ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DENIS FEYEL
ARNAUD DE LA PRADELLE

Principe du minimum et préfaisceaux maximaux

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 1 (1974), p. 1-121
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24,1 (1974), 1-121

PRINCIPE DU MINIMUM ET PRÉFAISCEAUX MAXIMAUX [1]

par D. FEYEL et A. de LA PRADELLE

Pages

(1) Cet article est le développement des deux notes aux C.R. [11] et [12] de décembre 70 et mars 72.

Index des notations et définitions

Introduction.

Le faisceau des fonctions hyperharmoniques dans $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ vérifie le principe du minimum usuel qui est le suivant :

Pour tout ouvert relativement compact ω et toute fonction v hyperharmonique au voisinage de $\bar{\omega}$, on a :

$$\{v \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega(^2) \Rightarrow v \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \bar{\omega}\}$$

On trouve dans Ahlfors [1] p. 237, la définition suivante des fonctions sousharmoniques(³).

"A continuous real-valued function $v(z)$, defined in a region Ω, is said to be subharmonic in Ω if for any harmonic function $u(z)$ in a region $\Omega' \subset \Omega$ the difference $v - u$ satisfies the maximum principle in Ω'."

Ahlfors obtient ainsi très simplement toutes les propriétés classiques des fonctions sousharmoniques, en particulier le fait qu'elles forment un faisceau de cônes convexes vérifiant le principe du maximum.

Cette définition signifie implicitement que ce faisceau est maximal parmi les faisceaux (et même les préfaisceaux, voir plus loin) de cônes convexes de fonctions continues vérifiant le principe du maximum ; elle signifie en outre que le faisceau des fonctions sousharmoniques est l'unique faisceau maximal de cônes convexes de fonctions continues vérifiant le principe du maximum et contenant le faisceau des fonctions harmoniques.

En réalité, Ahlfors utilise le principe du maximum spécial au cas classique, mais on pourrait voir facilement que l'on aboutirait aux mêmes conclusions avec le principe du maximum correspondant au principe du minimum cité au premier paragraphe.

(²) $\partial\omega$ désigne la frontière topologique de ω.

(³) Sousharmoniques et principe du maximum au lieu de surharmoniques et principe du minimum.

Nous étudierons ainsi des préfaisceaux([4]) de cônes convexes de fonctions s.c.i. $> -\infty$, maximaux parmi ceux qui vérifient le principe du minimum énoncé au premier paragraphe. Nous verrons que le critère d'appartenance à un préfaisceau maximal en ce sens est formellement identique au critère de surharmonicité de la définition d'Ahlfors.

Considérons maintenant le faisceau de la théorie axiomatique de Brelot des fonctions hyperharmoniques sur $\mathbf{R}$, associé à l'équation différentielle : $y'' + y = 0$. Ce faisceau vérifie le principe du minimum suivant :

Pour tout intervalle $]a, b[$ $(a < b)$ de longueur $b - a < \pi$, et toute fonction v hyperharmonique au voisinage de $[a, b]$, on a :

$$\{v \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \{a\} \cup \{b\} \Rightarrow v \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad [a, b]\}$$

Cette propriété est fausse si $b - a > \pi$.

On obtient ainsi un exemple simple de faisceau qui ne vérifie pas le principe du minimum sur tout ouvert relativement compact, mais seulement sur les ouverts d'une base.

On peut songer à généraliser la notion de principe du minimum dans une autre direction : en effet, sur l'espace $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ le faisceau des fonctions s.c.i. hyperharmoniques en chaque variable vérifie le principe du minimum suivant :

si $\omega = \alpha \times \beta$ est un polydisque, et si v est une fonction séparément hyperharmonique au voisinage de $\bar{\omega}$, on a :

$$\{v \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \partial\alpha \times \partial\beta \Rightarrow v \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \bar{\omega} = \bar{\alpha} \times \bar{\beta}\}$$

On est ainsi amené à étudier la donnée d'un faisceau vérifiant le principe du minimum relativement à une base $\mathcal{B}$ formée d'ouverts relativement compacts ω pour chacun desquels on s'est donné une partie fermée non vide ω^* de la frontière topologique de ω.

Par abus de notation, nous écrirons $\mathcal{B} = \{(\omega, \omega^*)\}$.

([4]) Sur un espace topologique Ω, un préfaisceau d'ensembles de fonctions numériques à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$ est la donnée, pour chaque ouvert U d'une partie $\mathcal{F}(\mathrm{U})$ de $\overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{U}}$, la condition de restriction suivante étant réalisée :

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{F}(\mathrm{U}) \\ \mathrm{V} \text{ ouvert} \subset \mathrm{U} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f_{|\mathrm{V}} \in \mathcal{F}(\mathrm{V})$$

Les trois faisceaux ci-dessus ont la propriété commune suivante : chacun d'entre eux est maximal dans l'ensemble des préfaisceaux (³) de cônes convexes de fonctions s.c.i. $> -\infty$, vérifiant le même principe du minimum relativement à la base donnée.

Dans toute cette étude, la notion de préfaisceau est beaucoup plus maniable que la notion de faisceau, c'est pourquoi nous l'utilisons ; cependant, nous verrons que des conditions simples très souvent réalisées entraînent que la plupart des préfaisceaux maximaux sont des faisceaux.

Nous avons vu que la notion de préfaisceau maximal se trouvait déjà implicitement dans Ahlfors. Par contre, l'idée de maximalité appliquée non pas aux préfaisceaux, mais aux cônes convexes de fonctions sur un même ouvert, a déjà été explicitée (Helms [14]) puis étudiée en détail (Mokobodzki-Sibony [20]) : à partir d'un cône convexe maximal S de fonctions s.c.i. bornées, sur un espace localement compact Ω, vérifiant le principe du minimum usuel (i.e. sur tous les ouverts relativement compacts avec leur frontière topologique), Mokobodzki et Sibony construisent un faisceau $\mathfrak{S}$ de cônes convexes de fonctions s.c.i. bornées, tel que $\mathfrak{S}(\Omega) = S$, et tel que chaque cône convexe $\mathfrak{S}(U)$ (U ouvert) soit un cône convexe maximal de fonctions s.c.i. bornées sur U, et vérifiant le principe du minimum usuel sur les ouverts relativement compacts de U.

Les préfaisceaux maximaux que nous étudions ici ne sont en général pas formés de cônes convexes maximaux. Nous donnons en effet l'exemple d'un préfaisceau maximal $\mathfrak{F}$ de cônes convexes de fonctions s.c.i. $> -\infty$ vérifiant le principe du minimum usuel, qui est tel que pour une infinité d'ouverts U, le cône convexe $\mathfrak{F}(U)$ ne soit pas maximal parmi les cônes convexes de fonctions s.c.i. $> -\infty$ sur U, vérifiant le principe du minimum sur U.

L'intérêt de l'étude présente vient tout d'abord de sa grande généralité, et aussi de sa simplicité. La facilité avec laquelle on reconnaît qu'une fonction appartient à un préfaisceau maximal, permet de donner des démonstrations très simplifiées des propriétés fondamentales de la théorie locale du potentiel.

Dans le chapitre I, nous énonçons d'abord les définitions et propriétés fondamentales d'un usage constant pour la suite, puis nous établissons une liste des applications qui nous paraissent les plus importantes (cas classique, théories axiomatiques locales, etc.).

Dans le chapitre II, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un préfaisceau maximal soit un faisceau ; l'une de ces conditions s'exprime à l'aide des compacts de Silov de certains cônes de fonctions. Ceci nous permet de faire une étude locale fine des frontières de Silov de ces cônes. On peut alors caractériser des préfaisceaux qui sont maximaux relativement à deux principes distincts, et on rend compte de la théorie locale de J. Köhn [16] en la généralisant.

Dans le chapitre III, nous nous posons la question de savoir si un préfaisceau maximal $\mathfrak{F}$ relativement à une base $\mathcal{B}^* = (\omega , \omega^*)$ munie de frontières distinguées $\omega^* \neq \partial\omega$ est ou non l'intersection des préfaisceaux maximaux relativement à la même base $\mathcal{B} = \{(\omega , \partial\omega)\}$ munie de ses frontières topologiques, et contenant $\mathfrak{F}$. Nous répondons à la question pour des préfaisceaux plus généraux qui sont appelés saturés par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Nous introduisons enfin une notion de réduite, et nous montrons qu'un certain nombre de conditions (entre autres l'additivité de la réduite) permet de caractériser les préfaisceaux qui sont maximaux relativement à une base $\mathcal{B} = \{(\omega , \partial\omega)\}$ (munie de ses frontières topologiques).

Il est alors clair que la résolution du problème de Dirichlet, même sous une forme affaiblie (i.e. avec une donnée sur une partie seulement de la frontière) ne constitue pas un préliminaire obligatoire en théorie locale du potentiel.

Dans le chapitre IV, nous résolvons un certain nombre de questions non classiques soulevées par les chapitres précédents.

Dans le cas où $\mathfrak{F}$ est un préfaisceau maximal relativement à $\mathcal{B} = \{(\omega , \partial\omega)\}$ nous montrons que l'existence d'une base d'ouverts relativement compacts du type $\omega = \{v > 0 \mid v \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})\}$, U ouvert contenant $\overline{\omega}$, qui est une hypothèse essentielle à notre étude, est équivalente à la donnée d'une base constituée d'ouverts relativement compacts, que nous appelons très réguliers, correspondant aux ouverts réguliers d'adhérence "stable"(5) au sens de la théorie classique.

(5) Un compact K contenu dans $\mathbf{R}^n$ est dit stable si $\complement$K n'est effilé en aucun point frontière de K.

Nous étudions l'additivité de la réduite dans un produit de préfaisceaux maximaux (notion introduite au chapitre I) : elle est additive quand elle est prise sur la frontière distinguée d'ouverts d'une certaine base.

Nous montrons également comment des fonctions du préfaisceau peuvent être prolongées à des ensembles petits qui sont les analogues des ensembles polaires de la théorie classique. (application aux fonctions séparément hyperharmoniques).

Enfin, en théorie axiomatique de Brelot, on caractérise les ouverts de Green (ceux sur lesquels il existe un potentiel > 0) par une propriété de maximalité.

Dans le chapitre V, selon les idées de Mokobozki et Sibony, nous exprimons l'axiome de convergence à l'aide d'une propriété portant sur $\mathcal{F}$ (et non sur $\mathcal{F} \cap -\mathcal{F}$), dans le cas où $\mathcal{F}$ est maximal relativement à une base $\mathcal{B} = \{(\omega , \partial\omega)\}$ (frontières topologiques, cas de la théorie locale du potentiel).

Les paragraphes IV, V, VI, du chapitre I, à l'exception de la définition du numéro 25 sont à passer en première lecture. On arrive ainsi tout de suite aux résultats fondamentaux du chapitre II.

CHAPITRE 0

Nous rappelons les quelques notions fondamentales concernant le balayage dans les cônes convexes de fonctions s.c.i. sur un espace compact que nous utiliserons constamment dans les chapitres suivants.

Nous donnons les démonstrations qui sont difficiles à trouver dans la littérature ([3], [18,a], [6] [21,a]).

Soit S un cône convexe de fonctions s.c.i. à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, sur un espace compact K.

a) DEFINITION. – *On dit que la mesure de Radon* μ *sur* K, *est une balayée de* ϵ_x *(masse de Dirac en* $x \in K$*) par rapport au cône* S, *si l'on a :*

$$\int f d\mu \leqslant f(x)$$

pour tout $f \in S$.

Cette relation se note :

$$\mu \prec \epsilon_x$$

b) DEFINITION. – *Soit* $A \subset K$, *on dit que* A *est un ensemble de Silov de* S, *si l'on a :*

$$f \in S,\ f \geqslant 0 \quad sur \quad A \Rightarrow f \geqslant 0 \quad sur \quad K.$$

S'il existe un plus petit compact vérifiant cette propriété, on l'appelle frontière de Silov de S.

c) DEFINITION. – *Soit* H *un compact de Silov de* S, *et soit* φ *une fonction continue sur* H. *On appelle "réduite de* φ *sur* H *par rapport à* S" *et l'on note* R_φ^H *(elle est habituellement notée* $\hat{\varphi}_H$ cf. P.A. Meyer [18,a]) *la fonction définie sur* K :

$$R_\varphi^H = \operatorname{Inf}\{f \in S / f \geqslant \varphi \quad \text{sur} \quad H\}$$

d) THEOREME. – *On suppose que* S *vérifie la condition suivante :*

$$\forall x \in K, \ \exists u \in S, \ u > 0 \quad sur \quad K, \ u(x) < +\infty$$

Alors, pour tout compact de Silov H, *et toute* φ *continue sur* H, *la fonction* R_φ^H *est à valeurs finies et vérifie la relation :*

$$R_\varphi^H(x) = \operatorname{Sup}\left\{\int \varphi d\mu/\mu \prec \epsilon_x\,,\ \operatorname{Supp}\mu \subset H\right\}$$

De plus, l'ensemble des mesures balayées de ϵ_x *est un ensemble compact de mesures positives.*

Démonstration. – Il est clair que $R_\varphi^H(x)$ est $< +\infty$ pour tout x. D'autre part, la convexité de S montre que l'application

$$\varphi \rightsquigarrow R_\varphi^H(x)$$

est sous-linéaire. On a donc pour toute φ :

$$0 = R_0^H \leqslant R_\varphi^H + R_{-\varphi}^H \qquad (0 = R_0^H \text{ car H est un compact de Silov})$$

soit :
$$R_\varphi^H(x) \geqslant -R_{-\varphi}^H(x) > -\infty$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, on a :

$$R_\varphi^H(x) = \operatorname{Sup}\{\mu(\varphi)/\mu = \text{forme linéaire sur } \mathcal{C}(H) \text{ majorée par } \varphi \rightsquigarrow R_\varphi^H(x)\}\ .$$

Enfin, on vérifie que ces formes linéaires μ sont positives (pour $\varphi \leqslant 0$, on a $R_\varphi^H \leqslant 0$). Ce sont donc des mesures sur H. Il reste à voir que l'ensemble de ces mesures est exactement l'ensemble des balayées de ϵ_x portées par H et qu'il est compact.

Soit $f \in S$, et soit φ continue $\varphi \leqslant f$ sur H, on a :

$$\mu(\varphi) \leqslant R_\varphi^H(x) \leqslant f(x)$$

si μ est une mesure sur H majorée par $\varphi \rightsquigarrow R_\varphi^H(x)$, ce qui montre qu'elle est balayée de ϵ_x. Réciproquement, si μ est une balayée de ϵ_x portée par H, on a :

$$\mu(\varphi) \leqslant \mu(f) \leqslant f(x)\ .$$

ce qui montre qu'elle est majorée par $\varphi \rightsquigarrow R_\varphi^H(x)$.

La compacité résulte de l'inégalité :

$$\mu(1) \leqslant R_1^H(x) < +\infty$$

pour μ balayée de ϵ_x, et de la semi-continuité inférieure de l'application $\mu \rightsquigarrow \mu(f)$ pour $f \in S$.

e) DEFINITION. – *On dit que* $x \in \mathrm{K}$ *est un point frontière de Choquet de* S, *si* ϵ_x *est la seule mesure balayée de* ϵ_x. *L'ensemble des points frontière de Choquet (s'il en existe) s'appelle la frontière de Choquet de* S.

f) DEFINITION. – *On dit que* S *est linéairement séparant si, pour tout couple de points* x *et* y, $(x \neq y)$ *il existe* u *et* $v \in \mathrm{S}$, *vérifiant :*

$$u(x) \cdot v(y) \neq v(x) \cdot u(y) \qquad (0 \cdot \infty = 0)$$

g) THEOREME. – *On suppose que* S *vérifie la condition suivante, que l'on dira "du balayage"*(6)

pour tout $x \in \mathrm{K}$, *il existe* u *et* $v \in \mathrm{S}$, *telles que :*

$$\begin{array}{l} u > 0, \ u(x) < +\infty \\ v(x) < 0 \end{array}$$

Alors, si S *est linéairement séparant, la frontière de Choquet est non vide, est un ensemble de Silov, et son adhérence est la frontière de Silov de* S(7).

Démonstration(8). – Notons S′ le cône convexe obtenu en saturant S par passages à la borne supérieure de familles filtrantes croissantes d'éléments de S.

Considérons la relation suivante sur K :

$$x \gg y \quad \text{si} \quad \left| \begin{array}{l} f \in \mathrm{S}' \\ f \geqslant 0 \text{ sur K} \\ f(x) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow f(y) = 0$$

il est immédiat que c'est une relation de préordre sur K. Montrons que K est alors inductif : si $\{x_i\}$ est une famille totalement ordonnée décroissante dans K, soit x une valeur d'adhérence de cette famille ; on voit facilement, grâce à la semi-continuité inférieure des fonctions de S′ que x est un minorant commun à tous les x_i. On en déduit l'existence d'éléments minimaux (Zorn) : on va montrer que ce sont des points frontière de Choquet de S.

(6) Nous adoptons cette condition qui est suffisante pour l'existence de la frontière de Choquet.

(7) Ce dernier résultat est dû à Bauer (cf. [3]).

(8) Cette démonstration inédite a l'avantage de ne pas utiliser la notion de "face".

Soit x_0 minimal et soit F l'ensemble des y tels que $y << x_0$ (donc aussi $y >> x_0$). On a :

$$F = \cap \{ f^{-1}(0)/f \in S',\ f \geqslant 0 \text{ sur } K,\ f(x_0) = 0 \}$$

L'ensemble des $f \in S'$ intervenant dans la définition de F est filtrant croissant (prendre la somme de deux éléments) : sa borne supérieure χ_F est donc dans S′, et vérifie :

$$\chi_F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in F \\ +\infty & \text{si} \quad x \notin F \end{cases}$$

On va montrer que toutes les fonctions de S′ sont proportionnelles sur F.

Soient $a \in F$, $v \in S'$, $v(a) < 0$, et $u \in S'$, $u > 0$ sur F, $u(a) < +\infty$. Il existe $\lambda > 0$ tel que la fonction $v + \lambda u$ soit $\geqslant 0$ sur F, et s'annule sur F (Dini). La fonction $v + \lambda u + \chi_F$ est $\geqslant 0$ sur K et s'annule sur F : elle est donc identiquement nulle sur F, on a ainsi $v = -\lambda u$ sur F. Si maintenant w est quelconque dans S′, on se ramène au cas précédent si elle est finie en un point de F, en lui ajoutant une fonction convenable strictement négative en ce point.

L'hypothèse de séparation linéaire entraîne alors que F est réduit à un seul point.

Les points minimaux sont des points frontière de Choquet : ceci résulte de ce que la fonction qui vaut 0 en un tel point et $+\infty$ ailleurs appartient à S′.

Montrons maintenant que les points minimaux forment un ensemble de Silov. Soit v une fonction de S′ prenant des valeurs < 0 : l'ensemble $\{v < 0\}$ contient des points minimaux : en effet, si $u \in S'$, $u > 0$, u finie en un point de $\{v < 0\}$, il existe $\lambda > 0$ tel que $v + \lambda u$ soit $\geqslant 0$ et nulle en un point : elle s'annule donc en un point minimal, et v est donc strictement négative en ce point. On en déduit immédiatement le résultat.

Montrons enfin que l'adhérence de l'ensemble des points minimaux est la frontière de Silov de S : L'adhérence est évidemment un compact de Silov. Si a est un point minimal, et si H est un compact de Silov, la fonction qui vaut -1 en a et $+\infty$ ailleurs appartient à S′, elle ne peut être $\geqslant 0$ sur H, (sinon elle serait $\geqslant 0$ partout), donc a appartient à H.

Pour terminer, si a est un point frontière de Choquet de S, il existe une mesure μ balayée de ϵ_a et portée par la frontière de Silov (théorème d), elle ne peut être que ϵ_a donc a appartient à la frontière de Silov.

c.q.f.d.

Remarque. – Si l'on avait considéré le cône $\hat{S}$ (ensemble des fonctions s.c.i. $> -\infty$ vérifiant $f(x) \geqslant \mu(f)$ pour tout x et toute μ balayée de ϵ_x par rapport à S) au lieu de S$'$, les points minimaux correspondants auraient été exactement les points de la frontière de Choquet de S.

CHAPITRE I

I. Définitions générales

L'espace de base Ω est localement compact.

Dans toute la suite, $\mathcal{B}$ désignera une base de Ω, formée d'ouverts ω relativement compacts, pour chacun desquels on s'est donné une partie fermée non vide ω^* de la frontière topologique $\partial\omega$, de ω. On la note $\mathcal{B} = \{(\omega, \omega^*)\}$.

1. Definition. – *Soit* U *un ouvert de* Ω, *on dit qu'une fonction* $f : \mathrm{U} \to \overline{\mathbf{R}}$ *vérifie le principe du minimum relativement à la base* $\mathcal{B}$ *si l'on a pour tout* $\omega \in \mathcal{B}$, *tel que* $\overline{\omega} \subset \mathrm{U}$:

$$f \geqslant 0 \quad sur \quad \omega^* \Rightarrow f \geqslant 0 \quad sur \quad \overline{\omega}$$

2. Proprietes immediates. – Soit U un ouvert, on a :

a) si des f_α vérifient le principe du minimum dans U relativement à $\mathcal{B}$, alors la fonction $f = \operatorname{Inf} f_\alpha$ le vérifie aussi.

b) soit φ une fonction à valeurs dans $]0, +\infty[$ si f vérifie le principe du minimum à $\mathcal{B}$, il en est de même de φf.

3. Definitions.

a) *On rappelle qu'un préfaisceau d'ensembles de fonctions à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$, *sur l'espace* Ω *est la donnée, pour chaque ouvert* U *de* Ω, *d'un ensemble* $\mathfrak{F}(\mathrm{U})$ *inclus dans* $\overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{U}}$, *la condition de restriction suivante étant vérifiée :*

si $\mathrm{U}_1 \subset \mathrm{U}_2$ *et si* $f \in \mathfrak{F}(\mathrm{U}_2)$ *alors* $f_{|\mathrm{U}_1} \in \mathfrak{F}(\mathrm{U}_1)$ ($f_{|\mathrm{U}_1}$ *est la restriction de* f *à* U_1).

Les fonctions $f \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$ *seront dites "de classe* $\mathfrak{F}$*" dans* U. *La condition de restriction peut s'énoncer :*

toute fonction de classe $\mathfrak{F}$ *dans* U_2 *est encore de classe* $\mathfrak{F}$ *dans tout ouvert* $\mathrm{U}_1 \subset \mathrm{U}_2$.

b) *On dit que le préfaisceau* $\mathfrak{F}$ *vérifie le principe du minimum relativement à la base* $\mathcal{B}$, *si pour toute* $f \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$, f *satisfait au principe du minimum dans* U, *relativement à la base* $\mathcal{B}$.

c) *On dira que* $\mathfrak{F}$ *est un préfaisceau de cônes convexes de fonctions numériques* s.c.i. $> -\infty$, *si chaque* $\mathfrak{F}(U)$ (U *ouvert* $\subset \Omega$) *est un cône convexe de fonctions numériques* s.c.i. $> -\infty$ *sur* U. *Si* $f \in \mathfrak{F}(U)$ *on dira que* f *est de classe* $\mathfrak{F}$ *dans* U.

d) *On dira de même que* $\mathfrak{F}$ *est un préfaisceau d'espaces vectoriels de fonctions numériques continues si chaque* $\mathfrak{F}(U)$ (U *ouvert* $\subset \Omega$) *est un espace vectoriel de fonctions continues sur* U.

On s'intéressera surtout aux préfaisceaux de cônes convexes de fonctions numériques s.c.i. $> -\infty$. On les appellera plus brièvement "préfaisceau de cônes convexes".

4. Propositions. – *Soit* Ω *un espace localement compact muni d'une base* $\mathcal{B} = \{(\omega , \omega^*)\}$. *L'ensemble des "préfaisceaux de cônes convexes" sur* Ω *vérifiant le principe du minimum relativement à* $\mathcal{B}$ *est ordonné par la relation :*

$\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ *si* $\mathfrak{F}(U)$ *est une partie de* $\mathfrak{G}(U)$, *pour tout ouvert* U *de* Ω.

De plus, cet ensemble est inductif et possède des éléments maximaux.

Démonstration. – Il est évident que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ est une relation d'ordre. Soit $(\mathfrak{F}_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée de préfaisceaux de cônes convexes : en posant $\mathfrak{F}(U) = \bigcup_i \mathfrak{F}_i(U)$ pour chaque ouvert U, on obtient bien un "préfaisceau de cônes convexes" sur Ω, vérifiant le principe du minimum relativement à $\mathcal{B}$, et majorant tous les $\mathfrak{F}_i$.

L'existence d'éléments maximaux provient alors de ce que l'ensemble de ces préfaisceaux est non vide (théorème de Zorn).

c.q.f.d.

Remarque. – On obtient le même énoncé pour les préfaisceaux d'espaces vectoriels de fonctions continues.

Nous noterons $\mathfrak{F}(E)$ l'ensemble des fonctions f définies sur E qui sont restriction d'une fonction $f' \in \mathfrak{F}(U)$, U étant un ouvert contenant E (dépendant de f).

f est donc la restriction à E d'une fonction f' qui est de classe $\mathfrak{F}$ au voisinage de E.

5. PROPRIETES FONDAMENTALES. – Soit $\mathcal{F}$ un "préfaisceau de cônes convexes" sur Ω, vérifiant le principe du minimum relativement à une base $\mathcal{B} = \{(\omega, \omega^*)\}$.

1) *Condition d'appartenance.*

a) On suppose que $\mathcal{F}$ est maximal (cf. proposition 4).

Soient U ouvert $\subset \Omega$ et f s.c.i. $> -\infty$ sur U. Alors $f \in \mathcal{F}(U)$ si et seulement si :

$$\left.\begin{array}{l} \forall \omega \in \mathcal{B},\ \bar{\omega} \subset U \\ \forall v \in \mathcal{F}(\bar{\omega}),\ f + v \geqslant 0 \text{ sur } \omega^* \end{array}\right\} \Rightarrow f + v \geqslant 0 \text{ sur } \bar{\omega}$$

b) Réciproquement, si $\mathcal{F}$ est tel que les fonctions $f \in \mathcal{F}(U)$ sont celles qui vérifient la propriété de a), alors $\mathcal{F}$ est maximal.

Démonstration. – Pour tout ouvert $V \subset \Omega$, posons :

$$\mathcal{G}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}(V) & \text{si} \quad V \not\subset U \\ \mathcal{F}(V) + \mathbf{R}^+ f & \text{si} \quad V \subset U(^9) \end{cases}$$

Il est clair que $\mathcal{G}$ est un "préfaisceau de cônes convexes". Il reste à voir qu'il vérifie le principe du minimum relativement à $\mathcal{B}$. Soient donc V un ouvert de Ω, et $v \in \mathcal{G}(V)$.

1^er^ cas : $V \not\subset U$: on a alors $v \in \mathcal{F}(V)$, et il n'y a rien à démontrer ($\mathcal{F}$ vérifie le principe du minimum).

2^ème^ cas : $V \subset U$: v est alors de la forme $u + \lambda f$ avec $u \in \mathcal{F}(V)$. Soit $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset V$ tel que $v \geqslant 0$ sur ω^*, on a d'après l'hypothèse sur f : $\dfrac{u}{\lambda} + f \geqslant 0$ sur ω^*, donc sur $\bar{\omega}$, et par suite $v \geqslant 0$ sur $\bar{\omega}$.

$\mathcal{F}$ étant maximal, et comme on a évidemment $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, on a $\mathcal{F} = \mathcal{G}$: ceci prouve que $f \in \mathcal{F}(U)$.

Inversement, si $f \in \mathcal{F}(U)$, il est clair que f vérifie la condition du a).

(9) Si C est un cône convexe de fonctions et f une fonction, $C + \mathbf{R}^+ f$ désigne le cône convexe engendré par C et f (i.e. l'ensemble des éléments de la forme $v + \lambda f$, $v \in C$, $\lambda \in \mathbf{R}^+$).

b) Soit $\mathcal{G}$ un "préfaisceau de cônes convexes" vérifiant le principe du minimum relativement à $\mathcal{B}$, et plus grand que $\mathcal{F}$ ($\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$). Pour tout ouvert U, et toute $f \in \mathcal{G}(U)$, f vérifie la condition du a) donc est un élément de $\mathcal{F}(U)$. On a ainsi $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est maximal.

2) Si $\mathcal{F}$ est maximal, chaque $\mathcal{F}(U)$ (U ouvert) est stable par enveloppe inférieure finie.

3) Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ un ensemble ordonné filtrant croissant de fonctions $f_\alpha \in \mathcal{F}(U)$. Si $\mathcal{F}$ est maximal et si pour tout $x \in U$ et pour tout $\omega \in \mathcal{B}$, $x \in \omega \subset \bar{\omega} \subset U$, il existe ($u \in \mathcal{F}(\bar{\omega})$, $u > 0$ sur ω^*,) $u(x) < +\infty$, alors $f = \sup\limits_\alpha f_\alpha$ appartient à $\mathcal{F}(U)$.

Démonstration. – En effet, d'après la propriété 1) ci-dessus, on doit montrer que pour tout $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset U$, toute $v \in \mathcal{F}(\bar{\omega})$, on a :

$$f + v \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \omega^* \quad \text{entraîne} \quad f + v \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \bar{\omega}\,.$$

Soit $x \in \omega$: il existe $u \in \mathcal{F}(\bar{\omega})$, $u > 0$ sur $\bar{\omega}$, $u(x) < \infty$.

Pour tout $\epsilon > 0$, on a : $f + v + \epsilon u > 0$ sur ω^*. Il y a donc un α tel que $f_\alpha + v + \epsilon u > 0$ sur ω^* (lemme de Dini), et par suite $f_\alpha + v + \epsilon u \geqslant 0$ sur $\bar{\omega}$. On en déduit $f + v + \epsilon u \geqslant 0$ sur $\bar{\omega}$ puis $f(x) + v(x) \geqslant 0$ (ϵ arbitraire et $u(x) < +\infty$).

Remarque. – On pourrait aussi considérer des f_α dont les ouverts de définition vont en croissant.

4) Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$, $\varphi > 0$. Si $\mathcal{F}$ est maximal par rapport à $\mathcal{B}$, le préfaisceau $\varphi\mathcal{F}$ des fonctions de la forme $\varphi(x)\,f(x)$ avec $f \in \mathcal{F}(U)$, est aussi maximal par rapport à $\mathcal{B}$.

5) *Principe de localisation.* – On suppose que $\mathcal{F}$ est un "préfaisceau de cônes convexes" vérifiant le principe du minimum relativement à $\mathcal{B} = \{(\omega\,,\omega^*)\}$ et que $\mathcal{F}$ est un faisceau.

Si la restriction $\mathcal{F}_{|U}$ de $\mathcal{F}$ à un ouvert U est un "préfaisceau de cônes convexes" maximal sur U, relativement à $\mathcal{B}$, pour tous les ouverts U d'un recouvrement de Ω, alors $\mathcal{F}$ est lui-même maximal relativement à $\mathcal{B}$.

Démonstration. – Soit $\mathcal{G}$ un "préfaisceau de cônes convexes" sur Ω vérifiant le principe du minimum relativement à $\mathcal{B}$, et plus grand que $\mathcal{F}$ ($\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$).

Il est clair que chaque $\mathcal{G}_{|U}$ est un "préfaisceau de cônes convexes" sur U, vérifiant le principe du minimum relativement à $\mathcal{B}$. Par maximalité, on a alors : $\mathcal{G}_{|U} = \mathcal{F}_{|U}$.

Si maintenant f est une fonction $f \in \mathcal{G}(V)$, pour V ouvert on a $f \in \mathcal{F}(V \cap U)$ pour chaque ouvert U du recouvrement, et $f \in \mathcal{F}(V)$ car $\mathcal{F}$ est un faisceau. On a donc $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

6) Si $\mathcal{F}$ est un "préfaisceau de cônes convexes" maximal relativement à $\mathcal{B}$, alors pour tout ouvert U, la restriction de $\mathcal{F}$ à U (notée $\mathcal{F}_{|U}$) est un préfaisceau de cônes convexes maximal sur U, relativement à $\mathcal{B}$.

7) L'ensemble des cônes convexes de fonctions s.c.i. $> -\infty$ sur un ouvert U et vérifiant le principe du minimum relativement à une base $\mathcal{B}$, est ordonné par inclusion, est inductif([10]) et a donc des éléments maximaux.

