_0,y) = 0$ (s éventuellement nul). Soit q_k la multiplicité de y_k. On pose $z_k = (x_0,y_k)$, élément de $\Omega \times \Omega'$ par hypothèse.

Puisque $\Pi_*(\mathcal{M}^*)_{x_0} = \bigoplus_{k=1}^{s} \mathcal{M}^*_{z_k}$ il suffit de montrer qu'un élément de $\Pi_*(\mathcal{M}^*)_{x_0}$ de la forme $(s_1,0,\dots,0)$ est, pour x_0 assez voisin de 0, combinaison des $y^i m_j$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{x_0}(s_1 \in \mathcal{M}^*_{z_1})$.

Dans $\mathcal{O}_{x_0}[y]$ on a : $P = RS$, où R est distingué de degré q_1 en z_1, $S(z_1) \neq 0$ et $R(z_k) \neq 0$ pour $k \geqslant 2$.

Au voisinage de z_1 (et pour x_0 assez voisin de 0) on a :

$$S^{-1} s_1 = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j m_j, \qquad \alpha_j \in \mathcal{O}_{z_1}.$$

Par division par P en z_1 :

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^{q_1-1} \alpha_{ij} y^i \text{ mod. } P\mathcal{O}_{z_1}, \qquad \alpha_{ij} \in \mathcal{O}_{x_0}.$$

D'où : $S^{-1} s_1 = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=0}^{q_1-1} \alpha_{ij} y^i m_j$, puisque $P.\mathcal{M}^* = 0$.

Puisque le degré de S est $p - q_1$ on a dans $\mathcal{O}_{x_0}[y]$:

$$S \sum_{i=0}^{q_1-1} \alpha_{ij} y^i = \sum_{i=0}^{p-1} \beta_{ij} y^i; \qquad \beta_{ij} \in \mathcal{O}_{x_0}.$$

On a donc, dans $\Pi_*(\mathcal{M}^*)_{x_0}$:

$$S \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=0}^{q_1-1} \alpha_{ij} y^i m_j = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=0}^{p-1} \beta_{ij} y^i m_j .$$

Or cet élément vaut s_1 en z_1 et est nul en z_k pour $k \geqslant 2$, puisque, en ces points, $S\mathcal{M}^* = \frac{P}{R}\mathcal{M}^* = 0$.

2° Le faisceau des relations dans $\mathcal{O}_\Omega$ entre les $y^i m_j$, $i \in [0,p-1]$ et $j \in [1,r]$, est de type semi-fini au voisinage de 0 dans Ω.

Pour le montrer, on prend d'abord une partition finie $\mathcal{P}$ de V(P), au voisinage de 0, en parties s.a.l.f., telle que, pour tout X de $\mathcal{P}$, il existe une famille finie d'éléments de $\mathcal{N}(X)^r$ engendrant les relations entre les m_j sur X. On peut, en raffinant la partition, supposer que tout élément de $\mathcal{P}$ est compatible avec P.

Il existe alors une partition finie $\mathcal{P}'$ d'un voisinage de 0 dans Ω, en parties s.a.l.f., telle que, pour tout Λ' de $\mathcal{P}'$, et avec les notations des paragraphes 1 et 2 :

a) Λ' est contenue dans une composante connexe Γ' d'un $\Gamma'_i \backslash \Gamma'_{i+1}$.

b) $\Pi^{-1}(\Lambda') \cap V(P) = \bigcup_{k=1}^{s} \Lambda_k$, les Λ_k étant s.a.l.f., disjoints, chaque Λ_k est contenu dans un élément de $\mathcal{P}$ et $\Pi(\Lambda_k) = \Lambda'$.

On fixe un Λ' de $\mathcal{P}'$. Pour tout x_0 de Λ', on a

$$\Pi^{-1}(x_0) \cap V(P) = \{z_1,\ldots,z_s\}$$

avec $z_k \in \Lambda_k$, et $\Pi_*(\mathcal{M}^*)_{x_0} = \bigoplus_{k=1}^{s} \mathcal{M}^*_{z_k}$. Dans $\Pi_*(\mathcal{M}^*)(\Lambda')$ on a :

$$y^i m_j = \sum_{k=1}^{s} (0,\ldots,0,(y^i m_j)_{\Lambda_k}, 0,\ldots,0).$$

D'après 6.5., il suffit donc, pour montrer le 2°, de montrer que le faisceau des relations dans $\mathcal{O}_{\Lambda'}$ entre les $(y^i m_j)_{\Lambda_1}$ est de type semi-fini ($i \in [0, p-1], j \in [1,r]$).

Soit q_1 le degré de Λ_1. Alors, d'après 1.1., il existe, pour $i \in [q_1, p-1]$, des éléments $a_{i\ell}$ de $\mathcal{N}(\Lambda')$ avec :

$$(1) \qquad y^i = \sum_{\ell=0}^{q_1-1} a_{i\ell} y^\ell \text{ mod. } P\mathcal{N}(\Lambda_1) ;$$

et donc, puisque $\mathrm{P}.\mathscr{M}^* = 0$:

$$(2) \qquad y^i m_j = \sum_{\ell=0}^{q_1-1} a_{i\ell} y^\ell m_j \text{ au voisinage de } \Lambda_1 .$$

D'après 6.5. il suffit donc de montrer.

LEMME 7.3. — *Il existe une famille finie d'éléments de* $\mathscr{N}(\Lambda')^{q_1 r}$, *engendrant les relations sur* $\mathscr{O}_{\Lambda'}$ *entre les* $(y^\ell m_j)_{\Lambda_1}$, $\ell \in [0,q_1-1]$, $j \in [1,r]$.

Démonstration de 7.3. — Soit $\rho_k = (\rho_{jk})$, $k \in \mathrm{K}$, un système fini d'éléments de $\mathscr{N}(\Lambda_1)^r$ engendrant les relations entre les m_j sur Λ_1. Un tel système existe puisque Λ_1 est contenu dans un élément de $\mathscr{P}$. D'après 2.4., on a des σ_{ijk} dans $\mathscr{N}(\Lambda')$ avec :

$$(3) \quad \rho_{jk} = \sum_{i=0}^{q_1-1} \sigma_{ijk} y^i \text{ mod. } \mathrm{P}\mathscr{N}(\Lambda_1), \qquad j \in [1,r], \qquad k \in \mathrm{K}.$$

Alors, d'après (1), si $\nu_{ik} \in \mathscr{N}(\Lambda')$ (Resp. $\nu_{ik} \in \mathscr{O}_{x_0}$) :

$$(4) \quad \sum_{k\in\mathrm{K}} \left(\sum_{i=0}^{q_1-1} \nu_{ik} y^i\right)\left(\sum_{i=0}^{q_1-1} \sigma_{ijk} y^i\right)$$
$$= \sum_{k\in\mathrm{K}} \sum_{i=0}^{q_1-1} \sum_{\ell=0}^{q_1-1} \nu_{ik} \mathrm{A}_{ijk\ell} y^\ell \text{ mod. } \mathrm{P}\mathscr{N}(\Lambda_1) \text{ (Resp. mod. } \mathrm{P}\mathscr{O}_{z_1})$$

où les $\mathrm{A}_{ijk\ell}$ appartiennent à $\mathscr{N}(\Lambda')$ (formule analogue à 4.1. (3)). On pose $\mathrm{A}_{ik} = (\mathrm{A}_{ijk\ell})_{j,\ell}$, $i \in [0,q_1-1]$, $k \in \mathrm{K}$.

