ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PHILIPPE CHARPENTIER

Formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 4 (1980), p. 121-154

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_4_121_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 4 (1980), 121-154.

FORMULES EXPLICITES POUR LES SOLUTIONS MINIMALES DE L'ÉQUATION $\bar{\partial} u = f$ DANS LA BOULE ET DANS LE POLYDISQUE DE $\mathbf{C}^n$

par Philippe CHARPENTIER

0. Introduction.

En théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, la résolution de l'équation $\bar{\partial} u = f$, f étant une (0, 1)-forme $\bar{\partial}$-fermée, joue un rôle fondamental. Plusieurs méthodes ont été mises en œuvre pour résoudre cette équation avec les meilleures estimations possibles. Parmi toutes les solutions de cette équation dans un domaine donné, il en est une qui peut être considérée comme canonique, c'est la solution qui est orthogonale aux fonctions holomorphes dans L^2, ou, autrement dit, celle qui a la plus petite norme dans L^2. Dans ce travail, nous nous proposons de donner des formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial} u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbf{C}^n$.

Plus précisément, dans la première partie nous considérons le cas de la boule unité B de $\mathbf{C}^n$. Pour tout $k \in]0, +\infty[$ on considère la mesure sur B $d\sigma_{k-1}(z) = (1-|z|^2)^{k-1}\, d\lambda(z)$, $d\lambda$ désignant la mesure de Lebesgue. Si f est une (0,1)-forme $\bar{\partial}$-fermée et de classe C^1 dans $\bar{B}$, soit u_k la solution minimale de $\bar{\partial} u = f$ dans $L^2(d\sigma_{k-1})$ (i.e. u_k est orthogonale aux fonctions holomorphes dans $L^2(d\sigma_{k-1})$). On construit alors explicitement un noyau donnant u_k en fonction de f. Ce noyau ressemble à celui qui résoud le même problème dans le cas du disque unité D du plan complexe : rappelons que si u est une fonction de classe C^1 dans $\bar{D}$ et $k > 0$, pour tout $z \in D$ on a la formule suivante :

$$(1) \quad u(z) = \frac{k}{2i\pi} \int_D u(\zeta) \frac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar{\zeta} z)^{k+1}}\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_D \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{(1-|\zeta|^2)^k}{(1-\bar{\zeta} z)^k (z-\zeta)}\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta .$$

Le noyau $\dfrac{k}{2i\pi}\dfrac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar{\zeta}z)^{k+1}}\,d\bar{\zeta}\wedge d\zeta$ étant le noyau de la projection orthogonale de $L^2(d\sigma_{k-1})$ sur le sous-espace des fonctions holomorphes, on déduit aussitôt de (1) que si $f \in C^1(\bar{D})$, la fonction

$$u_k(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_D f(\zeta)\frac{(1-|\zeta|^2)^k}{(1-\bar{\zeta}z)^k(z-\zeta)}\,d\bar{\zeta}\wedge d\zeta,$$

est la solution minimale dans $L^2(d\sigma_{k-1})$ de l'équation $\bar{\partial}u = f$. Dans cette première partie on construit donc dans la boule l'analogue du noyau

$$\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^k\frac{d\zeta}{z-\zeta}. \tag{2}$$

Pour cela on remarque que le noyau (2) s'écrit $\psi_k(\zeta,z)C(\zeta,z)$ où $\psi_k(\zeta,z) = \left(\dfrac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^k$ est une fonction holomorphe en z qui est nulle pour $|\zeta| = 1$ et qui vaut 1 en $\zeta = z$, et $C(\zeta, z)$ le noyau de Cauchy, et on cherche le noyau de la boule sous cette même forme.

On est donc amené dans le premier paragraphe à définir le noyau de Cauchy de la boule, c'est-à-dire un noyau $C(\zeta,z)$ qui donne la formule de Cauchy, à savoir : si $u \in C^1(\bar{B})$, pour tout $z \in B$,

$$u(z) = \int_{\partial B} u(\zeta)S(\zeta,z)\,d\lambda(\zeta) + \int_B \bar{\partial}u \wedge C(\zeta,z), \tag{3}$$

où $S(\zeta,z)$ est le noyau de Szegö de la boule.

Puis au deuxième paragraphe on définit les fonctions ψ_k telles que les noyaux

$$C_k(\zeta,z) = \psi_k(\zeta,z)C(\zeta,z)$$

donnent les solutions minimales dans $L^2(d\sigma_{k-1})$, c'est-à-dire, si $u \in C^1(\bar{B})$, pour $z \in B$,

$$u(z) = P_{k-1}u(z) + \int_B \bar{\partial}u \wedge C_k(\zeta,z), \tag{4}$$

où P_{k-1} est le projecteur orthogonal de $L^2(d\sigma_{k-1})$ sur $L^2(d\sigma_{k-1}) \cap H(B)$, $H(B)$ étant l'espace des fonctions holomorphes.

On peut remarquer de plus que, comme dans le cas de la formule (1), si on fait tendre k vers zéro dans la formule (4), on obtient naturellement la formule de Cauchy (3).

Dans le paragraphe 3 de la première partie, on donne d'une part des estimations des solutions minimales dans B (qui ne sont d'ailleurs pas nouvelles, cf. remarque de la fin du paragraphe 3) et d'autre part des estimations des valeurs au bord sur ∂B de ces solutions minimales.

Dans la deuxième partie de cet article on traite le cas du polydisque. Pour simplifier les notations, on ne considère que le cas du bidisque D^2 de $\mathbf{C}^2$. Si k_1 et k_2 sont deux réels strictement positifs, on note

$$d\sigma_{k-1}(z_1,z_2) = (1-|z_1|^2)^{k_1-1}(1-|z_2|^2)^{k_2-1}\, d\lambda(z_1,z_2),$$

$d\lambda$ étant la mesure de Lebesgue. On écrit alors une formule explicite donnant les solutions minimales de $\bar{\partial}u = f$ dans $L^2(d\sigma_{k-1})$. Entre autres estimations, on montre que si k_1 et k_2 sont supérieurs ou égaux à 1, on a l'estimation $L^p(D^2)(p \in [1,+\infty])$ pour la solution minimale.

On remarque de plus que si on fait tendre k_1 et k_2 vers zéro, on obtient là aussi une formule de Cauchy qui est d'ailleurs celle qu'avait utilisé G. M. Henkin [5] pour obtenir une estimation L^∞.

I. FORMULE DE CAUCHY ET SOLUTIONS MINIMALES DE L'ÉQUATION $\bar{\partial}u = f$ DANS LA BOULE DE $\mathbf{C}^n$

1. Le noyau de Cauchy.

Précisons tout d'abord une notation que nous utiliserons constamment par la suite : pour tous ξ et η dans $\mathbf{C}^n$, nous notons

$$\xi\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i$$

de sorte que la boule unité B de $\mathbf{C}^n$ est l'ensemble des $z \in \mathbf{C}^n$ tels que $z\bar{z} < 1$.

Nous allons définir le noyau de Cauchy de B en utilisant les formes de

Cauchy-Fantapié. Nous reprenons les notations et la terminologie utilisée par H. Skoda dans [10]; soit μ la forme de Cauchy-Leray,

$$\mu = [\xi(\zeta-z)]^{-n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\xi_i\left(\bigwedge_{j\neq i} d\xi_j\right)\bigwedge_{i=1}^{n} d(\zeta_i-z_i).$$

Pour toute section s du fibré de Cauchy-Leray, on a donc

$$s^*\mu = [s(\zeta,z)(\zeta-z)]^{-n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}s^i(\zeta,z)\left(\bigwedge_{j\neq 1} ds^j(\zeta,z)\right)\bigwedge_{i=1}^{n} d(\zeta_i-z_i).$$

Soit alors $s_0(\zeta,z)$ l'application de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ définie vectoriellement par

$$s_0(\zeta,z) = \bar{\zeta}(1-\zeta\bar{z})-\bar{z}(1-|\zeta|^2).$$

Un calcul immédiat montre que

$$s_0(\zeta,z)(\zeta-z) = \mathrm{D}(\zeta,z) = |1-\bar{\zeta}z|^2 - (1-|\zeta|^2)(1-|z|^2),$$

et que

$$\mathrm{D}(\zeta,z) = (1-|\zeta|^2)|\zeta-z|^2 + |\bar{\zeta}(\zeta-z)|^2 = (1-|z|^2)|\zeta-z|^2+|\bar{z}(\zeta-z)|^2.$$

Par conséquent $s_0(\zeta,z)$ est une section du fibré de Cauchy-Leray (i.e. $s_0(\zeta,z)(\zeta-z)$ ne s'annule qu'en $\zeta = z$, $(\zeta,z)\in \mathrm{B}\times\mathrm{B})$ et de plus si on a soit $|\zeta| \leqslant r < 1$ soit $|z| \leqslant r < 1$, alors

$$\text{(I.1)} \qquad \mathrm{D}(\zeta,z) \geqslant (1-r^2)|\zeta-z|^2.$$

Nous définissons alors le noyau de Cauchy $\mathrm{K}_0(\zeta,z)$ de B en posant

$$\text{(I.2)} \qquad \mathrm{K}_0(\zeta,z) = s_0^*\mu(\zeta,z).$$

Pour tous entiers p et q, $0 \leqslant p \leqslant n$, $1 \leqslant q \leqslant n$, nous notons $\mathrm{K}_0^{p,q}$ la composante de degré $(n-p, n-q)$ en ζ (et par conséquent de degré $(p, q-1)$ en z) du noyau K_0.

Les propriétés fondamentales des noyaux $\mathrm{K}_0^{p,q}$ sont résumées dans la proposition suivante.

PROPOSITION I.1. — 1. $\bar{\partial}_\zeta(\mathrm{K}_0^{p,1}(\zeta,z)) = 0$; *pour* $q \geqslant 2$,

$$\bar{\partial}_\zeta(\mathrm{K}_0^{p,q}(\zeta,z)) = -\,\bar{\partial}_z(\mathrm{K}_0^{p,q-1}(\zeta,z)).$$

2. *Pour* $q \geqslant 2$, on a $\mathrm{K}_0^{p,q}(\zeta,z) = 0$ *lorsque* $z\in\mathrm{B}$ *et* $|\zeta| = 1$.

3. *Pour* $(\zeta,z) \in \bar{\mathrm{B}} \times \bar{\mathrm{B}}$, *on a*

$$\mathrm{K}_0^{0,1}(\zeta,z) = \frac{(1-\zeta\bar{z})^{n-1}}{\mathrm{D}^n(\zeta,z)}\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(\bar{\zeta}_i-\bar{z}_i)\bigwedge_{j\neq i} d\bar{\zeta}_j\right]\bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i .$$

De plus lorsque $(\zeta,z) \in \partial\mathrm{B} \times \mathrm{B}$ *si on identifie le noyau* $\mathrm{K}_0^{0,1}(\zeta,z)$ *à une fonction de* ζ *et* z *que multiplie la mesure de Lebesgue* $d\lambda(\zeta)$ *sur* $\partial\mathrm{B}$, *on a*

$$\mathrm{K}_0^{0,1}(\zeta,z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(2i\pi)^n}{(n-1)\,!}\,\mathrm{S}(\zeta,z)\,d\lambda(\zeta),$$

où $\mathrm{S}(\zeta,z) = \dfrac{(n-1)\,!}{2\pi^n}\dfrac{1}{(1-\bar{\zeta}z)^n}$ *est le noyau de Szegö de la boule.*

4. *Pour tout* $z \in \mathrm{B}$ *et pour toute forme de degré* $(p,q-1)\,u$, *de classe* C^1 *dans un voisinage de* z, *on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\mathrm{B}_\varepsilon(z)} u(\zeta)\wedge \mathrm{K}_0^{p,q}(\zeta,z) = c_{n,p,q}u(z),$$

où $\mathrm{B}_\varepsilon(z)$ *désigne la boule de centre* z *et de rayon* ε, *et* $c_{n,p,q}$ *est une constante numérique.*

Le 1. exprime le fait que les formes de Cauchy-Fantapié sont fermées.