Si $\mathcal{F}$ est un "préfaisceau de cônes convexes" sur Ω vérifiant le principe du minimum relativement à $\mathcal{B}$, et si pour chaque U ouvert $\subset \Omega$, $\mathcal{F}(U)$ est un cône convexe maximal au sens ci-dessus, alors $\mathcal{F}$ est un préfaisceau maximal.

Il est important de noter que la réciproque est fausse : c'est l'objet du contre exemple qui suit le théorème 9.

Les propriétés 8) et 9) suivantes sont moins importantes.

8) Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau maximal de cônes convexes relativement à $\mathcal{B}$, et si pour tout $\omega \in \mathcal{B}$, il existe une fonction h_ω de classe $\mathcal{F}$ et positive (> 0) au voisinage de $\bar{\omega}$, alors on a la propriété suivante : pour que u s.c.i. $> -\infty$ sur U soit dans $\mathcal{F}(U)$, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\forall \omega \in \mathcal{B},\ \bar{\omega} \subset U,\ \forall \lambda > 0,\ \forall v \in \mathcal{F}(\bar{\omega}),\ v > 0$$

$$u + v > \lambda h_\omega \quad \text{sur} \quad \omega^* \Rightarrow u + v \geqslant \lambda h_\omega \quad \text{sur} \quad \bar{\omega}\,.$$

9) Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau maximal relativement à $\mathcal{B}$, et si pour tout $\omega \in \mathcal{B}$, il existe une fonction v_ω, v_ω de classe $\mathcal{F}$, strictement > 0 et bornée au voisinage de $\bar{\omega}$, alors pour que u s.c.i. soit dans $\mathcal{F}(U)$, il faut et il suffit que l'on ait :

$$u + v \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \omega^* \Rightarrow u + v \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \bar{\omega}$$

([10]) cf. [20].

pour tout $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset \mathrm{U}$ et toute v de classe $\mathfrak{F}$ et bornée au voisinage de $\bar{\omega}$.

En d'autres termes, $\mathfrak{F}$ est entièrement déterminé par ses éléments localement bornés.

Démonstration. – Soient $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset \mathrm{U}$ et w de classe $\mathfrak{F}$ au voisinage de $\bar{\omega}$ et vérifiant $u + w \geqslant 0$ sur ω^*.

Pour tout $\epsilon > 0$ on a $u + w + \epsilon v_\omega > 0$ sur ω^*. La suite $u + \mathrm{Inf}(w\,,\, nv_\omega) + \epsilon v_\omega$ tend en croissant vers $u + w + \epsilon v_\omega$. Il existe donc n_0 tel que l'on ait pour $n \geqslant n_0$:

$$u + \mathrm{Inf}(w\,,\, nv_\omega) + \epsilon v_\omega > 0 \quad \text{sur} \quad \omega^*$$

La fonction $\mathrm{Inf}(w\,,\, nv_\omega) + \epsilon v_\omega$ vérifie les hypothèses (bornée au voisinage de $\bar{\omega}$). On en déduit que $u + \mathrm{Inf}(w\,,\, nv_\omega) + \epsilon v_\omega$ est positive ou nulle sur $\bar{\omega}$, et ceci pour tout $\epsilon > 0$ et tout $n \geqslant n_0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ puis ϵ vers 0, on obtient :

$$u + w \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \bar{\omega}$$

On applique alors la condition d'appartenance du 5-1).

6. Proposition. – *L'ensemble des faisceaux à principe du minimum par rapport à $\mathcal{B}$, ordonné par inclusion est inductif.*

Démonstration. – Soit $(\mathfrak{F}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ un ensemble totalement ordonné de faisceaux, et soit $\mathfrak{F} = \bigcup\limits_i \mathfrak{F}_i$.

Soit $\mathfrak{G}(\mathrm{U})$ l'ensemble des fonctions s.c.i. $> -\infty$ sur U telles que chaque $x \in \mathrm{U}$ possède un voisinage $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ tel que $f \in \mathfrak{F}(\mathrm{V})$ (i.e. "f est localement dans $\mathfrak{F}$").

On voit que $\mathfrak{G}$ est un faisceau contenant les $\mathfrak{F}_i$ et vérifiant le principe du minimum par rapport à $\mathcal{B}$.

En effet, si $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset \mathrm{U}$, on recouvre $\bar{\omega}$ par un nombre fini de tels V, soient $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots, \mathrm{V}_k$, il y a un indice i_0 tel que f soit dans chaque $\mathfrak{F}_{i_0}(\mathrm{V}_e)$: $\mathfrak{F}_{i_0}$ est un faisceau, donc $f \in \mathfrak{F}_{i_0}(\bar{\omega})$, par suite $f \geqslant 0$ sur $\omega^* \Rightarrow f \geqslant 0$ sur $\bar{\omega}$.

C.Q.F.D.

On peut se demander dans quelles conditions un faisceau maximal est un préfaisceau maximal, et réciproquement. Nous répondrons à la question au paragraphe 37-3).

7. THEOREME. – *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau de cônes convexes de fonctions* s.c.i. $> -\infty$ *vérifiant le principe du minimum relativement à une base $\mathcal{B}$ et satisfaisant à la condition du balayage.*

Alors, pour tout $x \in \bar{\omega}(\omega \in \mathcal{B})$, il existe une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$([11]) portée par ω^* telle que :

$$\int f\,d\mu \leqslant f(x) \qquad \text{pour toute} \qquad f \in \mathcal{F}(\bar{\omega})$$

– si $1 \in \mathcal{F}(\bar{\omega})$ alors $\|\mu\| \leqslant 1$

– si $1 \in \mathcal{F}(\bar{\omega}) \cap (-\mathcal{F}(\bar{\omega}))$ alors $\|\mu\| = 1$

La démonstration est classique et nous ne la reproduisons pas (cf. [5] ou, [20] p. 407 ou chapitre 0 § d).

Remarque. – Nous avons le même théorème pour un préfaisceau $\mathcal{E}$ d'espaces vectoriels de fonctions continues, en remplaçant les inégalités par des égalités.

Si $\mathcal{C}$ est un compact inclus dans $\bar{\omega}$, on notera $M_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}(\mathcal{C})$ l'ensemble (éventuellement vide) des mesures positives portées par $\mathcal{C}$ et vérifiant

$$\int f\,d\mu \leqslant f(x) \qquad \text{pour toute} \qquad f \in \mathcal{F}(\bar{\omega})$$

Une mesure μ vérifiant une telle inégalité est dite une balayée de ϵ_x relativement à $\mathcal{F}(\bar{\omega})$. Cette relation se note :

$$\mu \underset{\mathcal{F}(\bar{\omega})}{\prec} \epsilon_x$$

Le théorème 7 affirme simplement que pour $x \in \bar{\omega}$ l'ensemble $M_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}(\omega^*)$ des mesures balayées de ϵ_x et portées par ω^* est non vide.

Nous voulons d'une part éviter les préfaisceaux triviaux (exemple le préfaisceau de toutes les fonctions s.c.i. positives) et d'autre part pouvoir utiliser la théorie du balayage.

Nous considèrerons donc surtout des préfaisceaux $\mathcal{F}$ de cône convexes vérifiant la "*condition de balayage*" suivante : pour tout $\omega \in \mathcal{B}$, et tout $x \in \bar{\omega}$, il existe u et $v \in \mathcal{F}(\bar{\omega})$ telles que :

$$v > 0,\ v(x) < +\infty \qquad \text{et} \qquad u(x) < 0$$

([11]) Non unique en général.

Remarques. – 1) Si les constantes sont dans $\mathfrak{F}(\Omega)$, cette condition est évidemment vérifiée.

2) Cette condition permettrait de ne pas expliciter dès le début que les frontières distinguées $\omega^*(\omega \in \mathcal{B})$ sont non vides.

8. DEFINITION. – *Dans toute la suite l'expression "$\mathfrak{F}$ est un préfaisceau relatif à $\mathcal{B}$" signifiera que $\mathfrak{F}$ est un préfaisceau de cônes convexes de fonctions s.c.i. $> -\infty$, vérifiant le principe du minimum relativement à la base $\mathcal{B}$, et satisfaisant à la condition du balayage.*

Si $\mathfrak{F}$ est de plus maximal, on dira que $\mathfrak{F}$ est un "préfaisceau maximal relatif à $\mathcal{B}$".

9. THEOREME. – *Soit $\mathfrak{F}$ un préfaisceau maximal relatif à $\mathcal{B}$. Alors $f \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$* (U ouvert) *si et seulement si f est* s.c.i. *et si pour tout $\omega \in \mathcal{B}$ et tout $x \in \bar{\omega} \subset \mathrm{U}$, il existe au moins une mesure $\mu \in \mathrm{M}_x^{\mathfrak{F}(\bar{\omega})}(\omega^*)$ vérifiant :*

$$\int f\, d\mu \leqslant f(x)$$

Démonstration. – Soient U ouvert et f s.c.i. définie dans U vérifiant les conditions du théorème, le préfaisceau $\mathfrak{G}$ défini pour V ouvert par

$$\mathfrak{G}(\mathrm{V}) = \begin{cases} \mathfrak{F}(\mathrm{V}) & \text{si} \quad \mathrm{V} \not\subset \mathrm{U} \\ \mathfrak{F}(\mathrm{V}) + \mathbf{R}^+ f & \text{si} \quad \mathrm{V} \subset \mathrm{U} \end{cases}$$

contient $\mathfrak{F}$ et est relatif à $\mathcal{B}$. On conclut que $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$ par maximalité et $f \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$.

C.Q.F.D.

On a le même théorème pour les préfaisceaux maximaux d'espaces vectoriels relatifs à $\mathcal{B}$.

Avant d'aborder des exemples de préfaisceaux maximaux classiques, nous donnons un contre-exemple montrant que pour un "préfaisceau $\mathfrak{F}$ maximal de cônes convexes" vérifiant le principe du minimum relativement à une base $\mathcal{B} = \{(\omega , \omega^*)\}$, les cônes $\mathfrak{F}(\mathrm{U})$, pour U ouvert ne sont pas forcément des cônes maximaux vérifiant sur U le principe du minimum relativement à $\mathcal{B}$.

Prenons $\Omega = \mathbf{R}$, $\mathcal{B}$ = la base constituée des intervalles ouverts $\omega =]a , b[$, avec $\omega^* = \{a\} \cup \{b\} = \partial\omega$.

Soit $\mathcal{F}$ le préfaisceau défini de la manière suivante pour chaque ouvert U :

$\mathcal{F}(U)$ est l'ensemble des fonctions f s.c.i. $> -\infty$ telles que dans chaque composante connexe $]\alpha, \beta[$ de U,

f est croissante si $\alpha \geqslant 0$
f est décroissante si $\beta \leqslant 0$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est constante sur }]\alpha, 0] \\ f \text{ est croissante sur } [0, \beta[\end{array}\right\} \text{ si } \quad \alpha < 0 < \beta$$

Il est clair que $\mathcal{F}$ est un "préfaisceau de cônes convexes" relativement à $\mathcal{B}$, satisfaisant à la condition du balayage (les constantes sont dans $\mathcal{F}(\mathbf{R})$).

D'après le théorème 7, pour tout intervalle $\omega =]a, b[\in \mathcal{B}$, et tout $x_0 \in [a, b]$, il existe une mesure μ

$$\mu \in M_{x_0}^{\mathcal{F}([a,b])}(\{a, b\}) .$$

Cette mesure est de la forme $\mu = t\epsilon_a + (1 - t)\, \epsilon_b$ $(t \in [0, 1])$ car les constantes sont dans $\mathcal{F}(\mathbf{R})$.

1^er^ cas : $0 < a < b$ la fonction

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant x_0 \\ 1 & \text{si} \quad x > x_0 \end{cases} \quad \text{appartient à} \quad \mathcal{F}(]0, +\infty[)$$

On a donc :

$$0 = f_0(x_0) \geqslant t f_0(a) + (1 - t)\, f_0(b) = 1 - t$$

soit $t \geqslant 1$, donc $t = 1$.

La seule mesure $\mu \in M_{x_0}^{\mathcal{F}([a,b])}(\{a, b\})$ est donc ϵ_a.

2^ème^ cas : $a < b < 0$ le même raisonnement montre que cette fois μ est nécessairement ϵ_b.

Soit $\mathcal{G}$ un préfaisceau maximal relatif à $\mathcal{B}$, tel que $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$. D'après le théorème 7, $M_{x_0}^{\mathcal{G}([a,b])}(\{a\}, \{b\})$ est non vide : de plus, il est inclus dans $M_{x_0}^{\mathcal{F}([a,b])}(\{a\}, \{b\})$.

Dans le cas $0 < a < b$, ϵ_a est donc la seule mesure balayée de ϵ_{x_0} par rapport à $\mathcal{G}([a, b])$ et portée par $\{a, b\}$.

Dans le cas $a < b < 0$, c'est ϵ_b.

Il s'ensuit que toute fonction $f \in \mathfrak{G}(U)$, U ouvert, est croissante sur toute composante connexe de $U \cap]0, +\infty[$, et décroissante sur $U \cap]-\infty, 0[$.

Soit maintenant $f \in \mathfrak{G}([a, b])$ avec $a < 0 < b$: la fonction

$$g_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ +\infty & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{appartient à } \mathfrak{F}(\mathbf{R})$$

la fonction $f + g_0$ appartient donc à $\mathfrak{G}(]\alpha, \beta[)$: elle atteint donc son minimum en a, sur $[a, b]$, elle est donc constante sur $[a, 0[$, et même sur $[a, 0]$ par semi-continuité inférieure.

Or, on a $f = f + g_0$ sur $[a, 0]$. Donc $f \in \mathfrak{F}(]a, b[)$. En remplaçant $[a, b]$ par un intervalle $[a', b']$ tel que $]a', b'[\supset [a, b]$, on montre que $f \in \mathfrak{F}([a, b])$. Finalement $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$, et $\mathfrak{F}$ est maximal relatif à $\mathcal{B}$.

Pour tout $]a, b[\ni 0$, il est clair que le cône $\mathfrak{F}(]a, b[)$ n'est pas maximal relativement à $\mathcal{B}$ puisqu'il est strictement contenu dans le cône C des fonctions croissantes sur $]a, b[$, et que ce cône C vérifie le principe du minimum relativement à $\mathcal{B}$.

II. Exemples de préfaisceaux maximaux classiques.

Cas des fonctions hyperharmoniques classiques.

10. PROPOSITION. – *Soit $\mathfrak{F}$ le faisceau des fonctions hyperharmoniques dans les ouverts de* $\mathbf{R}^n$ *($n \geqslant 1$)*

$\mathfrak{F}$ est un préfaisceau maximal relatif à la base $\mathcal{B} = (\omega, \omega^*)$ constituée par les boules euclidiennes ω munies de leur frontière topologique $\omega^* = \partial\omega$.

Démonstration. – $\mathfrak{F}$ vérifie évidemment le principe du minimum sur la base $\mathcal{B}$, et est relatif à la base $\mathcal{B}$ car il contient les fonctions localement constantes. Il reste à voir que $\mathfrak{F}$ est maximal : soit $\mathfrak{G}$ un préfaisceau relatif à $\mathcal{B}$ et contenant $\mathfrak{F}$, et soit $s \in \mathfrak{G}(U)$, U ouvert.

Pour toute boule $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset U$, et toute fonction continue φ sur $\partial\omega$, $\varphi < s$, la fonction $s - H_\varphi^{\partial\omega}$ (12) appartient à $\mathfrak{G}(\omega)$ et est

(12) $H_\varphi^{\partial\omega}$ désigne le prolongement harmonique de φ dans ω.

positive au voisinage de $\partial\omega$: elle est donc $\geqslant 0$ partout dans ω. Ainsi s est hyperharmonique dans U, et l'on a $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

c.q.f.d.

11. PROPOSITION. – *Soit $\mathcal{F}$ le faisceau des fonctions s.c.i. dans $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ $(p, q \geqslant 1)$ qui sont hyperharmoniques séparément en chaque variable.*

Alors $\mathcal{F}$ est maximal relatif à la base $\mathcal{B} = (\omega, \omega^*)$ constituée par les produits de boules $\omega = \alpha \times \beta$, munies de leur frontière distinguée $\omega^* = \partial\alpha \times \partial\beta$ ($\partial\alpha$ est la frontière topologique de α).

Démonstration. – $\mathcal{F}$ est relatif à la base $\mathcal{B}$ (il contient les fonctions localement constantes).

Soit $\mathcal{G}$ un préfaisceau relatif à $\mathcal{B}$, contenant $\mathcal{F}$, et soit $s \in \mathcal{G}(\mathrm{U})$, U ouvert de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$.

Pour tout $\omega = \alpha \times \beta \in \mathcal{B}$, $\overline{\omega} \subset \mathrm{U}$, et toute fonction φ continue sur $\omega^* = \partial\alpha \times \partial\beta$, $\varphi < s$, la fonction $s(x, y) - \int\int \varphi \, d\rho_x^\alpha \, d\rho_y^\beta$ (13) appartient à $\mathcal{G}(\omega)$ et est positive au voisinage de ω^*. En approchant $\omega = \alpha \times \beta$ par des produits de boules $\alpha_n \times \beta_n$ intérieures et concentriques, on voit que cette fonction est $\geqslant 0$ dans ω, donc au centre de ω. Ainsi la fonction s a la propriété de surmoyenne, et est séparément hyperharmonique :

on a $$\mathcal{G} = \mathcal{F}$$

12. PROPOSITION. – *Soit $\mathcal{F}$ le faisceau des fonctions plurihyperharmoniques dans $\mathbf{C}^n$.*

$\mathcal{F}$ est maximal relatif à la base $\mathcal{B} = \{(\omega, \omega^*)\}$ formée par les polydisques ω et leurs transformés par le groupe des isomorphismes $\mathbf{C}$-affines de $\mathbf{C}^n$, munis de leur frontière distinguée ω^*.

Démonstration. – Soit $\mathcal{G}$ relatif à $\mathcal{B}$ et contenant $\mathcal{F}$: on va montrer que les fonctions de $\mathcal{G}$ sont séparément hyperharmoniques en chaque variable complexe et qu'elles le restent par les compositions avec les éléments de groupe affine, ceci prouvera que les fonctions de $\mathcal{G}$ sont plurihyperharmoniques [cf. 18].

(13) ρ_x^α et ρ_y^β sont les mesures de Poisson dans $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^q$.

Soit $s \in \mathcal{G}(\mathrm{U})$, U ouvert. Fixons le point $(z_2^0, z_3^0, \ldots, z_n^0) \in \mathbf{C}^{n-1}$ et soit U′ la coupe de U suivant $(z_2^0, z_3^0, \ldots, z_n^0)$.

Soit D_1 un disque d'adhérence $\overline{\mathrm{D}}_1 \subset \mathrm{U}'$, et soit $f(z_1)$ une fonction hyperharmonique au voisinage de $\overline{\mathrm{D}}_1$, vérifiant

$$s(z_1, z_2^0, \ldots, z_n^0) + f(z_1) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad z_1 \in \partial \mathrm{D}_1 .$$

La fonction $\mathrm{F}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = f(z_1)$ est plurihyperharmonique au voisinage de $\overline{\mathrm{D}}_1 \times (z_2^0, \ldots, z_n^0)$ et l'on a ainsi :

$$\epsilon + s + \mathrm{F} \geqslant 0 \quad (\epsilon > 0)$$

sur un polydisque voisinage de $\overline{\mathrm{D}}_1 \times (z_2^0, \ldots, z_n^0)$ puis :

$$\epsilon + s(z_1, z_2^0, \ldots, z_n^0) + f(z_1) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad z_1 \in \overline{\mathrm{D}}_1$$

soit $$s(z_1, z_2^0, \ldots, z_n^0) + f(z_1) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad z_1 \in \overline{\mathrm{D}}_1$$

(ϵ arbitraire).

Ceci prouve que s est séparément hyperharmonique en z_1, en vertu du critère d'appartenance 5.1) et de la proposition 10.

On montre de même qu'elle l'est en chaque variable.

L'hypothèse sur la base montre que s est encore séparément hyperharmonique quand elle est composée avec un élément du groupe affine. s est donc plurihyperharmonique dans U, et $\mathcal{G} = \mathfrak{F}$.

13. Proposition. — *$\mathfrak{F}$ est le faisceau des fonctions qui sont localement concaves dans les ouverts de $\mathbf{R}^n$, ou qui sont localement la constante $+\infty$.*

Alors $\mathfrak{F}$ est maximal relatif à la base $\mathcal{B} = \{(\omega, \omega^*)\}$ constituée des ouverts ω qui sont des simplexes, munis de la frontière distinguée ω^* formée de leurs sommets.

Démonstration. — Soit $\mathcal{G}$ contenant $\mathfrak{F}$, et soit U un ouvert connexe. Si $s \in \mathcal{G}(\mathrm{U})$ et s n'est pas la constante $+\infty$, soit $\omega \in \mathcal{B}$, $\overline{\omega} \subset \mathrm{U}$; pour tout $x \in \overline{\omega}$, il existe une seule mesure μ_x balayée de ϵ_x par rapport $\mathfrak{F}(\overline{\omega})$, et portée par les sommets du simplexe. On a donc

$$s(x) \geqslant \int s \, d\mu_x$$

Ceci prouve que s est localement concave s.c.i. dans U, elle est donc localement concave continue dans U (d'après les propriétés bien connues des fonctions concaves, U étant connexe).

On a donc $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

14. Proposition. – *Soit* $\mathcal{F}$ *le faisceau des fonctions s.c.i.* $> -\infty$ *sur les ouverts de* $\mathbf{R}^n$ *qui sont localement croissantes en chaque variable.*

Alors $\mathcal{F}$ *est maximal relatif à la base* $\mathcal{B} = \{(\omega, \omega^*)\}$ *constituée par les pavés* ω *muni chacun d'entre eux de la frontière distinguée* ω^* *réduite à son sommet de coordonnées minimales.*

Démonstration. – Soit $\mathcal{G}$ un préfaisceau relatif à $\mathcal{B}$ et contenant $\mathcal{F}$: pour tout $\omega \in \mathcal{B}$, et tout $x \in \bar{\omega}$, il existe $\mu \in M_x^{\mathcal{G}(\bar{\omega})}(\omega^*)$. ω^* étant réduite à un point a, μ est proportionnelle à ϵ_a. On a $\mu = \epsilon_a$, car les fonctions localement constantes sont dans $\mathcal{G} \cap (-\mathcal{G})$. Si $s \in \mathcal{G}(\bar{\omega})$, on a alors pour tout $x \in \bar{\omega}$:

$$s(x) \geqslant \int s\, d\mu = s(a)$$

Donc $$\mathcal{G} = \mathcal{F}.$$

III. Théories axiomatiques locales.

15. Proposition. – *Soit* $\mathcal{H}$ *un faisceau d'axiomatique de Brelot, c'est-à-dire vérifiant les axiomes* I, II, III *sur un espace localement compact* Ω ([14]).

Soit $\mathcal{F}$ *le préfaisceau des fonctions hyperharmoniques correspondant.*

Alors $\mathcal{F}$ *est maximal relatif à la base* $\mathcal{B}$ *constituée de tous les ouverts relativement compacts* ω, *munis de leur frontière topologique* $\omega^* = \partial\omega$, *qui ont la propriété suivante : pour tout* $\omega \in \mathcal{B}$, *il existe* $h \in \mathcal{H}(\bar{\omega})$, $h > 0$ *sur* $\bar{\omega}$.

Il est clair que cette base est héréditaire (elle contient tout sous ouvert d'un ouvert qu'elle contient).

Démonstration. – L'existence des fonctions harmoniques positives au voisinage de chaque $\bar{\omega}$ ($\omega \in \mathcal{B}$) entraîne que $\mathcal{F}$ est relatif à $\mathcal{B}$ (condition du balayage).

([14]) Voir [8]. On suppose donc que Ω est non compact, connexe et localement connexe.

Soit $\mathcal{G}$ contenant $\mathcal{F}$ et relatif à $\mathcal{B}$. Si $s \in \mathcal{G}(\mathrm{U})$, U ouvert, et si $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset \mathrm{U}$ et si ω est régulier, la fonction $s - \mathrm{H}_\varphi^{\partial\omega}$ pour $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega)$, $\varphi < s$ est $\geqslant 0$ au voisinage de $\partial\omega$ dans $\bar{\omega}$. Il existe donc un ouvert $\alpha \in \mathcal{B}$, $\bar{\alpha} \subset \omega$ tel que $s - \mathrm{H}_\varphi^{\partial\omega}$ soit positive ($\geqslant 0$) sur $\bar{\omega}\backslash\alpha$: elle l'est donc sur $\bar{\omega}$ tout entier.

On en déduit que s est localement hyperharmonique dans U c'est-à-dire hyperharmonique dans U, et $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Remarque. – Le choix de la base ci-dessus n'est pas le seul possible. N'importe quelle autre base héréditaire et contenue dans $\mathcal{B}$ aurait fait l'affaire. (raisonner comme dans 37.3).

16. Definition. – *On dit qu'un préfaisceau $\mathcal{F}$ est séparant, si pour tout compact* K, $\mathcal{F}(\mathrm{K})$ *sépare linéairement les points de* K, *c'est-à-dire si pour tout $x, y \in \mathrm{K}$, il existe u, $v \in \mathcal{F}(\mathrm{K})$ vérifiant :*

$$u(x)\,v(y) \neq u(y)\,v(x) \qquad (0 + \infty = 0)\ .$$

Plus généralement, si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts relativement compacts, on dira que $\mathcal{F}$ est $\mathcal{B}$-séparant, si la propriété précédente a lieu seulement pour les $\mathrm{K} = \bar{\omega}$, $\omega \in \mathcal{B}$.

Nous désirons maintenant établir un résultat analogue pour l'axiomatique de Bauer. Nous commencerons par démontrer la proposition suivante :

17. Proposition. – *Soit $\mathcal{H}$ un préfaisceau d'espaces vectoriels de fonctions continues sur un espace localement compact Ω.*

On suppose que $\mathcal{H}$ possède une base $\mathcal{B}$ d'ouverts réguliers(15), *et que pour tout $\omega \in \mathcal{B}$, il existe $h \in \mathcal{H}(\bar{\omega})$, $h > 0$ sur $\bar{\omega}$.*

Soit $\mathcal{F}$ le préfaisceau des fonctions $\mathcal{H}$-hyperharmoniques, c'est-à-dire vérifiant :

$$f \in \mathcal{F}(\mathrm{U}),\ \mathrm{U}\ \textit{ouvert},$$

si :

$$f \textit{ est s.c.i. sur } \mathrm{U},\ f > -\infty$$

$$\forall\, \omega \in \mathcal{B},\ \bar{\omega} \subset \mathrm{U},\ \varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega),\ \varphi \leqslant f \textit{ sur } \partial\omega,\ \textit{on a}$$

$$f \geqslant \mathrm{H}_\varphi^{\partial\omega} \quad \textit{dans} \quad \omega\,(^{16})$$

(15) Voir [8].

(16) Dans [8], $\mathrm{H}_\varphi^{\partial\omega}$ est noté $\mathrm{H}_\varphi^{\omega}$.

On suppose que $\mathcal{F}$ est $\mathcal{B}$-séparant.

Alors $\mathcal{F}$ est un préfaisceau maximal relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega\,,\partial\omega)\}$, de plus $\mathcal{F}$ est un faisceau.

Démonstration. – $\mathcal{F}$ est relatif à $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{G}$ relatif à $\mathcal{B}$ et contenant $\mathcal{F}$, la $\mathcal{B}$-séparation entraîne que $\mathcal{G}$ est relatif à la base $\mathcal{B}'$ constituée de $\mathcal{B}$ et des ouverts d'adhérence incluse dans un ouvert de $\mathcal{B}$.

En effet, soit U un ouvert relativement compact $U \in \mathcal{B}'$: il suffit de montrer que la frontière de Choquet du cône $\mathcal{G}(\bar{U})$(17) est contenue dans ∂U. Si $x \in U$, il existe $\omega \in \mathcal{B}$ vérifiant :

$$x \in \omega \subset \bar{\omega} \subset U$$

Il existe une mesure μ portée par $\partial\omega$, et qui est balayée de ϵ_x par rapport à $\mathcal{G}(\bar{U})$. Donc x n'est pas dans la frontière de Choquet de $\mathcal{G}(\bar{U})$.

Soient $\omega \in \mathcal{B}$, $s \in \mathcal{G}(\bar{\omega})$, $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega)$, $\varphi < s$ sur $\partial\omega$.

La fonction $s - H_\varphi^{\partial\omega}$ est positive au voisinage de $\partial\omega$ dans $\bar{\omega}$.

Il résulte de ce qui précède qu'elle est positive ($\geqslant 0$) sur $\bar{\omega}$ ($\mathcal{G}$ est relatif à $\mathcal{B}'$).

Ceci prouve que $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}$ est maximal. Il reste à prouver que $\mathcal{F}$ est un faisceau : ceci va résulter de la $\mathcal{B}$-séparation. Soit f une fonction sur un ouvert U, qui est "localement dans $\mathcal{F}$", c'est-à-dire telle que chaque point $x \in U$ possède un voisinage $V_x \subset U$ tel que $f \in \mathcal{F}(V_x)$. Soit $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset U$. Considérons le cône $C = R^+ f + \mathcal{F}(\bar{\omega})$. La frontière de Choquet de C est incluse dans $\partial\omega$. En effet, pour $x \in \omega$, il existe $\alpha \in \mathcal{B}$, $\bar{\alpha} \subset V_x \cap \omega$. Soit $\mu \in M_x^{\mathcal{F}(\bar{\alpha})}(\partial\alpha)$: cette mesure μ est une balayée de ϵ_x par rapport à C, elle est distincte de ϵ_x car portée par $\partial\alpha$: il s'ensuit que x n'est pas dans la frontière de Choquet de C. On a donc pour tout $v \in \mathcal{F}(\bar{\omega})$, $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset U$:

$$f + v \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega \Rightarrow f + v \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \bar{\omega}$$

Donc $f \in \mathcal{F}(U)$ (prop. 4,I).

Remarque. – Ce genre de raisonnement sera systématisé au chapitre II, où l'on étudie la propriété de faisceau.

(17) Qui existe grâce à l'hypothèse de séparation.

17bis. COROLLAIRE. – *Si* $\mathcal{H}$ *est une axiomatique de Bauer* [4] *munie des axiomes* I, II et IV, *le faisceau* $\mathcal{H}^*$ *des fonctions hyperharmoniques est un préfaisceau maximal relatif à la base* $\mathcal{B}$ *des ouverts réguliers.*

En effet $\mathcal{H}$ vérifie alors des hypothèses plus fortes que celles de la proposition 17. A noter que l'axiome de convergence III n'a pas été utilisé, et que, contrairement à l'axiomatique de Brelot, $\mathcal{F}$ est maximal relatif à une base constituée uniquement d'ouverts réguliers. (séparation).

18. PROPOSITION. – *Soit* $\mathcal{H}$ *un faisceau d'espaces vectoriels de fonctions continues sur un espace localement compact* Ω, *et vérifiant les axiomes* H_0, H_1, H_2 de Boboc N. Constantinescu. C. Cornea A.([18])

Soit $\mathcal{F}$ *le faisceau des fonctions hyperharmoniques de cette axiomatique.*

Soit $\mathcal{B}$ *la base constituée des ouverts relativement compacts* ω, *de type MP pour lesquels il existe une fonction* $h \in \mathcal{H}(\bar{\omega})$, $h > 0$ *sur* $\bar{\omega}$, *munis de leur frontière topologique* $\omega^* = \partial\omega$.

($\mathcal{B}$ *est héréditaire d'après* [5] *corollaire I,2*).

Alors $\mathcal{F}$ *est un préfaisceau maximal relatif à* $\mathcal{B}$.

Démonstration. – Le préfaisceau $\mathcal{F}$ est relatif à la base $\mathcal{B}$. (existence de fonctions harmoniques positives). Soit $\mathcal{G}$ un préfaisceau relatif à $\mathcal{B}$, contenant $\mathcal{F}$.