Alors :

a) Les A_{ik} sont des relations, dans $\mathscr{O}_{\Lambda'}$, entre les $(y^\ell m_j)_{\Lambda_1}$.
En effet, de (4) on déduit :

$$\forall i \in [0,q_1-1], \qquad \forall k \in \mathrm{K}, \qquad \forall j \in [1,r],$$
$$y^i \sum_{\ell=0}^{q_1-1} \sigma_{\ell jk} y^\ell = \sum_{\ell=0}^{q_1-1} \mathrm{A}_{ijk\ell} y^\ell \text{ mod. } \mathrm{P}\mathscr{N}(\Lambda_1).$$

D'où, sur Λ_1 :

$$\forall i, \quad \forall k, \quad \sum_{\ell=0}^{q_1-1} \sum_{j=1}^{r} \mathrm{A}_{ijk\ell} y^\ell m_j = \sum_{j=1}^{r} y^i \left(\sum_{\ell=0}^{q_1-1} \sigma_{\ell jk} y^\ell\right) m_j .$$

$$\forall i, \quad \forall k, \quad \sum_{\ell=0}^{q_1-1} \sum_{j=1}^{r} \mathrm{A}_{ijk\ell} y^\ell m_j = \sum_{j=1}^{r} y^i \rho_{jk} m_j$$

d'après (3).

Cette quantité est nulle par hypothèse sur ρ_{jk}.

b) Soit $\lambda = (\lambda_{\ell j})$ une relation dans $\mathcal{O}_{x_0}$ entre les $(y^\ell m_j)_{z_1}$:

$$\sum_{\ell=0}^{q_1-1} \sum_{j=1}^{r} \lambda_{\ell j} y^\ell m_j = 0 \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{M}^*_{z_1}.$$

Alors il existe α_k dans $\mathcal{O}_{z_1}$ avec :

$$(5) \qquad \forall j \in [1,r], \ \sum_{\ell=0}^{q_1-1} \lambda_{\ell j} y^\ell = \sum_{k \in K} \alpha_k \rho_{jk}.$$

Par division en z_1, on a des ν_{ik} dans $\mathcal{O}_{x_0}$ avec :

$$\alpha_k = \sum_{i=0}^{q_1-1} \nu_{ik} y^i \text{ mod. } P\mathcal{O}_{z_1}.$$

D'où, d'après (5) et (3) :

$$\forall j \in [1,r], \ \sum_{\ell=0}^{q_1-1} \lambda_{\ell j} y^\ell = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i=0}^{q_1-1} \nu_{ik} y^i \right) \left(\sum_{i=0}^{q_1-1} \sigma_{ijk} y^i \right) \text{ mod. } P\mathcal{O}_{z_1}$$

et d'après (4) :

$$\forall j \in [1,r], \ \sum_{\ell=0}^{q_1-1} \lambda_{\ell j} y^\ell = \sum_{k \in K} \sum_{i=0}^{q_1-1} \sum_{\ell=0}^{q_1-1} \nu_{ik} A_{ijk\ell} y^\ell \text{ mod. } P\mathcal{O}_{z_1}.$$

L'unicité de la division par P en z_1, implique :

$$\forall j \in [1,r], \ \forall \ell \in [0,q_1-1], \qquad \lambda_{\ell j} = \sum_{k \in K} \sum_{i=0}^{q_1-1} \nu_{ik} A_{ijk\ell}.$$

Soit : $\lambda = \sum_{k \in K} \sum_{i=0}^{q_1-1} \nu_{ij} A_{ik}$.

Donc λ est combinaison des A_{ik} à coefficients dans $\mathcal{O}_{x_0}$. Cela montre 7.3. et donc aussi 7.1.

CHAPITRE III

FAISCEAU D'IDÉAUX D'UN ENSEMBLE SEMI-ANALYTIQUE

1. Notations.

Dans les paragraphes 1, 2 et 3 on utilisera les notations suivantes : $\mathcal{O}_n$ (Resp. $\tilde{\mathcal{O}}_n$) est l'anneau des germes de fonctions analytiques réelles (Resp. complexes) au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ (Resp. $\mathbf{C}^n$), $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_n$, de hauteur k.

On rappelle [3] :

Il existe un système de coordonnées $(X_1,\ldots,X_n)$ tel que l'application canonique $\mathcal{O}_{n-k} \to \mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$ soit injective et finie. La classe de X_{n-k+1} (mod. $\mathfrak{p}$) est élément primitif du corps des fractions de $\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}$ sur celui de $\mathcal{O}_{n-k}$. Le polynôme minimal de X_{n-k+1} (mod. $\mathfrak{p}$) a ses coefficients dans $\mathcal{O}_{n-k}$ et nuls en 0. Il est noté P, son degré p, son discriminant δ, qui n'appartient pas à $\mathfrak{p}$.

Pour $i \in [n-k+2,n]$, on note P_i le polynôme minimal de X_i, qui est distingué dans $\mathcal{O}_{n-k}[X_i]$. Il existe aussi, pour $i \in [n-k+2,n]$, un polynôme Q_i dans $\mathcal{O}_{n-k}[X_{n-k+1}]$, de degré inférieur à p et tel que $\delta X_i - Q_i$ appartient à $\mathfrak{p}$.

On prend un voisinage Ω de 0 dans $\mathbf{C}^n$, sur lequel sont holomorphes un système de générateurs f_j de $\mathfrak{p}$, ainsi que chacun des éléments P, P_i, Q_i. On note $\tilde{V}$ l'ensemble des zéros des f_j dans Ω et $V = \tilde{V} \cap \mathbf{R}^n$. Les f_j définissent en tout $x \in \Omega \cap \mathbf{R}^n$, un idéal de $\mathcal{O}_x$ noté $\mathfrak{p}_x$. On supposera que $\mathcal{O}_x/\mathfrak{p}_x$ est réduit, et que δ n'est pas diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_x/\mathfrak{p}_x$, ce qui est vrai pour Ω assez petit. On veut obtenir une description de la décomposition primaire de $\mathfrak{p}_x$ dans $\mathcal{O}_x$ (Th. 3.2.).

On notera $\Pi : \mathbf{C}^n = \mathbf{C}^{n-k} \times \mathbf{C}^k \to \mathbf{C}^{n-k}$, $\Pi'' : \mathbf{C}^{n-k+1} \times \mathbf{C}^{k-1} \to \mathbf{C}^{n-k+1}$, $\Pi' : \mathbf{C}^{n-k} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}^{n-k}$, les projections. Si $x \in \mathbf{C}^n$, on note $x' = \Pi(x)$ et $x'' = \Pi''(x)$. Soit $\Omega' = \Pi(\Omega)$, $\Omega'' = \Pi''(\Omega)$.

On peut choisir Ω tel que :

1° $\tilde{V} \cap \{\delta \neq 0\} = \{x = (x_i);\ x' \in \Omega',\ \delta(x') \neq 0,\ P(x'') = 0,\ \delta x_i - Q_i = 0 \text{ pour } i \in [n-k+2, n]\}$ et cet ensemble est dense dans $\tilde{V}$.