Le 2. se voit par un calcul direct : si $|\zeta| = 1$, on a,

$$s_0^i(\zeta,z)\bigwedge_{j\neq i}\bar{\partial}(s_0^j(\zeta,z)) = \bar{\zeta}_i(1-\zeta\bar{z})\bigwedge_{j\neq i}[(1-\zeta\bar{z})\,d\bar{\zeta}_j+\bar{z}_j\bar{\partial}(|\zeta|^2)-\bar{\zeta}_j\bar{\partial}_z(\zeta\bar{z})] .$$

Le résultat cherché est donc évident si $q \geqslant 3$. Pour $q = 2$, il suffit de remarquer que la composante de degré $(0, 1)$ en z de

$$(-1)^{i-1}s_0^i\bigwedge_{j\neq i}\bar{\partial}(s_0^j(\zeta,z))$$

est égale à :

$$(1-\zeta\bar{z})\left\{\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{i+j+1}\bar{\zeta}_i\bar{\zeta}_j\,\bar{\partial}_z(\zeta\bar{z})\bigwedge_{k\neq i,j}[(1-\zeta\bar{z})\,d\bar{\zeta}_k+\bar{z}_k\,\bar{\partial}(|\zeta|^2)]\right.$$
$$\left.+\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i+j}\bar{\zeta}_i\bar{\zeta}_j\,\bar{\partial}_z(\zeta\bar{z})\bigwedge_{k\neq i,j}[(1-\zeta\bar{z})\,d\bar{\zeta}_k+\bar{z}_k\,\bar{\partial}(|\zeta|^2)]\right\},$$

d'où l'annulation après sommation sur i.

Compte tenu du fait que $s_0(\zeta,z)(\zeta-z) = D(\zeta,z)$, pour voir le 3., il faut calculer le numérateur de $K_0^{0,1}$, c'est-à-dire $\Sigma(-1)^{i-1}s_0^i \bigwedge_{j\neq i} \bar\partial_\zeta s_0^j$:

$$\bigwedge_{j\neq i} \bar\partial_\zeta s_0^j = \bigwedge_{j\neq i} [(1-\zeta\bar z)\, d\bar\zeta_j + \bar z_j \bar\partial|\zeta|^2]$$
$$= (1-\zeta\bar z)^{n-1} \bigwedge_{j\neq i} d\bar\zeta_j + (1-\zeta\bar z)^{n-2}\left\{\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j-1}\bar z_j\, \bar\partial|\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar\zeta_\ell \right.$$
$$\left. \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^j \bar z_j\, \bar\partial|\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar\zeta_\ell\right\}.$$

$$s_0^i \bigwedge_{j\neq i} \bar\partial_\zeta s_0^j = [\bar\zeta_i(1-\zeta(\bar z) - \bar z_i(1-|\zeta|^2)]\,(1-\zeta\bar z)^{n-1} \bigwedge_{j\neq i} d\bar\zeta_j$$
$$+ (1-\zeta\bar z)^{n-2}\left\{\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j-1}(\bar\zeta_i\bar z_j(1-\zeta\bar z) - \bar z_i\bar z_j(1-|\zeta|^2))\, \bar\partial|\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar\zeta_\ell \right.$$
$$\left. + \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^j(\bar\zeta_i\bar z_j(1-\zeta\bar z) - \bar z_i\bar z_j(1-|\zeta|^2))\, \bar\partial|\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar\zeta_\ell\right\}.$$

Par suite :

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} s^i \bigwedge_{j\neq i} \bar\partial_\zeta s^j$$
$$= (1-\zeta\bar z)^{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}(\bar\zeta_i(1-\zeta\bar z) - \bar z_i(1-|\zeta|^2)) \bigwedge_{j\neq i} d\bar\zeta_j \right.$$
$$\left. + \sum_{i<j} (-1)^{i+j}(\zeta_j\bar z_i - \zeta_i\bar z_j)\, \bar\partial|\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar\zeta_\ell\right\}.$$

On obtient alors la formule cherchée en remarquant que

$$\text{(I.3)} \quad \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}(\bar\zeta_i - \bar z_i) \bigwedge_{j\neq i} d\bar\zeta_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}(\bar\zeta_i(1-\zeta\bar z) - \bar z_i(1-|\zeta|^2)) \bigwedge_{j\neq i} d\bar\zeta_j$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}(\zeta_j\bar z_i - \zeta_i\bar z_j)\bar\partial|\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar\zeta_\ell.$$

La valeur de $K_0^{0,1}(\zeta,z)$ lorsque $|\zeta| = 1$ se déduit aisément de la formule explicite donnant $K_0^{0,1}$.

La démonstration de la quatrième partie de la proposition est classique : elle se fait en utilisant une homotopie entre s_0 et la section de

Martinelli-Bochner $s_b(\zeta,z) = \bar{\zeta} - \bar{z}$: soit $F(\zeta,z,t) = ts_0 + (1-t)s_b$, et appliquons la formule de Stokes à $u(\zeta) \wedge F^*\mu$ sur $\partial B_\varepsilon \times [0,1]$:

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u(\zeta) \wedge s_0^*\mu - \int_{\partial B_\varepsilon} u(\zeta) \wedge s_b^*\mu = \int_{\partial B_\varepsilon \times [0,1]} \bar{\partial} u \wedge F^*\mu .$$

En remarquant que les composantes de $F(\zeta,z,t)$ ainsi que celles de $\dfrac{\partial}{\partial t} F(\zeta,z,t)$ sont majorées par $C|\zeta - z|$, on conclut que les coefficients du numérateur de $F^*\mu$ sont majorés par $C|\zeta - z|^2$ et, en utilisant (I.1), on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon \times [0,1]} \bar{\partial} u \wedge F^*\mu = 0 .$$

La conclusion résulte donc de la formule classique (cf. [9]) :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} u(\zeta) \wedge s_b^*\mu = c_{n,p,q} u(z) .$$

THÉORÈME I.1. — 1. *Soit q un entier $\geqslant 2$. Pour toute forme $u(\zeta)$ de degré $(p,q-1)$ et de classe C^1 dans $\bar{B}$, on a, pour $z \in B$:*

$$c_{n,p,q} u(z) = -\int_B \bar{\partial} u(\zeta) \wedge K_0^{p,q}(\zeta,z) + (-1)^{p+q} \bar{\partial}_z \left(\int_B u(\zeta) \wedge K_0^{p,q-1}(\zeta,z) \right) \cdot$$

2. *Pour toute forme de degré $(p,0)$ $u(\zeta)$ de classe C^1 dans $\bar{B}$, on a, pour $z \in B$:*

$$c_{n,p,1} u(z) = \int_{\partial B} u(\zeta) \wedge K_0^{p,1}(\zeta,z) - \int_B \bar{\partial} u(\zeta) \wedge K_0^{p,1}(\zeta,z),$$

et la forme $z \to \int_{\partial B} u(\zeta) \wedge K_0^{p,1}(\zeta,z)$ est à coefficients holomorphes dans B. En particulier, si u est une fonction :

3. FORMULE DE CAUCHY. — *Soit u une fonction de classe C^1 dans $\bar{B}$. Pour tout $z \in B$, on a*

$$\text{(I.4)} \quad u(z) = \int_{\partial B} u(\zeta) S(\zeta,z)\, d\lambda(\zeta) - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)\,!}{(2i\pi)^n} \int_B \bar{\partial} u(\zeta) \wedge \frac{(1-\zeta\bar{z})^{n-1}}{D^n(\zeta,z)}\, \omega(\zeta,z),$$

où $S(\zeta,z) = \dfrac{(n-1)\,!}{2\pi^n}\dfrac{1}{(1-\bar{\zeta}z)^n}$ *est le noyau de Szegö de la boule,* $d\lambda(\zeta)$ *la mesure de Lebesgue sur* ∂B, *et*

$$\omega(\zeta,z) = \left[\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}(\bar{\zeta}_i-\bar{z}_i) \bigwedge_{j\neq i} d\bar{\zeta}_j\right] \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i .$$

Supposons tout d'abord $q \geqslant 2$. Soit $v(z)$ une forme de degré $(n-p,n-q+1)$, de classe C^1 et à support compact dans B. Appliquons la formule de Stokes à

$$u(\zeta) \wedge K_0(\zeta,z) \wedge v(z) \qquad \text{sur} \qquad B \times B \backslash U_\varepsilon$$

où $U_\varepsilon = \{(\zeta,z) \in B \times B ; |\zeta - z| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$: compte tenu du 1. et du 2. de la proposition I.1, il vient,

$$-\int_{\partial U_\varepsilon} u(\zeta) \wedge K_0^{p,q}(\zeta,z) \wedge v(z) = \int_{B\times B\backslash U_\varepsilon} \bar{\partial} u(\zeta) \wedge K_0^{p,q}(\zeta,z) \wedge v(z) + (-1)^{p+q}\int_{B\times B\backslash U_\varepsilon} u(\zeta) \wedge K_0^{p,q-1}(\zeta,z) \wedge \bar{\partial} v(z).$$

Puisque $v(z)$ est à support compact dans B, dans les deux intégrales du membre de droite, on peut majorer les noyaux $K_0^{p,q}$ et $K_0^{p,q-1}$ lorsque ζ est au voisinage z (en utilisant (I.1)) par $\dfrac{C}{|\zeta - z|^{2n-1}}$ · Par suite, en utilisant le 4 de la proposition I.1, il vient, en faisant tendre ε vers zéro,

$$-c_{n,p,q}\int_{B} u(z) \wedge v(z) = \int_{B\times B} \bar{\partial} u(\zeta) \wedge K_0^{p,q}(\zeta,z) \wedge v(z) + (-1)^{p+q}\int_{B\times B} u(\zeta) \wedge K_0^{p,q-1}(\zeta,z) \wedge \bar{\partial} v(z),$$

ce qui donne la formule cherchée.

Supposons maintenant $q = 1$. On applique alors la formule de Stokes à $u(\zeta) \wedge K_0^{p,1}(\zeta,z)$ sur $B\backslash B_\varepsilon(z)$ où $B_\varepsilon(z)$ est une boule centrée en z et de rayon $\varepsilon > 0$. En utilisant le 1 de la proposition I.1, il vient

$$\int_{\partial B} u(\zeta) \wedge K_0^{p,1}(\zeta,z) - \int_{\partial B_\varepsilon} u(\zeta) \wedge K_0^{p,1}(\zeta,z) = \int_{B\backslash B_\varepsilon} \bar{\partial} u(\zeta) \wedge K_0^{p,1}(\zeta,z).$$

Comme précédemment, on obtient la formule cherchée en faisant tendre

ε vers zéro. Le fait que la forme $z \to \int_{\partial B} u(\zeta) \wedge K_0^{p,1}(\zeta,z)$ est à coefficients holomorphes dans B est une conséquence du 3 de la proposition I.1. Enfin la formule de Cauchy résulte du 3 de la proposition I.1.

Remarque. – La section s_0 du fibré de Cauchy-Leray que nous considérons ici est étroitement liée à la section s_h construite par H. Skoda dans [10]. En effet, pour tout $(\zeta,z) \in B \times \partial B$, on a

$$s_0(\zeta,z) = (1-\zeta\bar{z})s_h(\zeta,z),$$

et, par suite, lorsque $z \in \partial B$, les composantes de degré $(n,n-1)$ en ζ de $s_0^*\mu$ et $s_h^*\mu$ sont les mêmes. Notons toutefois que $s_h^*\mu$ n'est pas le noyau que construit finalement H. Skoda, car il retire à $s_h^*\mu$ une forme dont les coefficients sont holomorphes en z. Ceci sera précisé au § 3 [formule (I.12)].

2. Formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\partial u = f$.

$d\lambda(z)$ désignant la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{C}^n$ normalisée de sorte que $d\lambda(B) = 1$, pour tout réel $k > 0$, nous désignerons par $d\sigma_{k-1}(z)$ la mesure sur B $(1-|z|^2)^{k-1}\, d\lambda(z)$.

H(B) désignant l'espace des fonctions holomorphes dans B, soit P_{k-1} le projecteur orthogonal de $L^2(d\sigma_{k-1})$ sur $H(B) \cap L^2(d\sigma_{k-1})$.

Soit $\mathscr{D}_{(0,1)}(\bar{B})$ l'espace des formes différentielles f de degré (0,1) à coefficients de classe C^1 dans $\bar{B}$ et telles que $\bar{\partial} f = 0$. Soit H un opérateur linéaire de $\mathscr{D}_{(0,1)}(\bar{B})$ dans $C^1(\bar{B})$ tel que pour toute $f \in \mathscr{D}_{(0,1)}(\bar{B})$ on a $\bar{\partial}(H(f)) = f$ (cf. [4]), et posons

$$T_{k-1} = H - P_{k-1} \circ H.$$

T_{k-1} est donc l'opérateur qui à toute forme $f \in \mathscr{D}_{(0,1)}(\bar{B})$ fait correspondre la solution de l'équation $\bar{\partial} u = f$ qui est orthogonale aux fonctions holomorphes dans $L^2(d\sigma_{k-1})$, ou encore celle qui a la plus petite norme dans $L^2(d\sigma_{k-1})$.

Dans ce paragraphe, nous allons écrire explicitement les noyaux des opérateurs T_{k-1}. Comme nous l'avons dit dans l'introduction ces noyaux s'écrivent de manière analogue à ceux du cas $n = 1$: on va multiplier le noyau de Cauchy défini dans le paragraphe précédent par une fonction convenable $\psi_k(\zeta,z)$ qui vérifiera entre autres $\psi_k(z,z) = 1$ et $\psi_k(\zeta,z) = 0$ pour $(\zeta,z) \in \partial B \times B$.

Posons tout d'abord

$$\text{(I.5)} \qquad C_0(\zeta,z) = -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} K_0^{0,1}(\zeta,z).$$

Pour tout nombre complexe $k \neq 0$, tel que $\operatorname{Re} k \geqslant 0$, nous définissons la fonction $\psi_k(\zeta,z)$ par

$$\text{(I.6)} \quad \psi_k(\zeta,z) = \frac{1}{B(n,k)}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^k \left[\sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \frac{(-1)^p}{k+P}\left(\frac{(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{\zeta}z|^2}\right)^p\right],$$

où C_{n-1}^p est le coefficient binomial $\dfrac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$, et, $B(n,k)$ la fonction de Bessel $B(n,k) = \dfrac{\Gamma(n)\Gamma(k)}{\Gamma(n+k)}$.

Nous définissons alors le noyau $C_k(\zeta,z)$ par

$$\text{(I.7)} \qquad C_k(\zeta,z) = \psi_k(\zeta,z) C_0(\zeta,z).$$

On peut remarquer que, compte-tenu de la formule classique

$$\text{(I.8)} \qquad B(n,k) = \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \frac{(-1)^p}{k+p},$$

la limite, lorsque k tend vers zéro de $C_k(\zeta,z)$ est égale à $C_0(\zeta,z)$.

On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME I.2. — *Soit f une forme différentielle de degré* (0, 1), *$\bar{\partial}$-fermée et de classe C^1 dans $\bar{B}$.*

i) *Pour tout nombre complexe k, $\operatorname{Re} k \geqslant 0$, la fonction $u_k(z)$, $z \in B$, définie par*

$$u_k(z) = \int_B f(\zeta) \wedge C_k(\zeta,z),$$

où $C_k(\zeta,z)$ est le noyau défini par (I.5), (I.6) *et* (I.7) *est une solution de l'équation $\bar{\partial}u = f$.*

ii) De plus, si k est un réel strictement positif, on a, pour tout $z \in B$,

$$T_{k-1}(f)(z) = u_k(z).$$

Lorsque $k = 0$, le fait que $\bar{\partial} u_0 = f$ résulte de la formule de Cauchy du théorème I.1.

Pour faire la démonstration, nous allons tout d'abord supposer $\operatorname{Re} k > 0$.

LEMME. — *Pour* $\operatorname{Re} k > 0$ *et* $\zeta \neq z$, *on a*

$$\text{(I.9)} \quad \bar{\partial}_\zeta C_k(\zeta,z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \frac{1}{B(n,k)} \frac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar{\zeta}z)^{n+k}} \bigwedge_{i=1}^{n} d\bar{\zeta}_i \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i .$$

Pour simplifier l'écriture, posons $c_{n,k} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \dfrac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \dfrac{1}{B(n,k)}$.
D'après le 1 de la proposition I.1 et la définition de $C_k(\zeta,z)$, on a

$$\bar{\partial}_\zeta C_k(\zeta,z) = \bar{\partial}_\zeta \psi_k(\zeta,z) \wedge C_0(\zeta,z).$$

Or,

$$\psi_k(\zeta,z) = \frac{1}{B(n,k)} \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p \frac{(-1)^p}{k+p} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{k+p} \left(\frac{1-|z|^2}{1-\zeta\bar{z}}\right)^p ,$$

et par suite,

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_\zeta C_k(\zeta,z) &= -\, c_{n,k} \left[\sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p (-1)^p \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{k+p-1} \left(\frac{1-|z|^2}{1-\zeta\bar{z}}\right)^p \right] \\
&\qquad\qquad \bar{\partial}_\zeta \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right) \wedge C_0(\zeta,z) \\
&= -\, c_{n,k} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{k-1} \frac{D^{n-1}(\zeta,z)}{|1-\bar{\zeta}z|^{2n-2}} \bar{\partial}_\zeta \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right) \wedge C_0(\zeta,z).
\end{aligned}$$

Comme, en vertu du 3 de la proposition I.1, on a

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_\zeta \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right) \wedge C_0(\zeta,z) &= -\, \frac{\sum_{i=1}^{n} [\zeta_i(1-\bar{\zeta}z) - z_i(1-|\zeta|^2)]\, d\bar{\zeta}_i}{(1-\bar{\zeta}z)^2} \\
&\qquad \wedge \frac{(1-\zeta\bar{z})^{n-1}}{D^n(\zeta,z)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (\bar{\zeta}_i - \bar{z}_i) \bigwedge_{j\neq i} d\bar{\zeta}_j \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i \\
&= -\, \frac{(1-\zeta\bar{z})^{n-1}}{(1-\bar{\zeta}z)^2 D^{n-1}(\zeta,z)} \bigwedge_{i=1}^{n} d\bar{\zeta}_i \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i ,
\end{aligned}$$

la formule du lemme en découle aussitôt.

Démontrons maintenant le théorème I.1 pour $\operatorname{Re} k > 0$: soit $u(\zeta)$ une fonction de classe C^1 dans $\bar{B}$ et soit $B_\varepsilon(z)$ une boule centrée en z et de rayon $\varepsilon > 0$. Appliquons la formule de Stokes à $u(\zeta)C_k(\zeta, z)$ sur $B\backslash B_\varepsilon$: puisque $\operatorname{Re} k > 0$, on a $C_k(\zeta,z) = 0$ lorsque $|\zeta| = 1$, et, compte tenu du lemme, il vient :

$$\text{(I.10)} \quad \int_{B\backslash B_\varepsilon} \bar\partial u(\zeta) \wedge C_k(\zeta, z) = - c_{n,k} \int_{B\backslash B_\varepsilon} u(\zeta) \frac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar\zeta z)^{n+k}} \bigwedge_1^n d\bar\zeta_i \bigwedge_1^n d\zeta_i - \int_{\partial B_\varepsilon} u(\zeta)C_k(\zeta,z).$$

Remarquons maintenant que, d'après (I.8), lorsque $\varepsilon \to 0$ la fonction $\psi_k(\zeta,z)$ converge vers 1 uniformément par rapport à $\zeta \in \partial B_\varepsilon$, et le 4. de la proposition I.1 entraîne que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} u(\zeta)C_k(\zeta,z) = - u(z).$$

En utilisant (I.1) en faisant tendre ε vers zéro, on déduit donc de (I.10) que

$$\text{(I.11)} \quad \int_B \bar\partial u(\zeta) \wedge C_k(\zeta,z) = u(z) - c_{n,k} \int_B u(\zeta) \frac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar\zeta z)^{n+k}} \bigwedge_{i=1}^n d\bar\zeta_i \bigwedge_{i=1}^n d\zeta_i .$$

Ceci montre la première partie du théorème 1 pour $\operatorname{Re} k > 0$ ainsi que la deuxième partie en tenant compte de la formule (cf. [6]).

$$P_{k-1}(u)(z) = \frac{1}{nB(n,k)} \int_B u(\zeta) \frac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar\zeta z)^{n+k}} d\lambda(\zeta).$$

Remarque. — Cette dernière formule est d'ailleurs une conséquence immédiate de la formule (I.11). En effet, si $h(\zeta)$ est une fonction holomorphe de classe C^1 dans $\bar B$, d'après (I.11) on a

$$\frac{1}{nB(n,k)} \int_B h(\zeta) \frac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar\zeta z)^{n+k}} d\lambda(\zeta) = h(z).$$

Par suite

$$\begin{aligned} &\frac{1}{nB(n,k)} \int_{B\times B} u(\zeta) \frac{(1-|\zeta|^2)^{k-1}}{(1-\bar\zeta z)^{n+k}} \overline{h(z)}\, d\lambda(\zeta)\, d\sigma_{k-1}(z) \\ &\quad = \int_B u(\zeta) \overline{\left\{ \frac{1}{nB(n,k)} \int_B \frac{(1-|z|^2)^{k-1}}{(1-\zeta\bar z)^{n+k}} h(z)\, d\lambda(z) \right\}} d\sigma_{k-1}(\zeta) \\ &\quad = \int_B u(\zeta)\overline{h(\zeta)}\, d\sigma_{k-1}(\zeta), \end{aligned}$$

et la conclusion en découle aussitôt.

Il nous reste maintenant à démontrer la première partie du théorème I.1 lorsque $\operatorname{Re} k = 0$. Posons $k = i\beta$ et soit $\alpha > 0$. La première partie de la démonstration montre que $u_{\alpha+i\beta}$ est une solution de $\bar{\partial} u = f$. Pour voir que $u_{i\beta}$ est aussi une solution de $\bar{\partial} u = f$ il suffit de voir que, lorsque α tend vers zéro, la fonction $u_{\alpha+i\beta}$ converge vers $u_{i\beta}$ uniformément par rapport à $z \in \mathrm{B}_r = \{|z|<r\}$, $r < 1$. Or si on remarque que pour tous $\zeta, z \in \mathrm{B}$, tout $\alpha > 0$ et tout $p \geqslant 0$,

$$\left|\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{\alpha+p+i\beta}\right| \leqslant \mathrm{C},$$

C étant une constante absolue, et que, pour tout $r_0 < 1$, la fonction $\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{\alpha}$ converge vers 1 lorsque α tend vers zéro, uniformément par rapport à ζ et z dans B_{r_0}, en écrivant

$$u_{i\beta}(z) - u_{\alpha+i\beta}(z) = \int_{\mathrm{B}_{r_0}} u(\zeta)[\mathrm{C}_{i\beta}(\zeta,z)-\mathrm{C}_{\alpha+i\beta}(\zeta,z)] \\ + \int_{\mathrm{B}\setminus\mathrm{B}_{r_0}} u(\zeta)[\mathrm{C}_{i\beta}(\zeta, z)-\mathrm{C}_{\alpha+i\beta}(\zeta,z)],$$

à l'aide de majorations évidentes des noyaux [résultant de (I.1)], on conclut immédiatement à la convergence uniforme de $u_{\alpha+i\beta}$ vers $u_{i\beta}$, ce qui achève de démontrer le théorème I.2.