Si $s \in \mathcal{G}(U)$, et si $\omega \in \mathcal{B}$, ω régulier et $\bar{\omega} \subset U$, on a pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega)$ $\varphi < s$ sur $\partial\omega$, $s - H_\varphi^{\partial\omega} > 0$ sur $\partial\omega$. Comme tous les ouverts inclus dans ω sont de type MP, on a donc $s - H_\varphi^{\partial\omega} \geqslant 0$ sur $\bar{\omega}$.

On voit ainsi que s est hyperharmonique. Par suite, on a $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Nous rappelons maintenant les axiomes de l'axiomatique de Constantinescu C. et Cornea A.

On suppose que Ω est localement compact, muni d'un faisceau de cônes convexes de fonctions s.c.i. $> -\infty$ $\mathcal{U}$, vérifiant les axiomes suivants (axiomes 1), 2), 4)) : (cf. [9]).

([18]) Voir [5].

1) Ω possède un recouvrement par des ouverts U_i sur chacun desquels il existe une fonction harmonique (i.e. $\in \mathcal{U}(U_i) \cap (-\mathcal{U}(U_i)))$ strictement positive.

2) Il existe une base d'ouverts relativement compacts et résolutifs (ω est dit résolutif, si $\overline{\omega}$ est compact, et si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega)$, les deux enveloppes de Perron relatives à ω et φ coïncident dans ω. La valeur commune est notée $H_\varphi^{\partial\omega}(x)$ et l'application $\varphi \rightsquigarrow H_\varphi^{\partial\omega}(x)$ est une mesure positive notée ρ_x^ω.

4) Pour chaque ouvert U de Ω, une fonction $u : U \to]-\infty, +\infty]$ est hyperharmonique (i.e. $\in \mathcal{U}(U)$) si elle est s.c.i., et si pour chaque ouvert résolutif $\omega \subset \overline{\omega} \subset U$ et pour chaque $x \in \omega$, on a :

$$u(x) \geqslant \int u \, d\rho_x^\omega$$

19. Proposition. – *Soit* $\mathcal{U}$ *le faisceau de cônes de l'axiomatique de* Constantinescu C. *et* Cornea A.

Alors $\mathcal{U}$ *est un préfaisceau maximal relatif à la base* $\mathcal{D}$ *constituée par les ouverts relativement compacts* ω, *d'adhérence* $\overline{\omega}$, *contenue dans un ouvert résolutif, et tels qu'il existe une fonction harmonique strictement positive au voisinage de* $\overline{\omega}$.

Démonstration. – On va d'abord montrer que la restriction de $\mathcal{U}$ à chaque ouvert résolutif ω où il existe une fonction harmonique h strictement positive, vérifie le principe du minimum. Si α est ouvert tel que $\overline{\alpha} \subset \omega$ et si $s \in \mathcal{U}(\overline{\alpha})$, $s \geqslant 0$ sur $\partial\alpha$, $s + \epsilon h$ est > 0 sur $\partial\alpha$ (h est harmonique strictement positive sur ω), donc > 0 au voisinage de $\partial\alpha$; il s'ensuit que $s' = (s + \epsilon h) \wedge 0$ est dans $\mathcal{U}(\overline{\alpha})$. Si on remplace s' par 0 en dehors de $\overline{\alpha}$, on voit que la fonction s'' obtenue est localement dans $\mathcal{U}(\Omega)$, donc dans $\mathcal{U}(\Omega)$ (faisceau). Comme s'' vaut 0 sur $\partial\omega$, elle est $\geqslant 0$ dans ω, donc a fortiori dans $\overline{\alpha}$: $s + \epsilon h \geqslant 0$ sur $\overline{\alpha}$. ϵ étant arbitraire, on a $s \geqslant 0$ sur $\overline{\alpha}$.

On va maintenant montrer que la restriction de $\mathcal{U}$ à un ouvert résolutif V du type considéré est un préfaisceau maximal relatif au principe du minimum usuel. En effet, soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau maximal contenant $\mathcal{U}$. Comparons les enveloppes de Perron

$$\overline{H}_{f,\mathcal{U}}^{\partial\omega} = \operatorname{Inf}\left\{ v \in \mathcal{U}(\omega) \mid \varliminf_{\substack{y \to x \\ y \in \omega}} v(y) \geqslant f(x), \text{ pour tout } x \in \partial\omega \right\}$$

et $\overline{H}^{\partial\omega}_{f,\mathcal{F}} = \operatorname{Inf}\{u \in \mathcal{F}(\omega) \mid \underset{\substack{y \to x \\ y \in \omega}}{\underline{\lim}}\ u(y) \geqslant f(x), \text{ pour tout } x \in \partial\omega\}$

relatives à un ouvert ω résolutif d'adhérence $\bar{\omega} \subset V$ et à une donnée frontière continue f.

On a évidemment :

$$\overline{H}^{\partial\omega}_{f,\mathcal{F}} \leqslant \overline{H}^{\partial\omega}_{f,\mathcal{U}} \quad \text{dans} \quad \omega$$

et de même :

$$\underline{H}^{\partial\omega}_{f,\mathcal{F}} \geqslant \underline{H}^{\partial\omega}_{f,\mathcal{U}} \quad \text{dans} \quad \omega$$

Comme on a évidemment $\overline{H}^{\partial\omega}_{f,\mathcal{F}} \geqslant \underline{H}^{\partial\omega}_{f,\mathcal{F}}$ (principe du minimum, et existence d'une fonction harmonique strictement positive au voisinage de $\bar{\omega}$) et comme ω est résolutif, les quatre enveloppes sont égales.

Soit maintenant une fonction $v \in \mathcal{F}(U)$, U ouvert $\subset$ V. Soit ω un ouvert résolutif tel que $\bar{\omega} \subset U$ et soit $f \in \mathcal{C}(\partial\omega)$, $f \leqslant v$. On a :

$$v(x) \geqslant \overline{H}^{\partial\omega}_{f,\mathcal{F}}(x) \quad , \quad \forall x \in \omega$$

On a donc :

$$v(x) \geqslant \int v\, d\rho^{\omega}_{x} \quad , \quad \forall x \in \omega$$

L'axiome 4) montre que v est hyperharmonique dans U. La restriction $\mathcal{U}_{|V}$ de $\mathcal{U}$ à V est donc un préfaisceau maximal.

Finalement, on voit en utilisant le principe de localisation (propriété 4 n° 7) que le faisceau $\mathcal{U}$ lui-même est un préfaisceau maximal relatif à la base $\mathcal{O}$.

IV. Produits de préfaisceaux maximaux.

Nous allons maintenant nous occuper de certains faisceaux produits. Il est avantageux de donner tout de suite une définition et un théorème généraux.

20. DEFINITION. – *Soient Ω_1 et Ω_2 deux espaces localement compacts. On considère deux préfaisceaux $\mathcal{F}_1$* (resp. $\mathcal{F}_2$) *sur Ω_1 (resp. Ω_2) relatifs à deux bases $\mathcal{B}_1 = \{(\alpha, \alpha^*)\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{(\beta, \beta^*)\}$.*

On appelle préfaisceau produit de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ le préfaisceau $\mathcal{F}$ défini sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ de la manière suivante : pour tout ouvert $U \subset \Omega_1 \times \Omega_2$

$f \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$ *si et seulement si*

1) f *est* s.c.i. $> -\infty$

2) *pour tout* $y \in pr_2(\mathrm{U})$, *la fonction* $x \rightsquigarrow f(x, y)$ (19) *appartient à* $\mathfrak{F}_1(\mathrm{U}_y)$, U_y *désignant la coupe de* U *suivant* y.

3) *pour tout* $x \in pr_1(\mathrm{U})$, *la fonction* $y \rightsquigarrow f(x, y)$ *appartient à* $\mathfrak{F}_2(\mathrm{U}^x)$, U^x *désignant la coupe de* U *suivant* x.

Il est clair que chaque $\mathfrak{F}(\mathrm{U})$ est un cône convexe.

21. THEOREME. – *On suppose que* $\mathfrak{F}_1$ *et* $\mathfrak{F}_2$ *sont maximaux. Alors, le préfaisceau* $\mathfrak{F}$ *de la définition précédente est relatif à la base* $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \{(\alpha \times \beta, \alpha^* \times \beta^*)\}$.

De plus $\mathfrak{F}$ *est maximal si pour tout* $(x_0, y_0) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, *il existe deux ouverts* γ *et* δ, $x_0 \in \gamma$, $y_0 \in \delta$ *et quatre fonctions* u_1, u_2, v_1, v_2 *vérifiant :*

$u_1 \in \mathfrak{F}_1(\gamma)$	$u_1(x_0) > 0$	u_1 *continue sur* γ
$u_2 \in \mathfrak{F}_1(\gamma)$	$u_2(x_0) < 0$	u_2 *continue sur* γ
$v_1 \in \mathfrak{F}_2(\delta)$	$v_1(y_0) > 0$	v_1 *continue sur* δ
$v_2 \in \mathfrak{F}_2(\delta)$	$v_2(y_0) < 0$	v_2 *continue sur* δ

Démonstration. – Montrons d'abord que $\mathfrak{F}$ vérifie le principe du minimum sur la base $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.

Soit $f \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$ et soient $\alpha \in \mathcal{B}_1$, $\beta \in \mathcal{B}_2$ tels que $\overline{\alpha} \times \overline{\beta} \subset \mathrm{U}$ et $f \geqslant 0$ sur $\alpha^* \times \beta^*$.

Pour tout $y_0 \in \beta^*$ la fonction

$$x \rightsquigarrow f(x, y_0)$$

appartient à $\mathfrak{F}_1(\mathrm{U}_{y_0})$ et est $\geqslant 0$ sur α^* : elle est donc $\geqslant 0$ sur $\overline{\alpha}$.

On a donc $\quad f(x, y) \geqslant 0 \quad$ si $\quad (x, y) \in \overline{\alpha} \times \beta^*$

Soit $x_0 \in \overline{\alpha}$, la fonction

$$y \rightsquigarrow f(x, y)$$

appartient à $\mathfrak{F}_2(\mathrm{U}^y)$ et est $\geqslant 0$ sur β^* : elle est donc $\geqslant 0$ sur $\overline{\beta}$.

(19) pr_1 et pr_2 désignent les projections.

Finalement, on a :

$$f(x\,,y) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad (x\,,y) \in \overline{\alpha} \times \overline{\beta}$$

Montrons que $\mathfrak{F}$ est relatif à $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.

Soient $\quad \alpha \times \beta \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \,\|\, (x_0\,, y_0) \in \overline{\alpha} \times \overline{\beta}$

Il existe $\quad u \in \mathfrak{F}_1(\overline{\alpha}) \quad , \quad v \in \mathfrak{F}_2(\overline{\beta})$

tels que :

$$u > 0 \text{ sur } \overline{\alpha} \qquad u(x_0) < +\infty$$
$$v > 0 \text{ sur } \overline{\beta} \qquad v(y_0) < +\infty$$

la fonction $u(x)\,v(y)$ est > 0 sur $\overline{\alpha} \times \overline{\beta}$ et prend une valeur finie au point $(x_0\,, y_0)$. De plus elle est évidemment dans $\mathfrak{F}(\overline{\alpha} \times \overline{\beta})$.

Il existe $\quad g \in \mathfrak{F}_1(\overline{\alpha}) \quad , \quad h \in \mathfrak{F}_2(\overline{\beta})$

telles que $\quad g \leqslant 0 \quad \text{sur} \quad \overline{\alpha} \quad , \quad h \leqslant 0 \quad \text{sur} \quad \overline{\beta}$

$$g(x_0) < 0 \quad \text{et} \quad h(y_0) < 0$$

la fonction $\qquad - g(x)\,h(y)$

est $\leqslant 0$ sur $\overline{\alpha} \times \overline{\beta}$ et telle que

$$- g(x_0)\; h(x_0) < 0$$

Il suffit donc de voir que

$$- g(x)\; h(y) \in \mathfrak{F}(\overline{\alpha} \times \overline{\beta})$$

Pour y_0 fixé $\in \overline{\beta}$, la fonction

$$x \rightsquigarrow - g(x)\; h(y_0) = g(x) \times (- h(y_0))$$

appartient à $\mathfrak{F}_1(\overline{\alpha})$.

On raisonne de même pour la variable y, et on termine en remarquant que le produit de deux fonctions s.c.s. et finies $\geqslant 0$ est s.c.s., et que $- g(x)\,h(y) > -\infty \quad \forall (x\,, y)$.

Il reste à voir que $\mathfrak{F}$ est maximal.

Soit f une fonction s.c.i. $> -\infty$ sur un ouvert U de $\Omega_1 \times \Omega_2$, ayant la propriété suivante :

pour tous $\quad \alpha \times \beta \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \quad , \quad \overline{\alpha} \times \overline{\beta} \subset \mathrm{U}$,

$$g \in \mathcal{F}(\overline{\alpha} \times \overline{\beta})$$

la relation

$$f + g \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \alpha^* \times \beta^* \text{ entraîne } f + g \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \overline{\alpha} \times \overline{\beta}$$

Nous allons montrer que pour tout $x_0 \in pr_1(\mathrm{U})$, la fonction

$$y \rightsquigarrow f(x, y_0)$$

appartient à $\mathcal{F}_1(\mathrm{U})$.

Elle est évidemment s.c.i. $> -\infty$

Soit $\beta \in \mathcal{B}_2$, $\overline{\beta} \subset \mathrm{U}^{x_0}$ et soit $\psi(y) \in \mathcal{F}_2(\overline{\beta})$ telle que l'on ait :

$$f(x_0, y) + \psi(y) > 0 \quad \text{pour} \quad y \in \beta^*$$

la fonction

$$\widetilde{\psi}(y) = \lambda\, \psi(y) + \mu \operatorname{Inf}(\psi(y), 0)$$

appartient à $\mathcal{F}_2(\overline{\beta})$, pour $\lambda + \mu = 1$, $\lambda, \mu \geqslant 0$.

On a encore :

$$f(x_0, y) + \widetilde{\psi}(y) > 0 \quad \text{pour} \quad y \in \beta^*$$

si μ est assez petit.

Soient φ_1 et φ_2 de classe $\mathcal{F}_1$ au voisinage de x_0, φ_1 et φ_2 continues au voisinage de x_0, et vérifiant :

$$\varphi_1(x_0) = -1 \qquad \varphi_2(x_0) = +1$$

La fonction :

$$\mathrm{F}(x, y) = \begin{cases} -\varphi_1(x)\, \widetilde{\psi}(y) & \text{si} \quad \widetilde{\psi}(y) < 0 \\ \varphi_2(x)\, \widetilde{\psi}(y) & \text{si} \quad \widetilde{\psi}(y) > 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de $\{x_0\} \times \overline{\beta}$.

En effet, la fonction F est s.c.i. $> -\infty$ au voisinage de $\{x_0\} \times \overline{\beta}$, pour chaque y fixé, elle est $\mathcal{F}_1$ en x, et pour chaque x fixé, elle est $\mathcal{F}_2$ en y si la relation $\lambda\varphi_2(x) + \varphi_1(x) < 0$ est vérifiée : or elle est vérifiée au point x_0, on peut donc la supposer vraie au voisinage de x_0.

Il existe ainsi $\alpha \in \mathcal{B}_1$, tel que l'on ait $x_0 \in \alpha$ et

$$f(x, y) + \mathrm{F}(x, y) > 0 \quad \text{pour} \quad (x, y) \in \overline{\alpha} \times \beta^*$$

Il en résulte la relation :

$$f(x\,,y) + \mathrm{F}(x\,,y) > 0 \quad \text{sur} \quad \bar{\alpha} \times \bar{\beta}$$

soit

$$f(x_0\,,y) + \widetilde{\psi}(y) > 0 \quad \text{pour} \quad y \in \bar{\beta}$$

En faisant varier λ et μ, on trouve alors

$$f(x_0\,,y) + \psi(y) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad y \in \bar{\beta}$$

Ceci prouve que la fonction

$$y \rightsquigarrow f(x_0\,,y)$$

appartient à $\mathcal{F}_2(\mathrm{U}^{x_0})$ (maximalité).

On montre de même que pour tout $y_0 \in pr_2(\mathrm{U})$ la fonction

$$x \rightsquigarrow f(x\,,y_0)$$

appartient à $\mathcal{F}_1(\mathrm{U}_{y_0})$, c'est-à-dire finalement $f \in \mathcal{F}(\mathrm{U})$.

c.q.f.d.

22. Corollaire. – *Application au produit d'axiomatiques locales du potentiel* ([13]).

V. Problèmes d'unicité.

Dans presque toutes les axiomatiques locales de théorie du potentiel, on part de la donnée d'un faisceau $\mathcal{H}$ d'espaces vectoriels de fonctions finies continues, appelées harmoniques, et on construit un préfaisceau $\mathcal{F}$ de cônes convexes de fonctions s.c.i. $> -\infty$, appelées hyperharmoniques, lequel est maximal relatif à une certaine base $\mathcal{B}$ (cf. paragraphe III), et contient $\mathcal{H}$.

On se pose maintenant la question de savoir si ce préfaisceau $\mathcal{F}$ est l'unique préfaisceau maximal de cônes qui contienne $\mathcal{H}$.

23. Proposition. – *Soit $\mathcal{E}$ un préfaisceau d'espaces vectoriels relatif à $\mathcal{B}$. On suppose que pour tout $\omega \in \mathcal{B}$ et tout $x \in \bar{\omega}$, $\mathrm{M}_x^{\mathcal{E}(\bar{\omega})}(\omega^*)$*(20) *ne contient qu'une seule mesure. Alors, il n'existe*

(20) On rappelle que $\mathrm{M}_x^{\mathcal{E}(\bar{\omega})}(\omega^*)$ désigne l'ensemble des mesures de Radon portées par ω^* et qui sont balayées de ϵ_x par rapport à $\mathcal{E}(\bar{\omega})$.

qu'un seul préfaisceau $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{E}'$) *de cônes convexes (resp. d'espaces vectoriels) contenant* $\mathcal{E}$ *et maximal relatif à* $\mathcal{B}$.

Démonstration. – Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau de cônes convexes relatif à $\mathcal{B}$ et contenant $\mathcal{E}$. Pour tout $\omega \in \mathcal{B}$ et tout $x \in \bar{\omega}$ on a

$$M_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}(\omega^*) \subset M_x^{\mathcal{E}(\bar{\omega})}(\omega^*)$$

D'après le théorème 6, $M_x^{\mathcal{F}(\omega)}(\omega^*)$ est non vide, donc égal à $M_x^{\mathcal{E}(\bar{\omega})}(\omega^*)$.

Si $\mathcal{F}$ est maximal, les fonctions de $\mathcal{F}(U)$ sont par suite celles qui vérifient :

$$\int f d\mu \leqslant f(x) \qquad \text{pour} \qquad \bar{\omega} \subset U,\ \omega \in \mathcal{B},\ x \in \bar{\omega}$$

μ étant l'unique mesure de $M_x^{\mathcal{E}(\omega)}(\omega^*)$.

Les préfaisceaux maximaux contenant $\mathcal{E}$ étant caractérisés par les mêmes conditions sont identiques. La démonstration pour les préfaisceaux d'espaces vectoriels est identique.

C.Q.F.D.

Dans les applications, la base $\mathcal{B}$ aura des propriétés de régularité particulières. C'est pourquoi nous posons la :

24. Definition. – *Une base* $\mathcal{B}$ *est dite régulière intérieurement si pour tout* $\omega \in \mathcal{B}$, *tout* V *voisinage de* ω^*, *et tout compact* K *contenu dans* ω, *il existe un* $\omega' \in \mathcal{B}$, *vérifiant* $K \subset \omega' \subset \bar{\omega}' \subset \omega$ *et*

$$\omega^* \subset V$$

$\mathcal{B}$ *est dite régulière extérieurement si pour tout* $\omega \in \mathcal{B}$, *tout voisinage* V *de* ω^*, *et tout* U *voisinage de* $\bar{\omega}$, *il existe* $\omega' \in \mathcal{B}$ *vérifiant :*

$$\bar{\omega} \subset \omega' \subset \bar{\omega}' \subset U$$

et

$$\omega'^* \subset V$$

$\mathcal{B}$ *est régulière si elle l'est intérieurement et extérieurement.*

25. *Exemples de bases régulières.*

1) Les rectangles ou les carrés, parallèles aux axes dans $\mathbf{R}^2$ avec l'ensemble de leurs sommets comme frontière distinguée.

2) Les triangles de $\mathbf{R}^2$, avec l'ensemble de leurs sommets.

3) Les rectangles de $\mathbf{R}^2$, ou les carrés, parallèles aux axes, munis de la frontière distinguée constituée par les deux côtés verticaux et du côté horizontal inférieur.

4) Dans $\mathbf{C}^n$, les polydisques, munis de leur frontière distinguée naturelle, et leurs transformés par $\mathrm{GL}_n(n\,,\mathbf{C})$.

5) Dans Ω localement compact, non compact, connexe et localement connexe, les ouverts relativement compacts munis de leur frontière topologique.

26. LEMME. – *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau de cônes convexes relatif à $\mathcal{B}$. On suppose que $\mathcal{B}$ est régulière intérieurement. Alors, pour tout $\omega \in \mathcal{B}$, et toute $v \in \mathcal{F}(\omega)$, on a :*

$$\varliminf_{\omega \ni x \to y} v(x) \geqslant 0 \quad \textit{pour tout} \quad y \in \omega^*$$

entraîne :

$$v \geqslant 0 \quad \textit{dans} \quad \omega$$

Démonstration. – Soit $v \in \mathcal{F}(\omega)$ vérifiant la condition frontière, soit $x \in \omega$, et soit $u \in \mathcal{F}(\bar{\omega})$, $u > 0$ sur $\bar{\omega}$, $u(x) < +\infty$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de ω^* tel que l'on ait $v + \epsilon u > 0$ sur $\omega \cap \mathrm{V}$. On a donc $v + \epsilon u \geqslant 0$ dans ω d'après la régularité intérieure. ϵ étant arbitraire, on obtient $v(x) \geqslant 0$.

q.e.d.

27. Soit $\mathcal{E}$ un préfaisceau d'espaces vectoriels relatif à $\mathcal{B}$.

DEFINITION. – *Soit δ un ouvert relativement compact, et soit $\widetilde{\delta}$ une partie fermée de sa frontière. On dira que $(\delta\,,\widetilde{\delta})$ est semi-régulier relativement à $\mathcal{E}$ si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\widetilde{\delta})$, il existe une fonction unique $\mathrm{H}_\varphi^{\widetilde{\delta}}$ appartenant à $\mathcal{C}(\bar{\delta}) \cap \mathcal{E}(\delta)$*[21] *telle que*

$$\varphi \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{H}_\varphi^{\widetilde{\delta}} \geqslant 0$$

et $\mathrm{H}_\varphi^{\widetilde{\delta}} = \varphi$ sur $\widetilde{\delta}$, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}(\widetilde{\delta})$.

On notera $\mathrm{P}_x^{\mathcal{E}}(\widetilde{\delta})$ l'ensemble des mesures balayées de ϵ_x et portées par $\widetilde{\delta}$, relativement à l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\bar{\delta}) \cap \mathcal{E}(\delta)$.

[21] Nous utiliserons systématiquement cet abus de notation.

Soient $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ (resp. $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$) deux préfaisceaux de cônes convexes (resp. e.v.) relatifs à $\mathcal{B}$. On a alors

$$M_x^{\mathcal{F}_1(\bar\omega)}(\omega^*) \supset M_x^{\mathcal{F}_2(\bar\omega)}(\omega^*) \quad \text{pour tout} \quad \omega \in \mathcal{B}$$

$$P_x^{\mathcal{E}_1}(\omega^*) \supset \quad P_x^{\mathcal{E}_2}(\omega^*) \quad \text{pour tout} \quad \omega \in \mathcal{B}$$

28. THEOREME. – *Soit $\mathcal{E}$ un préfaisceau d'espaces vectoriels relatif à une base $\mathcal{B}$ régulière intérieurement. On suppose que $\mathcal{B}$ contient une sous-base $\mathcal{B}'$ constituée d'ouverts semi-réguliers.*

(i.e. $\omega \in \mathcal{B}' \Rightarrow (\omega\,,\,\omega^*)$ *est semi-régulier*).

a) *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau de cônes convexes relatif à $\mathcal{B}$, contenant $\mathcal{E}$, alors pour tout* U *ouvert et $f \in \mathcal{F}(U)$ on a :*

$$f(x) \geqslant H_\varphi^{\omega^*}(x) \tag{1}$$

pour tout $x \in \omega$, $\omega \in \mathcal{B}'$, $\bar\omega \subset U$ et *$\varphi \in \mathcal{C}(\omega^*)$, $\varphi \leqslant f$.*

b) *Si $\mathcal{E}$ est un faisceau, il est maximal comme préfaisceau d'espaces vectoriels relatif à $\mathcal{B}$.*

c) *Si de plus le préfaisceau $\mathcal{G}$ des fonctions "hyper-$\mathcal{E}$", c'est-à-dire s.c.i. $> -\infty$ et définies par la condition* (1) *est relatif à $\mathcal{B}$, alors il est l'unique préfaisceau maximal de cônes convexes relatif à $\mathcal{B}$ et contenant $\mathcal{E}$.*

Démonstration.

a) La fonction $f - H_\varphi^{\omega^*}$ vérifie les hypothèses du lemme 26.

b) Soit $\mathcal{H}$ un préfaisceau d'espaces vectoriels relatif à $\mathcal{B}$ et contenant $\mathcal{E}$: d'après le a) toute fonction de $\mathcal{H}$ est localement une fonction de $\mathcal{E}$. On a alors $\mathcal{H} = \mathcal{E}$, car $\mathcal{E}$ est un faisceau.

c) D'après le a), tout préfaisceau relatif à $\mathcal{B}$ et contenant $\mathcal{E}$ est contenu dans $\mathcal{G}$.

c.q.f.d.

29. COROLLAIRE. – *Dans les mêmes hypothèses que le théorème 28, et si $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, alors $\mathcal{E}$ est contenu dans un seul préfaisceau maximal $\mathcal{E}_m$ d'espaces vectoriels relatif à $\mathcal{B}$.*

Les fonctions de $\mathcal{E}_m$(U), U *ouvert sont caractérisées par les conditions* 1) *et* 2) *:*

1) *f continue sur* U.

2) $\forall \omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset U$, *on a* $f = H_f^{\omega^*}$ *dans* $\bar{\omega}$ (*ou dans* ω).

Démonstration. – Soit $\mathcal{H}$ un préfaisceau maximal d'espaces vectoriels contenant $\mathcal{E}$. D'après le a) du théorème 28, les fonctions de $\mathcal{H}$ vérifient 1) et 2). Il suffit donc de voir que les fonctions vérifiant 1) et 2) forment un préfaisceau relatif à $\mathcal{B}$, or c'est évident, car $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

30. Corollaire. – (*cas de théories locales à base d'ouverts réguliers*) :

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau d'espaces vectoriels muni d'une base $\mathcal{B}'$ d'ouverts réguliers.

On suppose que $\mathcal{E}$ est relatif à la base $\mathcal{B}$ constituée par tous les ouverts qui sont inclus dans un ouvert de $\mathcal{B}'$.

a) *Alors $\mathcal{E}$ est maximal relatif à $\mathcal{B}$.*

b) *Les fonctions de $\mathcal{E}$ sont caractérisées par les conditions* 1) *et* 2) *du* n° 29.

c) *Si le préfaisceau $\mathcal{G}$ des fonctions hyper-$\mathcal{E}$, est relatif à $\mathcal{B}$, alors il est l'unique préfaisceau maximal de cônes convexes relatif à $\mathcal{B}$, contenant $\mathcal{E}$* (*par exemple si $\mathcal{G}$ est $\mathcal{B}$-séparant* (cf. prop. 16)).

Démonstration. – On remarque que $\mathcal{B}$ est régulière intérieurement, et on applique les n° 28 et 29.

On peut évidemment appliquer ce qui précède à de nombreux exemples du II et du III.

On verra plus loin que l'on obtient, dans certains cas, des résultats analogues sans supposer l'existence de bases d'ouverts réguliers.

VI. Rôle des ouverts semi-réguliers.

31. Proposition. – *Soit $\mathcal{E}$ un préfaisceau maximal d'espaces vectoriels relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega, \omega^*)\}$.*

Soient δ un ouvert relativement compact et $\widetilde{\delta}$ un compact non vide de $\partial\delta$.

Alors $P_x^{\mathscr{E}}(\widetilde{\delta})$ (cf. définition 27) *contient une et une seule mesure pour tout* $x \in \overline{\delta}$, *si et seulement si* $(\delta\ ,\ \widetilde{\delta})$ *est semi-régulier* (Bauer).

De plus l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\overline{\delta}) \cap \mathscr{E}(\delta)$ *est saturé au sens de* Bauer (cf. [3]).

Démonstration. – On remarque que $\widetilde{\delta}$ est un compact de Silov pour l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\overline{\delta}) \cap \mathscr{E}(\delta)$ (car $P_x^{\mathscr{E}}(\widetilde{\delta}) \neq \phi\ \ \forall x \in \overline{\delta}$). Si φ est une fonction continue sur $\widetilde{\delta}$, désignons par $R_\varphi^{\widetilde{\delta}}(x)$ la fonction $\operatorname{Inf}(v(x))\ v \in \mathcal{C}(\overline{\delta}) \cap \mathscr{E}(\delta),\ v \geqslant \varphi$ sur $\widetilde{\delta}$). La relation fondamentale de balayage s'écrit (cf. chapitre 0, théorème d) :

$$R_\varphi^{\widetilde{\delta}}(x) = \operatorname{Sup}\left\{\int \varphi\, d\mu \mid \mu \prec \epsilon_x\ ,\ \operatorname{Supp}\mu \subset \widetilde{\delta}\right\}$$

On a donc $R_\varphi^{\widetilde{\delta}}(x) = \int \varphi\, d\rho_x^{\widetilde{\delta}}$, $\rho_x^{\widetilde{\delta}}$ étant la seule mesure appartenant à $P_x^{\mathscr{E}}(\widetilde{\delta})$.

La fonction $H_\varphi^{\widetilde{\delta}} = R_\varphi^{\widetilde{\delta}}$ est donc s.c.s., elle est aussi s.c.i. car on a

$$H_{(-\varphi)}^{\widetilde{\delta}} = \int -\varphi\, d\rho_x^{\widetilde{\delta}} = -H_\varphi^{\widetilde{\delta}}(x)$$

Il reste à voir que $H_\varphi^{\widetilde{\delta}} = R_\varphi^{\widetilde{\delta}}$ appartient à $\mathscr{E}(\delta)$: soient $\omega \in \mathcal{B}$, $\overline{\omega} \subset \delta$ et $x \in \overline{\omega}$, on a :

$$\int R_\varphi^{\widetilde{\delta}}\, d\mu \leqslant R_\varphi^{\widetilde{\delta}}(x) \quad \text{pour toute} \quad \mu \in M_x^{\mathscr{E}(\overline{\omega})}(\omega^*)$$

car $R_\varphi^{\widetilde{\delta}}$ est un inf de fonctions continues de la forme $\operatorname{Inf}(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, chaque h_i étant dans $\mathcal{C}(\overline{\delta}) \cap \mathscr{E}(\delta)$.

Ceci s'écrit $\int H_\varphi^{\widetilde{\delta}}\, d\mu \leqslant H_\varphi^{\widetilde{\delta}}(x)$. On obtient l'inégalité dans l'autre sens en changeant φ en $-\varphi$, et l'on applique le théorème 8.

Réciproquement, supposons que $\{(\delta\ ,\ \widetilde{\delta})\}$ soit semi-régulier. Soit $x \in \overline{\delta}$, l'application $\varphi \rightsquigarrow H_\varphi^{\partial\widetilde{\delta}}(x)$ est une mesure positive portée par $\widetilde{\delta}$ et balayée de ϵ_x par rapport à $\mathcal{C}(\overline{\delta}) \cap \mathscr{E}(\delta)$. Il s'ensuit que $P_x^{\mathscr{E}}(\widetilde{\delta})$ est non vide.

Considérons la fonction $\check{\varphi} = -R_{(-\varphi)}^{\widetilde{\delta}}$ symétrique de $R_\varphi^{\widetilde{\delta}}$. La relation du balayage s'écrit :

$$\check{\varphi}(x) = \operatorname{Inf}\left\{\int \varphi\, d\mu \mid \mu \prec \epsilon_x\ ,\ \operatorname{Supp}\mu \subset \widetilde{\delta}\right\}$$

Pour voir que $P_x^{\mathcal{E}}(\widetilde{\delta})$ est réduit à un élément, il suffit donc de montrer que l'on a $R_\varphi^{\widetilde{\delta}}(x) = \check{\varphi}(x)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{C}(\widetilde{\delta})$.