2° $\Pi|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to \Omega'$ est propre.

Il en résulte que $\Pi|_{\tilde{V} \cap \{\delta \neq 0\}} : \tilde{V} \cap \{\delta \neq 0\} \to \Omega' \cap \{\delta \neq 0\}$, est un revêtement d'ordre p, et que

$$\Pi''|_{\tilde{V} \cap \{\delta \neq 0\}} : \tilde{V} \cap \{\delta \neq 0\} \to \Omega'' \cap \{P = 0\} \cap \{\delta \neq 0\}$$

est un homéomorphisme. L'homéomorphisme réciproque, défini par $x_i = \dfrac{Q_i}{\delta}$ pour $i \geqslant n - k + 2$, sera noté σ.

2. Facteurs irréductibles de P associés à un point de V.

Soit $x'' = (x', x^{n-k+1})$ appartenant à $\Omega'' \cap \{P = 0\}$.

Dans $\tilde{\mathcal{O}}_{x'}[X_{n-k+1}]$ on a $P = RS$ avec R distingué de degré q en x'' et $S(x'') \neq 0$.

Soit $R = \prod_{j=1}^{t} \tilde{R}_j$ la décomposition en facteurs irréductibles de R dans $\tilde{\mathcal{O}}_{x'}[X_{n-k+1}]$, $\tilde{R}_j$ unitaires et distincts car R n'a pas de facteurs multiples. On dira que les $\tilde{R}_j$ sont les *facteurs irréductibles de* P *en* x''.

Soit U' un voisinage connexe de x' dans $\mathbf{C}^{n-k}$, sur lequel les coefficients des polynômes $\tilde{R}_j$ soient holomorphes. On remarque que $U' \cap \{\delta \neq 0\}$ est connexe.

LEMME 2.1. — *Soit* Γ_j *l'ensemble des points de* $(U' \cap \{\delta \neq 0\}) \times \mathbf{C}$ *annulant* $\tilde{R}_j$. *Alors les* Γ_j *sont les composantes connexes, distinctes, de* $((U' \cap \{\delta \neq 0\}) \times \mathbf{C}) \cap \{R = 0\}$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que Γ_j est connexe, puisqu'ils sont disjoints et ouverts dans $((U' \cap \{\delta \neq 0\}) \times \mathbf{C}) \cap \{R = 0\}$.

Or prenons Γ une composante connexe contenue dans Γ_j. Il est clair que $\Pi'|_\Gamma : \Gamma \to U' \cap \{\delta \neq 0\}$ est un revêtement, d'ordre q' au plus égal au degré de $\tilde{R}_j$. Soit T le polynôme unitaire, de degré q', à coefficients dans

$\mathcal{O}(U' \cap \{\delta \neq 0\})$, s'annulant exactement aux points de Γ. Les coefficients de T, fonctions symétriques de certaines racines de P sont localement bornées sur U'. Elles se prolongent donc en des fonctions holomorphes sur U'. Le polynôme, encore noté T, obtenu par ce prolongement, divise $\tilde{R}_j$ dans $\tilde{\mathcal{O}}(U')[X_{n-k+1}]$, donc dans $\mathcal{O}_{x'}[X_{n-k+1}]$. Puisque $\tilde{R}_j$ est irréductible, on a $\tilde{R}_j = T$, d'où q' = degré de T et $\Gamma = \Gamma_j$.

LEMME 2.2. – *Pour tout j, $\sigma(y'')$ a une limite x quand y'' tend vers x'' avec $\tilde{R}_j(y'') = 0$ et $\delta(y'') \neq 0$ (i.e. $y'' \in \Gamma_j$).*

Le lemme 2.2. associe donc à chaque facteur irréductible $\tilde{R}_j$ de P en x'' un point x de $\tilde{V} \cap (\Pi'')^{-1}(x'')$. Réciproquement, puisque $\tilde{V} \cap \{\delta \neq 0\}$ est dense dans $\tilde{V}$, il existe, pour tout x de $\tilde{V} \cap (\Pi'')^{-1}(x'')$, au moins un facteur irréductible $\tilde{R}_j$ vérifiant la condition du lemme 2.2.

DÉFINITION 2.3. – *Soit $x \in \tilde{V}$, $x'' = \Pi''(x)$. Un facteur irréductible de* P *en x'', $\tilde{R}_j$, est dit associé à x, si $\tilde{R}_j$ et x vérifient la condition du lemme* 2.2.

Démonstration de 2.2. – $\Pi''|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to \Omega''$ est propre et $(\Pi'')^{-1}(x'')$ est fini. Il en résulte qu'on peut trouver un voisinage U'' de x'' dans $\mathbf{C}^{n-k+1}$ tel que $(U' \times \mathbf{C}) \cap \{R = 0\} \subset U''$ et $(\Pi'')^{-1}(U'') \cap \tilde{V}$ soit union disjointe d'ouverts U_ℓ de $\tilde{V}$ contenant chacun un point unique de $(\Pi'')^{-1}(x'') \cap \tilde{V}$ (en diminuant U' si nécessaire).

Alors $\sigma(\Gamma_j)$ est contenu dans un U_ℓ, et $\sigma|_{\Gamma_j}$ a une valeur d'adhérence unique en x''. On a alors 2.2. puisque $\Pi'' : \tilde{V} \to \Omega''$ est propre.

Revenons maintenant à l'étude dans le domaine réel.

Supposons que $x'' \in \Omega'' \cap \mathbf{R}^{n-k+1}$ et $P(x'') = 0$. Dans ce cas les polynômes R et S appartiennent à $\mathcal{O}_{x'}[X_{n-k+1}]$. Les facteurs irréductibles $\tilde{R}_j$ sont, soit réels, soit imaginaires conjugués. Si $\tilde{R}_j$ est réel, la composante Γ_j est stable par conjugaison et la limite x de $\sigma(Y'')$, quand $y'' \in \Gamma_j$ tend vers x'', est réelle : elle est en effet égale à son conjugué puisque les composantes de σ sont réelles. Si deux facteurs $\tilde{R}_j$ et $\tilde{R}_k$ sont conjugués les limites associées sont conjuguées, pour la même raison. Si elles sont égales, la limite commune est réelle.

Soit $R = \prod_{j=1}^{s} R_j$ la décomposition en facteurs irréductibles, unitaires, de R dans $\mathcal{O}_{x'}[X_{n-k+1}]$. Les R_j seront les *facteurs irréductibles réels de* P *en* x''.

DÉFINITION 2.4. — *Soit* $x \in V$, $x'' = \Pi''(x)$. *Un facteur irréductible réel,* R_j, *de* P *en* x'' *est associé à* x *si* R_j *est un facteur irréductible complexe qui vérifie* 2.3., *ou si* R_j *est produit de deux facteurs irréductibles complexes conjugués vérifiant* 2.3.

Exemple 2.5. — Soit, dans $\mathcal{O}_4$, l'idéal $\mathfrak{p}$ engendré par $(X_1 - X_4^2)$ et $(X_3 - X_2X_4)$. Il est premier de hauteur 2. C'est l'idéal d'une variété régulière V.