Dans le paragraphe suivant nous donnerons, outre des estimations des noyaux $\mathrm{C}_k(\zeta,z)$, des estimations des valeurs au bord des solutions u_k du théorème I.2.

Rappelons tout d'abord la terminologie utilisée par H. Skoda dans [10] : étant donné une (0,1)-forme f, $\bar{\partial}$-fermée, dont les coefficients sont des mesures bornées dans B, nous dirons qu'une fonction $u \in \mathrm{L}^1(\partial \mathrm{B})$ est une solution de l'équation $\bar{\partial}_b u = f$, si pour toute forme φ de degré $(n,n-1)$, de classe C^1 dans $\bar{\mathrm{B}}$, $\bar{\partial}$-fermée on a

$$\int_{\partial \mathrm{B}} u(\zeta)\varphi(\zeta) = \int_{\mathrm{B}} f(\zeta) \wedge \varphi(\zeta).$$

Des estimations faciles des noyaux $\mathrm{C}_k(\zeta,z)$ (voir § suivant) montrent que si $f \in \mathscr{D}_{(0,1)}(\bar{\mathrm{B}})$ alors la fonction $u_k(z)$ du théorème I.2 est définie pour tout $z \in \bar{\mathrm{B}}$, et de plus u_k est continue dans $\bar{\mathrm{B}}$. Il en résulte alors aussitôt que, si on note $bu_k(z)$ la restriction de $u_k(z)$ *à* $z \in \partial B$, $\bar{\partial}_b bu_k = f$ au sens défini ci-dessus.

Dans le paragraphe 3, nous noterons $bC_k(\zeta,z)$ la restriction de $C_k(\zeta,z)$ à $(\zeta,z) \in B \times \partial B$, de sorte que

$$bu_k(z) = \int_B f(\zeta) \wedge bC_k(\zeta,z),$$

et nous donnerons des estimations des noyaux bC_k.

3. Estimations des solutions minimales.

Commençons tout d'abord par les noyaux $bC_k(\zeta,z)$.

De la formule du 3 de la proposition I.1, et des formules (I.3), (I.6) et (I.7), on déduit que les noyaux $bC_k(\zeta,z)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} bC_k(\zeta,z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)\,!}{(2i\pi)^n} \frac{1}{kB(n,k)} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^k & \\ \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}\bar{z}_i(1-|\zeta|^2)}{(1-\bar{\zeta}z)^n(1-\zeta\bar{z})} \bigwedge_{j\neq i} d\bar{\zeta}_j \right. & \\ \left. - \sum_{i<j} \frac{(-1)^{i+j}(\zeta_j\bar{z}_i-\zeta_i\bar{z}_j)}{(1-\bar{\zeta}z)^n(1-\zeta\bar{z})} \bar{\partial}|\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar{\zeta}_\ell \right\} \bigwedge_{i=1}^n d\zeta_i & \\ - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)\,!}{(2i\pi)^n} \frac{1}{kB(nk)} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{l-1}\bar{\zeta}_i(1-|\zeta|^2)^k}{(1-\bar{\zeta}z)^{n+k}} \bigwedge_{j\neq i} d\bar{\zeta}_j \bigwedge_{i=1}^n d\zeta_i & \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)\,!}{(2i\pi)^n} \frac{1}{kB(n,k)} \left[\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^k H(\zeta,z) \right. & \\ \left. - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}\bar{\zeta}_i(1-|\zeta|^2)^k}{(1-\bar{\zeta}z)^{n+k}} \bigwedge_{j\neq i} d\bar{\zeta}_j \bigwedge_{i=1}^n d\zeta_i \right]. & \qquad \text{(I.12)} \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, le noyau $H(\zeta,z)$ est exactement celui construit par H. Skoda.

Des calculs aisés montrent qu'il existe une constante C ne dépendant pas de $\zeta \in B$ telle que

$$\int_{\partial B} \frac{d\lambda(z)}{|1-\bar{\zeta}z|^{n+1}} \leqslant \frac{C}{1-|\zeta|^2} \qquad \text{et} \qquad \int_{\partial B} \frac{|\zeta-z|}{|1-\zeta z|^{n+1}}\, d\lambda(z) \leqslant \frac{C}{(1-|\zeta|^2)^{1/2}},$$

$d\lambda(z)$ désignant la mesure de Lebesgue sur ∂B.

De plus, pour $\operatorname{Re} k > 0$ il existe une constante C'_k ne dépendant que de k telle que

$$\left|\frac{(1-|\zeta|^2)^k}{(1-\bar{\zeta}z)^{n+k}}\right| \leqslant C'_k \frac{(1-|\zeta|^2)^{\operatorname{Re} k}}{|1-\bar{\zeta}z|^{n+\operatorname{Re} k}}, \tag{I.13}$$

et par suite il existe une constante C_k ne dépendant pas de $\zeta \in B$ telle que

$$\int_{\partial B}\left|\frac{(1-|\zeta|^2)^k}{(1-\bar{\zeta}z)^{n+k}}\right| d\lambda(z) \leqslant C_k.$$

On en conclut l'existence d'une autre constante C_k ne dépendant pas de $f \in \mathscr{D}_{(0,1)}(\bar{B})$ telle que (avec les notations de la fin du paragraphe précédent)

$$\|bu_k(z)\|_{L^1(\partial B)} \leqslant C_k\left\{\|f\|_{L^1(B)} + \left\|\frac{f(\zeta) \wedge \bar{\partial}|\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}\right\|_{L^1(B)}\right\},$$

où $\|f\|_{L^1(B)}\left(\text{resp. } \left\|\frac{f(\zeta) \wedge \bar{\partial}|\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}\right\|_{L^1(B)}\right)$ est le maximum des normes dans $L^1(B)$ des coefficients de $f\left(\text{resp. de } \frac{f(\zeta) \wedge \bar{\partial}|\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}\right)$.

Par un procédé de régularisation (cf. [10]) on en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME I.3. — *Soit f une $(0,1)$-forme $\bar{\partial}$-fermée dont les coefficients ainsi que ceux de la forme* $\frac{f(\zeta) \wedge \bar{\partial}|\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}$ *sont des mesures bornées dans* B. *Alors pour tout nombre complexe* k, $\operatorname{Re} k > 0$, *la fonction* $bu_k(z)$ *définie pour presque tout* $z \in \partial B$ *par*

$$bu_k(z) = \int_B f(\zeta) bC_k(\zeta,z), \tag{I.14}$$

est une solution de l'équation $\bar{\partial}_b u = f$ *qui est dans* $L^1(\partial B)$.

Remarques. — 1. En lisant le travail de E. Amar et A. Bonami [1], on s'aperçoit aisément que les estimations en norme $L^p(\partial B)$, et Lipschitz que ces auteurs obtiennent pour la solution de l'équation $\bar\partial_b u = f$ donnée par le noyau construit par H. Skoda, sont valables pour les solutions bu_k, $\operatorname{Re} k > 0$:

a) Pour $p \in]1, +\infty[$, soit $W^p(B)$ l'espace des mesures bornées μ sur B qui s'écrivent $\mu = h\nu$, où ν est une mesure de Carleson dans B (cf. [1]) et $h \in L^p(\nu)$. Alors si les coefficients de f et de $\dfrac{f(\zeta) \wedge \bar\partial|\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}$ sont dans $W^p(B)$, il en résulte que la solution bu_k de l'équation $\bar\partial u = f$ donnée par (I.14) est dans $L^p(\partial B)$.

b) L'estimation obtenue par N. Varopoulos dans [11] est aussi vraie pour les bu_k : si les coefficients de $f(\zeta)$ et de $\dfrac{f(\zeta) \wedge \bar\partial|\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}$ sont des mesures de Carleson alors $bu_k \in \mathrm{BMO}$.

c) Si les coefficients de f et de $\dfrac{f(\zeta) \wedge \bar\partial|\zeta|^2}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}$ sont des mesures de Carleson d'ordre $\alpha > 1$, alors la fonction bu_k est dans l'espace de Lipschitz $\Gamma^\beta(\partial B)$ avec $\beta = 2n(\alpha-1)$ (voir [1] pour les notations et la terminologie).

2. La formule (I.12) pour $k = 0$ donne

$$bC_0 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} H(\zeta,z) - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \frac{1}{(1-\bar\zeta z)^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \bar\zeta_i \bigwedge_{j\neq i} d\bar\zeta_j \bigwedge_{i=1}^n d\zeta_i .$$

Comme $\dfrac{1}{(1-\bar\zeta z)^n}$ est le noyau de Szegö de la boule, il en résulte que le noyau bC_0 vérifie lui aussi les estimations *a*), *b*) et *c*) de ci-dessus (voir [1].

Nous allons maintenant donner des estimations des noyaux $C_k(\zeta,z)$, $k \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} k > 0$.

En utilisant la formule du 3. de la proposition I.1 ainsi que les formules (I.3), (I.5) et (I.7), on peut écrire explicitement les noyaux $C_k(\zeta,z)$ sous la forme suivante :

$$C_k(\zeta,z) = C_k^1(\zeta,z) + C_k^2(\zeta,z), \tag{I.14}$$

où les noyaux C_k^1 et C_k^2 sont donnés par les formules suivantes :

$$\text{(I.15)}\quad C_k^1 = c_n \psi_k(\zeta,z) \frac{(1-\zeta\bar{z})^{n-1}}{D^n(\zeta,z)} \left[\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (\bar{\zeta}_i(1-\zeta\bar{z}) - \bar{z}_i(1-|\zeta|^2)) \bigwedge_{j\neq i} d\bar{\zeta}_j \right] \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i ,$$

$$C_k^2 = c_n \psi_k(\zeta,z) \frac{(1-\zeta\bar{z})^{n-1}}{D^n(\zeta,z)} \left[\sum_{i<j} (-1)^{i+j} (\bar{\zeta}_j \bar{z} - \bar{\zeta}_i \bar{z}_j) \bar{\partial} |\zeta|^2 \bigwedge_{\ell\neq i,j} d\bar{\zeta}_\ell \right] \bigwedge_{i=1}^{n} d\zeta_i ,$$

où $c_n = -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \dfrac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}$ et $\psi_k(\zeta,z)$ est donnée par (I.6).

Lemme I.1. — 1. *Pour tout* $1 \leqslant i \leqslant n$, *tous* $1 \leqslant i < j \leqslant n$, *et tout réel* α, $0 < \alpha < \operatorname{Re} k$, *il existe une constante* $C > 0$ *qui ne dépend que de* n, α *et* k *telle que :*

$$\int_B |\psi_k(\zeta,z)| \left| \frac{|1-\bar{\zeta}z|^{n-1}}{D^n(\zeta,z)} \right| \left| \bar{\zeta}_i(1-\zeta\bar{z}) - \bar{z}_i(1-|\zeta|^2) \right| (1-|z|^2)^{\alpha-1}\, d\lambda(z) \leqslant C(1-|\zeta|^2)^{\alpha},$$

et,

$$\int_B |\psi_k(\zeta,z)| \left| \frac{|1-\bar{\zeta}z|^{n-1}}{D^n(\zeta,z)} \right| \left| \zeta_j z_i - \zeta_i z_j \right| (1-|z|^2)^{\alpha-1}\, d\lambda(z) \leqslant C(1-|\zeta|^2)^{\alpha-1/2},$$

où $d\lambda$ *désigne la mesure de Lebesgue dans* B.