On a $R_\varphi^{\widetilde{\delta}}(x) \leqslant H_\varphi^{\widetilde{\delta}}(x) \leqslant \check{\varphi}(x)$, car $H_\varphi^{\widetilde{\delta}}$ appartient à la famille des fonctions de $\mathcal{C}(\overline{\delta}) \cap \mathcal{E}(\delta)$ qui majorent φ sur $\widetilde{\delta}$. On a évidemment $\check{\varphi} \leqslant R_\varphi^{\widetilde{\delta}}$ et le résultat suit.

32. *Remarque.* – Dans les mêmes hypothèses que la proposition 31, si de plus, pour tout voisinage V de $\overline{\delta}$ et pour tout voisinage W de $\widetilde{\delta}$, il existe un ouvert semi-régulier $(\alpha, \widetilde{\alpha})$ vérifiant :

$$\overline{\delta} \subset \alpha \subset \overline{\alpha} \subset V \quad \text{et} \quad \widetilde{\alpha} \subset W$$

alors, on peut montrer que $\mathcal{E}(\overline{\delta})$ est dense dans $\mathcal{C}(\overline{\delta}) \cap \mathcal{E}(\delta)$ si et seulement si pour chaque x de $\overline{\delta}$, $M_x^{\mathcal{E}(\delta)}(\widetilde{\delta})$ ne contient qu'une seule mesure. (cf. aussi n° 70).

CHAPITRE II

I. Caractérisations de la propriété de faisceau.

Nous allons maintenant donner des conditions pour qu'un préfaisceau maximal en notre sens, soit un faisceau.

33. DEFINITION. – *On dit qu'un préfaisceau* $\mathfrak{F}$ *de cônes convexes de fonctions* s.c.i. $> -\infty$ *a la propriété de tronquage (resp. de tronquage faible) si pour tout ouvert* $V \subset \Omega$, *tout* α *ouvert contenu dans* V, *toute fonction* $v \in \mathfrak{F}(V)$ *et toute fonction* $f \in \mathfrak{F}(\alpha)$, (*resp.* $f \in \ (\overline{\alpha} \cap V)$), *vérifiant :*

$$\underset{\substack{x \to y \\ x \in \alpha}}{\underline{\mathrm{Lim}}}\ f(x) \geqslant v(y) \qquad \textit{pour tout} \qquad y \in \partial\alpha \cap V$$

(resp. $f(y) > v(y)$ pour tout $y \in \partial\alpha \cap V$)

la fonction f' *définie par :*

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{Inf}(f(x), v(x)) & \textit{pour } x \in \alpha \\ v(x) & \textit{pour } x \in V\setminus\alpha \end{cases}$$

appartient à $\mathfrak{F}(V)$.

On dit que $\mathfrak{F}$ *a la propriété de tronquage à zéro (resp. de tronquage faible à zéro) si* $\mathfrak{F}$ *vérifie la condition ci-dessus dans laquelle on a remplacé la fonction* v *par la constante* 0.

La fonction f' est obtenue en "tronquant v par f dans α".

Remarque. – Si $\mathfrak{F}$ est relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega\ , \omega^*)\}$, et si $\mathfrak{F}$ a la propriété de tronquage faible à zéro (toujours vérifié si $\mathfrak{F}$ est un faisceau et si $\mathfrak{F}$ est stable par enveloppes inférieures finies), alors, pour chaque ouvert de base $\omega \in \mathcal{B}$, la restriction $\mathfrak{F}|_\omega$ de $\mathfrak{F}$ à ω vérifie le principe du minimum usuel dans ω.

En effet, si $s \in \mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, $\overline{\alpha} \subset \omega$, $s > 0$ sur $\partial\alpha$, la fonction

$$w = \begin{cases} \mathrm{Inf}(s\ , 0) \text{ dans } \overline{\alpha} \\ \quad 0 \qquad \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{appartient à } \mathfrak{F}(\overline{\omega})$$

et vérifie $w \geqslant 0$ sur $\partial\omega$. On a donc $w \geqslant 0$ sur $\overline{\omega}$, donc $s \geqslant 0$ sur $\overline{\alpha}$. Si l'on a seulement $s \geqslant 0$ sur $\partial\alpha$, on se ramène au cas précédent à l'aide de la condition du balayage.

34. DEFINITIONS. – *On dit que la base $\mathcal{B}$ est $\mathfrak{F}$-adéquate si pour tout couple d'ouverts ω et $\omega' \in \mathcal{B}$ et vérifiant $\omega^* \cap \overline{\omega}' = \phi$, $\overline{\omega} \cap \partial\omega'$ est un compact de Šilov de $\mathfrak{F}(\overline{\omega} \cap \overline{\omega}')$* (si $\overline{\omega} \cap \overline{\omega}' = \phi$, *la condition est conventionnellement vérifiée*).

On dit que $\mathcal{B}$ est faiblement $\mathfrak{F}$-adéquate si pour tout $\omega \in \mathcal{B}$ et tout $x \in \partial\omega \backslash \omega^*$, il existe un ouvert $W \ni x$, $W \cap \omega^* = \phi$, tel que pour tout $\omega' \in \mathcal{B}$, $x \in \omega' \subset \overline{\omega}' \subset W$, on ait la propriété que $\overline{\omega} \cap \partial\omega'$ soit un compact de Šilov de $\mathfrak{F}(\overline{\omega} \cap \overline{\omega}')$.

Toute base $\mathfrak{F}$-adéquate est aussi faiblement $\mathfrak{F}$-adéquate.

Exemples de bases $\mathfrak{F}$-adéquates.

1) Sur $\mathbf{R}$, le préfaisceau $\mathfrak{F}$ des fonctions croissantes s.c.i. et la base $\mathcal{B}$ constituée des intervalles relativement compacts $\omega =]a, b[$, $a < b$, avec $\omega^* = \{a\}$.

2) Dans $\mathbf{R}^2$, le préfaisceau $\mathfrak{F}$ des fonctions localement concaves et la base $\mathcal{B}$ constituée des triangles munis de leurs sommets comme frontière distinguée.

35. THEOREME (propriété de moyenne). – *Soit $\mathfrak{F}$ un préfaisceau maximal relatif à une base $\mathcal{B}$. On suppose que $\mathfrak{F}$ est $\mathcal{B}$ séparant, et que $\mathcal{B}$ est faiblement $\mathfrak{F}$-adéquate.*

Alors, $\mathfrak{F}$ est un faisceau, et on a une "propriété de moyenne" : soit f une fonction s.c.i. $> -\infty$ *sur un ouvert* U : *alors f appartient à $\mathfrak{F}(U)$ si et seulement si elle vérifie la condition suivante :*

$\forall x \in U$, $\forall V$ *ouvert* $\ni x$, *il existe* $\omega \in \mathcal{B}$, $x \in \omega \subset \overline{\omega} \subset U \cap V$ *tel que l'on ait :*

$$\int f d\mu \leqslant f(x)$$

pour toute mesure $\mu \in M_x^{\mathfrak{F}(\overline{\omega})}(\partial\omega)$.

Démonstration. – Soit f s.c.i. $> -\infty$ sur U et vérifiant la condition de l'énoncé. On doit montrer que la frontière de Choquet ∂C

du cône $C = \mathcal{F}(\bar{\omega}') + \mathbf{R}^+ f$ est incluse dans ω'^*, ω' étant un ouvert arbitraire de la base $\mathcal{B}$, tel que $\bar{\omega}' \subset U$. Soit $x \in \omega'$: il existe $\omega \in \mathcal{B}$, $x \in \omega \subset \bar{\omega} \subset \omega'$ tel que :

$$f(x) \geqslant \int f d\mu$$

pour toute mesure $\mu \in M_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}$. Pour toute $v \in \mathcal{F}(\bar{\omega}')$, on a aussi :

$$v(x) \geqslant \int v d\mu$$

Chaque mesure $\mu \in M_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}$ est donc une balayée de ϵ_x par rapport à C. ϵ_x admet donc une balayée par rapport à C, distincte de ϵ_x (car portée par $\partial\omega$).

Soit maintenant $x \in \partial\omega' \backslash \omega'^*$. Notons W_x l'ouvert W dont la définition 34 assure l'existence. Il y a un $\omega \in \mathcal{B}$, $x \in \omega \subset \bar{\omega} \subset U \cap W_x$ tel que

$$f(x) \geqslant \int f d\mu$$

pour toute $\mu \in M_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}(\partial\omega)$.

Or, $\bar{\omega}' \cap \partial\omega$ est un compact de Silov de $\mathcal{F}(\bar{\omega} \cap \bar{\omega}')$ (déf. 34). Il y a donc une mesure ν portée par $\bar{\omega}' \cap \partial\omega$ et vérifiant :

$$v(x) \geqslant \int v d\nu$$

pour toute $v \in \mathcal{F}(\bar{\omega} \cap \bar{\omega}')$, en particulier pour toute $v \in \mathcal{F}(\bar{\omega}')$, et pour toute $v \in \mathcal{F}(\bar{\omega})$. Il s'ensuit que ν est un élément de $M_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}(\partial\omega)$. Par suite, on a aussi $f(x) \geqslant \int f d\nu$, (Condition sur f). Ceci prouve que ν est une balayée de ϵ_x par rapport à C ; elle est distincte de ϵ_x car portée par $\partial\omega$, donc x n'est pas dans ∂C.

Q.E.D.

Il reste à prouver que $\mathcal{F}$ est un faisceau : c'est évident d'après la forme de la condition d'appartenance que nous venons d'établir.

Remarque. – On peut remplacer dans ce qui précède $\mathcal{F}$ par un préfaisceau $\mathcal{E}$ d'espaces vectoriels maximal relatif à $\mathcal{B}$: la démonstration est la même.

36. THEOREME. – *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau maximal relatif à une base $\mathcal{B}$, et $\mathcal{B}$-séparant.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{F}$ *est un faisceau.*

2) $\mathcal{F}$ *vérifie la propriété de tronquage faible à zéro.*

3) $\mathcal{F}$ *vérifie la propriété de tronquage.*

4) *La base* $\mathcal{B}$ *est* $\mathcal{F}$*-adéquate.*

5) *La base* $\mathcal{B}$ *est faiblement* $\mathcal{F}$*-adéquate.*

6) $\mathcal{F}$ *vérifie la propriété de moyenne de théorème 35* (i.e. *les fonctions de* $\mathcal{F}$ *sont caractérisées par la propriété de moyenne*).

Démonstration. – On suivra le schéma :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 1 \arrow[dlll, Rightarrow] & & & \\
2 \arrow[drrr, Rightarrow] & & 3 \arrow[ll, Rightarrow] & & 6 \arrow[ll, Rightarrow] & & 5 \arrow[ll, Rightarrow] \arrow[ulll, Rightarrow] \\
 & & & 4 \arrow[urrr, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}$$

1) $\Rightarrow$ 2)

Soient $\alpha \subset V$ deux ouverts et $f \in \mathcal{F}(\bar{\alpha} \cap V)$. Si $f(y)$ est > 0 en tout point $y \in V \cap \partial\alpha$, la fonction obtenue en tronquant 0 par f dans α est localement dans $\mathcal{F}$ sur V, car $\mathcal{F}$ maximal est stable par enveloppes inférieures finies, donc dans $\mathcal{F}$ car $\mathcal{F}$ est un faisceau.

2) $\Rightarrow$ 4)

Soient ω_1 et $\omega_2 \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2 \neq \phi$ et $\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2^* = \phi$. Soit $K = \partial\omega_1 \cap \bar{\omega}_2$. On doit montrer que la relation $v \in \mathcal{F}(\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2)$, $v \geqslant 0$ sur K entraîne $v \geqslant 0$ sur $\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2$. Commençons par le cas où l'on a $v > 0$ sur K. v est prolongeable sur un voisinage V de $\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2$ en fonction notée encore $v \in \mathcal{F}(V)$: on a donc $v > 0$ sur un voisinage V' de K. Considérons la famille filtrante décroissante $(K_i)_{i \in I}$ des voisinages compacts de $\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2$. Quand K_i tend vers $\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2$, $K_i \cap \partial\omega_1$ tend vers $K = \bar{\omega}_2 \cap \bar{\omega}_1 \cap \partial\omega_1$. On peut donc au besoin remplacer V par un voisinage plus petit V_1 de $\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2$ tel que l'on ait $v > 0$ sur $V_1 \cap \partial\omega_1$. De la même manière, on peut trouver un voisinage ouvert W de $\bar{\omega}_2$ vérifiant $W \cap \bar{\omega}_1 \subset V_1$ et $W \cap \partial\omega_1 \subset V_1 \cap \partial\omega_1$.

La fonction $v \in \mathcal{S}(V_1)_{|W \cap \bar{\omega}_1} \subset \mathcal{S}(W \cap \bar{\omega}_1)$ est > 0 sur $W \cap \partial\omega_1$, donc la fonction w définie par :

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in W \cap \complement\,\bar{\omega}_1 \\ \operatorname{Inf}(0\,, v(x)) & \text{si} \quad x \in W \cap \bar{\omega}_1 \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{S}(W)$, donc à $\mathcal{S}(\bar{\omega}_2)$.

On a $w = 0$ sur ω_2^*, donc $w \geqslant 0$ sur $\bar{\omega}_2$, soit $v \geqslant 0$ sur $\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2$. Si l'on a seulement $v \geqslant 0$ sur K, pour tout $x \in \bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2$, il y a une fonction $u \in \mathcal{S}(\bar{\omega}_2)$, $u > 0$ sur $\dot{\bar{\omega}}_2$, $u(x) < +\infty$. On a alors $v + \epsilon u > 0$ sur K, donc $v + \epsilon u \geqslant 0$ sur $\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2$, pour tout $\epsilon > 0$. On en tire $v(x) \geqslant 0$ ($\epsilon \to 0$, et $u(x) < +\infty$).

q.e.d.

4) $\Rightarrow$ 5) : évident.

5) $\Rightarrow$ 1) : c'est le théorème 35.

5) $\Rightarrow$ 6) : c'est le théorème 35.

6) $\Rightarrow$ 3) : soient V et α deux ouverts, $\alpha \subset V$, et $v \in \mathcal{S}(V)$ et $f \in \mathcal{S}(\alpha)$; vérifiant :

$$\varliminf_{x \to y} f(x) \geqslant v(y) \quad \text{pour tout} \quad y \in V \cap \partial\alpha$$

La fonction f' définie par :

$$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{Inf}(f(x)\,, v(x)) & \text{pour} \quad x \in \alpha \\ v(x) & \text{pour} \quad x \in V \backslash \alpha \end{cases}$$

est s.c.i. $> -\infty$ dans V, et vaut v dans $V \backslash \alpha$. Pour tout $x \in V \backslash \alpha$, on a donc :

$$f'(x) = v(x) \geqslant \int v d\mu \geqslant \int f' d\mu$$

pour toute mesure $\mu \in M_x^{\mathcal{S}(\bar{\omega})}(\partial\omega)$, $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset V$, $x \in \omega$. Pour $x \in \alpha$, on a :

$$f'(x) = \operatorname{Inf}(f(x)\,, v(x)) \geqslant \int f' d\mu$$

pour toute mesure $\mu \in M_x^{\mathcal{S}(\bar{\omega})}(\partial\omega)$, $x \in \omega \subset \bar{\omega} \subset \alpha$, $\omega \in \mathcal{B}$.

La fonction f' vérifie donc bien le critère d'appartenance à $\mathcal{S}(V)$.

3) $\Rightarrow$ 2) : évident.

37. *Remarques.*

1) Dans la démonstration du théorème 36, nous n'avons utilisé l'hypothèse de $\mathcal{B}$-séparation que pour établir les implications 5) $\Rightarrow$ 1) et 5) $\Rightarrow$ 6). De même, l'hypothèse de maximalité sur $\mathfrak{F}$ peut être supprimée si l'on ne désire que les implications :

6) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5).

Pour 1) $\Rightarrow$ 2), elle peut être remplacée par l'hypothèse plus faible : chaque $\mathfrak{F}(U)$ est stable par enveloppes inférieures finies.

2) Dans les hypothèses du théorème 36, si l'on suppose que pour chaque $\omega \in \mathcal{B}$, ω^* est la frontière topologique $\partial\omega$ de ω, cette base est évidemment faiblement $\mathfrak{F}$-adéquate. Toutes les propriétés du théorème 36 sont donc vérifiées.

3) Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau qui est maximal dans l'ensemble des faisceaux relatifs à une base $\mathcal{B} = \{(\omega , \partial\omega)\}$, et si $\mathfrak{F}$ est $\mathcal{B}$-séparant, alors $\mathfrak{F}$ est aussi maximal dans l'ensemble des préfaisceaux relatifs à $\mathcal{B}$. En effet, tout préfaisceau maximal relatif à $\mathcal{B}$ et contenant $\mathfrak{F}$ est un faisceau d'après la remarque 2) ci-dessus, et est donc identique à $\mathfrak{F}$.

38. PROPOSITION. – *Soit $\mathfrak{F}$ un préfaisceau maximal relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega , \omega^*)\}$. On suppose que $\mathfrak{F}$ est un faisceau et que $\mathfrak{F}$ est $\mathcal{B}$-séparant.*

Considérons la base $\mathcal{C}$ constituée par tous les ouverts relativement compacts α ayant la propriété suivante :

$\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$ sépare linéairement $\overline{\alpha}$,

pour tout $x \in \overline{\alpha}$, il existe u et $v \in \mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, $u > 0$, $u(x) < \infty$, $v(x) < 0$ (condition du balayage). *Posons pour tout $\alpha \in \mathcal{C}$:*

α^{**} = la frontière de Silov de $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$.

Alors $\mathfrak{F}$ est maximal relatif à la base $\mathcal{C} = \{(\alpha , \alpha^{**})\}$.

Démonstration. – Il est clair que $\mathfrak{F}$ est relatif à la base $\mathcal{C} = \{(\alpha , \alpha^{**})\}$. Soit $\mathfrak{G}$ un préfaisceau relatif à $\mathcal{C}$ et contenant $\mathfrak{F}$. On va montrer que $\mathfrak{G}$ est relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega , \omega^*)\}$. D'abord $\mathcal{B}$ est incluse dans $\mathcal{C}$. Pour chaque $\omega \in \mathcal{B}$, ω^* est un compact de Silov de $\mathfrak{F}(\overline{\omega})$: il contient la frontière de Silov ω^{**} de $\mathfrak{F}(\overline{\omega})$: c'est donc un compact de Silov de $\mathfrak{G}(\overline{\omega})$ puisque $\mathfrak{G}$ est relatif à $\mathcal{C}$. On en déduit $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$ par maximalité. $\mathfrak{F}$ est donc maximal relatif à $\mathcal{C}$.

38bis. *Remarques.*

1) On peut montrer plus généralement que $\mathcal{F}$ est maximal relatif à toute base $\mathcal{D} = \{(\alpha, \alpha^{**})\}$ incluse dans $\mathcal{C}$, stable par intersections finies et possédant la propriété suivante : pour tous α et $\beta \in \mathcal{D}$, on a $\overline{\alpha \cap \beta} = \overline{\alpha} \cap \overline{\beta}$.

2) Si pour tout $\omega \in \mathcal{B}$, on a $\omega^* = \partial\omega$, alors $\mathcal{F}$ est maximal relatif à n'importe quelle base $\mathcal{A} = \{(\alpha, \alpha^{***})\}$ ayant les propriétés suivantes :

pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$ sépare linéairement $\overline{\alpha}$,

pour tout $x \in \overline{\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe u et $v \in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$, $u > 0$, $u(x) < +\infty$ et $v(x) < 0$, (condition du balayage),

pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, α^{***} est un compact de Silov de $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$ contenu dans $\partial\alpha$.

En effet, si $\mathcal{G}$ est relatif à $\mathcal{A}$ et contient $\mathcal{F}$, on voit d'abord que $\mathcal{G}$ est relatif à la base $\mathcal{A}'$ obtenue en remplaçant α^{***} par $\partial\alpha$ pour chaque $\alpha \in \mathcal{A}$, puis grâce à la $\mathcal{B}$-séparation de $\mathcal{F}$ (donc aussi de $\mathcal{G}$) que $\mathcal{G}$ est relatif à $\mathcal{B}$. (cf. par exemple la fin de la démonstration de la proposition 16, ou la démonstration du théorème 35).

3) Sous les hypothèses du théorème 35, et si α et β sont deux ouverts relativement compacts tels que $\overline{\alpha} \cap \overline{\beta} = \phi$, et tels que $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$ (resp. $\mathcal{F}(\overline{\beta})$) sépare linéairement $\overline{\alpha}$ (resp. $\overline{\beta}$), et si pour tout $x \in w$, $\overline{\alpha} \cup \overline{\beta}$, il existe u et $v \in \mathcal{F}(\overline{\alpha} \cup \overline{\beta})$, $u > 0$, $u(x) < +\infty$, $v(x) < 0$, alors on montre facilement que la frontière de Silov de $\mathcal{F}(\overline{\alpha} \cup \overline{\beta})$ est la réunion des frontières de Silov de $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$ et de $\mathcal{F}(\overline{\beta})$.

II. Etude des frontières de Silov.

On a vu que la propriété de faisceau apparaissait lorsque des conditions sur les frontières de Silov des ouverts de base, se trouvaient réalisées.

On va montrer que l'appartenance à la frontière de Silov d'un ouvert relativement compact est une propriété de caractère local.

Dans la suite, $\mathcal{F}$ est un préfaisceau maximal relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega, \omega^*)\}$. On suppose que $\mathcal{F}$ est $\mathcal{F}$-séparant, et que $\mathcal{B}$ est $\mathcal{F}$-adéquate. (donc $\mathcal{F}$ est un faisceau).

Reprenons la base $\mathcal{C}$ de la proposition 38 : c'est la base formée de tous les ouverts α relativement compacts ayant les propriétés suivantes :

$\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$ sépare linéairement les points de $\overline{\alpha}$,

pour tout $x \in \overline{\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{C}$, il existe u et $v \in \mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, telles que : $u > 0$, $u(x) < +\infty$, et $v(x) < 0$.

On a vu que $\mathfrak{F}$ est maximal relatif à $\mathcal{C}$.

39. THEOREME. – *Soit α un ouvert appartenant à $\mathcal{C}$. Pour qu'un point $x \in \partial\alpha$ soit un point frontière de Silov de $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, il faut (resp. il suffit) que pour tout (resp. que pour un) $\delta \in \mathcal{C}$, $x \in \delta$, x soit un point frontière de Silov de $\mathfrak{F}(\overline{\delta} \cap \overline{\alpha})$.*

Démonstration. – Supposons d'abord que x soit point frontière de Choquet de $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$. S'il ne l'était pas de $\mathfrak{F}(\overline{\delta} \cap \overline{\alpha})$, il y aurait une mesure $\mu \neq \epsilon_x$ portée par $\overline{\delta} \cap \overline{\alpha}$ et balayée de ϵ_x par rapport à $\mathfrak{F}(\overline{\delta} \cap \overline{\alpha})$ et $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})_{|\overline{\delta} \cap \overline{\alpha}}$. Elle serait aussi balayée de ϵ_x par rapport à $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, ce qui contredirait l'hypothèse. Si x est point frontière de Šilov de $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, il y a dans tout voisinage β de x un point frontière de Choquet de $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, donc de $\mathfrak{F}(\overline{\delta} \cap \overline{\alpha})$ il s'ensuit que x lui-même est point frontière de Šilov de $\mathfrak{F}(\overline{\delta} \cap \overline{\alpha})$.

Soit maintenant $x \in \partial\alpha$, pour lequel il existe δ tel que x soit un point frontière de Šilov de $\mathfrak{F}(\overline{\delta} \cap \overline{\alpha})$.

Si x n'est pas dans la frontière de Šilov de $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, il possède un voisinage ouvert δ' vérifiant $\overline{\delta}' \subset \delta$, donc $\delta' \in \mathcal{C}$, et tel que δ' ne rencontre pas la frontière de Šilov de $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$.

Comme $\mathcal{C}$ est $\mathfrak{F}$-adéquate (puisque $\mathfrak{F}$ est un faisceau), pour tout $y \in \partial\alpha \cap \delta'$, il existe une mesure $\mu_y \in M_y^{\mathfrak{F}(\overline{\delta}' \cap \overline{\alpha})}(\partial\delta' \cap \overline{\alpha})$.

Ces points $y \in \partial\alpha \cap \delta'$ ne sont pas dans la frontière de Choquet de $\mathfrak{F}(\overline{\delta} \cap \overline{\alpha})$, car toute mesure μ_y est une balayée de ϵ_y par rapport à $\mathfrak{F}(\overline{\delta}' \cap \overline{\alpha})$ donc par rapport à $\mathfrak{F}(\overline{\delta} \cap \overline{\alpha})$ et est distincte de ϵ_y, car portée par $\partial\delta'$. La frontière de Choquet de $\mathfrak{F}(\overline{\delta} \cap \overline{\alpha})$ ne rencontre donc pas δ', et x ne peut être point frontière de Šilov de $\mathfrak{F}(\overline{\delta} \cap \overline{\alpha})$.

40. COROLLAIRE. – *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème* 39, *si α et β sont deux ouverts relativement compacts appartenant à*

$\mathcal{C}$, *alors la frontière de Šilov de* $\mathcal{F}(\overline{\alpha} \cap \overline{\beta})$ *est contenue entre les ensembles :*

$$H = (\alpha \cap \beta^{**}) \cup (\beta \cap \alpha^{**})\text{([22])}$$

et

$$K = \overline{H} \cup (\partial\alpha \cap \partial\beta)$$

Démonstration. – Soit $x \in \alpha \cap \beta^{**}$. D'après le théorème 39, x est point frontière de Silov de $\mathcal{F}(\overline{\alpha} \cap \overline{\beta})$.

Soit maintenant un point x non dans K : il est intérieur au moins à α où β : supposons que ce soit à α : x n'est donc pas dans β^{**} et par suite il ne peut être dans la frontière de Šilov de $\mathcal{F}(\overline{\alpha} \cap \overline{\beta})$ (théorème 39).

Remarques.

1) Ce résultat est le meilleur possible : prenons en effet pour $\mathcal{F}$ le faisceau des fonctions localement concaves sur $\mathbf{R}^2$ et comme base $\mathcal{B}$ celle qui est constituée par les triangles avec leurs sommets comme frontière distinguée. On voit que $\mathcal{F}$ vérifie les conditions du corollaire 40 (cf. n° 13).

Si α et β sont deux triangles arbitraires, leur intersection est un polygone P convexe dont les points extrêmaux (frontière de Choquet de $\mathcal{F}(\overline{P})$) sont inclus dans K et même sont parfois exactement les points du compact K du corollaire 40.

2) On peut appeler "strictement convexe" un ouvert relativement compact ω dont tout point frontière appartient à la frontière de Silov de $\mathcal{F}(\overline{\omega})$. Le théorème 39 montre que la stricte convexité est en un certain sens une propriété locale de la frontière.

Nous verrons plus loin, que sous certaines conditions, il existe beaucoup d'ouverts strictement convexes.

III. Maximalité par rapport à deux principes du minimum.

Nous allons voir maintenant, que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$ vérifient certaines conditions supplémentaires, le préfaisceau $\mathcal{F}$ maximal relatif à $\mathcal{B}$ est

([22]) α^{**} désigne la frontière de Šilov de $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$ (notation de la proposition 38).

déjà maximal par rapport à un principe du minimum moins strict. C'est pourquoi nous posons la définition :

41. Definition. – *$\mathcal{B}$ est dite $\mathcal{F}$-très adéquate*([23]) *si pour tous ω, $\omega' \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \cap \omega'^* = \phi$, pour tout $x \in \partial\omega' \cap \bar{\omega}$ et toute $\mu \in M_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}(\omega^*)$, on a supp. $\mu \subset \bar{\omega}'$.*

42. Proposition. – *Si $\mathcal{F}$ est séparant, relatif à $\mathcal{B}$, et si $\mathcal{B}$ est $\mathcal{F}$-très adéquate, alors $\mathcal{B}$ est $\mathcal{F}$-adéquate.*

Démonstration. – Soient ω, $\omega' \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \cap \omega'^* = \phi$.

Considérons un voisinage ouvert V relativement compact de $\bar{\omega} \cap \bar{\omega}'$. On va montrer que la frontière de Choquet du cône C_V formée des restrictions de $\mathcal{F}(V)$ à $\bar{\omega} \cap \bar{\omega}'$ est incluse dans $\bar{\omega}' \cap \partial\omega$.

– Soit $x \in \omega' \cap \omega$, le principe du minimum sur $\mathcal{B}$ montre que $x \notin \partial C_V$.

– Soit $x \in \partial\omega' \cap \omega$, soit $\omega'' \in \mathcal{B}$, $x \in \omega'' \subset \bar{\omega}'' \subset V \cap \omega \backslash \omega'^*$. D'après l'hypothèse ($\bar{\omega}'' \cap \omega' = \phi$), il existe μ balayée de ϵ_x par rapport à $\mathcal{F}(\bar{\omega}'')$ et portée par $\bar{\omega}'$. Cette mesure μ est donc balayée par rapport à C_V. On a supp. $\mu \subset \omega'^*$ donc $\mu \neq \epsilon_x$.

Ceci prouve que $x \notin \partial C_V$.

Finalement, on a $\partial C_V \subset \partial\omega \cap \bar{\omega}'$. V étant arbitraire, on a

$$\partial\mathcal{F}(\bar{\omega} \cap \bar{\omega}') \subset \partial\omega \cap \bar{\omega}'$$

Si $\mathcal{B}$ est $\mathcal{F}$-très adéquate, on peut renforcer les conclusions du théorème 35 comme il suit :

43. Proposition. – *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau maximal relatif à $\mathcal{B}$ et séparant. On suppose que $\mathcal{B}$ est $\mathcal{F}$-très adéquate. Alors $\mathcal{F}$ est un faisceau, et on a une propriété de moyenne moins stricte que celle du théorème 35 :*

$\forall x \in U$, $\forall V$ *ouvert* $\ni x$, $\exists \omega \in \mathcal{B}$, $x \in \omega \subset \bar{\omega} \subset U \cap V$ *et il existe*

$$\mu \in M_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}(\omega^*) \quad \textit{telle que l'on ait :}$$

$$\int f d\mu \leqslant f(x)$$

([23]) A priori, ceci n'entraîne pas que $\mathcal{B}$ est $\mathcal{F}$-adéquate.

Démonstration. – Si f est s.c.i. dans U et a la propriété de moyenne ci-dessus, soit $\omega' \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega}' \subset \mathrm{U}$. On considère le cône $\mathrm{C_V} = \mathbf{R}^+ f_{|\bar{\omega}'} + \mathcal{F}(\mathrm{V})_{|\bar{\omega}'}$, V étant un voisinage ouvert relativement compact de $\bar{\omega}'$.

Si x est intérieur à ω', on montre qu'il ne peut être dans $\partial \mathrm{C_V}$.

Si $x \in \partial\omega' \backslash \omega'^*$, il existe $\omega \ni x$, $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset \mathrm{V} \backslash \omega'^*$ et une mesure

$$\mu \in \mathrm{M}_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}(\omega^*) \quad \text{telle que l'on ait :}$$

$$\int f d\mu \leqslant f(x)$$

Cette mesure est portée par $\bar{\omega}'$, elle est donc balayée de ϵ_x par rapport à $\mathcal{F}(\mathrm{V})_{|\bar{\omega}'}$ et donc par rapport à $\mathrm{C_V}$.

On a donc $\partial \mathrm{C_V} \subset \omega'^*$: on termine comme dans la proposition 42 (V arbitraire).

$\mathcal{F}$ est un faisceau, car cette propriété de moyenne est un critère local.

Remarque. – On peut remplacer dans ce qui précède le préfaisceau $\mathcal{F}$ par un préfaisceau $\mathcal{E}$ d'espaces vectoriels, maximal relatif à $\mathcal{B}$.