Le système de coordonnées (X_1,X_2,X_3,X_4) vérifie les conditions du paragraphe 1 : $\mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_4/\mathfrak{p}$ est injectif et fini. Le polynôme minimal de X_3 sur $\mathcal{O}_2$ est $P = X_3^2 - X_1X_2^2$, de discriminant $\delta = X_1X_2^2$. Si $x \in V$, avec $\delta(x_1,x_2) \neq 0$ on a $x_4 = \dfrac{x_3}{x_2}$.

Soit $x'' = (x_1,x_2,x_3)$ avec $x_1 > 0$, $x_2 = x_3 = 0$. Il y a deux points de V au-dessus de x'', $(x_1,0,0,\sqrt{x_1})$ et $(x_1,0,0,-\sqrt{x_1})$. Au premier point est associé le facteur irréductible $(X_3 - \sqrt{X_1}X_2)$, au second le facteur $(X_3 + \sqrt{X_1}X_2)$. On a en effet, pour le premier,

$$\lim\left(y_1y_2,y_3,\frac{y_3}{y_2}\right) = (x_1,0,0,\sqrt{x_1})$$

quand (y_1,y_2,y_3) tend vers $(x_10,0)$ avec $y_2 \neq 0$ et $y_3 = \sqrt{y_1}y_2$. De même pour le second.

3. Décomposition primaire de $\mathfrak{p}_x$.

On sait [3] qu'il existe N tel que, pour tout x de V et tout f de $\mathcal{O}_x$, $\delta^N f$ soit égal, modulo l'idéal engendré dans $\mathcal{O}_x$ par P et les $\delta X_i - Q_i$, à un élément de $\mathcal{O}_{x'}[X_{n-k+1}]$, élément nul si f appartient à $\mathfrak{p}_x$.

LEMME 3.1. — *Soit* $x \in V$, *et soit* R_j *un facteur irréductible de* P *associé à* x. *Alors :*

$$\mathcal{O}_{x'}[X_{n-k+1}] \cap (R_j,\delta X_{n-k+2} - Q_{n-k+2},\ldots,\delta X_n - Q_n)\mathcal{O}_x = R_j\mathcal{O}_{x'}[X_{n-k+1}].$$

Démonstration. — Après division euclidienne par R_j, il suffit de montrer qu'un polynôme h de l'intersection, de degré inférieur à celui de R_j, est nul. Soit q_j le degré de R_j.

Soit $h = \alpha_1 R_j + \sum_{i=n-k+2}^{n} \alpha_i(\delta X_i - Q_i)$, $\alpha_i \in \mathcal{O}_x$.

Soit y', voisin de x', avec $\delta(y') \neq 0$. Le polynôme $R_j(y',X_{n-k+1})$ a q_j racines distinctes, réelles ou non, y^{ℓ}_{n-k+1}, $\ell \in [1,q_j]$. Ces racines tendent vers x_{n-k+1} quand y' tend vers x'.

Puisque R_j est associé à x, chacun des points $y^{\ell} = \sigma(y',y^{\ell}_{n-k+1})$ tend vers x quand y' tend vers x'.

Pour y' assez voisin de x', on a donc :

$$h(y',y^{\ell}_{n-k+1}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \ell \in [1,q_j].$$

On en déduit que les coefficients de h sont nuls sur $\{\delta \neq 0\}$ et donc que h est nul.

THÉORÈME 3.2. — *Soit* $x \in V$, *et soit* $(R_j)_{j\in J}$ *les facteurs irréductibles réels de* P *associés à* x. *Alors les idéaux premiers essentiels de* $\mathfrak{p}_x$ *dans* $\mathcal{O}_x$ *sont les idéaux :*

$$\Pi_j = \{f \in \mathcal{O}_x \,;\, \delta^N f \in (R_j, \delta X_{n-k+2} - Q_{n-k+2}, \ldots, \delta X_n - Q_n)\mathcal{O}_x\}, \quad j \in J.$$

Démonstration. — 1° Soit Π un idéal premier essentiel de $\mathfrak{p}_x$ dans $\mathcal{O}_x$. Puisque δ n'est pas diviseur de o dans $\mathcal{O}_x/\mathfrak{p}_x$, $\delta \notin \Pi$.

Puisque Π contient P et les P_i, et est de hauteur k, l'injection canonique $\mathcal{O}_{x'} \to \mathcal{O}_x/\Pi$ est injective et finie. Soit T dans $\mathcal{O}_{x'}[X_{n-k+1}]$ le polynôme minimal de X_{n-k+1} (mod. Π). C'est un polynôme irréductible, distingué en x''. Puisque $P \in \Pi$, T est un des facteurs irréductibles R_j de P en x''.

Ce facteur R_j est associé à x. En effet, puisque $\delta \notin \Pi$, la variété complexe de Π contient des points y, tendant vers x, avec $\delta(y') \neq 0$. En ces points on a $R_j(y'') = 0$, d'où le résultat puisque $y = \sigma(y'')$.

On a alors $\Pi = \Pi_j$. En effet, soit $f \in \Pi$. Il existe un h dans $\mathcal{O}_{x'}[x_{n-k+1}]$, de degré inférieur à celui de R_j, égal à $\delta^N f$ modulo $(R_j, \delta X_{n-k+2} - Q_{n-k+2}, \ldots, \delta X_n - Q_n)\mathcal{O}_x$. Puisque $\delta^N f$ appartient à Π, h lui appartient aussi. D'après la minimalité de $T = R_j$, h est nul et donc f appartient à Π_j.

Réciproquement, si f appartient à Π_j, $\delta^N f$ appartient à Π, et donc f appartient à Π.

2° Chaque idéal Π_j, $j \in J$, est premier.

Soit en effet g_1 et g_2 dans $\mathcal{O}_x$ avec $g_1 g_2 \in \Pi_j$. Il existe h_i, $i = 1,2$, dans $\mathcal{O}_{x'}[X_{n-k+1}]$ égal à $\delta^N g_i$ modulo

$(R_j, \delta X_{n-k+2} - Q_{n-k+2}, \ldots, \delta X_n - Q_n)\mathcal{O}_x$. Puisque $g_1 g_2$ appartient à Π_j, $h_1 h_2$ appartient à $(R_j, \ldots, \delta X_n - Q_n)\mathcal{O}_x$. D'après 3.1., $h_1 h_2$ appartient à $R_j \mathcal{O}_{x'}[X_{n-k+1}]$. Puisque R_j est irréductible dans l'anneau factoriel $\mathcal{O}_x[X_{n-k+1}]$, R_j divise par exemple h_1, et alors g_1 appartient à Π_j.

Le théorème résulte de 1° et 2° puisque, par 3.1., il n'y a pas de relations d'inclusions entre les Π_j, $j \in J$.