2. *Il existe une constante* $C > 0$ *ne dépendant que de* n *telle que, si* $L(\zeta,z)$ *est un coefficient quelconque du noyau de Cauchy* $C_0(\zeta,z)$, *alors,*

$$\int_B |L(\zeta,z)|\, d\lambda(\zeta) \leqslant C, \qquad \textit{pour tout} \qquad z \in B,$$

et

$$\int_B |L(\zeta,z)|\, d\lambda(z) \leqslant C, \qquad \textit{pour tout} \qquad \zeta \in B.$$

Pour simplifier l'écriture, nous ne faisons les calculs que dans $\mathbf{C}^2$.

Démontrons tout d'abord le 1). Dans tout ce qui suit, C désignera toujours une constante qui ne dépend que de n, α et k. Puisque la fonction

$$(\zeta,z) \to \frac{(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{\zeta}z|^2}$$

est bornée dans $B \times B$, de la formule explicite (I.6) donnant ψ_k, on déduit (comme pour (I.13)),

$$|\psi_k(\zeta,z)| \leqslant C\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}z|}\right)^{\operatorname{Re} k}. \tag{I.16}$$

On est donc ramené à montrer les deux majorations suivantes :

$$\int_B \frac{(1-|\zeta|^2)^{\operatorname{Re} k}(1-|z|^2)^{\alpha-1}\,|\zeta_1(1-\zeta\bar{z})-\bar{z}_1(1-|\zeta|^2)|}{|1-\bar{\zeta}z|^{\operatorname{Re} k-1}[|1-\bar{\zeta}z|^2-(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)]^2}\,d\lambda(z) \leqslant C(1-|\zeta|^2)^\alpha,$$

$$\int_B \frac{(1-|\zeta|^2)^{\operatorname{Re} k}(1-|z|^2)^{\alpha-1}\,|\zeta_1 z_2-\zeta_2 z_1|}{|1-\bar{\zeta}z|^{\operatorname{Re} k-1}[|1-\bar{\zeta}z|^2-(1-|z|^2)(1-|z|^2)]^2}\,d\lambda(z) \leqslant C(1-|\zeta|^2)^{\alpha-1/2}.$$

En effectuant le changement de variables

$$z_1' = \frac{\bar{\zeta}_1 z_1 + \bar{\zeta}_2 z_2}{|\zeta|}$$

$$z_2' = \frac{\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1}{|\zeta|}$$

on se ramène aussitôt aux deux intégrales suivantes :

$$\int_B \frac{(1-|\zeta|^2)^{\operatorname{Re} k}(1-|z|^2)^{\alpha-1}\,[||\zeta|-z_1|+(1-|\zeta|^2)|z_2|]}{|1-|\zeta|z_1|^{\operatorname{Re} k-1}[||\zeta|-z_1|^2+|z_2|^2(1-|\zeta|^2)]^2}\,d\lambda(z) \leqslant C(1-|\zeta|^2)^\alpha,$$

$$\int_B \frac{(1-|\zeta|^2)^{\operatorname{Re} k}(1-|z|^2)^{\alpha-1}|z_2|}{|1-|\zeta|z_1|^{\operatorname{Re} k-1}[||\zeta|-z_1|^2+|z_2|^2(1-|\zeta|^2)]^2}\,d\lambda(z) \leqslant C(1-|\zeta|^2)^{\alpha-1/2}.$$

Il faut donc établir la majoration suivante :

$$\int_B \frac{(1-|\zeta|^2)^{\operatorname{Re} k-\alpha}(1-|z|^2)^{\alpha-1}}{|1-|\zeta|z_1|^{\operatorname{Re} k-1}[||\zeta|-z_1|^2+|z_2|^2(1-|\zeta|^2)]^{3/2}}\,d\lambda(z) \leqslant C.$$

En intégrant tout d'abord par rapport à z_2 on se ramène aux deux majorations suivantes :

$$\int_B \frac{(1-|\zeta|^2)^{\operatorname{Re} k-\alpha}(1-|z_1|^2)^\alpha}{|1-|\zeta|z_1|^{\operatorname{Re} k-1}}\left[\int_0^{1/2}\frac{(1-\rho^2)^{\alpha-1}\,\rho\,d\rho}{[||\zeta|-z_1|^2+\rho^2(1-|z_1|^2)(1-|\zeta|^2)]^{3/2}}\right]d\lambda(z_1)\leqslant C,$$

$$\int_B \frac{(1-|\zeta|^2)^{\operatorname{Re} k-\alpha}(1-|z_1|^2)^\alpha}{|1-|\zeta|z_1|^{\operatorname{Re} k-1}[||\zeta||-z_1|^2+(1-|z_1|^2)(1-|\zeta|^2)|^{3/2}}\,d\lambda(z_1) \leqslant C. \tag{I.17}$$

En intégrant par rapport à ρ, la première majoration de (I.17) se ramène à la suivante :

(I.18)
$$\int_B \frac{(1-|\zeta|^2)^{\mathrm{Re}\,k-\alpha}(1-|z_1|^2)^\alpha}{|1-|\zeta|z_1|^{\mathrm{Re}\,k-1}||\zeta|-z_1|[||\zeta|-z_1|^2+(1-|z_1|^2)(1-|\zeta|^2)]}\,d\lambda(z_1) \leqslant \mathrm{C}.$$

Comme de plus cette dernière majoration entraîne la seconde inégalité de (I.17) on est ramené à montrer simplement (I.18).

Pour cela posons $v = 1 - |\zeta|^2$. En intégrant en polaires, (I.18) devient :

$$\int_{\substack{u\in[0,1]\\ v\in[0,1]}} \frac{v^{\mathrm{Re}\,k-\alpha}u^\alpha}{(u+v+\theta)^{\mathrm{Re}\,k-1}(|u-v|+\theta)[(|u-v|+\theta)^2+uv]}\,du\,d\theta \leqslant \mathrm{C}.$$

En posant $u = vx$ et $\theta = vy$, on obtient :

$$\int_{[0,+\infty]^2} \frac{x^\alpha}{(x+1+y)^{\mathrm{Re}\,k-1}(|x-1|+y)[(|x-1|+y)^2+x]}\,dx\,dy \leqslant \mathrm{C}.$$

La seule singularité apparaissant dans cette intégrale est au point $x = 1$, $y = 0$. Comme la fonction à intégrer est, au voisinage de ce point, majorée par $\dfrac{\mathrm{C}}{|x-1|+y}$, il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale lorsque l'on restreint le domaine d'intégration à l'ensemble $\mathrm{Max}(x,y) \geqslant \mathrm{A}$, où A est un réel fixé assez grand. Or sur ce domaine, la fonction à intégrer est majorée par $\mathrm{C}\dfrac{x^\alpha}{(x+y)^{\mathrm{Re}\,k+2}}$, par conséquent la convergence de l'intégrale résulte du fait que $\alpha < \mathrm{Re}\,k$.

Montrons maintenant la deuxième partie du Lemme I.1 : puisque les coefficients de $\mathrm{C}_0(\zeta,z)$ sont, en module, symétriques en ζ et z, il suffit de voir que

$$\text{(I.19)} \qquad \int_B \frac{|1-\bar\zeta z||\zeta_1-z_1|}{[|1-\bar\zeta z|^2-(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)]^2}\,d\lambda(z) \leqslant \mathrm{C}^2.$$

On fait alors le même changement de variables que précédemment, et on est ramené à montrer la finitude des deux intégrales suivantes :

$$\int_B \frac{|1-|\zeta|z_1||\,||\zeta|-z_1|}{[||\zeta|-z_1|^2+(1-|\zeta|^2)|z_2|^2]^2}\,d\lambda(z) \leqslant \mathrm{C},$$

et

$$\int_{B} \frac{|1-|\zeta|z_1|\,|z_2|}{[||\zeta|-z_1|^2+(1-|\zeta|^2)|z_2|^2]^2}\,d\lambda(z) \leqslant C.$$

Comme dans le calcul précédent, on intègre tout d'abord par rapport à la variable z_2, puis on intègre en polaires dans la variable z_1. Une fois le deuxième changement de variables effectué, on se ramène à voir que :

$$\text{(I.20)} \qquad v\int_{[0,1/v]^2} \frac{(x+1+y)x}{(|x-1|+y)[(|x-1|+y)^2+x]}\,dx\,dy \leqslant C,$$

et

$$\sqrt{v}\int_{[0,1/v]^2} (x+1+y)x^{3/2}\left\{\int_0^1 \frac{\rho^2\,d\rho}{[(|x-1|+y)^2+x\rho^2]^2}\right\}dx\,dy \leqslant C,$$

où $v = 1 - |\zeta|^2 \in]0,1]$.

Considérons tout d'abord la première intégrale de (I.20) : comme pour les intégrales de (I.17) la singularité $x = 1$, $y = 0$ est intégrable, et il suffit de considérer le domaine d'intégration $(x,y) \in \left\{A \leqslant \operatorname{Max}(x,y) \leqslant \frac{1}{v}\right\}$. Sur ce domaine, la fonction à intégrer est majorée par

$$C\frac{x}{(x+y)^2},$$

et on est ainsi ramené à voir que

$$v\int_{\left\{A \leqslant \operatorname{Max}(x,y) \leqslant \frac{1}{v}\right\}} \frac{x\,dx\,dy}{(x+y)^2} \leqslant C,$$

ce qui est un calcul immédiat.

Pour la seconde intégrale de (1.20) on remarque tout d'abord que

$$\int_0^1 \frac{\rho^2\,d\rho}{[(|x-1|+y)^2+x\rho^2]^2} \leqslant \frac{C}{(|x-1|+y)[(|x-1|+y)^2+x]^{3/2}},$$

et pour les mêmes raisons que précédemment, on se ramène à voir que

$$\sqrt{v}\int_{\left\{A \leqslant \operatorname{Max}(x,y) \leqslant \frac{1}{v}\right\}} \frac{x^{3/2}\,dx\,dy}{(x+y)^3} \leqslant C,$$

ce qui est aussi immédiat.

De ce lemme on déduit aisément des estimations en norme L^1 pour les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u = f$: soit $\alpha > 0$, et soit f une (0,1)-forme $\bar{\partial}$-fermée telle que les coefficients des formes

$$(1-|\zeta|^2)^{\alpha} f(\zeta) \qquad \text{et} \qquad (1-|\zeta|^2)^{\alpha-1/2}(f(\zeta) \wedge \bar{\partial}|\zeta|^2)$$

soient des mesures bornées dans B. Il résulte alors du lemme I.1 et des formules (I.14) et (I.15) que, si $\operatorname{Re} k > \alpha$, la fonction

$$u_k(z) = \int_B f(\zeta) \wedge C_k(\zeta,z),$$

est telle que $(1-|z|^2)^{\alpha-1} u_k(z) \in L^1(B)$, et, par un procédé de régularisation, on déduit aisément du Théorème I.2 que $\bar{\partial}u_k = f$.

De plus, se rappelant que $d\sigma_r(\xi)$ est la mesure sur B, $(1-|\xi|^2)^r\, d\lambda(\xi)$, $r > -1$, $d\lambda(\xi)$ la mesure de Lebesgue, il résulte aussitôt du lemme I.1 et de l'inégalité de Hölder que si les coefficients de $f(\zeta)$ sont dans $L^p(d\sigma_\alpha(\zeta))$ et ceux de $f(\zeta) \wedge \bar{\partial}|\zeta|^2$ dans $L^p(d\sigma_{\alpha-1/2}(\zeta))$, alors $u_k(z) \in L^p(d\sigma_{\alpha-1}(z))$ pour $\operatorname{Re} k > \alpha$, et $1 < p < \infty$.