44. THEOREME. – *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau maximal et séparant, relatif à une base $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}$ est $\mathcal{F}$-très adéquate, alors $\mathcal{F}$ est maximal pour le principe du minimum au sens usuel* (i.e. *sur la base* $\mathcal{B}' = \{(\omega , \partial\omega)\}$ *avec* $\omega \in \mathcal{B}$).

Démonstration. – Soit $\mathcal{F}_m$ un préfaisceau vérifiant le principe du minimum usuel, et contenant $\mathcal{F}$.

Soit $\omega \in \mathcal{B}$, on va montrer que ω^* est un compact de Šilov de $\mathcal{F}_m(\bar{\omega})$.

Si x est intérieur à ω, il est clair qu'il n'appartient pas à la frontière de Choquet $\partial\, \mathcal{F}_m(\bar{\omega})$.

Soit $x \in \partial\omega \backslash \omega^*$. Considérons un ouvert V relativement compact et contenant $\bar{\omega}$. Soit $\mathrm{C_V}$ la restriction à $\bar{\omega}$ du cône $\mathcal{F}_m(\mathrm{V})$.

$$\text{La fonction } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \bar{\omega} \backslash \omega^* \\ +\infty & \text{si} \quad x \in \mathrm{V} \backslash \bar{\omega} \end{cases}$$

est s.c.i. sur $V\setminus\omega^*$ et vérifie la propriété de moyenne de la proposition 40. On a donc $g \in \mathcal{F}(V\setminus\omega^*)$.

Soit $\omega' \in \mathcal{B}$, $x \in \omega' \subset \bar{\omega}' \subset V\setminus\omega^*$. Il existe une mesure $\mu \in M_x^{\mathcal{F}_m(\bar{\omega}')}(\partial\omega')$. Cette mesure μ est balayée de ϵ_x par rapport au cône C_V et aussi par rapport à $\mathcal{F}(V\setminus\omega^*)$. Elle est donc portée par $\bar{\omega}\setminus\omega^*$ (car $g \in \mathcal{F}(V\setminus\omega^*)$). Comme elle est portée par $\partial\omega'$, elle est portée par $\bar{\omega} \cap \partial\omega'$. Elle est donc différente de ϵ_x.

Ceci prouve que x n'est pas dans ∂C_V.

On a ainsi $\partial C_V \subset \omega^*$. V étant arbitraire, on en conclut que $\partial\mathcal{F}_m(\bar{\omega}) \subset \omega^*$.

Comme $\mathcal{F}$ est maximal relatif à $\mathcal{B}$, on a donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}_m$.

c.q.f.d.

Nous verrons plus loin (n° 74) dans quel sens, le fait pour une base d'être $\mathcal{F}$-très adéquate, est nécessaire et suffisante pour que le préfaisceau $\mathcal{F}$, maximal relatif à $\mathcal{B}$, soit maximal pour le principe du minimum usuel.

Exemples.

1) Ce théorème s'applique au faisceau $\mathcal{F}$ des fonctions localement croissantes sur **R**, $\mathcal{B}$ étant la base constituée par les intervalles finis ouverts, $]a, b[$ munis de la frontière distinguée $]a, b[^* = \{a\}$.

$\mathcal{F}$ est maximal relatif à $\mathcal{B}$ (proposition 13) et séparant. $\mathcal{B}$ étant $\mathcal{F}$-très adéquate, on en déduit que $\mathcal{F}$ est maximal par rapport au principe du minimum usuel.

2) On prend pour $\mathcal{F}$ le faisceau des fonctions (hyperharmoniques pour l'équation de la chaleur dans $\mathbf{R}^2$, muni de la base de rectangles de l'exemple 3 du paragraphe 25).

Nous allons maintenant nous intéresser aux préfaisceaux d'espaces vectoriels.

45. LEMME. — *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau d'espaces vectoriels muni d'une base $\mathcal{B} = \{(\omega, \omega^*)\}$ d'ouverts semi-réguliers* (cf. déf. 27) *(on ne suppose pas que $\mathcal{E}$ soit relatif à $\mathcal{B}$). On suppose que $\mathcal{B}$ vérifie la condition suivante :*

pour tous ω, $\omega' \in \mathcal{B}$, $\omega \cap \omega' \neq \phi$ et $\bar{\omega} \cap \omega'^* = \phi$, l'ouvert $\omega \cap \omega' \in \mathcal{B}$ et l'on a : $(\omega \cap \omega')^* \subset \omega^* \cap \bar{\omega}'$.

Dans les conditions ci-dessus, on a pour tout $x \in \overline{\omega \cap \omega'}$

$$\rho_x^\omega = \rho_x^{\omega \cap \omega'}$$

(ρ_x^ω *est la mesure :* $\varphi \rightsquigarrow H_\varphi^{\omega^*}(x)$).

De plus, chaque point $x \in \partial\omega' \setminus \omega'^*$ *possède un voisinage* ω *tel que toute fonction* $h \in \mathcal{C}(\overline{\omega}') \cap \mathcal{E}(\omega')$ *admette un prolongement* $h_x \in \mathcal{E}(\omega' \cup \omega)$.

Démonstration. – Soit φ une fonction continue sur ω^*. La fonction $H_\varphi^{\omega^*}$ est continue sur $\overline{\omega \cap \omega'}$, appartient à $\mathcal{E}(\omega \cap \omega^*)$ et vaut φ sur $(\omega \cap \omega')^*$. Elle vaut donc $H_\varphi^{(\omega \cap \omega')^*}$ sur $\overline{\omega \cap \omega'}$. On a donc :

$$\int \varphi \, d\rho_x^\omega = \int \varphi \, d\rho_x^{\omega \cap \omega'} \quad \text{pour} \quad x \in \overline{\omega \cap \omega'}$$

Ceci prouve la première partie du lemme.

Soit maintenant $h \in \mathcal{C}(\overline{\omega}') \cap \mathcal{E}(\omega')$, pour tout $x \in \partial\omega' \setminus \omega'^*$, il existe un $\omega \in \mathcal{B}$, $x \in \omega \subset \overline{\omega} \subset \complement\, \omega'^*$; la fonction $H_h^{(\omega \cap \omega')^*}$ vaut h sur $\overline{\omega \cap \omega'}$. Si φ est un prolongement continu quelconque de h à ω^* tout entier, la fonction $H_\varphi^{\omega^*}$ vaut h sur $\overline{\omega \cap \omega'}$.

La fonction $$h_x = \begin{cases} h & \text{sur } \omega' \\ H_\varphi^{\omega^*} & \text{sur } \omega \end{cases}$$

répond aux conditions du lemme.

46. THEOREME. – *Soit* $\mathcal{E}$ *un faisceau d'espaces vectoriels muni d'une base d'ouverts semi-réguliers, vérifiant les conditions du lemme 45.*

Si $\mathcal{E}$ *est contenu dans un préfaisceau* $\mathfrak{F}$ *de cônes convexes, relatif à* $\mathcal{B}$, *séparant et maximal, alors* $\mathfrak{F}$ *est l'unique préfaisceau maximal séparant contenant* $\mathcal{E}$, *et* $\mathfrak{F}$ *est constitué des fonctions hyper-*$\mathcal{E}$. *Pour que* $f \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$ *il faut* (resp. *il suffit*) *que :*

– f soit s.c.i. $> -\infty$ *sur* U.

– $\forall \omega \in \mathcal{B}$, $\overline{\omega} \subset \mathrm{U}$, $\forall x \in \overline{\omega}$ (resp. $x \in \omega$) $\forall \varphi \in \mathcal{C}(\omega^*)$, $\varphi \leqslant f$

on ait $$f(x) \geqslant H_\varphi^{\omega^*}(x)$$

De plus, $\mathfrak{F}$ *est un faisceau, et il est maximal pour le principe du minimum usuel* (i.e. *sur la base* $\mathcal{B}' = \{(\omega\,,\,\partial\omega)\}$, *avec* $\omega \in \mathcal{B}$).

Démonstration. – Soit $\omega \in \mathcal{B}$. Désignons par C le cône $C = \mathcal{F}(\overline{\omega}) + \mathcal{C}(\overline{\omega}) \cap \mathcal{E}(\omega)$. Nous allons montrer que la frontière de Choquet ∂C de C est incluse dans ω^*. Soit $x \in \omega$: les fonctions de C vérifient le principe du minimum dans ω relativement à $\mathcal{B}$: x ne peut appartenir à ∂C.

Si $x \in \partial\omega\backslash\omega^*$: soit α le voisinage ouvert de x donné par le lemme 45. Considérons un ouvert $\beta \in \mathcal{B}$, $x \in \beta \subset \overline{\beta} \subset \alpha\backslash\omega^*$.

Nous allons montrer que :

$$C_{|\overline{\beta \cap \omega}} \subset \mathcal{F}(\overline{\beta \cap \omega})$$

On a évidemment :

$$\mathcal{F}(\overline{\omega})_{|\overline{\beta \cap \omega}} \subset \mathcal{F}(\overline{\beta \cap \omega})$$

Quant à $\mathcal{C}(\overline{\omega}) \cap \mathcal{E}(\omega)_{|\overline{\beta \cap \omega}}$ d'après le lemme 45, il est inclus dans

$$\mathcal{E}(\alpha)_{|\overline{\beta \cap \omega}} \quad \text{donc dans} \quad \mathcal{E}(\overline{\beta \cap \omega}) \subset \mathcal{F}(\overline{\beta \cap \omega})$$

Soit μ une mesure balayée de ϵ_x par rapport à $\mathcal{F}(\overline{\beta \cap \omega})$, et portée par $(\beta \cap \omega)^* \subset \beta^* \cap \overline{\omega}$. Elle est portée par β^*, et est donc distincte de ϵ_x. Elle est balayée de ϵ_x par rapport à $C_{|\beta \cap \omega}$ donc par rapport à C (sur $\overline{\omega}$).

Finalement, on a $x \notin \partial C$, puis $\partial C \subset \omega^*$.

Soient maintenant $\varphi \in \mathcal{C}(\omega^*)$, $f \in \mathcal{F}(\overline{\omega})$ telles que $\varphi \leqslant f$, $f - H_\varphi^{\omega^*} \in C$. Comme on a $f - H_\varphi^{\omega^*} \geqslant 0$ sur ω^*, on a donc $f - H_\varphi^{\omega^*} \geqslant 0$ sur $\overline{\omega}$.

Considérons maintenant le préfaisceau $\mathcal{G}$ donné par : $f \in \mathcal{G}(U)$ si f s.c.i. $> -\infty$ dans U et :

$$\forall\, \omega \in \mathcal{B},\ \overline{\omega} \subset U,\ \forall\, x \in \omega \quad \text{et} \quad \varphi \in \mathcal{C}(\omega^*),\ \varphi \leqslant f \quad \text{on a}$$

$$f(x) \geqslant H_\varphi^{\omega^*}(x)$$

Il est clair que $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{F}$. Pour voir qu'ils sont égaux, il suffit (maximalité de $\mathcal{F}$) de montrer que $\mathcal{G}$ vérifie le principe du minimum par rapport à $\mathcal{B}$.

Soit donc $\omega \in \mathcal{B}$, et soit $f \in \mathcal{G}(V)$, avec V ouvert $\supset \overline{\omega}$. On va montrer que la frontière de Choquet du cône $C = \mathcal{F}(\overline{\omega}) + \mathbf{R}^+ f$ est contenue dans ω^*. Comme ci-dessus, on voit qu'elle est contenue dans $\partial\omega$. Soit alors x un point de $\partial\omega\setminus\omega^*$. Considérons un ouvert $\omega' \in \mathcal{B}$, tel que $x \in \omega' \subset \overline{\omega}' \subset V\setminus\omega^*$. On a :

$$f(x) \geqslant \int f d\rho_x^{\omega'}$$

par hypothèse ($\overline{\omega}' \subset V$).

Si $u \in \mathcal{F}(\overline{\omega})$, d'après la partie "il faut" du théorème, et comme x est dans $\overline{\omega \cap \omega'}$, on a :

$$u(x) \geqslant \int u d\rho_x^{\omega \cap \omega'}$$

La mesure $\rho_x^{\omega'} = \rho_x^{\omega \cap \omega'}$ est donc une balayée de ϵ_x par rapport à C. Elle est distincte de ϵ_x car portée par $\partial\omega'$ et le résultat s'ensuit. La relation $f \geqslant 0$ sur ω^* entraîne donc $f \geqslant 0$ sur $\overline{\omega}$.

c.q.f.d.

Il reste à prouver que $\mathcal{F}$ est un faisceau et qu'il est maximal pour le principe du minimum sur la base $\mathcal{B}' = \{(\omega, \partial\omega)\}$ $(\omega \in \mathcal{B})$.

Supposons d'abord que $\mathcal{F}$ soit séparant (et non supposé seulement $\mathcal{B}$-séparant). La proposition 43 et le théorème 44 montrent qu'il suffit de prouver que la base $\mathcal{B} = \{(\omega, \omega^*)\}$ est $\mathcal{F}$-très adéquate. Or, considérons un ouvert $\omega \in \mathcal{B}$ et la fonction :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \overline{\omega}\setminus\omega^* \\ +\infty & \text{si} \quad x \in \complement\,\overline{\omega} \end{cases}$$

Elle est s.c.i. $> -\infty$ dans l'ouvert $\complement\,\omega^*$ et y vérifie les inégalités sur les mesures $\rho_x^{\omega'}$ pour $\omega' \in \mathcal{B}$, $\overline{\omega}' \subset \complement\,\omega^*$ à cause des hypothèses faites sur la base $\mathcal{B}$. C'est donc une fonction de $\mathcal{F}(\complement\,\omega^*)$.

Soit $\omega' \in \mathcal{B}$, tel que $\overline{\omega}' \subset \complement\,\omega^*$: pour tout $x \in \overline{\omega} \cap \overline{\omega}'$, et toute $\mu \in M_x^{\mathcal{F}(\overline{\omega}')}$ on a donc supp. $\mu \subset \overline{\omega}$, ce qui entraîne en particulier que $\mathcal{B}$ est $\mathcal{F}$-très adéquate.

Dans le cas où $\mathcal{F}$ est seulement supposé $\mathcal{B}$-séparant, on peut appliquer ce qui précède à la restriction $\mathcal{F}_{|\omega}$ de $\mathcal{F}$ à tout ouvert ω de la base $\mathcal{B}$. Soit alors $\mathcal{G}$ un préfaisceau relatif à $\mathcal{B}' = \{(\omega, \partial\omega)\}$ et contenant $\mathcal{F}$. On a ainsi : $\mathcal{G}_{|\omega} = \mathcal{F}_{|\omega}$ pour tout $\omega \in \mathcal{B}$.

Pour tout ouvert U, toute fonction $f \in \mathcal{G}(U)$, et tout $\omega \in \mathcal{B}$, on a donc $f \in \mathcal{F}(U \cap \omega)$. Montrons que l'on a $f \in \mathcal{F}(U)$.

Soit $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset U$. Considérons le cône $C = \mathcal{F}(\bar{\omega}) + \mathbf{R}^+ f$. Si $x \in \omega$, il ne peut être dans la frontière de Choquet ∂C du cône C (raisonnement habituel car $f \in \mathcal{F}(\omega)$). Si x est dans $\partial\omega \backslash \omega^*$, soient, d'abord $\omega' \in \mathcal{B}, x \in \omega' \subset \bar{\omega}' \subset U \backslash \omega^*$ puis $\omega'' \in \mathcal{B}, x \in \omega'' \subset \bar{\omega}'' \subset \omega'$. On a $f \in \mathcal{F}(\omega')$, donc $f \in \mathcal{F}(\bar{\omega}'')$. Par suite :

$$f(x) \geqslant \int f \, d\rho_x^{\omega''}$$

Pour $u \in \mathcal{F}(\bar{\omega})$, on a :

$$u(x) \geqslant \int u \, d\rho_x^{\omega \cap \omega''} \qquad \text{car } x \in \overline{\omega \cap \omega''}$$

La mesure $\rho_x^{\omega''} = \rho_x^{\omega \cap \omega''}$ est donc une balayée de ϵ_x, par rapport à C, et distincte de ϵ_x (portée par $\partial\omega''$), donc $x \notin \partial C$.

On a donc :

$$u + f \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \omega^* \Rightarrow u + f \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \bar{\omega} (u \in \mathcal{F}(\bar{\omega}))$$

donc $f \in \mathcal{F}(U)$.

Et par suite : $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

$\mathcal{F}$ est donc maximal relatif à $\mathcal{B}' = (\omega \, , \partial\omega)$. C' est un faisceau d'après la remarque 37,2).

c.q.f.d.

Le théorème 46 est complètement démontré.

47. Corollaire. – *Dans les hypothèses du théorème précédent, et si $\mathcal{E}$ est séparant et relatif à $\mathcal{B}$, alors $\mathcal{E}$ est maximal (au sens des préfaisceaux d'espaces vectoriels).*

Démonstration. – Tout préfaisceau $\mathcal{E}'$ vérifiant le principe du minimum relativement à $\mathcal{B}$ et contenant $\mathcal{E}$ est contenu dans $\mathcal{F} \cap (-\mathcal{F})$ (qui vaut $\mathcal{E}$ d'après le théorème).

48. Application. – Nous avons introduit la notion de base $\mathcal{F}$-très adéquate afin de savoir où se plaçait l'axiomatique de J. Kohn dans notre cadre. On aurait pu penser que son axiomatique pouvait rendre compte de cas analogues à celui des fonctions séparément harmoniques. Le théorème 43 montre qu'il n'en est rien ; au contraire, son axiomatique est maximale pour le principe du minimum usuel. Kohn montre

que lorsqu'il existe une base d'ouverts réguliers, les fonctions surharmoniques usuelles coïncident avec les fonctions surharmoniques définies a priori. On peut retrouver ces résultats en utilisant la partie unicité du Corollaire 30 et du théorème 46. En réalité la maximalité au sens usuel s'obtient sans base d'ouverts réguliers ou semi-réguliers.

CHAPITRE III

Le but de ce chapitre est de montrer comment la richesse en fonctions continues permet de caractériser la maximalité à l'aide de propriétés portant sur certaines réduites.

On sera amené au cours du chapitre à introduire une notion de saturation pour un préfaisceau.

I. Préfaisceaux réguliers (richesse en fonctions continues).

49. DEFINITION. – *Soit* $\mathfrak{F}$ *un préfaisceau de cônes convexes de fonctions s.c.i.* $> -\infty$; *défini sur* Ω. *On note* $\mathfrak{F}_c$ *le préfaisceau formé par les fonctions finies continues de* $\mathfrak{F}$.

On dira que $\mathfrak{F}$ *est régulier s'il vérifie la condition suivante (richesse en fonctions continues) :*

pour tout ouvert U, *toute* $f \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$, *tout compact* $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$ *et toute fonction continue* φ *sur* K, $\varphi < f$ *sur* K, *il existe une fonction finie continue* $u \in \mathfrak{F}_c(\mathrm{K})$ *vérifiant* :

$$\varphi \leqslant u < f \quad \textit{sur } \mathrm{K}.$$

Il revient au même de supposer l'existence d'un ensemble I ordonné filtrant à droite et d'une famille d'ouverts $(\mathrm{U}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ et $u_i \in \mathfrak{F}_c(\mathrm{U}_i)$ vérifiant :

$$i \leqslant j \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{U}_i \subset \mathrm{U}_j \\ u_i \leqslant u_j \quad \text{dans } \mathrm{U}_i \end{cases}$$

et telle que $u_i < f$ tende vers f quand i augmente, en tout point de $\mathrm{U} = \bigcup\limits_i \mathrm{U}_i$.

Remarque. – Tout préfaisceau régulier $\mathfrak{F}$ contenant la constante $+\infty$ vérifie les conditions du balayage sur tout compact : en effet il existe alors u et v de classe $\mathfrak{F}$ au voisinage du compact K, u et v continues au voisinage de K et vérifiant :

$$u > 0 \quad \text{sur K} \quad \text{(lemme de Dini)}$$

et $$v < 0 \quad \text{sur K}$$

En particulier, tout préfaisceau régulier de cônes convexes, vérifiant le principe du minimum par rapport à une base $\mathcal{B} = \{(\omega\,,\,\omega^*)\}$ est relatif à $\mathcal{B}$ dès qu'il est maximal.

50. THEOREME. – *Soit* $\mathfrak{F}$ *un préfaisceau maximal de cônes convexes, relatif à une base* $\mathcal{B}$. *On suppose que la base* $\mathcal{B}$ *est régulière extérieurement* (cf. définition 24) *et que* $\mathfrak{F}$ *est régulier.*

Alors pour toute famille $v_i \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$, U *ouvert, localement bornée inférieurement, la régularisée semi-continue inférieurement* $\hat{v}$ *de* $v = \operatorname{Inf} v_i$, *appartient à* $\mathfrak{F}(\mathrm{U})$.

Démonstration. – Soit $\omega \in \mathcal{B}$, $\overline{\omega} \subset \mathrm{U}$ et soit $u \in \mathfrak{F}(\overline{\omega})$. On va montrer que si $\hat{v} + u$ est $\geqslant 0$ sur ω^*, elle l'est sur $\overline{\omega}$.

$\mathfrak{F}$ est relatif à $\mathcal{B}$, et régulier : il existe ainsi une fonction continue $h \in \mathfrak{F}_c(\overline{\omega})$, $h > 0$ sur $\overline{\omega}$.

La fonction $v + u + \epsilon h$ est donc > 0 sur ω^*.

Comme $\mathfrak{F}$ est régulier, il existe un ensemble ordonné filtrant $u_\lambda \in \mathfrak{F}_c(\overline{\omega})$ tendant vers u sur $\overline{\omega}$. Pour un certain λ on a donc :

$\hat{v} + u_\lambda + \epsilon h > 0$ sur ω^*, donc au voisinage V de ω^*.

D'après la régularité extérieure, il existe $\alpha \in \mathcal{B}$ vérifiant $\overline{\omega} \subset \alpha$, $\alpha^* \subset \mathrm{V}$ et $\overline{\alpha} \subset \mathrm{U}$.

Il en résulte l'inégalité $v_i + u_\lambda + \epsilon h \geqslant 0$ sur α pour tout i. On a donc :

$$v + u_\lambda + \epsilon h \geqslant 0 \quad \text{sur } \alpha\,,$$

puis $\hat{v} + u_\lambda + \epsilon h = \widehat{v + u_\lambda + \epsilon h} \geqslant 0$ sur α, donc sur $\overline{\omega}$.

En faisant croître λ et décroître ϵ, on en déduit l'inégalité

$$\hat{v} + u \geqslant 0 \quad \text{sur } \overline{\omega}\,.$$

Remarque. – Si $\mathfrak{F}$ est maximal pour le principe du minimum usuel (c'est-à-dire par rapport à la base constituée de tous les ouverts relativement compacts munis de leur frontière topologique) et si $\mathfrak{F}$ est régulier, alors la propriété ci-dessus est vraie sans condition supplémentaire. Il en va de même pour toute base incluse dans la précédente si $\mathcal{F}$ est un faisceau. (cf. la propriété de tronquage faible à zéro, remarque 37,I).

II. Notions de réduite et saturation.

51. DEFINITION. – *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega, \omega^*)\}$. Si* E *et* H *sont deux ensembles tels que* $H \subset E$, *et si φ est une fonction réelle définie sur* H, *on appelle réduite de φ sur* H *relativement à* E *la fonction suivante, définie sur* E :

$$(R_\varphi^H)_E = \operatorname{Inf}\{f \in \mathcal{F}(E)/f \geqslant \varphi \text{ sur } H\}.$$

Conventionnellement, elle vaut $+\infty$ s'il n'y a pas de fonction $f \in \mathcal{F}(E)$ majorant φ sur H.

Dans le cas où E est un ouvert α et où H est égal à α, on écrira plus simplement R_φ^α au lieu de $(R_\varphi^\alpha)_\alpha$ quand il n'y aura pas d'ambigüité.

Dans le cas où $E = \overline{\alpha}$, α ouvert relativement compact, où $H = \partial\alpha$, et où φ est la trace sur $\partial\alpha$ d'une fonction $v \in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$, on écrira plus simplement $R_v^{\partial\alpha}$ au lieu de $(R_v^{\partial\alpha})_{\overline{\alpha}}$. On sait que dans la théorie classique des fonctions hyperharmoniques sur les ouverts de $\mathbf{R}^n$, et dans le cas où v est $\geqslant 0$ sur $\overline{\alpha}$, la fonction que nous notons $R_v^{\partial\alpha} = (R_v^{\partial\alpha})_{\overline{\alpha}}$ est la restriction à $\overline{\alpha}$ de la fonction $R_v^{\partial\alpha}$ ou $R_v^{C\alpha}$ de la théorie classique.

D'après un théorème de Choquet et Deny, la donnée d'un cône convexe fermé et stable par enveloppes inférieures finies de fonctions continues sur un espace compact X est équivalente à la donnée d'une famille de mesures balayées des $\epsilon_x (x \in X)$ (cf. [18a] p. 297).

Ici, on envisage de même une notion de saturation pour les préfaisceaux, mais adaptée au principe du minimum.

52. DEFINITION. – *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau de cônes convexes de fonctions s.c.i. $> -\infty$ relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega, \partial\omega)\}$.*

On appelle saturé de $\mathcal{F}$ par rapport à $\mathcal{B}$, et on note $\overline{\mathcal{F}}$, le préfaisceau défini de la manière suivante :

$$\forall u \quad \text{s.c.i.} > -\infty \quad \textit{dans } U \textit{ ouvert}$$

alors

$$u \in \overline{\mathcal{F}}(U) \Leftrightarrow u \geqslant R_\varphi^{\partial\omega} \textit{ dans } \omega,\ \forall\omega \in \mathcal{B},\ \overline{\omega} \subset U,\ \forall\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega),\ \varphi < u$$

Il revient au même d'exiger la condition :

$$u \in \overline{\mathcal{F}}(\mathrm{U}) \Leftrightarrow u(x) \geqslant \int u \, d\mu, \ \forall \mu \in \mathrm{M}_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}(\partial\omega), \ \forall \omega \in \mathcal{B}, \ \bar{\omega} \subset \mathrm{U} \text{ et } \forall x \in \omega$$

Il est immédiat que $\overline{\mathcal{F}}$ est un préfaisceau relatif à $\mathcal{B}$ et contenant $\mathcal{F}$.

53. PROPOSITION. – *Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux préfaisceaux relatifs à $\mathcal{B}$, on a les propriétés suivantes :*

a) $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$

b) $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \Rightarrow \overline{\mathcal{F}} \subset \overline{\mathcal{G}}$

c) $\overline{\overline{\mathcal{F}}} = \overline{\mathcal{F}}$

d) *pour toute fonction continue $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega)$, $\omega \in \mathcal{B}$ on a :* $\mathrm{R}_\varphi^{\partial\omega} = \overline{\mathrm{R}}_\varphi^{\partial\omega}$ *dans ω, $\overline{\mathrm{R}}_\varphi^{\partial\omega}$ étant la réduite relative à $\overline{\mathcal{F}}$*

e)
$$\mathrm{M}_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}(\partial\omega) = \mathrm{M}_x^{\overline{\mathcal{F}}(\bar{\omega})}(\partial\omega)$$

f) *$\overline{\mathcal{F}}$ est stable par borne supérieure filtrante croissante et par convergence uniforme sur tout compact.*

g) *toute intersection de préfaisceaux $\mathcal{B}$-saturés* (i.e. tels que $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$) *est $\mathcal{B}$-saturée.*

Démonstration.

a) évident.

b) évident : il y a plus de mesures balayées de ϵ_x par rapport à $\mathcal{F}$ que par rapport à $\mathcal{G}$.

c) et e) les mesures balayées de ϵ_x et portées par $\partial\omega$ sont les mêmes pour $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$.

d) on a :

$$\mathrm{R}_\varphi^{\partial\omega}(x) = \sup \left\{ \int \varphi \, d\mu / \mu \prec \epsilon_x \, , \ \mu \text{ portée par } \partial\omega \right\}$$

(formule du balayage). Les mesures étant les mêmes, on a donc

$$\mathrm{R}_\varphi^{\partial\omega} = \overline{\mathrm{R}}_\varphi^{\partial\omega} \quad \text{sur } \bar{\omega} \, .$$

f) et g) sont évidentes.

Un préfaisceau $\mathcal{F}$, tel que $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$ sera dit saturé par rapport à $\mathcal{B}$. La proposition 53 montre que $\overline{\mathcal{F}}$ est le plus petit préfaisceau saturé contenant $\mathcal{F}$.

54. *Exemples et remarques.*

– Si $\mathcal{F}$ est maximal relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega , \partial\omega)\}$, il est saturé (en effet $\overline{\mathcal{F}}$ est relatif à $\mathcal{B}$).

– Si $\mathcal{F}$ est maximal relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega , \omega^*)\}$ régulière extérieurement, alors $\mathcal{F}$ est $\mathcal{B}$-saturé.

En effet, soit $f \in \overline{\mathcal{F}}(\mathrm{U})$ telle que $f > 0$ sur ω^*, $\overline{\omega} \subset \mathrm{U}$, $\omega \in \mathcal{B}$. L'inégalité subsiste au voisinage V de ω^*. Soit $\alpha \in \mathcal{B}$, tel que

$$\overline{\omega} \subset \alpha \subset \overline{\alpha} \subset \mathrm{U}, \text{ et } \alpha^* \subset \mathrm{V}$$

il existe $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega)$, $\varphi \leqslant f$ sur $\partial\alpha$, $\varphi \geqslant 0$ sur α^*. On a donc

$$f \geqslant \mathrm{R}_{\varphi}^{\partial\alpha} \geqslant \mathrm{R}_{\varphi}^{\alpha^*} \geqslant 0$$

sur α, soit $f \geqslant 0$ sur $\overline{\omega}$. Si f est seulement $\geqslant 0$ sur ω^*, on se ramène au cas précédent grâce aux conditions du balayage. La maximalité de $\mathcal{F}$ permet alors de conclure.

III. Intersection de préfaisceaux maximaux.

Nous allons montrer dans quelles conditions un préfaisceau saturé est une intersection de préfaisceaux maximaux.

Nous aurons besoin des deux définitions suivantes.

55. DEFINITION. – *On dira qu'un couple* (α , V) *formé d'un ouvert relativement compact* α *et d'une fonction* V *continue au voisinage de* $\overline{\alpha}$, *est une cloche du préfaisceau* $\mathcal{F}$, *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

– V *est de classe* $\mathcal{F}$ *au voisinage de* $\overline{\alpha}$.

– $\alpha = \{x \in \overline{\alpha} / \mathrm{V}(x) > 0\}$.

On dira qu'un ouvert α *possède une cloche s'il existe* V *telle que* (α , V) *soit une cloche de* $\mathcal{F}$.

56. DEFINITION.

a) *Soit* $\mathcal{F}$ *un préfaisceau relatif à une base* $\mathcal{B} = \{(\omega, \omega^*)\}$.

On dira qu'une fonction f *est* $\mathcal{B}$*-surmédiane dans un ouvert* U, *si l'on a :*

$f > -\infty$ *dans* U *(*f *non nécessairement s.c.i.)* $\forall \omega \in \mathcal{B}$, $\overline{\omega} \subset$ U *et* $\forall v \in \mathcal{F}(\overline{\omega})$, *la relation*

$$v + f \geqslant 0 \quad sur \quad \omega^*$$

entraîne :

$$v + f \geqslant 0 \quad sur \quad \overline{\omega}\,.$$

b) *Soit* $\mathcal{F}$ *un préfaisceau quelconque sur l'espace* Ω.

On dira que f *est surmédiane dans* U *si elle vérifie :*

$$f > -\infty$$

et :

$\forall \alpha$ *relativement compact,* $\overline{\alpha} \subset$ U *et* $\forall v \in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$ *la relation*

$$v + f \geqslant 0 \quad sur \quad \partial\alpha$$

entraîne

$$v + f \geqslant 0 \quad sur \quad \overline{\alpha}\,.$$

57. *Remarques.*

a) Le préfaisceau des fonctions $\mathcal{B}$-surmédianes s.c.i. n'est autre que la réunion des préfaisceaux maximaux relatifs à $\mathcal{B}$ et contenant $\mathcal{F}$.

b) La fonction $\equiv 0$ n'est pas forcément surmédiane dans un ouvert U : elle l'est si et seulement si le préfaisceau $\mathcal{F}$ restreint à U vérifie le principe du minimum usuel dans l'ouvert U.

a′) Soit u une fonction $\mathcal{B}$-surmédiane dans un ouvert U, localement bornée inférieurement dans U. Si $\mathcal{B}$ est régulière extérieurement, et si $\mathcal{F}$ est régulier, la régularisée s.c.i. $\hat{u}$ de u est $\mathcal{B}$-surmédiane dans U (cf. la démonstration du théorème 50).

b′) Si u est surmédiane dans U, u localement bornée inférieurement, si $\mathcal{F}$ est régulier, et si la constante $+\infty$ est dans $\mathcal{F}$(U), alors $\hat{u}$ (régularisée s.c.i. de u) est surmédiane dans U.