4. Une propriété de continuité de la décomposition irréductible.

LEMME 4.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un faisceau analytique cohérent sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Alors la fonction $x \to \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{M}_x/\tilde{m}_x\mathcal{M}_x$ ($\tilde{m}_x$ idéal maximal de $\tilde{\mathcal{O}}_x$) est semi-continue supérieurement, et, pour tout entier i, l'ensemble des x tels que $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{M}_x/\tilde{m}_x\mathcal{M}_x \geqslant i$ est un sous-ensemble analytique de Ω.*

Démonstration. — On peut supposer qu'on a une suite exacte :

$$\tilde{\mathcal{O}}^q_\Omega \to \tilde{\mathcal{O}}^p_\Omega \to \mathcal{M} \to 0$$

où r est une matrice à coefficients dans $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$.

Pour tout x de Ω, on a la suite exacte

$$\mathbf{C}^q \xrightarrow{r(x)} \mathbf{C}^p \to \mathcal{M}_x/\tilde{m}_x\mathcal{M}_x \to 0.$$

Alors $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{M}_x/\tilde{m}_x\mathcal{M}_x = p - \operatorname{rang}(r(x))$, d'où le lemme.

LEMME 4.2. — *Soient V et W deux espaces analytiques complexes réduits, f un morphisme propre et fini de W dans V. Alors, pour tout x_0 de V, il existe une partition finie d'un voisinage de x_0 en parties semi-analytiques, telle que, pour tout élément Λ de la partition, on ait :*

Le nombre de points de W au-dessus d'un point x de Λ est localement constant, ces points étant, localement, fonctions continues de x.

Démonstration. — La question étant locale sur V, on peut supposer que $V \subset \mathbf{C}^n$ et même que V est un ouvert de $\mathbf{C}^n$. On peut aussi supposer que $W \subset \mathbf{C}^p$. Soit z_i, $i \in [1,p]$, les fonctions coordonnées sur $\mathbf{C}^p$. D'après la propriété de finitude, et en diminuant V si nécessaire, il existe des polynômes unitaires $P_i(x,z_i)$ dans $\tilde{\mathcal{O}}(V)[z_i]$ tels que $P_i(f(z),z_i) = 0$ sur W.

Il existe une partition finie de V en parties semi-analytiques sur lesquelles chaque polynôme P_i a un nombre localement constant de racines, chacune étant localement fonction continue de x (on raisonne comme dans II.1).

En appliquant 4.1. à $f_*(\widetilde{\mathcal{O}}_W)$, on peut supposer que, sur chaque élément Λ de la partition, $\dim_{\mathbf{C}} f_*(\widetilde{\mathcal{O}}_W)_x/\tilde{m}_x f_*(\widetilde{\mathcal{O}}_W)_x$ est constant. Nous allons voir que, sur un tel Λ, on a la conclusion de 4.2. Soit $x \in \Lambda$, $f^{-1}(x) = \{z^j\}$, $j \in [1,q]$. Soit U un voisinage de x tel que $f^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^{q} U_j$, les U_j étant des ouverts disjoints de W, $z^j \in U_j$, et $f|_{U_j} : U_j \to U$ étant propre. Alors $f_*(\widetilde{\mathcal{O}}_{U_j})$ est cohérent.

D'après 4.1. :

$$\sum_{z \in f^{-1}(y) \cap U_j} \dim_{\mathbf{C}} \widetilde{\mathcal{O}}_{W,z}/\tilde{m}_z \widetilde{\mathcal{O}}_{W,z} \leqslant \dim_{\mathbf{C}} \widetilde{\mathcal{O}}_{W,z_j}/\tilde{m}_x \widetilde{\mathcal{O}}_{W,z_j}$$

pour tout y de U assez voisin de x.

D'après la définition de Λ on a aussi, pour tout y de Λ assez voisin de x :

$$\sum_{z \in f^{-1}(y)} \dim_{\mathbf{C}} \widetilde{\mathcal{O}}_{W,z}/\tilde{m}_y \widetilde{\mathcal{O}}_{W,z} = \sum_{j=1}^{q} \dim_{\mathbf{C}} \widetilde{\mathcal{O}}_{W,z_j}/\tilde{m}_x \mathcal{O}_{W,z_j}.$$

Il en résulte que, pour tout $j \in [1,q]$ et tout y de Λ assez voisin de x :

$$\sum_{z \in f^{-1}(y) \cap U_j} \dim_{\mathbf{C}} \widetilde{\mathcal{O}}_{W,z}/\tilde{m}_y \widetilde{\mathcal{O}}_{W,z} = \dim_{\mathbf{C}} \widetilde{\mathcal{O}}_{W,zj}/\tilde{m}_x \widetilde{\mathcal{O}}_{W,zj}.$$

En particulier cette quantité est strictement positive, i.e. $f^{-1}(y) \cap U_j$ est non vide. Si $z \in f^{-1}(y) \cap U_j$ on a $P_i(y,z_i) = 0$, $i \in [1,p]$.

Mais, pour y dans Λ assez voisin de x, le système d'équations $P_i(y, z_i) = 0$, $i \in [1,p]$, a une seule solution voisine de z^j, solution dépendant continûment de y. Donc chaque U_j contient un point unique de $f^{-1}(y)$ qui dépend continûment de y.

THÉORÈME 4.3. — *Soit* V *un espace analytique complexe réduit. Pour tout* x_0 *de* V, *il existe une partition finie d'un voisinage de* x_0, *en parties semi-analytiques, telle que, pour tout élément* Λ *de la partition, on ait :*

Si $x \in \Lambda$ *et si* V_j, $j \in [1,q]$, *sont les composantes irréductibles de* V *en* x, *alors, pour tout* y *de* Λ *assez voisin de* x *et tout* $j \in [1,q]$, $y \in V_j$ *et* V_j *est irréductible en* y.

Démonstration. — On applique 4.2. en prenant pour (W,f) le normalisé de V.

Soient Λ un élément de la partition de 4.2. et $x \in \Lambda$. En x on a la décomposition irréductible $V = \bigcap_{j=1}^{q} V_j$. Il existe un voisinage U de x tel que $f^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^{q} U_j$, où les U_j sont des ouverts disjoints, chaque $(U_j, f|U_j)$ étant le normalisé de V_j.

Pour y dans Λ assez voisin de x, $f^{-1}(y) \cap U_j$ est constitué d'un seul point, qui est donc l'unique point du normalisé de V_j au-dessus de y.

Il en résulte que $y \in V_j$ est irréductible en y.

Remarque 4.4. — Si $V \subset \mathbf{C}^n$ est défini en $x \in \Lambda$ par un idéal $\mathscr{I}_x$ de $\tilde{\mathcal{O}}_x$, avec $\mathscr{I}_x = \bigcap_{j=1}^{q} \mathfrak{p}_j$, où les $\mathfrak{p}_j$ sont les idéaux premiers essentiels de $\mathscr{I}_x$ dans $\tilde{\mathcal{O}}_x$, alors, pour tout y de Λ assez voisin de x, $\mathfrak{p}_j$ induit en y un idéal premier non trivial.

5. Composantes irréductibles et fonctions Nash-analytiques.

LEMME 5.1. — *Soit* P *un polynôme distingué, à coefficients analytiques au voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{R}^{n-1}$. *Alors il existe une partition finie d'un voisinage de* 0 *dans* $V(P)$, *en parties s.a.l.f. compatibles avec* P, *telle que, pour tout* Λ *de la partition, on ait :*

Il existe une famille finie de polynômes $R_j \in \mathcal{N}(\Lambda')[X_n]$ (*où* $\Lambda' = \Pi(\Lambda)$), *qui sont, en tout* x *de* Λ, *les facteurs irréductibles réels de* P, *distingués en* x.