THÉORÈME I.4. — *Soit* $k \in \mathbf{C}$ *tel que* $\operatorname{Re} k > 0$, *et soit* α *un réel tel que* $0 < \alpha < \operatorname{Re} k$, *et soit* f *une* (0,1)*-forme* $\bar{\partial}$*-fermée définie dans* B.

1. *Si les coefficients des formes*

$$(1-|\zeta|^2)^{\alpha} f(\zeta) \qquad \textit{et} \qquad (1-|\zeta|^2)^{\alpha-1/2}(f(\zeta) \wedge \bar{\partial}|\zeta|^2)$$

sont des mesures bornées dans B, *alors la fonction* u_k *définie pour presque tout* $z \in B$ *par*

$$u_k(z) = \int_B f(\zeta) \wedge C_k(\zeta,z),$$

est une solution de l'équation $\bar{\partial}u = f$ *qui est dans* $L^1(d\sigma_{\alpha-1}(z))$.

2. *De plus, si les coefficients de* f *sont des fonctions mesurables, pour* $1 \leqslant p < \infty$, *on a*

$$\|u_k\|_{L^p(d\sigma_{\alpha-1})} \leqslant C(\|f\|_{L^p(d\sigma_\alpha)} + \|f(\zeta) \wedge \bar{\partial}|\zeta|^2\|_{L^p(d\sigma_{\alpha-1/2}(\zeta))}),$$

où C *est une constante qui ne dépend que de* k, α *et* n.

Remarques. — 1. Les estimations du théorème I.4 ne sont pas nouvelles : dans [3], S. V. Dautov et G. M. Henkin ont obtenu une solution de $\bar{\partial} u = f$ dans les domaines strictement pseudo-convexes qui vérifie la même estimation. On en déduit aisément que les solutions minimales dans la boule vérifient les estimations du théorème I.4 car le projecteur P_{k-1} envoie $L^p(d\sigma_{\alpha-1})$ pour $1 \leqslant p < \infty$ et $0 < \alpha < k$ sur lui-même.

Il est d'ailleurs aisé d'obtenir les estimations du théorème I.4 pour les solutions de $\bar{\partial} u = f$ dans les domaines strictement pseudo-convexes en utilisant simplement la résolution de l'équation $\bar{\partial}_b u = f$ donnée par H. Skoda [10]; on procède de la manière suivante : soit $\mathscr{D} = \{z \in \mathbf{C}^n / \rho(z) < 0\}$ un domaine strictement pseudo-convexe borné, ρ étant strictement plurisousharmonique de classe C^2; pour tout entier $k \geqslant 1$, on considère dans $\mathbf{C}^{n+k}$ le domaine strictement pseudoconvexe borné

$$\mathscr{D}_k = \left\{(\zeta,\xi) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k ;\ \rho(\zeta) + \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2 < 0\right\}.$$

Soit f une *(p,q)-forme* $\bar{\partial}$-fermée de classe C^1 dans $\mathscr{D}$, et soit $H(\zeta,\xi,z,w)$ le noyau de Skoda pour le domaine $\mathscr{D}_k$. Si on considère $f(\zeta)$ comme une forme de classe C^1 dans $\bar{\mathscr{D}}_k$ qui ne dépend pas de $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_k)$, alors pour tout $(z,w) \in \partial \mathscr{D}_k$, la fonction

$$\tilde{v}_k(z,w) = \int_{\mathscr{D}_k} f(\zeta) \wedge H(\zeta,\xi,z,w)$$

est une solution de $\bar{\partial}_b u = f$. Or, on sait (cf. [10]) que cette fonction se prolonge dans $\mathscr{D}_k$ en une solution de $\bar{\partial} u = f$. Par conséquent, $\tilde{v}_k(z,w)$ est holomorphe en w dans la boule $|w|^2 < -\rho(z)$, et, pour $z \in \mathscr{D}$, $\tilde{v}_k(z,0)$ est une solution de $\bar{\partial} u = f$. Ainsi, si on pose

$$H_k(\zeta,z) = C \int_{\{|\zeta|^2 < -\rho(\zeta)\}} d\lambda(\xi) \{-\rho(z)\}^{-k+1/2} \left\{ \int_{\{|w|^2 = -\rho(z)\}} H(\zeta,\xi,z,w)\, d\sigma(w) \right\},$$

où $d\sigma(w)$ est la mesure euclidienne sur la sphère $\{|w|^2 = -\rho(z)\}$ et $d\lambda(\xi)$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{C}^k$, alors la fonction

$$v_k(z) = \int_{\mathscr{D}_k} f(\zeta) \wedge H_k(\zeta,z), \qquad z \in \mathscr{D},$$

est une solution de $\bar{\partial} u = f$.

On peut alors montrer que $v_k(z)$ vérifie les estimations du théorème I.4 pour $\alpha < k + 1$. Plus précisément, pour $0 < \alpha < k + 1$, on a

$$\|(-\rho(z))^{\alpha-1} v_k(z)\|_{L^1(\mathscr{D})} \leqslant C\{\|(-\rho(\zeta)^{\alpha} f(\zeta)\|_{L^1(\mathscr{D})} + \|(-\rho(\zeta)^{\alpha-1/2}(f(\zeta) \wedge \bar{\partial}\rho(\zeta))\|_{L^1(\mathscr{D})}\}\cdot$$

Pour $\alpha = k$ cette inégalité n'est autre que celle de Skoda pour le noyau $H(\zeta,\xi,z,w)$.

2. En faisant intervenir des espaces de mesures bien adaptés, on peut, comme pour les noyaux bC_k, améliorer les estimations L^p du théorème I.4 et obtenir des conditions Lipschitz pour les u_k.

3. Les noyaux bC_k ont été considérés indépendamment par Bo Berndson dans [2].

II. SOLUTIONS MINIMALES DE L'ÉQUATION $\bar{\partial} u = f$ DANS LE POLYDISQUE

Pour simplifier l'écriture et les calculs, nous nous contentons de considérer le cas du bidisque de $\mathbf{C}^2$,

$$D^2 = \{(z_1,z_2) \in \mathbf{C}^2 ; |z_1| < 1 \text{ et } |z_2| < 1\}.$$

Pour tout $k = (k_1,k_2) \in \mathbf{R}^2$, k_1 et k_2 étant strictement positifs, nous notons $d\sigma_{k-1}$ la mesure sur D^2, $(1-|z_1|^2)^{k_1-1}(1-|z_2|^2)^{k_2-1}\, d\lambda(z_1,z_2)$, où $d\lambda(z_1,z_2)$ est la mesure de Lebesgue.

Soit P_{k-1} la projection orthogonale de $L^2(d\sigma_{k-1})$ sur $H(D^2) \cap L^2(d\sigma_{k-1})$, $H(D^2)$ étant l'espace des fonctions holomorphes dans D^2. Il est évident que le noyau de P_{k-1} est le produit des noyaux des projecteurs à une variable correspondant à $k_1 - 1$ et à $k_2 - 1$, c'est-à-dire :

$$k_1 k_2 \frac{(1-|\zeta_1|^1)^{k_1-1}(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2+1}}.$$

Pour toute (0,1)-forme $\bar{\partial}$-fermée f de classe C^1 dans $\overline{D^2}$, soit $T_{k-1}(f)$ la solution de l'équation $\bar{\partial} u = f$ dans D^2 qui est orthogonale, dans $L^2(d\sigma_{k-1})$, aux fonctions holomorphes. Autrement dit, si $u \in L^2(d\sigma_{k-1})$ est une solution de $\bar{\partial} u = f$, on pose

$$T_{k-1}(f) = u - P_{k-1}(u).$$

Comme dans le cas de la boule, nous allons donner une formule explicite pour les solutions $T_{k-1}(f)$:

THÉORÈME II.1. — *Soit* $f(\zeta) = f_1(\zeta)\,d\bar\zeta_1 + f_2(\zeta)\,d\bar\zeta_2$ *une* (0,1)*-forme de classe* C^∞ *dans* $\overline{D^2}$, $\bar\partial$*-fermée. Pour tout* $k = (k_1,k_2) \in \mathbf{C}^2$, k_1 *et* k_2 *étant de parties réelles strictement positives, considérons la fonction* $u_k(z_1,z_2)$ *définie dans* D^2 *par :*

$$u_k(z_1,z_2) = \frac{1}{2i\pi}\int_D f_1(\zeta_1,z_2)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\,d\bar\zeta_1 \wedge d\zeta_1$$

$$+\frac{1}{2i\pi}\int_D f_2(z_1,\zeta_1)\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\bar\zeta_2 \wedge d\zeta_2$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2} f(\zeta)\wedge\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right)^{k_2}\frac{(\bar\zeta_1-\bar z_1)\,d\bar\zeta_2-(\bar\zeta_2-\bar z_2)\,d\bar\zeta_1}{|\zeta-z|^4}$$

$$\wedge\, d\zeta_1\wedge d\zeta_2$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2} f(\zeta)\wedge\left\{k_2\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}}\frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_2\right.$$

$$\left.-\,k_1\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\frac{|\zeta_1-z_1|^2}{|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_1\right\}\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 .$$

Alors :

a) u_k *est une solution de* $\bar\partial u = f$ *dans* D^2 ;

b) De plus, si k_1 *et* k_2 *sont des réels strictement positifs, on a*

$$u_k = T_{k-1}(f).$$

La démonstration de ce théorème se fait naturellement par applications successives de la formule de Stokes. Soit $u(\zeta_1,\zeta_2)$ une fonction de classe C^2 dans $\overline{D^2}$, et considérons tout d'abord la forme différentielle

(II.1)
$$\frac{1}{k_2}u(\zeta_1,\zeta_2)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 .$$

Soit $U_\varepsilon(z_2) = D \times D_\varepsilon(z_2) = \{(\zeta_1,\zeta_2) \in D^2 ; |\zeta_1| < 1 \text{ et } |\zeta_2 - z_2| < \varepsilon\}$, et appliquons la formule de Stokes à la forme (II.1) sur le domaine $D^2 \backslash U_\varepsilon(z_2)$: puisque d'une part cette forme est nulle pour $|\zeta_2| = 1$ et, d'autre part, est de degré (1,1) en ζ_1, il vient :

(II.2)

$$-\int_{D \times \partial D_\varepsilon(z_2)} \frac{u(\zeta_1,\zeta_2)}{k_2} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)} d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$
$$= \int_{D^2 \backslash U_\varepsilon(z_2)} \frac{1}{k_2} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2) \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)} d\bar{\zeta}_2 \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$
$$+ \int_{D^2 \backslash U_\varepsilon(z_2)} u(\zeta_1,\zeta_2) \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2+1}} d\bar{\zeta}_2 \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 .$$

Comme $\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right)^{k_2}$ tend vers 1 uniformément par rapport à $\zeta_2 \in \partial D_\varepsilon(z)$ lorsque ε tend vers zéro, en passant à la limite pour $\varepsilon \to 0$ dans (II.2), il vient :

$$\text{(II.3)} \quad \frac{2i\pi}{k_2} \int_D u(\zeta_1,z_2) \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}} d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1$$
$$= \frac{1}{k_2} \int_{D^2} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2) \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)} d\bar{\zeta}_2 \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$
$$+ \int_{D^2} u(\zeta_1,\zeta_2) \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2+1}} d\bar{\zeta}_2 \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 .$$

Les formules donnant les solutions minimales dans le disque unité du plan complexe permettent de transformer le premier membre de (II.3) de la manière suivante.

$$\frac{2i\pi}{k_2} \int_D u(\zeta_1,z_2) \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}} d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 = \frac{(2i\pi)^2}{k_1 k_2} u(z_1,z_2)$$
$$- \frac{2i\pi}{k_1 k_2} \int_D \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_1}(\zeta_1,z_2) \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)} d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 .$$

Il vient donc :

$$u(z_1,z_2) - \frac{k_1k_2}{(2i\pi)^2}\int_{D^2} u(\zeta_1,\zeta_2)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\overline{\zeta}_1z_1)^{k_1+1}}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\overline{\zeta}_2z_2)^{k_2+1}}\,d\overline{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\overline{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2$$

$$\text{(II.4)}\qquad = \frac{1}{2i\pi}\int_D \frac{\partial u}{\partial\overline{\zeta}_1}(\zeta_1,z_2)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\overline{\zeta}_1z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\,d\overline{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1$$
$$+ \frac{k_1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\overline{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\overline{\zeta}_1z_1)^{k_1+1}}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\overline{\zeta}_2z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\overline{\zeta}_2 \wedge d\overline{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 .$$

Pour démontrer le théorème II.1, il suffit donc de voir que le second membre de (II.4) est égal à $u_k(z_1,z_2)$ $\left(\text{avec } f_1 = \frac{\partial u}{\partial\overline{\zeta}_1} \text{ et } f_2 = \frac{\partial u}{\partial\overline{\zeta}_2}\right)$.