Démonstration. – $\hat{u}$ est $> -\infty$ dans U.

Soient α relativement compact, $\overline{\alpha} \subset U$, et $v \in \mathfrak{F}(\overline{\alpha})$ tels que l'on ait :

$$\hat{u} + v \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \partial\alpha$$

La constante $+\infty$ est dans $\mathfrak{F}(U)$: il y a donc une fonction finie continue $f > 0$ sur $\overline{\alpha}$ telle que $f \in \mathfrak{F}(\overline{\alpha})$ ($\mathfrak{F}$ régulier).

On a ainsi :

$$\hat{u} + v + \epsilon f > 0 \quad \text{sur} \quad \partial\alpha, \ \forall \epsilon > 0$$

Fixons $\epsilon > 0$:

$\mathfrak{F}$ étant régulier, il existe une fonction continue

$w \in \mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, $w \leqslant v$ vérifiant :

$$\hat{u} + w + \epsilon f > 0 \quad \text{sur} \quad \partial\alpha \text{ (lemme de Dini)}$$

et par suite :

$$\hat{u} + w + \epsilon f > 0 \quad \text{au voisinage de} \quad \partial\alpha$$

puis

$$u + w + \epsilon f \geqslant 0 \quad \text{au voisinage de} \quad \partial\alpha$$

Comme u est surmédiane dans U, on a :

$$u + w + \epsilon f \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \overline{\alpha}$$

et par régularisation (w et f continues) :

$$\hat{u} + w + \epsilon f \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \alpha$$

Comme on a $v \geqslant w$, on en déduit :

$$\hat{u} + v + \epsilon f \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \alpha$$

et ϵ étant arbitraire :

$$\hat{u} + v \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \alpha$$

c.q.f.d.

c) D'après la remarque 37,I, si $\mathfrak{F}$ est un faisceau relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega, \partial\omega)\}$ stable par les enveloppes inférieures finies, toute fonction de $\mathfrak{F}$ est surmédiane dans tout ouvert $\omega \in \mathcal{B}$.

d) Si $\mathfrak{F}$ est quelconque, la constante $+\infty$ est surmédiane dans n'importe quel ouvert.

58. LEMME. – *Soit $\mathfrak{F}$ un préfaisceau relatif à une base*

$$\mathcal{B} = \{(\omega\,,\partial\omega)\}$$

On suppose que :

– $\mathcal{F}$ *est un faisceau*

– $\mathcal{F}$ *est régulier*

– $\mathcal{F}$ *est* $\mathcal{B}$*-saturé*

– $\mathcal{F}$ *est stable par les régularisées* s.c.i. *d'enveloppes inférieures localement minorées.*

Soit $(\alpha\,,V)$ *une cloche de* $\mathcal{F}$, *soient* v *de classe* $\mathcal{F}$ *et continue au voisinage de* $\overline{\alpha}$, φ *continue sur* $\overline{\alpha}$ *telle que* φ/V *soit bornée sur* α.

Alors les fonctions $R^{\alpha}_{\varphi+v} = (R^{\alpha}_{\varphi+v})_{\alpha}$ *et* $R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v} = (R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v})_{\overline{\alpha}}$ *sont égales et continues dans* α. *De plus, elles sont prolongeables au voisinage de* $\overline{\alpha}$ *en fonctions continues de* $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$, *et valent* $\varphi + v = v$ *sur* $\partial\alpha$.

Enfin, dans l'ouvert U *de* α *où l'on a*

$$\varphi + v < R^{\alpha}_{\varphi+v}\ ,$$

la fonction $-R^{\alpha}_{\varphi+v} = -R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v}$ *est localement surmédiane.*

Si $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$ *sépare linéairement* $\overline{\alpha}$, $-R^{\alpha}_{\varphi+v}$ *est surmédiane dans* U.

Démonstration. – Montrons d'abord que $R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v}$ est s.c.s. sur $\overline{\alpha}$. Notons g la fonction s.c.s. sur $\overline{\alpha}$ qui est l'enveloppe inférieure de la famille des fonctions w de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de $\overline{\alpha}$, w continue au voisinage de $\overline{\alpha}$, et $w \geqslant \varphi + v$ sur $\overline{\alpha}$. On a évidemment $g \geqslant R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v}$. Soit f s.c.i. $\in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$, $f > \varphi + v$ sur $\overline{\alpha}$. Il existe w de classe $\mathcal{F}$ et continue au voisinage de $\overline{\alpha}$ et $f > w \geqslant \varphi + v$ sur $\overline{\alpha}$. Donc $f \geqslant g$. Si l'on a seulement $f \geqslant \varphi + v$ sur $\overline{\alpha}$, il existe (régularité de $\mathcal{F}$) une fonction $u > 0$, $u < +\infty$, sur $\overline{\alpha}$, et u de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de $\overline{\alpha}$. Pour tout $\epsilon > 0$, on a $f + \epsilon u > \varphi + v$ sur $\overline{\alpha}$, donc $f + \epsilon u \geqslant g$, puis $f \geqslant g$ $(\epsilon \to 0)$. Finalement $R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v} \geqslant g$.

D'autre part, la fonction $R^{\alpha}_{\varphi+v} = \hat{R}^{\alpha}_{\varphi+v}$ appartient à $\mathcal{F}(\alpha)$ d'après l'hypothèse sur les régularisées s.c.i.

On a évidemment $R^{\alpha}_{\varphi+v} \leqslant R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v}$: nous allons montrer qu'il y a en fait égalité.

Soit u une fonction $\in \mathcal{F}(\beta)$, $\beta \supset \overline{\alpha}$, u continue sur β, $u > 0$ sur β et β contenu dans l'ouvert de définition de V. La fonction $R^{\alpha}_{\varphi+v} + \epsilon u$ est définie sur α, et a une limite inférieure > 0 sur $\partial\alpha$.

Soit $\lambda > 0$ tel que l'on ait $\varphi \leqslant \lambda V$. La fonction λV tend vers 0 sur $\partial\alpha$: il existe donc un ouvert α_0, $\overline{\alpha}_0 \subset \alpha$ tel que l'on ait :

$$R^{\alpha}_{\varphi+v} + \epsilon u > \lambda V + v \quad \text{sur} \quad \partial\delta \quad \text{pour tout} \quad \delta \supset \alpha_0, \ \overline{\delta} \subset \alpha.$$

La fonction

$$w = \begin{cases} \operatorname{Inf}(v + \lambda V, R^{\alpha}_{\varphi+v} + \epsilon u) & \text{dans} \quad \overline{\delta} \\ v + \lambda V \quad \text{sur} \quad \beta \backslash \overline{\delta} \end{cases}$$

est localement dans $\mathfrak{F}$, donc appartient à $\mathfrak{F}(\beta)$ ($\mathfrak{F}$ est un faisceau).

On a évidemment $w \geqslant \varphi + v$ sur $\overline{\alpha}$, donc $w \geqslant R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v}$.

On a ainsi :

$$R^{\alpha}_{\varphi+v} + \epsilon u \geqslant R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v} \quad \text{dans} \quad \delta, \ \forall \delta \supset \alpha_0, \ \overline{\delta} \subset \alpha .$$

On en déduit que $R^{\alpha}_{\varphi+v} + \epsilon u \geqslant R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v}$ sur α tout entier, et ϵ étant arbitraire :

$$R^{\alpha}_{\varphi+v} \geqslant R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v} \quad \text{sur} \quad \alpha$$

Donc $R^{\alpha}_{\varphi+v} = R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v}$ est continue (s.c.i. et s.c.s.). sur α.

La fonction $R^{\alpha}_{\varphi+v} = R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v}$ dans α prolongée par $\lambda V + v$ en dehors de α, définit une fonction de $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$. En effet la fonction

$$w_{\alpha,\epsilon} = \begin{cases} \operatorname{Inf}(v + \lambda V, R^{\alpha}_{\varphi+v} + \epsilon u) & \text{dans} \quad \overline{\delta} \\ \lambda V + v \quad \text{sur} \quad \beta \backslash \overline{\delta} \end{cases}$$

ne dépend pas de δ, pour δ assez grand ; elle vaut donc :

$$w_{\epsilon} = \begin{cases} \operatorname{Inf}(v + \lambda V, R^{\alpha}_{\varphi} + \epsilon u) & \text{dans} \quad \overline{\delta} \\ v + \lambda V \quad \text{dans} \quad \beta \backslash \overline{\delta} \end{cases}$$

Cette fonction w_{ϵ} appartient donc à $\mathfrak{F}(\beta)$, et est continue. Or quand ϵ décroît, elle tend en décroissant vers la fonction :

$$w = \begin{cases} R^{\alpha}_{\varphi+v} & \text{sur} \quad \alpha \\ v + \lambda V & \text{sur} \quad \beta \backslash \overline{\alpha} \end{cases}$$

La convergence est uniforme au voisinage de $\overline{\alpha}$ (lemme de Dini), et même sur β.

La saturation de $\mathcal{F}$ entraîne que w appartient à $\mathcal{F}(\beta)$. (Remarque : sous cette forme, il est évident que $R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v}$ vaut v sur $\partial\alpha$).

Il reste à voir que $-R^{\alpha}_{\varphi+v}$ est localement surmédiane dans U.

On sait déjà que $R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v}$ est continue sur $\overline{\alpha}$ et appartient à $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$.

Soit $x_0 \in U$: on a :

$$R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v}(x_0) > (\varphi + v)(x_0)$$

Il existe une fonction continue w au voisinage de x_0 telle que $-w$ soit de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de x_0 et telle que l'on ait :

$$R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v}(x) > -w(x) > (\varphi + v)(x)$$

pour tout x dans un voisinage ouvert $\omega_0 \in \mathcal{B}$ de x_0.

On va montrer que $-R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v}$ est surmédiane dans ω_0.

Soient $\overline{\delta} \subset \omega_0$, δ ouvert relativement compact, et s de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de $\overline{\delta}$ vérifiant :

$$s - R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v} \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \partial\delta$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$s + \epsilon V > R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v} \quad \text{sur} \quad \partial\delta$$

La fonction :

$$g = \begin{cases} \operatorname{Inf}(R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v},\ s + \epsilon V) & \text{sur} \quad \overline{\delta} \\ R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v} & \text{ailleurs} \end{cases}$$

est $\mathcal{F}$ au voisinage de $\overline{\alpha}$ (propriété de tronquage, car $\mathcal{F}$ est un faisceau).

On a évidemment :

$$g \geqslant \varphi + v \quad \text{en dehors de} \quad \overline{\delta}\,.$$

Il reste à voir que l'on a aussi :

$$g \geqslant \varphi + v \quad \text{sur} \quad \overline{\delta}\,.$$

Pour cela, on remarque que l'on a :

$$s + \epsilon V > R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+v} \quad \text{sur} \quad \partial\delta\,,$$

donc :

$$s + \epsilon V > -w \quad \text{sur} \quad \partial\delta$$

et par suite :

$$s + \epsilon V > -w \quad \text{sur} \quad \bar{\delta}$$

car $\mathcal{F}$ vérifie le principe du minimum usuel dans ω_0 qui est un ouvert de $\mathcal{B}$ (cf. remarque qui suit la définition 33).

D'où finalement :

$$s(x) + \epsilon V(x) \geqslant (\varphi + v)(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \bar{\delta}$$

La fonction g majore donc $\varphi + v$ partout sur $\bar{\alpha}$, et l'on a :

$$g \geqslant R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v} \quad \text{sur} \quad \bar{\alpha}$$

soit :

$$s + \epsilon V \geqslant R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v} \quad \text{sur} \quad \bar{\delta}$$

puis ($\epsilon \to 0$) :

$$s \geqslant R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v} \quad \text{sur} \quad \bar{\delta}$$

Si maintenant $\mathcal{F}(\bar{\alpha})$ sépare linéairement $\bar{\alpha}$, la restriction $\mathcal{F}_{|\alpha}$ est un préfaisceau vérifiant le principe du minimum usuel dans α.

Le préfaisceau de cônes convexes engendré par $\mathcal{F}_{|\alpha}$ et $-R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v}$ vérifie le principe du minimum localement dans U.

La séparation montre alors que ce préfaisceau vérifie le principe de minimum dans U. Autrement dit, $-R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v}$ est surmédiane dans U.

c.q.f.d.

59. THEOREME. – *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega, \partial\omega)\}$. On suppose que :*

– *$\mathcal{F}$ est un faisceau*

– *$\mathcal{F}$ est $\mathcal{B}$-saturé*

– *$\mathcal{F}$ est régulier*

– *$\mathcal{F}$ est $\mathcal{B}$-séparant*

– *$\mathcal{F}$ est stable par les enveloppes inférieures localement minorées et régularisées s.c.i.*

– *$\mathcal{F}$ possède une base d'ouverts avec cloches, soit $\mathcal{C}$.*

Alors $\mathcal{F}$ est l'intersection des préfaisceaux maximaux relatifs à $\mathcal{B}$ et contenant $\mathcal{F}$.

Démonstration. – Soit $\mathcal{G}$ l'intersection de ces préfaisceaux maximaux contenant $\mathcal{F}$, et soit $f \in \mathcal{G}(\mathcal{V})$, $\mathcal{V}$ ouvert.

Soit $\alpha \in \mathcal{C}$, $\bar{\alpha} \subset \mathcal{V}$, tel que $\mathcal{F}(\bar{\alpha})$ sépare linéairement $\bar{\alpha}$.

Soient φ continue à support compact dans α, et v de classe $\mathcal{F}$, et continue au voisinage de $\bar{\alpha}$ telles que l'on ait([24]) :

$$v \leqslant f \quad \text{sur} \quad \bar{\alpha}$$

et
$$v + \varphi \leqslant f \quad \text{sur} \quad \bar{\alpha}\,.$$

Nous allons montrer que l'on a :

$$R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v} \leqslant f \quad \text{sur} \quad \bar{\alpha}\,.$$

C'est évident là où : $v + \varphi = R^{\bar{\alpha}}_{v+\varphi}$

Dans l'ouvert U où l'on a : $v + \varphi < R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v}$, la fonction $f - R^{\bar{\alpha}}_{v+\varphi}$ est surmédiane, car f et $-R^{\bar{\alpha}}_{v+\varphi}$ appartiennent toutes deux dans U à un même préfaisceau maximal (définition de f, et lemme 58 pour $-R^{\bar{\alpha}}_{v+\varphi}$).

En tout point frontière x_0 de U, on a :

$$\varliminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in U}} [f(x) - R^{\bar{\alpha}}_{v+\varphi}(x)] \geqslant f(x_0) - (v + \varphi)(x_0) \geqslant 0$$

Il s'ensuit que l'on a :

$$f - R^{\bar{\alpha}}_{v+\varphi} \geqslant 0 \quad \text{dans} \quad U\,,$$

donc partout sur $\bar{\alpha}$ ($R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v} = v = \varphi + v$ sur $\partial\alpha$).

En faisant varier φ dans un ensemble filtrant croissant, on voit que f est sur $\bar{\alpha}$ une borne supérieure filtrante croissante de fonctions de $\mathcal{F}(\bar{\alpha})$.

Donc $f \in \mathcal{F}(\alpha)$; ceci ayant lieu pour tous les α d'une base de $\mathcal{V}(\bar{\alpha} \subset \mathcal{V})$, on en déduit que $f \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$, car $\mathcal{F}$ est un faisceau.

Ainsi, on a $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

c.q.f.d.

([24]) La régularité de $\mathcal{F}$ entraîne qu'il existe $v' < 0$, $v' \in \mathcal{F}(\bar{\alpha})$, v' continue au voisinage de $\bar{\alpha}$.

60. *Remarques.* –

1) Le théorème 59 s'applique au cas où $\mathcal{F}$ est un préfaisceau maximal par rapport à une base distinguée $\mathcal{B} = \{(\omega , \omega^*)\}$ régulière extérieurement, d'après le théorème 50 et la remarque 54.

2) Dans le théorème précédent, la condition que $\mathcal{F}$ est un faisceau est une condition nécessaire : la $\mathcal{B}$-séparation entraîne en effet que les préfaisceaux maximaux contenant $\mathcal{F}$ sont des faisceaux.

3) On a montré que pour toute cloche α assez petite, le cône $\mathcal{F}(\alpha)$ est "régulier", c'est-à-dire : pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(\alpha)$ bornée inférieurement sur α, il existe une famille filtrante croissante de fonctions continues $v_i \in \mathcal{F}(\alpha)$, convergeant vers f.

IV. Caractérisation de la maximalité à l'aide des réduites.

Nous allons maintenant montrer que les propriétés fondamentales de la théorie locale du potentiel sont caractéristiques de la maximalité pour le principe du minimum au sens usuel.

62. PROPOSITION. – *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega , \partial\omega)\}$.*

On suppose que $\mathcal{F}$ est régulier et vérifie la propriété de tronquage faible.

Soient α un ouvert relativement compact et φ continue sur un compact H *non vide contenu dans $\partial\alpha$. La fonction $-(\mathrm{R}_\varphi^\mathrm{H})_{\overline{\alpha}}$ est surmédiane* s.c.i. *dans α.*

Démonstration. – On a $-(\mathrm{R}_\varphi^\mathrm{H})_{\overline{\alpha}} > -\varphi$ dans α à cause de la régularité de $\mathcal{F}$.

$(\mathrm{R}_\varphi^\mathrm{H})_{\overline{\alpha}}$ est s.c.s. grâce au lemme de Dini (régularité de $\mathcal{F}$) (cf. la démonstration du lemme 58).

Soient β ouvert, $\overline{\beta} \subset \alpha$ et $s \in \mathcal{F}(\overline{\beta})$ vérifiant :

$$s - (\mathrm{R}_\varphi^\mathrm{H})_{\overline{\alpha}} \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \partial\beta$$

Soit une fonction h de $\mathcal{F}(\overline{\beta})$, $0 < h < +\infty$ sur $\overline{\beta}$ (régularité de $\mathcal{F}$) et soit $\epsilon > 0$:

On a : $$s + \epsilon h > (R_\varphi^H)_{\overline{\alpha}} \quad \text{sur} \quad \partial\beta$$

Soit f de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de $\overline{\alpha}$, f continue, $f \geqslant \varphi$ sur H et vérifiant :

$$s + \epsilon h > f \quad \text{sur} \quad \partial\beta \quad \text{(lemme de Dini).}$$

La fonction

$$w = \begin{cases} \operatorname{Inf}(f,\ s + \epsilon h) & \text{sur} \quad \beta \\ f & \text{ailleurs} \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$ (propriété de tronquage).

Or, on a $w \geqslant \varphi$ sur H, donc $w \geqslant R_\varphi^H$ sur $\overline{\alpha}$, et par suite :

$$s + \epsilon h \geqslant R_\varphi^H \quad \text{sur} \quad \overline{\beta}$$

ϵ étant arbitraire, on en déduit :

$$s - R_\varphi^H \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \overline{\beta}$$

Remarque. — — R_φ^H est surmédiane, alors que $\mathcal{F}$ peut ne pas vérifier le principe du minimum dans α.

63. PROPOSITION. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau saturé relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega\ ,\partial\omega)\}$.*

On suppose que $\mathcal{F}$ est régulier, que $\mathcal{F}$ est stable par bornes inférieures localement bornées régularisées (cf. lemme 58).

Soit $(\alpha\ , V)$ *une cloche de $\mathcal{F}$, et soient u et v continues sur α, u et $v \in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$, telles que u/V et v/V soient bornées sur α.*

Alors la fonction $u - R_{u-v}^\alpha$ est $\mathcal{B}$-surmédiane continue dans α.

De plus, i) *et* ii) *sont équivalentes*(25) :

i) $\forall\, u, v \in \mathcal{F}(\alpha)$ *continues et telles que* $\left|\dfrac{u}{V}\right|$ *et* $\left|\dfrac{v}{V}\right|$ *soient bornées,* $u - R_{u-v}^\alpha \in \mathcal{F}(\alpha)$.

ii) *On a une propriété de décomposition de Riesz* : $\forall u,\ v_1,\ v_2 \in \mathcal{F}(\alpha)$ *continues sur α et telles que* $\left|\dfrac{u}{V}\right|$, $\left|\dfrac{v_1}{V}\right|$ *et* $\left|\dfrac{v_2}{V}\right|$ *soient*

(25) cf. [10] et [19] pour des notions analogues.

bornées, la propriété $u \leqslant v_1 + v_2$ *sur* α, *entraîne qu'il existe* u_1 *et* $u_2 \in \mathcal{F}(\alpha)$, $u_1 \leqslant v_1$, $u_2 \leqslant v_2$ *et vérifiant*

$$u = u_1 + u_2$$

Enfin s'il existe une fonction $h \in \mathcal{F}(\overline{\alpha}) \cap (-\mathcal{F}(\overline{\alpha}))$, *h strictement positive sur* $\overline{\alpha}$, *les propriétés* i) *et* ii) *entraînent* :

iii) *Pour tout ouvert* β, $\overline{\beta} \subset \alpha$, *toutes fonctions* v_1 *et* $v_2 \in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$, *continues, on a l'additivité de la réduite*

$$R^{\partial\beta}_{v_1+v_2} = R^{\partial\beta}_{v_1} + R^{\partial\beta}_{v_2} \quad \textit{dans} \quad \beta$$

Démonstration. – On a $u = R^{\alpha}_{u}$ dans α : d'après le lemme 58, u est prolongeable en fonction de classe $\mathcal{F}$ et continue au voisinage de $\overline{\alpha}$.

Il en résulte, toujours d'après le lemme 58, que la fonction : R^{α}_{u-v} est continue sur α, et appartient à $\mathcal{F}(\alpha)$.

Montrons que $u - R^{\alpha}_{u-v}$ est $\mathcal{B}$-surmédiane dans α. C'est une fonction continue. Soit β ouvert $\in \mathcal{B}$ tel que $\overline{\beta} \in \alpha$ et soit $s \in \mathcal{F}(\overline{\beta})$ vérifiant :

$$s + u - R^{\alpha}_{u-v} \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \partial\beta$$

La fonction

$$w = \begin{cases} \operatorname{Inf}(s + u,\ R^{\alpha}_{u-v}) & \text{sur} \quad \beta \\ R^{\alpha}_{u-v} & \text{ailleurs} \end{cases}$$

majore $u - v$ sur $\alpha - \beta$. Sur β : on a évidemment $s + u \geqslant u - v$ sur $\partial\beta$, soit $s + v \geqslant 0$ sur $\partial\beta$ donc $s + v \geqslant 0$ sur $\overline{\beta}$. On a donc $s + u \geqslant u - v$ sur β. w majore ainsi $u - v$ partout. En particulier $s + u$ majore R^{α}_{u-v} dans β.

c.q.f.d.

Montrons que i) $\Rightarrow$ ii).

Soit donc $u \leqslant v_1 + v_2$.

La fonction $u_1 = R^{\alpha}_{u-v_2}$ appartient à $\mathcal{F}(\alpha)$, et l'on peut écrire $u = u_1 + u_2$ dans α, avec $u_2 = u - R^{\alpha}_{u-v_2} \in \mathcal{F}(\alpha)$. On a :

$$u = R^{\alpha}_{u-v} \leqslant v_1 \quad \text{car} \quad u - v_2 \leqslant v_1$$

La fonction $u_2 = u - R^\alpha_{u-v_2}$ est majorée par v_2 car on a

$$u - v_2 \leqslant R^\alpha_{u-v_2}\,, \text{ soit } u - R^\alpha_{u-v_1} \leqslant v_2$$

c.q.f.d.

ii) ⇒ i).

On a $u \leqslant v + R^\alpha_{u-v}$. Soient u_1 et u_2 telles que $u = u_1 + u_2$,

$$u_1 \leqslant v \quad \text{et} \quad u_2 \leqslant R^\alpha_{u-v}$$

La relation $u \leqslant v + u_2$ entraîne $u_2 \geqslant u - v$, donc $u_2 \geqslant R^\alpha_{u-v}$ c'est-à-dire $u_2 = R^\alpha_{u-v}$, soit $u - R^\alpha_{u-v} = u_1 \in \mathfrak{F}(\alpha)$.

ii) ⇒ iii).

Soient v_1 et v_2, positives et de classe $\mathfrak{F}$ au voisinage de $\overline{\alpha}$. Il existe $\lambda > 0$ tel que l'on ait $\lambda V > v_1 + v_2$ sur $\overline{\beta}$. On remplace v_1 et v_2 sur α par les fonctions v'_1, v'_2 égales à $\mathrm{Inf}(\lambda V, v_1)$ et $\mathrm{Inf}(\lambda V, v_2)$ qui coïncident avec v_1 et v_2 au voisinage de $\overline{\beta}$.

Soit $u \geqslant v_1 + v_2$ sur $\overline{\beta}$, u de classe $\mathfrak{F}$, et continue au voisinage de $\overline{\beta}$.

$$\text{La fonction } w = \begin{cases} \mathrm{Inf}(u, v'_1 + v'_2) & \text{dans } \beta \\ v'_1 + v'_2 & \text{dans } \alpha\backslash\beta \end{cases}$$

est continue et appartient à $\mathfrak{F}(\alpha)$. Elle vaut $v'_1 + v'_2$ sur $\partial\beta$ et est partout $\leqslant v'_1 + v'_2$.

D'après la propriété ii), il existe w_1 et w_2 continues, $\in \mathfrak{F}(\alpha)$ et vérifiant $w = w_1 + w_2$, avec $w_i \leqslant v'_i$ $(i = 1, 2)$. Sur $\partial\beta$, on a donc $w_i = v'_i$ $(i = 1, 2)$.

On a ainsi :

$$w_i \geqslant R^{\partial\beta}_{v_i} \ (i = 1, 2) \quad \text{sur} \quad \overline{\beta}$$

et

$$u \geqslant R^{\partial\beta}_{v_1} + R^{\partial\beta}_{v_2} \quad \text{sur} \quad \overline{\beta}$$

finalement

$$R^{\partial\beta}_{v_1+v_2} \geqslant R^{\partial\beta}_{v_1} + R^{\partial\beta}_{v_2} \quad \text{sur} \quad \overline{\beta}$$

L'inégalité inverse est évidente, et le résultat suit.

Pour des fonctions non nécessairement positives, on obtient le résultat en remarquant que pour $\lambda > 0$, et $h \in \mathfrak{F}(\overline{\alpha}) \cap (-\mathfrak{F}(\overline{\alpha}))$ on a

$$R^{\partial\beta}_{v+\lambda h} = R^{\partial\beta}_{v} + \lambda h \quad \text{dans} \quad \beta$$

c.q.f.d.

64. THEOREME. — *Soit* $\mathfrak{F}$ *un préfaisceau relatif à une base* $\mathcal{B} = \{(\omega, \partial\omega)\}$.

On suppose que :

– $\mathfrak{F}$ *est un faisceau*

– $\mathfrak{F}$ *est régulier*

– $\mathfrak{F}$ *est* $\mathcal{B}$*-saturé*

– $\mathfrak{F}$ *est stable par bornes inférieures localement minorées régularisées*

– $\mathfrak{F}$ *est* $\mathcal{B}$*-séparant*

– $\mathfrak{F}$ *possède une base de cloches, soit* $\mathcal{C}$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\mathfrak{F}$ *est maximal relatif à* $\mathcal{B} = \{(\omega, \partial\omega)\}$.

b) $-R_v^{\partial\alpha} \in \mathfrak{F}(\alpha)$ *pour tout ouvert* α *relativement compact, et toute* v *continue* $\in \mathfrak{F}(\overline{\alpha})$.

c) $R^{\partial\alpha}_{v_1+v_2} = R^{\partial\alpha}_{v_1} + R^{\partial\alpha}_{v_2}$ *si* v_1 *et* v_2 *sont continues et appartiennent à* $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$ *(*$\forall\,\alpha$ *relativement compact).*

Les conditions a), b), c) *entraînent la condition* d) :

d) *pour tout* $(\alpha, V) \in \mathcal{C}$, *et toutes* u *et* $v \in \mathfrak{F}(\alpha)$, *continues telles que* u/V *et* v/V *soient bornées, on a :*

$$u - R^{\alpha}_{u-v} \in \mathfrak{F}(\alpha)$$

Enfin, a), b), c) *sont équivalentes à* d) *s'il existe un recouvrement de l'espace par des ouverts munis de fonctions strictement positives de* $\mathfrak{F} \cap (-\mathfrak{F})$.

Démonstration. – Nous introduisons comme intermédiaire la propriété c′ suivante :

c′) Il existe une base $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ telle que pour tout $\alpha \in \mathcal{C}'$, tout β ouvert relativement compact, $\overline{\beta} \subset \alpha$, et toutes fonctions v_1 et $v_2 \in \mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, continues, on ait l'additivité de la réduite sur $\partial\beta$:

$$R^{\partial\beta}_{v_1+v_2} = R^{\partial\beta}_{v_1} + R^{\partial\beta}_{v_2} \quad \text{sur} \quad \beta$$

et telle que de plus, $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$ sépare linéairement $\overline{\alpha}$, pour tout $\alpha \in \mathcal{C}'$.

Nous allons faire la démonstration suivant le schéma suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\text{a)} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{b)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{c)} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{d)} \arrow[rr, Rightarrow, dashed] & & \text{c}') \arrow[ull, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

a) $\Rightarrow$ b) D'après la proposition 51, $-\mathrm{R}_v^{\partial\alpha}$ est surmédiane dans α, donc $\mathcal{B}$-surmédiane et appartient à $\mathcal{F}(\alpha)$.

b) $\Rightarrow$ c) La sous-additivité est évidente. Réciproquement, soit $s \geqslant v_1 + v_2$ sur $\partial\alpha$, $s \in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$, on a sur $\partial\alpha$:

$$s - \mathrm{R}_{v_1}^{\partial\alpha} - \mathrm{R}_{v_2}^{\partial\alpha} \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \partial\alpha$$

d'après la régularité de $\mathcal{F}$, il existe f de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de $\overline{\alpha}$, finie partout et > 0 sur $\overline{\alpha}$.

Pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$s + \epsilon f - \mathrm{R}_{v_1}^{\partial\alpha} - \mathrm{R}_{v_2}^{\partial\alpha} > 0 \quad \text{sur} \quad \partial\alpha$$

L'inégalité subsiste au voisinage de $\partial\alpha$ dans $\overline{\alpha}$, on en déduit l'inégalité ($\geqslant 0$) partout dans $\overline{\alpha}$ car la fonction $-\mathrm{R}_{v_1}^{\partial\alpha}$ étant surmédiane dans α, la fonction $s + \epsilon f - \mathrm{R}_{v_1}^{\partial\alpha} - \mathrm{R}_{v_2}^{\partial\alpha}$ est surmédiane dans α.

ϵ étant arbitraire, on a $s \geqslant \mathrm{R}_{v_1}^{\partial\alpha} + \mathrm{R}_{v_2}^{\partial\alpha}$ sur $\overline{\alpha}$.

Finalement, en faisant varier s :

$$\mathrm{R}_{v_1+v_2}^{\partial\alpha} \geqslant \mathrm{R}_{v_1}^{\partial\alpha} + \mathrm{R}_{v_2}^{\partial\alpha}$$

c.q.f.d.

c) $\Rightarrow$ c$'$) évident

c$'$) $\Rightarrow$ a) nous allons faire la démonstration en quatre étapes. Dans la première étape i), on construit une famille de mesures $\rho_x^{\beta,\alpha}$ et on définit un préfaisceau $\mathcal{H}$ de fonctions vérifiant des inégalités sur ces mesures.

Dans l'étape ii), on montre que pour certains ouverts β, et certaines fonctions $v \in \mathcal{F}(\overline{\beta})$, la fonction $-\mathrm{R}_v^{\partial\beta}$ appartient à $\mathcal{H}(\beta)$.

Dans l'étape iii), on montre que $\mathcal{H} = \mathcal{F}$.