Démonstration. — Soient une partition de $V(P)$ en parties s.a.l.f. compatibles avec P, et Λ un élément de la partition.

Si $x \in \Lambda$, on écrit $P = S \prod_{j=1}^{s} R_j$, avec S et R_j unitaires dans $\mathcal{O}_{x'}[X_n]$, $S(x) \neq 0$, R_j distingué en x et irréductible. En tout y de Λ, assez voisin de x, R_j est distingué.

D'après 4.3. on peut raffiner la partition de sorte que R_j soit aussi irréductible, dans $\mathcal{O}_y$ ou dans $\mathcal{O}_{y'}[X_n]$, pour y dans Λ assez voisin de x. (C'est vrai dans le domaine complexe, donc aussi dans le domaine réel).

D'après I.8.1. on peut encore raffiner la partition de manière que ses éléments soient simplement connexes. Il en résulte qu'on peut recoller les R_j en des éléments, encore notés R_j, de $\mathcal{O}(\Lambda')[X_n]$.

Il reste à voir que les coefficients des R_j sont dans $\mathcal{N}(\Lambda')$. Mais, les R_j divisant P dans $\mathcal{O}(\Lambda')[X_n]$, ces coefficients sont fonctions symétriques de certaines racines de P, d'où le résultat.

Nous reprenons maintenant les notations des paragraphes 1, 2 et 3. Avec ces notations on a :

LEMME 5.2. — *Il existe une partition finie de* V, *au voisinage de* 0, *en parties s.a.l.f., telle que, pour tout* Λ *de la partition,* $\Lambda' = \Pi(\Lambda)$ *soit s.a.l.f. et telle que :*

Il existe une famille finie de polynômes $R_j \in \mathcal{N}(\Lambda')[X_{n-k+1}]$ *qui sont, en tout* x *de* Λ, *les facteurs irréductibles de* P *associés à* x.

Démonstration. — On prend une partition de V en parties s.a.l.f. compatibles avec P et les P_i, $i \in [n-k+2, n]$. Pour tout Λ de la partition, $\Pi|_{\Lambda} : \Lambda \to \Lambda' = \Pi(\Lambda)$ est un homéomorphisme, et Λ' est s.a.l.f.

D'après 5.1., on peut raffiner la partition de sorte que, pour chaque Λ, on ait des R_j dans $\mathcal{N}(\Lambda')[X_{n-k+1}]$ qui soient les facteurs irréductibles réels de P en tout x'' de $\Lambda'' = \Pi''(\Lambda)$. En supposant Λ connexe, ce qui est possible, il suffit alors de montrer que les facteurs R_j associés à un x de Λ sont aussi ceux associés à y, pour y dans Λ assez voisin de x.

Or on peut prendre, si $x'' = \Pi''(x)$, un voisinage ouvert U'' de x'' dans C^{n-k+1} tel que : $(\Pi'')^{-1}(U'') \cap \tilde{V} = \bigcup_{\ell} U_{\ell}$, U_{ℓ} ouverts disjoints, $U_1 \cap \tilde{V} = \{x\}$. On peut aussi supposer que, si $y'' \in U'' \cap \Lambda''$, $(\Pi'')^{-1}(y'') \cap U_1$ soit formé d'un point y unique, qui appartient à Λ.

On conclut alors par 2.1. et 2.2., puisque l'image par σ d'une composante connexe Γ_j est contenue dans U_1 ou ne le rencontre pas.

THÉORÈME 5.3. — *Il existe une partition finie d'un voisinage de* 0 *dans* V, *en parties s.a.l.f., telle que :*

Pour tout élément Λ *de la partition, il existe une famille finie d'éléments* f_{jl}

de $\mathcal{N}(\Lambda)$ *tels que, pour tout* x *de* Λ, *les idéaux* Π_{jx}, *engendrés dans* $\mathcal{O}_x$ *par les* $(f_{jl})_l$, *soient les idéaux premiers essentiels de* $\mathfrak{p}_x$ *dans* $\mathcal{O}_x$.

Démonstration. — Le théorème résulte de 3.2., 5.2. et de II.4.1. appliqué aux relations entre δ, R_j et les $\delta X_i - Q_i$, $i \in [n-k+2,n]$.

6. Décomposition primaire de $\mathfrak{p}\mathcal{N}_0(\Lambda_0)$.

Les résultats de ce paragraphe ne seront pas utilisés par la suite. Nous prenons une partie s.a.l.f. vérifiant les conditions de 5.2., compatible avec P et les P_i, et connexe.

On suppose aussi que si $f \in \mathcal{N}_0(\Lambda_0)$ (germe en 0 de fonction Nash-analytique sur le germe Λ_0 de Λ), et si f appartient localement à $\mathfrak{p}$, alors $f \in \mathfrak{p}\mathcal{N}_0(\Lambda_0)$. D'après 5.2. et II.5.1. il existe une partition finie d'un voisinage de 0 dans V en de telles parties Λ.

THÉORÈME 6.1. — *Soient* R_j, $j \in J$, *les éléments de* $\mathcal{N}(\Lambda')[X_{n-k+1}]$ *qui sont associés à* x, *pour tout* x *de* Λ. *Soit* Π_j *l'idéal de* $\mathcal{N}_0(\Lambda_0)$ *défini par :*

$$\Pi_j = \{f \in \mathcal{N}_0(\Lambda_0)\,;\ \delta^N f \in (R_j, \delta X_{n-k+2} - Q_{n-k+2}, \ldots, \delta X_n - Q_n)\mathcal{N}_0(\Lambda_0)\}.$$

Alors :

1° *Pour* $j \in J$, Π_j *est premier et* $\Pi_j \cap \mathcal{O}_n = \mathfrak{p}$.

2° *Tout idéal* Π *de* $\mathcal{N}_0(\Lambda_0)$, *premier, tel que* $\Pi \cap \mathcal{O}_n = \mathfrak{p}$ *est égal à un des* Π_j, $j \in J$.

3° $\bigcap_{j \in J} \Pi_j = \mathfrak{p}\mathcal{N}_0(\Lambda_0)$.

Démonstration. — On remarque d'abord que, pour tout f de $\mathcal{N}_0(\Lambda_0)$, $\delta^N f$ est égal à un élément de $\mathcal{N}_0(\Lambda'_0)[X_{n-k+1}]$, modulo l'idéal

$$(P, \delta X_{n-k+2} - Q_{n-k+2}, \ldots, \delta X_n - Q_n)\mathcal{N}_0(\Lambda_0).$$

Il suffit pour le voir d'utiliser II.2.4., pour les polynômes P et P_i, sur Λ qui est compatible avec ces polynômes.

a) $\Pi_j \cap \mathcal{O}_n = \mathfrak{p}$, $j \in J$.
Soit $f \in \Pi_j \cap \mathcal{O}_n$:

$$\delta^N f = \alpha_1 R_j + \sum_{i=n-k+2}^{n} \alpha_i(\delta X_i - Q_i), \qquad \alpha_i \in \mathcal{N}_0(\Lambda_0).$$

Il existe des points y de $\tilde{V}$, tendant vers 0, en lesquels $\delta(y) \neq 0$, $R_j(y) = 0$ et tels que les α_i soient définis au voisinage de y.