Pour cela considérons la forme différentielle

$$\text{(II.5)}\quad \frac{\partial u}{\partial\overline{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\overline{\zeta}_1z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\overline{\zeta}_2z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\overline{\zeta}_2 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 .$$

Soit $U_\varepsilon(z_1) = D_\varepsilon(z_1) \times D = \{(\zeta_1,\zeta_2) \in D^2;\ |\zeta_1 - z_1| < \varepsilon \text{ et } |\zeta_2| < 1\}$, et appliquons la formule de Stokes à la forme (II.5) sur le domaine $D^2\backslash(U_\varepsilon(z_1) \cup U_\varepsilon(z_2))$: puisque cette forme est d'une part nulle lorsque $|\zeta_1| = 1$ ou $|\zeta_2| = 1$, et, d'autre part, de degré (1,1) en ζ_2, il vient :

$$\frac{k_1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2\backslash(U_\varepsilon(z_1)\cup U_\varepsilon(z_2))}\frac{\partial u}{\partial\overline{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\overline{\zeta}_1z_1)^{k_1+1}}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\overline{\zeta}_2z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\overline{\zeta}_2 \wedge d\overline{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\partial D_\varepsilon(z_1)\times(D\backslash D_\varepsilon(z_2))}\frac{\partial u}{\partial\overline{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2)\frac{(1-|\zeta_1|)^{2k_1}}{(1-\overline{\zeta}_1z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\frac{(1-|\zeta_2|^{2k_2}}{(1-\overline{\zeta}_2z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\overline{\zeta}_2 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$
$$+ \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2\backslash(U_\varepsilon(z_1)\cup U_\varepsilon(z_2))}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\zeta}_1\,\partial\overline{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\overline{\zeta}_1z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\overline{\zeta}_2z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\overline{\zeta}_1 \wedge d\overline{\zeta}_2 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 .$$

En faisant tendre ε vers zéro, on obtient donc :

$$(\text{II.6}) \quad \frac{k_1}{(2i\pi)^2} \int_{D^2} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2) \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{k_1+1}} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)} d\bar{\zeta}_2 \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{D} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_2}(z_1,\zeta_2) \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)} d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2$$

$$+ \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{D^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \bar{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2) \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right)^{k_2} \frac{d\bar{\zeta}_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2}{(z_1-\zeta_1)(z_2-\zeta_2)}.$$

Nous allons encore transformer la dernière intégrale de (II.6),

$$(\text{II.7}) \quad \mathrm{I} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{D^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \bar{\zeta}_2} \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right)^{k_2} \frac{d\bar{\zeta}_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2}{(z_1-\zeta_1)(z_2-\zeta_2)}.$$

En utilisant l'identité

$$\frac{1}{(z_1-\zeta_1)(z_2-\zeta_2)} = \frac{\bar{z}_1-\bar{\zeta}_1}{(z_2-\zeta_2)|\zeta-z|^2} + \frac{\bar{z}_2-\bar{\zeta}_2}{(z_1-\zeta_1)|\zeta-z|^2},$$

on peut écrire,

$\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$, avec,

$$(\text{II.8}) \quad \mathrm{I}_1 = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{D^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \bar{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2) \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right)^{k_2} \frac{\bar{z}_1-\bar{\zeta}_1}{(z_2-\zeta_2)|\zeta-z|^2} d\bar{\zeta}_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2,$$

$$\mathrm{I}_2 = \frac{-1}{(2i\pi)^2} \int_{D^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \bar{\zeta}_2}(\zeta_1,\zeta_2) \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1-|\zeta_2)^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right)^{k_2} \frac{\bar{z}_2-\bar{\zeta}_2}{(z_1-\zeta_1)|\zeta-z|^2} d\bar{\zeta}_2 \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2.$$

La formule de Stokes appliquée à la forme

$$\frac{\partial u}{\partial \bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right)^{k_2}\frac{\bar z_1-\bar\zeta_1}{(z_2-\zeta_2)|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2,$$

sur le domaine $D^2\backslash U_\varepsilon(z_2)$, donne, en faisant tendre ε vers zéro :

$$\mathrm{I}_1=\frac{-1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_1}\left[\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right)^{k_2}\frac{\bar z_1-\bar\zeta_1}{(z_2-\zeta_2)|\zeta-z|^2}\right]d\bar\zeta_1\wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2$$

$$(\mathrm{II}.9)\quad =\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\,d\bar\zeta_2\wedge\left\{k_1\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\frac{|\zeta_1-z_1|^2}{|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_1\right\}\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2$$

$$+\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\,d\bar\zeta_2\wedge\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right)^{k_2}\frac{\bar\zeta_2-\bar z_2}{|\zeta-z|^4}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2.$$

La même transformation pour I_2 donne :

$$\mathrm{I}_2=\frac{-1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2)\,d\bar\zeta_1\wedge\left\{k_2\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}}\frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_2\right\}\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2\quad(\mathrm{II}.10)$$

$$-\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2)\,d\bar\zeta_1\wedge\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta z_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta z_2}\right)^{k_2}\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^4}\,d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2.$$

Le fait que le second membre de (II.4) est égal à $u_k(z_1,z_2)$ s'obtient en regroupant (II.6), (II.7), (II.8), (II.9) et (II.10). Ceci achève de démontrer le théorème II.1.

Nous allons maintenant donner des estimations sur les solutions $u_k(z_1,z_2)$.

LEMME II.1.

(i) *Pour* $\operatorname{Re} k_1 \geqslant 0$ *et* $\operatorname{Re} k_2 > 0$ (*resp.* $\operatorname{Re} k_2 \geqslant 0$ *et* $\operatorname{Re} k_1 > 0$), *on a*

$$\int_{D^2} \left| \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)} \frac{(1-|\zeta_2|)^{k_2-1}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}} \frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2} \right| d\lambda(\zeta) \leqslant C$$

$$\left(resp. \int_{D^2} \left| \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}} \frac{|\zeta_1-z_1|^2}{|\zeta-z|^2} \right| d\lambda(\zeta) \leqslant C \right).$$

(ii) *Pour* $\operatorname{Re} k_1 \geqslant 0$ *et* $\operatorname{Re} k_2 \geqslant 1$ (*resp.* $\operatorname{Re} k_2 \geqslant 0$ *et* $\operatorname{Re} k_1 \geqslant 1$), *on a*

$$\int_{D^2} \left| \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}} \frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2} \right| d\lambda(z) \leqslant C$$

$$\left(resp. \int_{D^2} \left| \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}} \frac{|\zeta_1-z_1|^2}{|\zeta-z|^2} \right| d\lambda(z) \leqslant C \right).$$

(iii) *Pour* $\operatorname{Re} k_1 \geqslant 0$ *et* $0 < \operatorname{Re} k_2 < 1$ (*resp.* $\operatorname{Re} k_2 \geqslant 0$ *et* $0 < \operatorname{Re} k_1 < 1$) *on a*

$$\int_{D^2} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}} \frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2} \Bigg| d\lambda|z| \leqslant C(1-|\zeta_2|^2)^{\operatorname{Re} k_2-1}$$

$$\left(resp. \int_{D^2} \left| \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}} \frac{|\zeta_1-z_1|^2}{|\zeta-z|^2} \right| d\lambda(z) \leqslant C(1-|\zeta_1|^2)^{\operatorname{Re} k_1-1} \right).$$

Dans cet énoncé, C désigne toujours une constante qui ne dépend que de k_1 et k_2.

Notons tout d'abord que, puisque $\operatorname{Re} k_1 \geqslant 0$, on a

$$\left| \left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1} \right)^{k_1} \right| \leqslant C,$$

et par conséquent, l'intégrale du (i) du lemme est majorée par l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{C}\int_{\{|\zeta_2|<1\}} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{\mathrm{Re}\,k_2-1}|\zeta_2-z_2|^2}{|1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{\mathrm{Re}\,k_2+1}}\left[\int_{\{|\zeta_1|<1\}} \frac{d\lambda(\zeta_1)}{|z_1-\zeta_1||\zeta-z|^2}\right] d\lambda(\zeta_2).$$

Un calcul immédiat montre que l'intégrale entre crochets de I_1 est majorée par

$$\frac{\mathrm{C}}{|\zeta_2-z_2|},$$

et par suite pour voir le (i) on est amené à voir que :

$$\int_{\{|\zeta_2|<1\}} \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{\mathrm{Re}\,k_2-1}|\zeta_2-z_2|}{|1-\zeta_2 z_2|^{\mathrm{Re}\,k_2+1}}\, d\lambda(\zeta_2) \leqslant \mathrm{C}.$$

En posant $u_2 = 1 - |z_2|^2$ et $v_2 = 1 - |\zeta_2|^2$ et en intégrant en polaires, on ramène cette dernière intégrale à

$$\int_{[0,1]^2} \frac{v_2^{\mathrm{Re}\,k_2-1}(|v_2-u_2|+\theta_2)}{(v_2+u_2+\theta_2)^{\mathrm{Re}\,k_2+1}}\, dv_2\, d\theta_2 \leqslant \mathrm{C},$$

et en posant $v_2 = x_2 u_2$, $\theta_2 = y_2 u_2$, il vient :

$$u_2\int_{\left[0,\frac{1}{u_2}\right]^2} \frac{x_2^{\mathrm{Re}\,k_2-1}(|x_2-1|+y_2)}{(x_2+1+y_2)^{\mathrm{Re}\,k_2+1}} \leqslant \mathrm{C},$$

et, cette dernière majoration se voit aussitôt en intégrant en polaires.

Pour voir les majorations du (ii) et du (iii) du lemme, en intégrant tout d'abord par rapport à z_1, il suffit de voir que d'une part, lorsque $\mathrm{Re}\,k_2 \geqslant 1$, on a

$$\int_{\{|z_2|<1\}} \frac{|\zeta_2-z_2|}{|1-\bar{\zeta}_2 z_2|^2}\, d\lambda(z_2) \leqslant \mathrm{C},$$

et d'autre part que, lorsque $0 < \mathrm{Re}\,k_2 < 1$, on a

$$\int_{\{|z_2|<1\}} \frac{|\zeta_2-z_2|}{|1-\bar{\zeta}_2 z_2|^{\mathrm{Re}\,k_2+1}}\, d\lambda(z_2) \leqslant \mathrm{C}.$$

Ces deux dernières majorations étant évidentes, le lemme II.1 est démontré.