Dans l'étape iv), on montre que toute fonction $\mathcal{B}$-surmédiane appartient à $\mathcal{H}$, donc à $\mathcal{F}$.

Il en résulte que $\mathcal{F}$ est maximal.

Soit $\alpha \in \mathcal{C}'$. Pour tout β ouvert, $\overline{\beta} \subset \alpha$, l'application :

$v \rightsquigarrow R_v^{\partial\beta}(x)$ pour $v \in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$, v continue, $x \in \overline{\beta}$ définit sans ambigüité une mesure $\rho_x^{\beta,\alpha}$ (séparation) portée par $\partial\beta$.

On a donc : $v(x) \geqslant \int v \, d\rho_x^{\beta,\alpha}$

pour toute $v \in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$, v continue, puis pour v s.c.i. par la régularité de $\mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{V}$ un ensemble ouvert : notons $\mathcal{H}(\mathcal{V})$ le cône des fonctions f s.c.i. $> -\infty$ dans $\mathcal{V}$, vérifiant :

$$f(x) \geqslant \int f \, d\rho_x^{\beta,\alpha} \quad \text{pour tous} \quad x \in \beta \subset \overline{\beta} \subset \alpha \subset \overline{\alpha} \subset \mathcal{V},\ \alpha \in \mathcal{C}'$$

Le préfaisceau $\mathcal{H}$ contient $\mathcal{F}$ (régularité de $\mathcal{F}$) et est relatif à $\mathcal{B}$-($\mathcal{B}$-séparation).

ii) Soient $x \in \gamma \subset \overline{\gamma} \subset \beta \subset \overline{\beta} \subset \alpha$, $\alpha \in \mathcal{C}'$, γ et β ouverts :

les mesures ϵ_x, $\rho_x^{\beta,\alpha}$, $\rho_x^{\gamma,\alpha}$ sont balayées dans l'ordre suivant :

$$\epsilon_x \succ \rho_x^{\gamma,\alpha} \succ \rho_x^{\beta,\alpha} \quad \text{par rapport à} \quad \mathcal{F}(\overline{\alpha})$$

On le voit par tronquage[26] :

Si $v \in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$, v continue, $R_v^{\partial\beta}$ est la borne inférieure d'une famille filtrante décroissante de fonctions continues de $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$ (si $s \geqslant v$ sur $\partial\beta$, $s \in \mathcal{F}(\overline{\beta})$, la fonction $\mathrm{Inf}(s, v)$ dans β, et v ailleurs) est de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de $\overline{\alpha}$).

---

(26) Si v est de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de $\overline{\alpha}$, v continue, et w continue, $w \geqslant v$ sur $\partial\gamma$, $w \in \mathcal{F}(\overline{\gamma})$, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{Inf}(v(x), w(x)) & \text{sur } \overline{\gamma} \\ v(x) & \text{sur } \alpha \setminus \overline{\gamma} \end{cases} \in \mathcal{F}(\overline{\beta}) \quad \text{et} \quad f \geqslant v \quad \text{sur} \quad \partial\beta$$

donc $f \geqslant R_v^{\partial\beta}$ sur $\overline{\beta}$ et par suite $w(x) \geqslant R_v^{\partial\beta}(x)$ pour $x \in \overline{\gamma}$.

On a donc :

$$R_v^{\partial\beta}(x) \geqslant \int R_v^{\partial\beta}\, d\rho_x^{\gamma,\alpha} \geqslant \int R_v^{\partial\beta}\, d\rho_x^{\beta,\alpha} = \int v\, d\rho_x^{\beta,\alpha} = R_v^{\partial\beta}(x)$$

car v vaut $R_v^{\partial\beta}$ sur $\partial\beta$.

On obtient donc l'égalité :

$$\int - R_v^{\partial\beta}\, d\rho_x^{\gamma,\alpha} = - R_v^{\partial\beta}(x)$$

pour tous $x \in \gamma \subset \overline{\gamma} \subset \beta$.

Si maintenant on a :

$$\gamma \subset \overline{\gamma} \subset \alpha_1 \subset \overline{\alpha}_1 \subset \beta \subset \overline{\beta} \subset \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathcal{C}',\ \alpha_1 \in \mathcal{C}'$$

La mesure ρ_x^{γ,α_1} est égale à la mesure $\rho_x^{\gamma,\alpha}$ car elles coïncident sur $\mathcal{S}(\overline{\alpha})$ qui sépare $\overline{\alpha}$ (Stone).

On a donc aussi :

$$\int - R_v^{\partial\beta}\, d\rho_x^{\gamma,\alpha_1} = - R_v^{\partial\beta}(x)$$

Ceci prouve que la fonction $- R_v^{\partial\beta}$ appartient à $\mathcal{H}(\beta)$.

iii) Soit $f \in \mathcal{H}(\overline{\alpha})$, $\alpha \in \mathcal{C}'$.

On va montrer que pour toute fonction φ continue à support compact dans α vérifiant $\varphi + v \leqslant f$, on a :

$$f \geqslant R_{\varphi+v}^{\overline{\alpha}}$$

c'est évident en tout point où $\varphi + v = R_{\varphi+v}^{\overline{\alpha}}$.

Il reste à le voir sur l'ouvert U de α défini par

$$v + \varphi < R_{\varphi+v}^{\overline{\alpha}}$$

Dans l'ouvert U, pour tout $\overline{\beta} \subset U$ ouvert, on a :

$$R_{\varphi+v}^{\overline{\alpha}} = R_{R_{\varphi+v}^{\overline{\alpha}}}^{\partial\beta}$$

En effet, $R_{\varphi+v}^{\overline{\alpha}} \in \mathcal{S}(\alpha)$ donc l'inégalité $\geqslant$ est évidente.

Pour l'inégalité inverse, soit $s \in \mathcal{S}(\overline{\beta})$, $s \geqslant R_{\varphi+v}^{\overline{\alpha}}$ sur $\partial\beta$.

La fonction $- R_{\varphi+v}^{\overline{\alpha}}$ est surmédiane dans U d'après le lemme 58 : on a donc

$$s - R^{\bar{\alpha}}_{\varphi + v} \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \bar{\beta}$$

En faisant varier s, on obtient :

$$R^{\partial\beta}_{R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v}} \geqslant R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v}$$

Si maintenant, on a $x \in \beta \subset \bar{\beta} \subset \alpha_1 \in \mathcal{C}'$, $\bar{\alpha}_1 \subset U$, on a alors :

$$\int R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v}\, d\rho_x^{\beta,\alpha_1} = R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v}(x)$$

c'est-à-dire que

$$-\, R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v} \in \mathcal{H}(U)\ .$$

Le cône $\mathcal{H}(\bar{\alpha}) - \mathbf{R}^+ \cdot R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v}$ admet l'ensemble $\{\varphi + v = R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v}\}$ comme compact de Silov : en effet, pour tout $x \in U$, il existe $\alpha_1 \in \mathcal{C}'$, $\bar{\alpha}_1 \subset U$ et β ouvert : $x \in \beta \subset \bar{\beta} \subset \alpha_1$, on a alors :

$$\int (f - \lambda R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v})\, d\rho_x^{\beta,\alpha_1} \leqslant f(x) - \lambda R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v}(x)$$

pour tout $f \in \mathcal{H}(\bar{\alpha})$, $\lambda > 0$. ρ_x^{β,α_1} charge $\partial\beta$: on a donc $\rho_x^{\beta,\alpha_1} \neq \epsilon_x$. Donc x n'est pas dans la frontière de Choquet de ce cône.

Si l'on a $f \geqslant \varphi + v$ sur $\bar{\alpha}$, on a alors : $f \geqslant R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+v}$ sur $\bar{\alpha}$. Comme on a $f = \sup(\varphi_i + v)$ sur α, φ_i à support compact $\leqslant f - v$ sur $\bar{\alpha}$, il s'ensuit que f est sur α la borne supérieure de l'ensemble filtrant croissant des $R^{\bar{\alpha}}_{\varphi_i+v}$ qui appartiennent à $\mathfrak{F}(\alpha)$.

Ainsi, on a : $f \in \mathfrak{F}(\alpha)$.

En faisant parcourir $\mathcal{C}'$ à α, on en déduit que $\mathcal{H} \subset \mathfrak{F}$.

iv) Nous allons maintenant montrer que toute fonction $\mathcal{B}$-surmédiane dans un ouvert $\mathcal{V}$ appartient à $\mathfrak{F}(\mathcal{V})$.

Soit $\alpha \in \mathcal{C}'$, $\bar{\alpha} \subset \mathcal{V}$ et soit β ouvert, $\bar{\beta} \subset \alpha$. Soient u $\mathcal{B}$-surmédiane dans $\mathcal{V}$, v_1 et $v_2 \in \mathfrak{F}(\bar{\alpha})$, continues,

$$u > v_1 - v_2 \quad \text{sur} \quad \partial\beta$$

Ceci peut s'écrire :

$$u - R^{\partial\beta}_{v_1} + v_2 > 0 \quad \text{sur} \quad \partial\beta$$

Cette inégalité subsiste au voisinage de $\partial\beta$ dans $\bar{\alpha}$. Comme les fonctions v_2 et $-\, R^{\partial\beta}_{v_1}$ appartiennent à $\mathfrak{F}(\beta)$, on a donc :

$u - R_{v_1}^{\partial\beta} + v_2 \geqslant 0$ sur $\overline{\beta}$ (principe du minimum sur les ouverts suffisamment petits) soit $u + v_2 \geqslant R_{v_1}^{\partial\beta}$ sur $\overline{\beta}$.

Si $s \geqslant v_2$ sur $\partial\beta$, on a la même inégalité :

$$u + s \geqslant R_{v_1}^{\partial\beta} \quad \text{sur} \quad \overline{\beta}$$

Ce qui donne en faisant varier s :

$$u \geqslant R_{v_1}^{\partial\beta} - R_{v_2}^{\partial\beta} \quad \text{sur} \quad \overline{\beta}$$

soit :

$$u(x) \geqslant \int (v_1 - v_2)\, d\rho_x^{\beta,\alpha}$$

Sur $\partial\beta$, u est la borne supérieure filtrante croissante de fonctions continues qui s'approchent uniformément par des $v_1 - v_2$. On obtient ainsi :

$$u(x) \geqslant \int u\, d\rho_x^{\beta,\alpha} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

a) $\Rightarrow$ d) D'après la proposition 63, $u - R_{u-v}^{\alpha}$ est $\mathcal{B}$-surmédiane dans α, donc appartient à $\mathcal{F}(\alpha)$.

Il reste à voir, sous l'hypothèse d'existence d'une base de fonctions positives (> 0) de $\mathcal{F} \cap (-\mathcal{F})$, que d) entraîne c′) :

d) $\Rightarrow$ c′) D'après l'implication ii) $\Rightarrow$ iii) de la proposition 63, il suffit de prendre pour $\mathcal{C}'$ l'ensemble des ouverts $\alpha \in \mathcal{C}$ pour lesquels il existe $h \in \mathcal{F}(\overline{\alpha}) \cap (-\mathcal{F}(\overline{\alpha}))$, $h > 0$ sur $\overline{\alpha}$, et tels que $\mathcal{F}$ soit $\mathcal{C}'$-séparant.

65. *Remarques.*

1) Les implications a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) sont vraies sans l'hypothèse d'existence de la base $\mathcal{C}$.

2) Dans le cas où $\mathcal{F}$ est maximal relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega, \partial\omega)\}$, où $\mathcal{F}$ est $\mathcal{B}$-séparant et est régulier, alors on obtient le critère d'appartenance suivant :

$$f \in \mathcal{F}(U) \quad \text{si et seulement si} \quad f \text{ est s.c.i.} > -\infty$$

et si tout $x \in U$ possède un voisinage α ouvert relativement compact, tel que[27]

[27] ρ_x^{α} est la mesure telle que $R_v^{\partial\alpha}(x) = \int v\, d\rho_x^{\alpha}$, pour $v \in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$, v continue, qui est bien définie si $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$ sépare linéairement $\overline{\alpha}$.

$$f(x) \geqslant \int f \, d\rho_x^\alpha$$

(régularité dans un sens, et remarque que f est $\mathcal{B}$-surmédiane dans l'autre sens).

3) Dans le cas où $\mathcal{F}$ est un faisceau régulier maximal relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega , \partial\omega)\}$, l'additivité de la réduite :

$$v \rightsquigarrow \mathrm{R}_v^{\partial\alpha} \qquad (v \in \mathcal{F}(\overline{\alpha}))$$

a lieu même si $\mathcal{F}$ ne vérifie pas le principe du minimum dans α.

66. THEOREME. – *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau maximal relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega , \omega^*)\}$ régulière* (cf. n° 24).

On suppose que $\mathcal{F}$ est un faisceau régulier, $\mathcal{B}$-séparant et possédant une base de cloches.

Alors les propriétés a), b), c), *du théorème 64 sont équivalentes à la propriété* e) *suivante :*

e) *Pour toute $v \in \mathcal{F}(\overline{\omega})$, $\omega \in \mathcal{B}$, v continue, on a :*

$$(\mathrm{R}_v^{\omega^*})_{\overline{\omega}} = \mathrm{R}_v^{\partial\omega} \quad \textit{dans} \quad \omega$$

Démonstration. – $\mathcal{F}$ est saturé d'après la remarque 54 et stable par borne inférieure localement bornée régularisée d'après le théorème 50. Les équivalences a $\Leftrightarrow$ b $\Leftrightarrow$ c résultent donc du théorème 64.

e) $\Rightarrow$ b) Soit α ouvert relativement compact quelconque, et soit $v \in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$, v continue au voisinage de $\overline{\alpha}$. Considérons un ouvert $\omega \in \mathcal{B}$, $\overline{\omega} \subset \alpha$ et $u \in \mathcal{F}(\overline{\omega})$, telle que $u - \mathrm{R}_v^{\partial\alpha} > 0$ sur ω^*. D'après le lemme de Dini et la régularité de $\mathcal{F}$, il existe f de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de $\overline{\alpha}$, f continue au voisinage de $\overline{\alpha}$, vérifiant :

$$f \geqslant v \quad \text{sur} \quad \partial\alpha$$

$$u > f > \mathrm{R}_v^{\partial\alpha} \quad \text{sur} \quad \omega^*$$

Soit w la fonction définie par :

$$w = \begin{cases} (\mathrm{R}_f^{\omega^*})_{\overline{\omega}} = \mathrm{R}_f^{\partial\omega} & \text{dans} \quad \omega \\ f \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

La fonction régularisée s.c.i. $\hat{w}$ est de classe $\mathcal{S}$ au voisinage de $\overline{\alpha}$, car w est la borne inférieure de la famille des fonctions :

$$w_i = \begin{cases} \operatorname{Inf}(s_i\,, f) & \text{dans} \quad \omega \\ f & \text{ailleurs} \end{cases}$$

pour les fonctions $s_i \in \mathcal{S}(\overline{\omega})$, $s_i \geqslant f$ sur $\partial\omega$. On a $\hat{w} \geqslant f$ sur $\partial\alpha$, donc $\hat{w} \geqslant R_f^{\partial\alpha} \geqslant R_v^{\partial\alpha}$ sur $\overline{\alpha}$. On en conclut :

$$u \geqslant R_v^{\partial\alpha} \quad \text{sur} \quad \overline{\omega}$$

La fonction $-\,R_v^{\partial\alpha}$ étant $\mathcal{B}$-surmédiane, et étant s.c.i. $> -\infty$, on termine par maximalité : $-\,R_v^{\partial\alpha} \in \mathcal{S}(\alpha)$.

b) $\Rightarrow$ e) : On a a priori :

$$(R_v^{\omega^*})_{\overline{\omega}} \leqslant R_v^{\partial\omega} \quad \text{sur} \quad \omega$$

Soit $s > v$ sur ω^*, $s \in \mathcal{S}(\overline{\omega})$. On a : $s - R_v^{\partial\omega} > 0$ sur ω^*, donc au voisinage de ω^* dans $\overline{\omega}$. La base étant régulière intérieurement, on en déduit l'inégalité $\geqslant 0$ dans ω, donc, en faisant varier s :

$$(R_v^{\omega^*})_{\overline{\omega}} \geqslant R_v^{\partial\omega} \quad \text{sur} \quad \omega$$

Ceci achève la démonstration.

67. *Remarque.* – Soit $\mathcal{S}$ maximal au sens usuel relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega\,,\partial\omega)\}$ et $\mathcal{B}$-séparant, il est maximal par rapport à la base $\check{\mathcal{B}} = \{(\omega\,,\check{S}\omega)\}$ où $\check{S}\omega$ désigne la frontière de Silov de $\mathcal{S}(\overline{\omega})$.

Si $\omega \in \check{\mathcal{B}}$ est tel que pour tout compact $K \subset \omega$, tout voisinage de $\check{S}\omega$ contienne $\check{S}\alpha$ pour un certain α, $\overline{\alpha} \subset \omega$, et $K \subset \alpha$ alors la propriété e) montre que l'on a pour v continue, $v \in \mathcal{S}(\overline{\omega})$:

$$R_v^{\partial\omega} = (R_v^{\check{S}\omega})_{\overline{\omega}} \quad \text{dans} \quad \omega$$

De plus, la mesure ρ_x^ω définie par $v \rightarrowtail R_v^{\partial\omega}(x) = R_v^{\check{S}\omega}(x)$ pour $x \in \omega$ est portée par $\check{S}\omega$. En effet, l'inégalité $v_1 - v_2 \geqslant 0$ sur $\check{S}\omega$ entraîne $v_1 - R_{v_2}^{\check{S}\omega} \geqslant 0$ sur $\check{S}\omega$, donc $v_1 - R_{v_2}^{\check{S}\omega} \geqslant 0$ dans ω. On en déduit l'inégalité :

$$R_{v_1}^{\partial\omega} - R_{v_2}^{\partial\omega} \geqslant 0 \quad \text{dans} \quad \omega\,,$$

soit $\int (v_1 - v_2)\, d\rho_x^\omega \geqslant 0$ pour tout $x \in \omega$.

Par convergence uniforme sur $\partial\omega$ on montre que $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega)$, $\varphi \geqslant 0$ sur ω^* entraîne $\int \varphi \, d\rho_x^\omega \geqslant 0$. Si $\varphi = 0$ sur ω^* on a

$$\int \varphi \, d\rho_x^\omega = 0$$

V. Cas dénombrable.

Dans le cas où Ω possède une base dénombrable, nous allons voir que certains énoncés précédents peuvent être renforcés.

68. THEOREME (cf. n° 64). – *On suppose Ω à base dénombrable. Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau saturé relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega\,,\partial\omega)\}$.*

On suppose que :

– *$\mathfrak{F}$ est régulier*

– *$\mathfrak{F}$ est $\mathcal{B}$-séparant*

– *$\mathfrak{F}$ possédant une base $\mathcal{C}$ de cloches.*

Alors les propriétés a), b), c) *du théorème* 64 *sont équivalentes :*

a) *$\mathfrak{F}$ est maximal pour le principe du minimum usuel relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega\,,\partial\omega)\}$.*

b) $-R_v^{\partial\alpha} \in \mathfrak{F}(\alpha)$ *pour tout ouvert α relativement compact, et toute v continue $\in \mathfrak{F}(\overline{\alpha})$.*

c) $R_{v_1+v_2}^{\partial\alpha} = R_{v_1}^{\partial\alpha} + R_{v_2}^{\partial\alpha}$ *si v_1 et $v_2 \in \mathfrak{F}(\overline{\alpha})$ et sont continues, ($\forall\alpha$ ouvert relativement compact).*

Elles sont en outre équivalentes à la propriété e) *suivante :*

e) *il existe une base $\mathcal{D}$ d'ouverts δ tels que pour tout $x \in \overline{\delta}$ il existe une seule mesure, notée ρ_x^δ balayée de ϵ_x par rapport au cône $\mathfrak{F}(\overline{\delta})$ et portée par $\partial\delta$.* (*On démontre aussi que ces ouverts sont réguliers*).

Les conditions a), b), c) *et* e) *entraînent la condition* d') :
d') *pour tout $(\alpha\,,V) \in \mathcal{C}$, et toutes u et $v \in \mathfrak{F}(\alpha)$, continues telles que u/V et v/V soient bornées, on a :*

$$u - R_{u-v}^\alpha \in \mathfrak{F}(\alpha) \quad et \quad R_{u-v}^\alpha \in \mathfrak{F}(\alpha)$$

Si, de plus, il existe un recouvrement de Ω par des ouverts sur lesquels il existe des fonctions strictement positives appartenant à $\mathcal{S} \cap (-\mathcal{S})$

alors, a), b), c) *et* e *sont équivalentes à* d').

Démonstration. – Elle est en partie identique à celle du théorème 64 : on est amené à introduire comme dans la démonstration du théorème 64 la propriété c') suivante :

c') il existe une base $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, telle que pour tout $\alpha \in \mathcal{C}'$ tout β ouvert relativement compact $\overline{\beta} \subset \alpha$ et toutes fonctions v_1 et $v_2 \in \mathcal{S}(\overline{\alpha})$ continues, on ait l'additivité de la réduite sur $\partial\beta$:

$$R^{\partial\beta}_{v_1+v_2} = R^{\partial\beta}_{v_1} + R^{\partial\beta}_{v_2} \quad \text{sur} \quad \beta$$

et telle que $\mathcal{S}(\overline{\alpha})$ sépare linéairement $\overline{\alpha}$.

Nous allons faire la démonstration suivant le schéma :

$$\begin{tikzcd}
\text{a)} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \text{b)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{c)} \arrow[dd, Rightarrow] \\
& \text{d')} \arrow[dr, Rightarrow, dashed] & \\
\text{e)} \arrow[uu, Rightarrow] & & \text{c')} \arrow[ll, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ c') : les démonstrations sont identiques à celles du théorème 64 (remarque 65, 1).

a) $\Rightarrow$ d') : on remarque que la propriété a) entraîne les hypothèses du théorème 64 (théorème 50 et remarque qui suit) :

d') résulte alors du théorème 64 (car R^{α}_{u-v} est continue).

c') $\Rightarrow$ e) : soit $\mathcal{C}'$ la base qui intervient dans la démonstration du c') $\Rightarrow$ a), i) du théorème 64 : elle est formée de cloches (α, V) telles que $\mathcal{S}(\overline{\alpha})$ sépare linéairement $\overline{\alpha}$.

Notons $\mathcal{C}''$ la base constituée par les ouverts α tels que : $\alpha \in \mathcal{C}'$ et il existe $\alpha' \in \mathcal{C}'$, vérifiant $\overline{\alpha} \subset \alpha'$.

On va montrer que chaque $\alpha \in \mathcal{C}''$ possède un recouvrement $\mathcal{R}_\alpha$ d'ouverts δ, tels que $\overline{\delta} \subset \alpha$, pour lesquels les mesures $\rho^{\delta,\alpha}_x$ définies au théorème 68, c') $\Rightarrow$ a), i) soient balayées de ϵ_x par rapport à $\mathcal{S}(\overline{\delta})$ et soient les seules.

Il suffit de montrer que $\rho_x^{\delta,\alpha}$ est l'unique balayée de ϵ_x par rapport à $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$ pour certains ouverts δ d'adhérence $\overline{\delta} \subset \alpha$, et formant un recouvrement de α.

Soit $v \in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$, $v < 0$, v continue sur $\overline{\alpha}$.

Soit $x_0 \in \alpha$: il existe $\lambda > 0$, tel que :

$$\begin{aligned} &V(x_0) + \lambda v(x_0) > 0 \\ &V \quad + \lambda v \quad < 0 \quad \text{sur} \quad \partial\alpha \end{aligned}$$

Si $\alpha' \in \mathcal{C}$, $\alpha' \supset \overline{\alpha}$, on considère(28) une suite $v_n \in \mathcal{F}(\overline{\alpha}')$ telle que la suite double $\dfrac{v_p - v_q}{v}$ soit dense dans $\mathcal{C}(\overline{\alpha})$.

On choisit une suite $\epsilon_n > 0$ de sorte que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \epsilon_n v_n$ converge uniformément au voisinage de $\overline{\alpha}$. La fonction :

$$w = V + \epsilon \sum_{n \geqslant 0} \epsilon_n v_n + \lambda v \in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$$

vérifie pour ϵ assez petit :

$$\begin{gathered} w(x_0) > 0 \\ w < 0 \quad \text{sur} \quad \partial\alpha \end{gathered}$$

Posons alors $\qquad \delta = \{x \in \alpha \mid w(x) > 0\}$

On a $x_0 \in \delta$, donc les δ ainsi construits forment un recouvrement $\mathcal{R}_\alpha$ de α.

Pour $x \in \overline{\delta}$, considérons la mesure $\rho_x^{\delta,\alpha}$. Comme $w \in \mathcal{F}(\overline{\alpha})$ on a :

$$w(x) \geqslant \int w \, d\rho_x^{\delta,\alpha} = 0$$

Soit μ une mesure portée par $\partial\delta$ et balayée de ϵ_x par rapport à $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$. Cette mesure est balayée de $\rho_x^{\delta,\alpha}$ par rapport à $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$ ($\rho_x^{\delta,\alpha}$ est définie par la réduite).

On a donc :

$$0 = \int w \, d\rho_x^{\delta,\alpha} \geqslant \int w \, d\mu \geqslant 0$$

(28) Ce type de construction a été utilisé par Mokobodzki et Sibony dans [20].

soit :

$$\lambda \int v \, d\rho_x^{\delta,\alpha} + \int \mathrm{V} \, d\rho_x^{\delta,\alpha} + \epsilon \sum_{n \geqslant 0} \epsilon_n \int v_n \, d\rho_x^{\delta,\alpha} = \int \mathrm{V} \, d\mu +$$

$$+ \epsilon \sum_{n \geqslant 0} \epsilon_n \int v_n \, d\mu + \lambda \int v \, d\mu$$

Il en résulte les égalités :

$$\int v_n \, d\rho_x^{\delta,\alpha} = \int v_n \, d\mu \quad \text{pour tout } n$$

On déduit que μ est égale à $\rho_x^{\delta,\alpha}$, car elles sont égales sur un sous-espace dense de $\mathcal{C}(\overline{\delta})$.

Toute mesure balayée de ϵ_x par rapport à $\mathfrak{F}(\overline{\delta})$ est aussi balayée par rapport à $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, donc vaut $\rho_x^{\delta,\alpha}$ que l'on notera ρ_x^{δ}.

Il suffit alors de prendre pour $\mathcal{O}$ la base constituée par les ouverts $\delta \in \mathcal{R}_\alpha$, α variant dans $\mathcal{C}''$.

Montrons que les ouverts δ de $\mathcal{O}$ sont réguliers : soit φ une fonction continue sur $\partial\delta$.

La fonction $\mathrm{R}_\varphi^{\partial\delta}(x) = \sup \left\{ \int \varphi \, d\mu \mid \mu \text{ balayée de } \epsilon_x \text{ par rapport à } \mathfrak{F}(\overline{\delta}) \right\}$ vaut d'après ce qui précède :

$$\mathrm{R}_\varphi^{\partial\delta}(x) = \int \varphi \, d\rho_x^{\delta} \quad \text{pour} \quad x \in \overline{\delta}$$

On a de même :

$$- \mathrm{R}_{(-\varphi)}^{\partial\delta}(x) = - \int (-\varphi) \, d\rho_x^{\delta} = \int \varphi \, d\rho_x^{\delta} = \mathrm{R}_\varphi^{\partial\delta}(x)$$

Les fonctions $\mathrm{R}_\varphi^{\partial\delta}$ et $-\mathrm{R}_{(-\varphi)}^{\partial\delta}$ sont égales sur $\overline{\delta}$, la première est s.c.s., la seconde s.c.i. elles sont donc continues sur $\overline{\delta}$, et valent φ sur $\partial\delta$ (car $\rho_x^{\delta} = \epsilon_x$ pour $x \in \partial\delta$). De plus, $\mathrm{R}_\varphi^{\partial\delta}$ est continue dans $\overline{\delta}$, d'après le lemme de Dini, elle est sur $\overline{\delta}$ limite uniforme de fonctions de $\mathfrak{F}(\overline{\delta})$. Elle appartient donc à $\mathfrak{F}(\delta)$ dans δ ($\mathfrak{F}$ est saturé). De même, on a $-\mathrm{R}_{(-\varphi)}^{\partial\delta} \in -\mathfrak{F}(\delta)$, donc :

$$\mathrm{R}_\varphi^{\partial\delta} \in \mathfrak{F}(\delta) \cap (-\mathfrak{F}(\delta))$$

c.q.f.d.

e) $\Rightarrow$ a) : soit f une fonction $\mathcal{B}$-surmédiane dans un ouvert U, et soit α un ouvert relativement compact, $\overline{\alpha} \subset$ U. On va montrer que sur α, f est la borne supérieure d'un ensemble filtrant croissant de fonctions de $\mathcal{F}(\alpha)$.

Soit $\mathcal{R}$ un recouvrement fini de $\overline{\alpha}$ par des ouverts appartenant à la base $\mathcal{O}$ linéairement séparés par $\mathcal{F}$. On construit une fonction $f_{\mathcal{R}}$ de la manière suivante :

on note δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ les ouverts de $\mathcal{R}$.

On pose

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \notin \delta_i \\ \int f \, d\rho_x^{\delta_i} & \text{si} \quad x \in \delta_i \end{cases} \qquad (x \in \overline{\alpha})$$

et
$$f_{\mathcal{R}}(x) = \operatorname*{Inf}_i f_i(x) \qquad (x \in \overline{\alpha})$$

La fonction $f_{\mathcal{R}}$ appartient à $\mathcal{F}(\alpha)$.

En effet, chaque fonction f_i est s.c.i. et est $\leqslant f$. On a évidemment $f_i(x) \leqslant f(x)$ si $x \notin \partial_i$, si $x \in \delta_i$, $f_i(x)$ vaut $\int f \, d\rho_x^{\delta_i}$. Comme f est $\mathcal{B}$-surmédiane, il existe une mesure μ portée par $\partial\delta_i$, balayée de ϵ_x par rapport à $\mathcal{F}(\overline{\delta}_i)$ et telle que :

$$\int f \, d\mu \leqslant f(x)$$

Cette mesure ne peut être que $\rho_x^{\delta_i}$ d'après les hypothèses d'unicité.

$f_i \in \mathcal{F}(\delta_i)$: en effet, la fonction $x \rightsquigarrow \int f \, d\rho_x^{\delta_i}$ est la borne supérieure d'une famille filtrante croissante de fonctions du type $x \rightsquigarrow \int \varphi \, d\rho_x^{\delta_i}$ qui sont continues et appartiennent à $\mathcal{F}(\delta_i) \cap (-\mathcal{F}(\delta_i))$.

Au voisinage de chaque point $x \in \alpha$, $f_{\mathcal{R}}$ est une borne inférieure finie de fonctions de $\mathcal{F}$: $f_{\mathcal{R}}$ est donc localement dans $\mathcal{F}$, donc $f_{\mathcal{R}} \in \mathcal{F}(\alpha)$, car $\mathcal{F}$ est un faisceau.

Disons qu'un recouvrement $\mathcal{S}$ est plus fin que $\mathcal{R}$ si tout $\delta \in \mathcal{S}$ est d'adhérence $\overline{\delta}$ contenue dans un $\delta' \in \mathcal{R}$. On peut voir que l'ensemble des recouvrements finis de $\overline{\alpha}$ extraits de $\mathcal{O}$ est filtrant croissant (si $x \in \overline{\alpha}$, et si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont deux recouvrements finis de $\overline{\alpha}$, il existe $\delta \in \mathcal{R}$, $\delta' \in \mathcal{S}$, tels que $x \in \delta \cap \delta'$. On choisit $\gamma_x \in \mathcal{O}$, tel que

$x \in \gamma_x \subset \overline{\gamma}_x \subset \delta \cap \delta'$. Il existe alors $\gamma_{x_1}, \ldots, \gamma_{x_n}$ recouvrant $\overline{\alpha}$: ils forment un recouvrement fini $\mathcal{G}$ plus fin que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$).