Au voisinage d'un tel y, $\tilde{V}$ est défini par l'annulation de R_j et des $\delta X_i - Q_i$, $i \in [n-k+2,n]$. Donc f est nul sur $\tilde{V}$ au voisinage de y, et f appartient à $\mathfrak{p}$.

b) On montre, comme dans 3.1. que :

$$\mathcal{N}_0(\Lambda_0')[X_{n-k+1}] \cap (R_j,\delta X_{n-k+2} - Q_{n-k+2},\ldots,\delta X_n - Q_n)\mathcal{N}_0(\Lambda_0) = R_j \mathcal{N}_0(\Lambda_0')[X_{n-k+1}].$$

c) Π_j est premier.

La démonstration est analogue à celle faite en 3.2., à condition de remarquer que si h_1 et h_2 appartiennent à $\mathcal{N}_0(\Lambda_0')[X_{n-k+1}]$ et $h_1 h_2 \in R_j \mathcal{N}_0(\Lambda_0')[X_{n-k+1}]$, alors h_1 ou h_2 appartient à $R_j \mathcal{N}_0(\Lambda_0')[X_{n-k+1}]$. Ceci est vrai car h_1 ou h_2 est multiple de R_j dans $\mathcal{O}_{x'}[X_{n-k+1}]$ pour tout x' de Λ', et Λ' est connexe.

d) $\bigcap_{j \in J} \pi_j = \mathfrak{p}\mathcal{N}_0(\Lambda_0)$.

Soit $f \in \bigcap_{j \in J} \Pi_j$. Alors pour tout x de Λ, assez voisin de 0, on a $f_x \in \mathfrak{p}_x$, d'après 3.2. Il en résulte que $f \in \mathfrak{p}\mathcal{N}_0(\Lambda_0)$.

e) Soient Π et Π' deux idéaux premiers de $\mathcal{N}_0(\Lambda_0)$, avec $\Pi' \subset \Pi$ et $\Pi' \cap \mathcal{O}_n = \Pi \cap \mathcal{O}_n$. Alors $\Pi = \Pi'$.

En effet, soit $f \in \Pi$, et considérons un polynôme $\sum_{i=0}^{q} a_i X^i$, de degré minimal, à coefficients dans $\mathcal{O}_n$, tel que :

$$\sum_{i=0}^{q} a_i f^i \in \Pi'.$$

Un tel polynôme existe, puisque $f \in \mathcal{N}_0(\Lambda_0)$. Alors $a_0 \in \Pi \cap \mathcal{O}_n$, donc $a_0 \in \Pi'$.

D'où $\left(\sum_{i=1}^{q} a_i f^{i-1}\right) f \in \Pi'$. Alors, puisque Π' est premier et q minimal, $f \in \Pi'$.

f) Il résulte de *d*) et *e*) que si un idéal premier Π de $\mathcal{N}_0(\Lambda_0)$ vérifie $\Pi \cap \mathcal{O}_n = \mathfrak{p}$ il est égal à un des Π_j.

7. Faisceau d'idéaux d'une partie semi-analytique.

THÉORÈME 7.1. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, et soit $\mathcal{M}$ un faisceau semi-cohérent sur Ω. Alors le support de $\mathcal{M}$ est une partie semi-analytique fermée de Ω. Réciproquement, si X est une partie semi-analytique de Ω, et $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux des germes analytiques nuls sur X, $\mathcal{I}$ est de type semi-fini, i.e. $\mathcal{O}/\mathcal{I}$ est semi-cohérent.*

Démonstration. — 1° *Partie directe.* Soit $S = \operatorname{Supp} \mathcal{M}$.

Puisque $\mathcal{M}$ est de type fini, S est fermé.

Pour montrer que S est semi-analytique, on peut supposer que $\mathcal{M} = \mathcal{O}^p/\mathcal{R}$, et qu'on a une partition finie de Ω, en parties s.a.l.f., telle que, pour tout Λ de la partition, $\mathcal{R}_\Lambda$ soit engendré par une famille finie d'éléments r_k de $\mathcal{N}(\Lambda)^p$.

Il suffit de montrer que $S \cap \Lambda$ est semi-analytique. Or $S \cap \Lambda$ est l'ensemble des x de Λ tels que le rang, sur $\mathbf{R}$, des éléments $r_k(x)$ soit inférieur à p. Donc $S \cap \Lambda$ est défini par l'annulation d'un nombre fini de déterminants appartenant à $\mathcal{N}(\Lambda)$. D'après I.7.1., $S \cap \Lambda$ est semi-analytique.

2° *Réciproque.*

Pour toute partie A de Ω, et $x \in \Omega$, on note $\mathcal{I}_x(A)$ l'idéal de $\mathcal{O}_x$ des germes nuls sur A au voisinage de x, et $\mathcal{I}(A)$ le faisceau des $\mathcal{I}_x(A)$.

La question est locale. On suppose que $0 \in \bar{X}$, et on travaille au voisinage de 0. On va montrer, par récurrence sur la dimension de X en 0, qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel $\mathcal{I}$ est de type semi-fini. C'est évident si cette dimension est nulle. Supposons le vrai en dimension inférieure à k, et prenons X de dimension k en 0.

Prenons une partition normale de X sur un voisinage Ω_0 de 0.

On écrit : $X \cap \Omega_0 = X_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{p} \Gamma_i \right)$, où X_0 est semi-analytique de dimension inférieure à k, et chaque Γ_i est un membre de dimension k de la partition.

Pour tout x de Ω_0 on a :

$$\mathcal{I}_x(X) = \mathcal{I}_x(X_0) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{p} \mathcal{I}_x(\Gamma_i) \right).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, et II.4.2., il suffit de montrer que chacun des faisceaux $\mathscr{I}(\Gamma_i)$ est de type semi-fini au voisinage de 0.

On fixe désormais un indice i, et on pose $\Gamma_i = \Gamma$.

On peut supposer Ω_0 assez petit pour que Γ soit connexe au voisinage de 0, i.e. en restriction aux éléments d'une base de voisinage de 0.

Par contre Γ n'est pas nécessairement connexe au voisinage d'un $x \neq 0$.

On pose $\mathfrak{p} = \mathscr{I}_0(\Gamma)$. Puisque Γ est une variété, connexe au voisinage de 0, $\mathfrak{p}$ est un idéal premier. On supposera Ω_0 assez petit pour pouvoir appliquer à $\mathfrak{p}$ les résultats du paragraphe 5.

a) On a $ht\,\mathfrak{p} = n - k$.

En effet, d'une part $\mathfrak{p}$ contient, pour $i \in [k+1,n]$, des polynômes distingués dans $\mathcal{O}_k[X_i]$. Donc $ht\,\mathfrak{p} \geqslant n - k$.

D'autre part, en tout x de Γ, on a $ht\,\mathfrak{p} = ht\,\mathfrak{p}_x$, puisque $\mathfrak{p}$ est premier. En un tel x on a $ht\,\mathfrak{p}_x \leqslant n - k$, puisque $\mathfrak{p}_x$ s'annule sur la variété Γ de dimension k.

b) Étudions $\mathscr{I}_x(\Gamma)$ *pour* $x \in \bar{\Gamma}, x \neq 0$.