Les noyaux apparaissant dans les trois premières intégrales donnant u_k étant majorés respectivement par $\frac{1}{|z_1-\zeta_1|}$, $\frac{1}{|z_2-\zeta_2|}$ et $\frac{1}{|\zeta-z|^3}$, on déduit aussitôt du Lemme II.1 que, si $\operatorname{Re} k_1 \geqslant 1$ et $\operatorname{Re} k_2 \geqslant 1$, pour $p \in [1,+\infty]$, il existe une constante C qui ne dépend que de p, $\operatorname{Re} k_1$ et de $\operatorname{Re} k_2$ telle que

$$\|u_k\|_{L^p(D^2)} \leqslant C\{\|f_1\|_{L^p(D^2)} + |f_2\|_{L^p(D^2)}\}.$$

Par un procédé de régularisation, on déduit donc du théorème II.1 que si f_1 et f_2 sont dans $L^1(D^2)$ alors u_k est une solution de $\bar\partial u = f$ qui vérifie l'estimation de ci-dessus.

Dans le cas où $\operatorname{Re} k_1$ et $\operatorname{Re} k_2$ ne sont pas tous deux supérieurs à 1 on a une estimation plus faible en utilisant le (iii) du Lemme II.1 :

THÉORÈME II.2. – 1. *Supposons* $\operatorname{Min}(\operatorname{Re} k_1, \operatorname{Re} k_2) \geqslant 1$. *Soit* $f = f_1\, d\bar\zeta_1 + f_2\, d\bar\zeta_2$ *une* (0,1)*-forme* $\bar\partial$*-fermée dont les coefficients sont dans* $L^1(D^2)$. *Alors la fonction* $u_k(z_1,z_2)$ *du théorème* II.1 *est une solution de* $\bar\partial u = f$ *qui est dans* $L^1(D^2)$. *De plus, si* $p \in [1,+\infty]$, *il existe une constante* C *qui ne dépend que de* p, $\operatorname{Re} k_1$ *et* $\operatorname{Re} k_2$ *telle que*

$$\|u_k\|_{L^p(D^2)} \leqslant C\{\|f_1\|_{L^p(D^2)} + \|f_2\|_{L^p(D^2)}\}.$$

2. *Supposons* $\operatorname{Re} k_1 \geqslant 1$ *et* $0 < \operatorname{Re} k_2 < 1$ (resp. $0 < \operatorname{Re} k_1 < 1$ *et* $\operatorname{Re} k_2 \geqslant 1$). *Soit* $f = f_1\, d\bar\zeta_1 + f_2\, d\bar\zeta_2$ *une* (0,1)*-forme* $\bar\partial$*-fermée telle que* $(1-|\zeta_2|^2)^{\operatorname{Re} k_2 - 1} f_1(\zeta_1,\zeta_2)$ *et* $f_2(\zeta_1,\zeta_2)$ (resp. $f_1(\zeta_1,\zeta_2)$ *et* $(1-|\zeta_1|^2)^{\operatorname{Re} k_1 - 1} f_2(\zeta_1,\zeta_2)$) *soient dans* $L^1(D^2)$. *Alors la fonction* $u_k(z_1,z_2)$ *du théorème* II.1 *est une solution de* $\bar\partial u = f$ *qui est dans* $L^1(D^2)$. *De plus, si* $p \in [1,+\infty]$, *il existe une constante* C *qui ne dépend que de* p, $\operatorname{Re} k_1$ *et* $\operatorname{Re} k_2$ *telle que*

$$\|u_k\|_{L^p(D^2)} \leqslant C\{\|f_1\|_{L^p((1-|\zeta_2|^2)^{\operatorname{Re} k_2 - 1} d\lambda(\zeta))} + \|f_2\|_{L^p(D^2)}\}$$

(*resp.* $\|u_k\|_{L^p(D^2)} \leqslant C\{\|f_1\|_{L^p(D^2)} + \|f_2\|_{L^p((1-|\zeta_1|^2)^{\operatorname{Re} k_1 - 1} d\lambda(\zeta))}\}$).

3. *Supposons* $0 < \operatorname{Re} k_1 < 1$ *et* $0 < \operatorname{Re} k_2 < 1$. *Soit*

$$f = f_1\, d\bar\zeta_2 + f_2\, d\bar\zeta_2$$

une (0,1)*-forme* $\bar\partial$*-fermée telle que*

$$(1-|\zeta_2|^2)^{\operatorname{Re} k_2 - 1} f_1(\zeta_1,\zeta_2) \quad et \quad (1-|\zeta_1|^2)^{\operatorname{Re} k_2 - 1} f_2(\zeta_1,\zeta_2)$$

soient dans $L^1(D^2)$. *Alors la fonction* $u_k(z_1,z_2)$ du théorème II.1 *est une* *solution de* $\bar\partial u = f$ *qui est dans* $L^1(D^2)$. *De plus si* $p \in [1, +\infty]$, *il existe une constante* C *qui ne dépend que de* p, $\operatorname{Re} k_1$ *et* $\operatorname{Re} k_2$ *telle que*

$$\|u_k|_{L^p(D^2)} \leqslant C\{\|f_1\|_{L^p((1-|\zeta_2|^2)^{\operatorname{Re} k_2 - 1}\, d\lambda(\zeta))} + \|f_2\|_{L^p((1-|\zeta_1|^2)^{\mathrm{RE}\, k_1 - 1}\, d\lambda(\zeta))}\}.$$

Remarques. — 1. Dans [5] G. M. Henkin avait obtenu une estimation L^∞ pour une solution de $\bar\partial u = f$ dans le polydisque. En utilisant cette solution M. Landucci a montré dans [7] que la solution minimale (i.e. $k_1 = k_2 = 1$ avec nos notations) dans L^2 vérifie aussi l'estimation L^∞. En fait le théorème II.2 ci-dessus montre en particulier que cette solution minimale vérifie les estimations L^p pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Dans [8] le même auteur a donné une estimation sur les dérivées de la solution minimale dans $L^2(D^2)$.

2. Comme nous l'avons vu dans l'introduction et dans la première partie de ce travail, si l'on fait tendre k vers zéro dans la formule de représentation donnant la solution minimale dans $L^2(d\sigma_{k-1})$, on trouv.e la formule de Cauchy. Il est raisonnable de se demander ce qui se passe dans le cas du bidisque lorsque l'on fait tendre k_1 et k_2 vers zéro dans la formule (qui résulte de (II.4), (II.6), (II.7), (II.8), (II.9) et (II.10)) :

$$\begin{aligned}
u(z_1,z_2) = {} & \frac{k_1 k_2}{(2i\pi)^2}\int_{D^2} u(\zeta_1,\zeta_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2 \\
& + \frac{1}{2i\pi}\int_D \frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta_1,z_2)\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1 \\
& \qquad + \frac{1}{2i\pi}\int_D \frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(z_1,\zeta_2)\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2 \\
& + \frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2} \bar\partial u(\zeta_1,\zeta_2)\wedge\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar\zeta_1 z_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar\zeta_2 z_2}\right)^{k_2} \\
& \qquad \frac{(\bar\zeta_1-\bar z_1)\,d\bar\zeta_2 - (\bar\zeta_2-\bar z_2)\,d\bar\zeta_1}{|\zeta-z|^4} \\
& \qquad \wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 \\
& + \frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2)k_2\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1}(z_1-\zeta_1)}\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2-1}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2+1}}\,\frac{|\zeta_2-z_2|^2}{|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_1 \\
& \qquad \wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 \\
& - \frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)k_1\,\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{k_2}}{(1-\bar\zeta_2 z_2)^{k_2}(z_2-\zeta_2)}\,\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{k_1-1}}{(1-\bar\zeta_1 z_1)^{k_1+1}}\,\frac{|\zeta_1-z_1|^2}{|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_2 \\
& \qquad \wedge d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2 .
\end{aligned}$$

On se convainc aisément que, en faisant tendre k_1 et k_2 vers zéro, cette formule donne :

$$\begin{aligned} u(z_1,z_2) = {} & \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{T^2} u(\zeta_1,\zeta_2)\frac{d\zeta_1 \wedge d\zeta_2}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)} \\ & + \frac{1}{2i\pi}\int_D \frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta_1,z_2)\frac{d\bar\zeta_1 \wedge d\zeta_1}{z_1-\zeta_1} + \frac{1}{2i\pi}\int \frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(z_1,\zeta_2)\frac{d\bar\zeta_2 \wedge d\zeta_2}{z_2-\zeta_2} \\ & + \frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2} \bar\partial u(\zeta_1,\zeta_2) \wedge \frac{(\bar\zeta_1-\bar z_1)\,d\bar\zeta_2 - (\bar\zeta_2-\bar z_2)\,d\bar\zeta_1}{|\zeta-z|^4} \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \\ & - \frac{1}{4\pi^2}\int_{D\times T} \frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2)\frac{\bar\zeta_2-\bar z_2}{(z_1-\zeta_1)|\zeta-z|^2}\,d\bar\zeta_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \\ & - \frac{1}{4\pi^2}\int_{T\times D} \frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{(z_2-\zeta_2)|\zeta-z)^2}\,d\bar\zeta_2 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 . \end{aligned}$$

Il est raisonnable d'appeler formule de Cauchy du bidisque cette dernière formule puisque la seule intégrale où apparaît u est l'intégrale de Cauchy de $u(\zeta_1,\zeta_2)$. On notera d'ailleurs que c'est cette formule qu'avait utilisé Henkin pour obtenir une estimation L^∞ sur les solutions de $\bar\partial u = f$ dans D^2 [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Amar et A. Bonami, Mesures de Carleson d'ordre α et solutions au bord de l'équation $\bar\partial$, *Bull. Soc. Math. France*, 107 (1979), 23-48.

[2] Bo Berndtsson, Integral formulas and zeros of bounded holomorphic functions in the unit ball, Preprint.

[3] S. V. Dautov and G. M. Henkin, Zeros of holomorphic functions of finite order and weighted estimates for solutions of the $\bar\partial$-equation (en russe), *Mat. Sb.*, 107 ( ), 163-174.

[4] P. G. Greiner and E. M. Stein, Estimates for the $\bar\partial$-Neumann problem, *Math. Notes*, Princeton Univ. Press, (1977).

[5] G. M. Henkin, Boundary properties of holomorphic functions of several complex variables, *J. Soviet Math.*, 5 (1976), 612-687.

[6] C. J. Kolaski, A new look at a theorem of Forelli and Rudin, *Indiana Univ. Math. J.*, 28 (1979), 495-499.

[7] M. Landucci, On the projection of $L^2(D)$ into $H(D)$, *Duke Math. J.*, 42 (1975), 231-237.

[8] M. Landucci, Uniform bounds on derivatives for the $\bar\partial$-problem in the polydisk. *Proc. Symp. Pure Math.*, 30 (1977), 177-180.

[9] N. Ovrelid, Integral representation formulas and L^p-estimates for the δ-equation, *Math. Scand.*, 29 (1971), 137-160.

[10] H. Skoda, Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna, *Bull. Soc. Math. France*, 104 (1976), 225-299.

[11] N. Th. Varopoulos, BMO functions and the $\bar{\partial}$-equation, *Pacific J. Math.*, 71 (1977), 221-273.

Manuscrit reçu le 14 mars 1980.

Philippe Charpentier,

Université de Paris-Sud
Équipe de recherche associée au CNRS
(296)
Analyse harmonique
Mathématique (Bât. 425)
91405 Orsay Cedex.