Au voisinage de x, Γ est une union finie de variétés Γ'_{ix}, connexes au voisinage de x, et $\mathscr{I}_x(\Gamma)$ est l'intersection des $\mathscr{I}_x(\Gamma'_{ix})$.

Pour les mêmes raisons qu'en *a*), chaque $\mathscr{I}_x(\Gamma'_{ix})$ est premier de hauteur $n - k$. Puisque $\mathscr{I}_x(\Gamma) \supset \mathfrak{p}_x$, il en résulte que chaque $\mathscr{I}_x(\Gamma'_{ix})$ est un idéal premier essentiel de $\mathfrak{p}_x$ dans $\mathcal{O}_x$.

D'après 5.3., il existe une partition finie de $\bar{\Gamma}$, au voisinage de 0, en parties s.a.l.f., et, pour tout Λ de la partition, des éléments $f_{j\ell}$, $j \in J$, de $\mathscr{N}(\Lambda)$ engendrant, pour tout x de Λ, les idéaux premiers essentiels Π_{jx} de $\mathfrak{p}_x$, $j \in J$.

On fixe un tel Λ et on note Y_j l'ensemble des x de Λ tels que Π_{jx} soit idéal premier essentiel de $\mathscr{I}_x(\Gamma)$.

c) Chacun des Y_j *est semi-analytique.*

On note U_j un ouvert semi-analytique contenant Λ, sur lequel les éléments $f_{j\ell}$ se prolongent en des éléments, encore notés $f_{j\ell}$, de $\mathscr{N}(U_j)$. Un tel U_j existe d'après I.5.1.

On note $V_j = \{x \in U_j ; f_{j\ell}(x) = 0 \text{ pour tout } \ell\}$.

D'après I.7.1., V_j est semi-analytique.

On a alors : $Y_j = \Lambda \cap \overline{(\Gamma \cap \complement(\overline{\Gamma \setminus V_j}))}$, ce qui montre c).

En effet, prenons d'abord un x dans Y_j. Alors Π_{jx} est égal à un $\mathscr{I}_x(\Gamma'_{ix})$. Soit $y \in \Gamma'_{ix}$. Au voisinage de y, $\Gamma = \Gamma'_{ix}$ et donc les $f_{j\ell}$ s'annulent sur Γ au voisinage de y, i.e. $\Gamma_y \subset (V_j)_y$ ou encore $y \in \complement(\overline{\Gamma \setminus V_j})$. Puisque ceci est vrai pour des y de Γ tendant vers x, on a $x \in \Lambda \cap \overline{((\Gamma \cap \complement(\overline{\Gamma \setminus V_j}))}$.

Réciproquement soit $x \in \Lambda \cap \overline{(\Gamma \cap \complement(\overline{\Gamma \setminus V_j}))}$. Alors il existe des y, tendant vers x, avec $y \in \Gamma \cap \complement(\overline{\Gamma \setminus V_j})$. On peut supposer ces y dans une même composante Γ'_{ix}. Au voisinage de y on a $\Gamma \subset V_j$, donc chacun des $f_{j\ell}$ s'annule sur Γ'_{ix} au voisinage de y. Par connexité on déduit que les $f_{j\ell}$ s'annulent sur Γ'_{ix}, et donc $\Pi_{jx} \subset \mathscr{I}_x(\Gamma'_{ix})$. Puisque ces idéaux sont premiers de même hauteur, on a $\Pi_{jx} = \mathscr{I}_x(\Gamma'_{ix})$, i.e. $x \in Y_j$.

d) *$\mathscr{I}(\Gamma)$ est de type semi-fini sur* Λ.

On en déduira 7.1., puisque les Λ constituent une partition de $\bar{\Gamma}$ au voisinage de 0.

D'après *c*) il existe une partition finie de Λ en parties s.a.l.f., telle que, pour tout Z de la partition et tout $j \in J$, $Z \subset Y_j$ ou $Z \cap Y_j = \varnothing$.

Pour tout x de Z, $\mathscr{I}_x(\Gamma)$ est l'intersection des Π_{jx} pour les indices j tels que $Z \subset Y_j$.

Alors *d*) résulte de II.4.2.

THÉORÈME 7.2. — *Soit Ω un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *et soit $\mathscr{M}$ un faisceau semi-cohérent sur Ω. Alors l'ensemble W des points de Ω en lesquels $\mathscr{M}$ n'est pas cohérent est un sous-ensemble semi-analytique fermé de Ω.*

Démonstration. — On peut supposer que $\mathscr{M} = \mathscr{O}^p/\mathscr{R}$ et qu'on a une partition finie de Ω en parties s.a.l.f. Λ_i, sur chacune desquelles $\mathscr{R}$ est engendré par un nombre fini d'éléments de $\mathscr{N}(\Lambda_i)^p$. Il suffit de montrer que $W \cap \Lambda_i$ est semi-analytique.

Prenons $i = 1$, par exemple. D'après II.6.8. il existe un ouvert semi-analytique $U_1 \supset \Lambda_1$ et des f_{ij} dans $\mathscr{N}(\Lambda_1)^p \cap \mathscr{R}(U_1)$, en nombre fini, engendrant $\mathscr{R}$ sur Λ_1.

Pour $i \geqslant 2$, on désigne par Y_i l'ensemble des x de $U_1 \cap \Lambda_i$ en lesquels les éléments f_{1j} n'engendrent pas $\mathcal{R}_x$. Il est clair que $W \cap \Lambda_1 = \Lambda_1 \cap (\bigcup_{i \geq 2} \bar{Y}_i)$. Il suffit donc de montrer que Y_i est semi-analytique.

Or $\mathcal{R}$ est engendré sur Λ_i par des $f_{ik} \in \mathcal{N}(\Lambda_i)^p$, en nombre fini. Donc $Y_i = \{x \in U_1 \cap \Lambda_i\,; \exists k, f_{ik} \notin \sum_j f_{1j}\mathcal{O}_x\}$.

Alors Y_i est semi-analytique d'après II.4.4.

Le théorème suivant, qui résulte immédiatement de 7.1. et 7.2., est dû à M. Galbiati [1].

THÉORÈME 7.3. — *Soit* X *un sous-ensemble analytique fermé d'un ouvert* Ω *de* $\mathbf{R}^n$. *Alors l'ensemble des points en lesquels* X *n'est pas cohérent est une partie semi-analytique fermée de* Ω.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. GALBIATI, Stratifications et ensembles de non-cohérence d'un espace analytique réel, *Inv. Math.*, 34 (1976), 113-133.

[2] S. ŁOJASIEWICZ, Ensembles semi-analytiques, N° A 66765, École Polytechnique, Paris, 1965.

[3] R. NARASIMHAN, Introduction to the theory of analytic spaces, *Springer Lecture Notes*, 25.

Manuscrit reçu le 21 avril 1980.

Jean MERRIEN,
Institut de Recherche Mathématique de Rennes
Laboratoire Associé n° 305
Campus de Beaulieu
35042-Rennes Cedex.