La famille $f_{\mathcal{R}}$ est croissante avec $\mathcal{R}$: en effet, si $\mathcal{S}$ est plus fin que $\mathcal{R}$, il existe $\delta_i \in \mathcal{S}$ tel que l'on ait :

$$f_{\mathcal{S}}(x) = f_i(x) = \int f\, d\rho_x^{\delta_i}$$

Il existe $\delta'_j \in \mathcal{R}$ tel que l'on ait $\overline{\delta}_i \subset \delta'_j$. Si l'on démontre que l'on a :

$$\int f\, d\rho_x^{\delta_i} \geqslant \int f\, d\rho_x^{\delta'_j}$$

il en résultera l'inégalité :

$$f_{\mathcal{S}}(x) = \int f\, d\rho_x^{\delta_i} \geqslant \int f\, d\rho_x^{\delta'_j} \geqslant f_{\mathcal{R}}(x)$$

Or, on a : $\quad \partial\delta_i \subset \delta'_j$

et pour $y \in \partial\delta_i$: $\quad \int f\, d\rho_y^{\delta'_j} \leqslant f(y)$

Dans δ'_j, la fonction $f'_j(y) = \int f\, d\rho_y^{\delta'_j}$ est borne supérieure filtrante croissante de fonctions du type :

$y \mapsto \int \varphi\, d\rho_y^{\delta'_j}$ (pour $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\delta'_j)$) qui sont des fonctions de $\mathcal{F}(\delta'_j) \cap (-\mathcal{F}(\delta'_j))$.

On a donc

$$\int f'_j\, d\rho_x^{\delta_i} = f'_j(x) \quad \text{pour} \quad x \in \overline{\delta}_i$$

et

$$f'_j(x) = \int f'_j\, d\rho_x^{\delta_i} \leqslant \int f\, d\rho_x^{\delta_i} = f_i(x)$$

soit

$$f_{\mathcal{R}}(x) \leqslant f_{\mathcal{S}}(x)$$

On va montrer maintenant que quand $\mathcal{R}$ s'affine indéfiniment, la famille $f_{\mathcal{R}}$ converge en croissant vers f dans α.

Soit $x_0 \in \alpha$. Soit $k < f(x_0)$: il existe v continue, et de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de $\{x_0\}$ telle que l'on ait

$$f(x) > -v(x) > k \quad \text{au voisinage de} \quad x_0 .$$

Soit $\mathcal{V}$ ce voisinage de x_0 : on peut supposer $\overline{\mathcal{V}} \subset \alpha$. On va montrer qu'il existe un recouvrement $\mathcal{R}$ fini de $\overline{\alpha}$ par des ouverts de $\mathcal{O}$, soit $\mathcal{R} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ tels que tous les δ_i contenant x_0, soient d'adhérence contenue dans $\mathcal{V}$. Pour tout $x \in \overline{\alpha}$, soit δ_x un ouvert de $\mathcal{O}$, tel que l'on ait : $x \in \delta_x$, et

$$\begin{cases} \overline{\delta}_x \subset \mathcal{V} & \text{si} \quad x \in \mathcal{V} \\ \overline{\delta}_x \not\ni x_0 & \qquad x \notin \mathcal{V} \end{cases}$$

Il existe un sous-recouvrement fini $\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}$ de $\overline{\alpha}$; tous ceux qui contiennent x_0 sont d'adhérence contenue dans $\mathcal{V}$. On a donc obtenu le recouvrement $\mathcal{R}$ cherché.

On a alors $$f_{\mathcal{R}}(x_0) > k$$

En effet, il existe i tel que $f_{\mathcal{R}}(x_0) = f_{\delta_{x_i}}(x_0)$

donc :

$$f_{\mathcal{R}}(x_0) = \int f \, d\rho_{x_0}^{\delta_{x_i}} \geqslant \int - v \, d\rho_{x_0}^{\delta_{x_i}} \geqslant - v(x_0) > k$$

k étant arbitraire, on obtient :

$$f(x_0) = \sup_{\mathcal{R}} f_{\mathcal{R}}(x_0)$$

c.q.f.d.

Dans le cas où il existe un recouvrement de Ω par des ouverts munis de fonctions positives de $\mathfrak{F} \cap (-\mathfrak{F})$, il reste à voir l'implication d') $\Rightarrow$ c') : cela résulte de la proposition 63, i) $\Rightarrow$ iii).

CHAPITRE IV

Nous allons donner d'autres propriétés sans ordre particulier.

1. Etude des cloches.

69. DEFINITION. – *On appelle ouvert très régulier tout ouvert relativement compact ayant les propriétés suivantes :*

1) $\forall x \in \overline{\delta}$ *il existe une et une seule mesure* ρ_x^δ *portée par la frontière* $\partial\delta$ *et vérifiant :*

$$f(x) \geqslant \int f \, d\rho_x^\delta$$

pour toute fonction $\quad f \in \mathfrak{F}(\overline{\delta})$

2) *le compact* $\overline{\delta}$ *possède une base de voisinages constitués par des ouverts réguliers.*

Par exemple dans la théorie classique, les boules de $\mathbf{R}^n$ sont des ouverts très réguliers. Plus généralement les ouverts réguliers dont tous les points frontière de l'adhérence sont stables, sont des ouverts très réguliers.

70. PROPOSITION. – *Soit* $\mathfrak{F}$ *un préfaisceau maximal relatif à une base* $\mathcal{B} = (\omega \,, \partial\omega)$.

On suppose que $\mathfrak{F}$ *est régulier.*

Soit δ *un ouvert très régulier ayant un voisinage compact* K *que* $\mathfrak{F}$(K) *sépare linéairement*

Alors $\mathfrak{F} \cap (-\mathfrak{F})\,(\overline{\delta})$ *est partout dense dans*

$$\mathcal{C}(\overline{\delta}) \cap [\mathfrak{F} \cap (-\mathfrak{F})\,(\overline{\delta})]$$

Démonstration. – (cf. (17)).

On va d'abord montrer que le couple $(\mathcal{F}(\overline{\delta}), \mathcal{F} \cap (-\mathcal{F})(\overline{\delta}))$ est un simplexe géométrique(29).

Soit v (resp. u) continue et de classe $\mathcal{F}$ (resp. de classe $-\mathcal{F}$) au voisinage de $\overline{\delta}$, telles que l'on ait $u < v$ au voisinage de $\overline{\delta}$, il existe alors un ouvert régulier $\delta_1 \supset \overline{\delta}$, pour lequel on a :

$$\begin{cases} \overline{\delta} \subset \delta_1 \subset \overline{\delta}_1 \subset K \\ u < v \quad \text{sur} \quad \overline{\delta}_1 \end{cases}$$

Considérons la fonction $H_u^{\partial\delta_1}$. On a : $u \leqslant H_u^{\partial\delta_1} \leqslant v$ sur $\overline{\delta}_1$, donc au voisinage de $\overline{\delta}$, car $\mathcal{F}(\overline{\delta}_1)$ sépare linéairement $\overline{\delta}_1$ (cf. prop. 15).

c.q.f.d.

Soient maintenant μ_1 et μ_2 deux mesures positives sur $\overline{\delta}$, telles que l'on ait

$$\mu_1(h) = \mu_2(h) \quad \text{pour toute fonction}$$
$$h \in \mathcal{F}(\overline{\delta}) \cap (-\mathcal{F}(\overline{\delta}))$$

Soient ν_1 et ν_2 les balayées minimales de μ_1 et μ_2 par rapport à $C = \mathcal{C}(\overline{\delta}) \cap \mathcal{F}(\delta)$. Comme la frontière de Choquet de C est identique à $\partial\delta$, il s'ensuit que ν_1 et ν_2 sont portées par $\partial\delta$. Elles sont donc aussi portées par la frontière de Choquet de $\mathcal{F}(\overline{\delta})$, donc sont minimales par rapport à $\mathcal{F}(\overline{\delta})$.

On a ainsi

$$\mu_1(h) = \nu_1(h) = \nu_2(h) = \mu_2(h), \ \forall h \in \mathcal{F}(\overline{\delta}) \cap (-\mathcal{F}(\overline{\delta}))$$

On en déduit les mêmes inégalités pour toute fonction du type $\hat{u}$, avec $u \in -\mathcal{F}(\overline{\delta})$ $(\hat{u} = \operatorname{Inf}\{v/v \in \mathcal{F}(\overline{\delta}),\ v \geqslant u \text{ sur } \overline{\delta})\}$.

Comme ν_1 et ν_2 sont minimales, on a donc :

$$\nu_1(u) = \nu_1(\hat{u}) = \nu_2(\hat{u}) = \nu_2(u) \quad \text{pour toute} \quad u \in -\mathcal{F}(\overline{\delta})$$

La séparation linéaire entraîne alors que l'on a $\nu_1 = \nu_2$.

Soit h une fonction appartenant à $\mathcal{C}(\overline{\delta}) \cap \mathcal{F}(\overline{\delta}) \cap (-\mathcal{F}(\overline{\delta}))$. On a aussi :

$$\mu_1(h) = \nu_1(h) = \nu_2(h) = \mu_2(h) \quad (\text{car } \nu_1 = \nu_2)$$

(29) cf. [6] et [21].

On a donc

$$\mu_1(h) = \mu_2(h)$$

Le théorème de Hahn-Banach permet de conclure.

71. THEOREME. — *Ω est à base dénombrable. Soit $\mathfrak{F}$ un préfaisceau maximal relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega\,,\partial\omega)\}$. On suppose que $\mathfrak{F}$, est $\mathcal{B}$-séparant et régulier. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *il existe une base d'ouverts réguliers.*

b) *il existe une base de cloches de $\mathfrak{F}$.*

c) *il existe une base d'ouverts très réguliers.*

Démonstration.

a) $\Rightarrow$ b)

Soit $x_0 \in \Omega$ et $\beta \ni x_0$ un ouvert régulier tel que $\overline{\beta}$ soit linéairement séparé par $\mathfrak{F}(\overline{\beta})$. Il existe une fonction v continue et de classe $\mathfrak{F}$ au voisinage de $\overline{\beta}$ telle que l'on ait :

$$v(x_0) > \mathrm{H}_v^{\partial\beta}(x_0)$$

En effet, dans le cas contraire, on aurait $v(x_0) = \mathrm{H}_v^{\partial\beta}(x)$ pour toute fonction $v \in \mathfrak{F}_c(\overline{\beta})$. La mesure harmonique $\rho_{x_0}^{\partial\beta}$ (définie par $v \rightsquigarrow \mathrm{H}_v^{\partial\beta}(x_0)$) coïnciderait avec ϵ_x car $\mathfrak{F}(\overline{\beta})$ sépare linéairement $\overline{\beta}$. Ceci est impossible puisque $\rho_{x_0}^{\partial\beta}$ est portée par $\partial\beta$.

On peut supposer que l'on a $v > 0$ sur $\overline{\beta}$ en rajoutant au besoin à v une fonction $u \in \mathfrak{F}_c(\overline{\beta})$, $u > 0$, suffisamment grande, u continue.

Pour $\epsilon > 0$, la fonction $\mathrm{V} = v - (1 + \epsilon)\,\mathrm{H}_v^{\partial\beta}$ est continue sur $\overline{\beta}$, strictement négative sur $\partial\beta$, et appartient à $\mathfrak{F}(\beta)$.

Si ϵ est assez petit on a $\mathrm{V}(x_0) > 0$, et l'ouvert $\alpha = \{\mathrm{V} > 0\}$ est relativement compact, et contient x_0.

En faisant varier x_0 et β, on obtient ainsi une base.

b) $\Rightarrow$ c)

Reprenons le raisonnement du théorème 68. Soit $x_0 \in \Omega$ et soit $(\alpha\,,\mathrm{V})$ une cloche de $\mathfrak{F}$, telle que $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$ sépare linéairement $\overline{\alpha}$. On peut supposer que $\overline{\alpha}$ est contenu dans un ouvert de la base $\mathcal{B}$.

Il existe une fonction continue $w \in \mathcal{F}_c(\overline{\alpha})$, $w < 0$ sur $\overline{\alpha}$. Soit $\lambda_0 > 0$, tel que l'on ait :

$$\begin{cases} V(x_0) + \lambda_0 w(x_0) > 0 \\ V + \lambda_0 w < 0 \quad \text{sur} \quad \partial\alpha \end{cases}$$

On reprend la suite v_n de la démonstration du théorème 68, et on pose :

$$w_{\lambda_0} = V + \epsilon \sum_{n \geqslant 0} \epsilon_n v_n + \lambda_0 w$$

$\epsilon > 0$ étant choisi de manière que l'on ait :

$$\begin{cases} w_{\lambda_0}(x_0) > 0 \\ w_{\lambda_0} < 0 \quad \text{sur} \quad \partial\alpha \end{cases}$$

L'ouvert $\delta = \{w_{\lambda_0} > 0\}$ est un ouvert très régulier : il n'existe qu'une seule mesure ρ_x^δ balayée d'un point $x \in \overline{\delta}$, $\forall x \in \overline{\delta}$ et portée par $\partial\delta$ d'après la démonstration du théorème 68.

Pour $\lambda < \lambda_0$, λ suffisamment proche de λ_0, on obtient des ouverts δ_λ ayant la même propriété et vérifiant :

$$\overline{\delta} \subset \delta_\lambda$$

Ils forment une base de voisinages de $\overline{\delta}$, car on a :

$$\overline{\delta} = \bigcap_{\lambda < \lambda_0} \overline{\delta}_\lambda = \bigcap_{\lambda < \lambda_0} \delta_\lambda$$

c) $\Rightarrow$ a)

Evident (proposition 70).

Remarque. – Les ouverts très réguliers du théorème 71 sont strictement convexes (cf. remarque 2 qui suit le corollaire 40).

II. Additivité de certaines réduites dans les préfaisceaux produits.

Nous allons maintenant faire une application de ce qui précède à certains faisceaux produits. (cf. déf. 20).

72. LEMME. – *Soit* $\mathcal{F}$ *un préfaisceau sur un espace localement compact* Ω, *relatif à une base* $\mathcal{B} = \{(\omega, \partial\omega)\}$.

On suppose que $\mathcal{F}$ *est maximal, et régulier.*

Soit δ *un ouvert très régulier* (cf. *définition* 69), *et soit* $(\delta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *une base de voisinages réguliers de* $\overline{\delta}$.

On suppose que $\mathcal{F}(\overline{\delta})$ *sépare linéairement* $\overline{\delta}$.

Alors, pour toute fonction φ *continue au voisinage de* $\overline{\delta}$, *la famille* $H_\varphi^{\delta_\lambda}$ *converge uniformément sur* $\overline{\delta}$ *vers la fonction* H_φ^δ *suivant l'ensemble filtrant des* $(\delta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Démonstration. – Soit u une fonction continue et de classe $(-\mathcal{F})$ au voisinage de $\overline{\delta}$. Pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, on a $u \in -\mathcal{F}(\overline{\delta}_\lambda)$. On a

$$H_u^{\partial\delta}(x) = R_u^{\partial\delta}(x) \quad \text{pour} \quad x \in \overline{\delta}\ ,$$

donc $R_u^{\partial\delta}$ est continue sur $\overline{\delta}$.

Soit $\epsilon > 0$, d'après le lemme de Dini, il existe v de classe $\mathcal{F}$ et continue au voisinage de $\overline{\delta}$, telle que l'on ait :

$$H_u^{\partial\delta} = R_u^{\partial\delta} \geqslant v - \epsilon \quad \text{sur} \quad \overline{\delta}$$

Comme dans la démonstration de la proposition 70, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que l'on ait :

$$v - \epsilon \leqslant H_u^{\partial\delta} = R_u^{\partial\delta} \leqslant H_u^{\partial\delta_\lambda} \leqslant v \quad \text{sur} \quad \overline{\delta}$$

On a donc :

$$|H_u^{\partial\delta_\lambda} - H_u^{\partial\delta}| \leqslant \epsilon \quad \text{sur} \quad \overline{\delta}$$

Soit maintenant φ continue au voisinage de $\overline{\delta}$. Comme $\mathcal{F}(\overline{\delta})$ sépare linéairement $\overline{\delta}$, pour tout $\epsilon > 0$ et toute fonction $u > 0$, u de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de $\overline{\delta}$, il existe v et w de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de $\overline{\delta}$ telles que l'on ait :

$$v - w - \epsilon u < \varphi < v - w + \epsilon u \quad \text{sur} \quad \overline{\delta}$$

Cette inégalité est encore valable au voisinage de $\overline{\delta}$.

Pour λ assez grand, on a alors :

$$H_v^{\partial\delta_\lambda} - H_w^{\partial\delta_\lambda} - \epsilon H_u^{\partial\delta_\lambda} \leqslant H_\varphi^{\partial\delta_\lambda} \leqslant H_v^{\partial\delta_\lambda} - H_w^{\partial\delta_\lambda} + \epsilon H_u^{\partial\delta_\lambda}$$

de même :

$$H_v^{\partial\delta} - H_w^{\partial\delta} - \epsilon H_u^{\partial\delta} \leqslant H_u^{\partial\delta} \leqslant H_v^{\partial\delta} - H_w^{\partial\delta} + \epsilon H_u^{\partial\delta}$$

soit :

$$H_v^{\partial\delta\lambda} - H_v^{\partial\delta} - H_w^{\partial\delta\lambda} + H_w^{\partial\delta} - \epsilon(H_u^{\partial\delta\lambda} + H_u^{\partial\delta}) \leqslant H_\varphi^{\partial\delta\lambda} - H_\varphi^{\partial\delta} \leqslant H_v^{\partial\delta\lambda} - \\ - H_v^{\partial\delta} - H_w^{\partial\delta\lambda} + H_w^{\partial\delta} + \epsilon(H_u^{\partial\delta\lambda} + H_u^{\partial\delta})$$

on a donc quand λ augmente :

$$0 - 0 - 2\epsilon H_u^{\partial\delta} \leqslant \varliminf_\lambda (H_\varphi^{\partial\delta\lambda} - H_\varphi^{\partial\delta}) \leqslant \varlimsup_\lambda (H_\varphi^{\partial\delta\lambda} - H_\varphi^{\partial\delta}) \leqslant 0 - 0 + \\ + 2\epsilon H_u^{\partial\delta}$$

Donc $\lim\limits_\lambda H_\varphi^{\partial\delta\lambda} - H_\varphi^{\partial\delta}$ existe et est nulle. Comme les $H_u^{\partial\delta\lambda}$, $H_v^{\partial\delta\lambda}$ et $H_w^{\partial\delta\lambda}$ convergent uniformément, ceci prouve que la limite est uniforme sur $\overline{\delta}$.

c.q.f.d.

73. THEOREME. – *Soient Ω_1 et Ω_2 deux espaces localement compacts, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux préfaisceaux maximaux relatifs à des bases*

$$\mathcal{B}_1 = \{(\alpha , \partial\alpha)\} \quad pour \quad \mathcal{F}_1$$
$$\mathcal{B}_2 = \{(\beta , \partial\beta)\} \quad pour \quad \mathcal{F}_2$$

On suppose que $\mathcal{F}_1$ est $\mathcal{B}_1$-séparant, et que $\mathcal{F}_2$ est $\mathcal{B}_2$-séparant. On suppose que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont réguliers. On note $\mathcal{F}$ le faisceau produit de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ (cf. *définition 20*).

Soient δ_1 un ouvert très régulier de Ω_1, pour $\mathcal{F}_1$, et *δ_2 un ouvert très régulier de Ω_2, pour $\mathcal{F}_2$. On suppose que $\mathcal{F}_1(\overline{\delta}_1)$ (resp. $\mathcal{F}_2(\overline{\delta}_2)$) sépare linéairement $\overline{\delta}_1$* (resp. $\overline{\delta}_2$).

Alors pour tout $(x , y) \in \overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2$, l'application :

$$\phi \rightsquigarrow R_\phi^{\partial\delta_1 \times \partial\delta_2}(x , y)$$

pour ϕ continue sur $\partial\delta_1 \times \partial\delta_2$ est additive, de plus elle vaut :

$$R_\phi^{\partial\delta_1 \times \partial\delta_2}(x , y) = \iint \phi \, d\rho_x^{\delta_1} \times d\rho_y^{\delta_2}$$

où $\rho_x^{\delta_1}$ (resp. $\rho_y^{\delta_2}$) *désigne la mesure :*

$$\varphi \rightsquigarrow H_\varphi^{\partial\delta_1}(x) \quad (\text{resp. } \psi \rightsquigarrow H_\psi^{\partial\delta_2}(y))$$

pour toute φ *(resp.* ψ*) continue sur* $\partial\delta_1$ *(resp.* $\partial\delta_2$*).*

De plus, $\rho_x^{\delta_1} \times \rho_y^{\delta_2}$ *est l'unique mesure balayée de* $\epsilon_{(x,y)}$ *pour* $\mathcal{H}(\overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2) \cap (-\mathcal{H})(\overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2)$ *portée par* $\partial\delta_1 \times \partial\delta_2$.

Démonstration. — $\rho_x^{\delta_1} \times \rho_y^{\delta_2}$ est l'unique mesure balayée de $\epsilon_{(x,y)}$ par rapport à $\mathcal{C}(\overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2) \cap \mathcal{H}(\delta_1 \times \delta_2) \cap (-\mathcal{H})(\delta_1 \times \delta_2)$ portée par $\partial\delta_1 \times \partial\delta_2$ (possibilité de résoudre le problème de Dirichlet sur la frontière distinguée).

Nous allons montrer qu'elle est aussi l'unique mesure balayée de $\epsilon_{(x,y)}$ par rapport à $\mathcal{H}(\overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2) \cap (-\mathcal{H})(\overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2)$ portée par $\partial\delta_1 \times \partial\delta_2$.

Il suffit de voir que $\mathcal{H}(\overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2) \cap (-\mathcal{H})(\overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2)$ est partout dense dans $\mathcal{C}(\overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2) \cap \mathcal{H}(\delta_1 \times \delta_2) \cap (-\mathcal{H})(\delta_1 \times \delta_2)$.

Soit $\epsilon > 0$ et soit $u > 0$, u continue au voisinage de $\overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2$, $u \in \mathcal{H}(\overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2)$. Il existe sur la frontière distinguée $\partial\delta_1 \times \partial\delta_2$ une fonction continue du type

$$\Sigma\, \varphi_i(x)\, \psi_i(y) \quad \text{(somme finie)}$$

où les φ_i et ψ_i sont continues sur $\partial\delta_1$ et $\partial\delta_2$, telles que l'on ait sur $\partial\delta_1 \times \partial\delta_2$:

$$\Sigma\, \varphi_i(x)\, \psi_i(y) - \epsilon u(x,y) \leqslant h(x,y) \leqslant \Sigma\, \varphi_i(x)\, \psi_i(y) + \epsilon u(x,y)$$

pour tout $(x,y) \in \overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2$, on a en intégrant par rapport à $\rho_x^{\delta_1} \times \rho_y^{\delta_2}$:

$$\Sigma\, \mathrm{H}_{\varphi_i}^{\partial\delta_1}(x)\, \mathrm{H}_{\psi_i}^{\partial\delta_2}(y) - \epsilon \mathrm{H}_u^{\partial\delta_1 \times \partial\delta_2}(x,y) \leqslant h(x,y) \leqslant$$
$$\leqslant \Sigma\, \mathrm{H}_{\varphi_i}^{\partial\delta_1}(x)\, \mathrm{H}_{\psi_i}^{\partial\delta_2}(y) + \epsilon \mathrm{H}_u^{\partial\delta_1 \times \partial\delta_2}(x,y)$$

d'après le lemme précédent, il existe des fonctions

$$f_i \in \mathcal{H}_1(\overline{\delta}_1) \cap (-\mathcal{H}_1)(\overline{\delta}_1)$$
$$g_i \in \mathcal{H}_2(\overline{\delta}_2) \cap (-\mathcal{H}_2)(\overline{\delta}_2)$$

vérifiant :

$$|\Sigma\, \mathrm{H}_{\varphi_i}^{\partial\delta_1}(x)\, \mathrm{H}_{\psi_i}^{\partial\delta_2}(y) - \Sigma\, f_i(x)\, g_i(y))| \leqslant \epsilon u(x,y)$$

pour $(x,y) \in \overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2$.

On a donc finalement :

$$|\Sigma f_i(x)\, g_i(y) - h(x\,,y)| \leqslant \epsilon(u(x\,,y) + H_u^{\partial\delta_1 \times \partial\delta_2}(x\,,y)) \leqslant 2\epsilon u(x\,,y)$$

pour $(x\,,y) \in \overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2$.

Il en résulte immédiatement l'unicité de la mesure balayée de $\epsilon_{(x\,,\,y)}$, portée par $\partial\delta_1 \times \partial\delta_2$, par rapport à

$$\mathcal{F}(\overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2) \cap (-\mathcal{F})(\overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2)$$

En particulier, il n'existe qu'une seule mesure balayée de $\epsilon_{(x\,,\,y)}$ par rapport à $\mathcal{F}(\overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2)$ et portée par $\partial\delta_1 \times \partial\delta_2$: c'est donc $\rho_x^{\delta_1} \times \rho_y^{\delta_2}$.

La relation fondamentale du balayage :

$$R_\phi^{\partial\delta_1 \times \partial\delta_2}(x\,,y) = \sup \left\{ \int \phi\, d\mu \mid \mu \in M_x^{\mathcal{F}(\overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2)}(\partial\delta_1 \times \partial\delta_2) \right\}$$

montre que l'on a :

$$R_\phi^{\partial\delta_1 \times \partial\delta_2}(x\,,y) = \iint \phi\, d\rho_x^{\delta_1} \times d\rho_y^{\delta_2} = H_\phi^{\delta_1 \times \delta_2}(x\,,y)$$

pour tout $(x\,,y) \in \overline{\delta}_1 \times \overline{\delta}_2$ et ϕ continue sur $\partial\delta_1 \times \partial\delta_2$.

III. Retour sur la notion de base $\mathcal{F}$-très adéquate (cf. n° 41 à 48).

Le théorème suivant montre que la notion de base $\mathcal{F}$-très adéquate introduite au chapitre II pour reconnaître qu'un préfaisceau maximal relatif à une base $\mathcal{B}^* = \{(\omega\,,\omega^*)\}$ est maximal relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega\,,\partial\omega)\}$, n'est pas trop forte.

74. THEOREME. — *$\mathcal{F}$ est un préfaisceau maximal relatif à une base $\mathcal{B}^* = \{(\omega\,,\omega^*)\}$.*

On suppose que $\mathcal{F}$ est un faisceau régulier, séparant. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) *$\mathcal{F}$ est maximal relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega\,,\partial\omega)\}$.*

ii) *la base $\mathcal{B}^*$ est $\mathcal{F}$-très adéquate.*

Démonstration.

ii) $\Rightarrow$ i) : ceci résulte du théorème 44.

i) $\Rightarrow$ ii) : Soient ω_1 et $\omega_2 \in \mathcal{B}^*$ $\omega_1 \cap \omega_2 \neq \emptyset$, $\bar{\omega}_1 \cap \omega_2^* = \emptyset$.

On va montrer que pour tout $x \in \omega_1 \cap \omega_2$, la mesure $\rho_x^{\omega_i}$ est portée par l'ensemble $\partial\omega_1 \cap \bar{\omega}_2$.

Soient u et v de classe $\mathcal{F}$ et continues au voisinage de $\bar{\omega}_1$ et telles que $u > v$ sur $\partial\omega_1 \cap \bar{\omega}_2$.

Soit s de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de $\bar{\omega}_1$, $s \geqslant u$ sur $\partial\omega_1$. La fonction $s - R_v^{\partial\omega_1}$ est > 0 sur $\partial\omega_1 \cap \bar{\omega}_2$ donc au voisinage $\mathcal{V}$ de $\partial\omega_1 \cap \bar{\omega}_2$ dans $\bar{\omega}_1$, et elle appartient à $\mathcal{F}(\omega_1)$. Soit α un ouvert relativement compact vérifiant $\bar{\alpha} \subset \omega_2$ et $\bar{\omega}_2 \cap \partial\alpha \subset \mathcal{V}$. Comme $\mathcal{B}$ est $\mathcal{F}$ adéquate ; $s - R_v^{\partial\omega_1}$ est positive sur $\alpha \cap \bar{\omega}_1$. α pouvant être pris arbitrairement grand, $s - R_v^{\partial\omega_1} \geqslant 0$ sur $\omega_1 \cap \bar{\omega}_2$. En faisant varier s, on obtient :

$$R_u^{\partial\omega_1} \geqslant R_v^{\partial\omega_1} \quad \text{sur} \quad \omega_1 \cap \bar{\omega}_2$$

On en déduit que pour tout $x \in \omega_1 \cap \bar{\omega}_2$, $\rho_x^{\omega_1}$ est portée par $\partial\omega_1 \cap \bar{\omega}_2$.

Soit f la fonction définie sur $\complement\,\omega_2^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \bar{\omega}_2 - \omega_2^* \\ +\infty & \text{si} \quad x \notin \bar{\omega}_2 \end{cases}$$

elle vérifie le critère de la remarque 65,2 donc est une fonction de $\mathcal{F}(\complement\,\omega_2^*)$.

Le résultat suit alors.

Reprenons les hypothèses du théorème 46. Nous obtenons le résultat suivant (cf. Köhn [6]).

75. THEOREME. – *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau d'espaces vectoriels muni d'une base $\mathcal{B} = \{(\omega, \omega^*)\}$ d'ouverts semi-réguliers.*

On suppose que $\mathcal{E}$ est contenu dans un préfaisceau $\mathcal{F}$ de cônes convexes relatif à $\mathcal{B} = \{(\omega, \omega^*)\}$, séparant et maximal. On suppose $\mathcal{B}$ $\mathcal{F}$-très adéquate. On sait que $\mathcal{F}$ est maximal au sens usuel (théorème 44), et on a les propriétés suivantes :

a) *pour $\omega \in \mathcal{B}$, v de classe $\mathcal{F}$ au voisinage de $\bar{\omega}$, la fonction :*

$$w = \begin{cases} \int v \, d\mu_x^\omega & \text{dans} \quad \bar{\omega} \\ v & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où μ_x^ω *désigne la mesure de* Poisson *de* (ω, ω^*) *définie par* $\varphi \rightsquigarrow H_\varphi^{\omega^*}$ *pour* $\varphi \in \mathcal{C}(\omega^*)$, *est une fonction de* $\mathcal{F}(\bar{\omega})$.

b) *On a* $w = (R_v^{\omega^*})_{\bar{\omega}}$ *dans* $\bar{\omega}$.

Démonstration.

a) D'après le théorème 46, $v(x)$ majore $\int v \, d\mu_x^\omega$ quelque soit $x \in \bar{\omega}$. w est donc s.c.i. Nous allons montrer que w vérifie le critère d'appartenance du théorème 35 : si x est intérieur ou extérieur à ω, le critère est évidemment vérifié.

Soit x un point de $\partial\omega$.

Si $x \in \omega^*$, on a :

$$w(x) = v(x) \geqslant \int v \, d\mu \geqslant \int w \, d\mu$$

pour toute mesure μ balayée de ϵ_x et portée par un $\partial\alpha$, α étant un ouvert arbitrairement petit et relativement compact contenant x.

Si $x \in \partial\omega \backslash \omega^*$, soit α un ouvert relativement compact, $x \in \alpha$, $\bar{\alpha} \cap \omega^* = \emptyset$. Comme $\mathcal{B}$ est $\mathcal{F}$-très adéquate, toute mesure balayée de ϵ_x par rapport à $\mathcal{F}(\bar{\alpha})$ et portée par $\partial\alpha$ est portée par $\partial\alpha \cap \bar{\omega}$. Or, le lemme 45 montre que la fonction $y \rightsquigarrow \int v \, d\mu_y^\omega$ est prolongeable au voisinage de x en une fonction f de $\mathcal{F}$. Si l'on a pris soin de prendre α assez petit, il s'ensuit que l'on a :

$f(x) \geqslant \int f \, d\mu$ pour $\mu \prec \epsilon_x$ par rapport à $\mathcal{F}(\bar{\alpha})$; comme μ est portée par $\partial\alpha \cap \bar{\omega}$, ceci s'écrit :

$$w(x) \geqslant \int w \, d\mu$$

c.q.f.d.

b) w majore v sur ω^*, on a donc $w \geqslant (R_v^{\omega^*})_{\bar{\omega}}$ sur $\bar{\omega}$. Soit $s \in \mathcal{F}(\bar{\omega})$, $s \geqslant v$ sur ω^*. On a pour $x \in \bar{\omega}$:

$$s(x) \geqslant \int s \, d\mu_x^\omega \geqslant \int v \, d\mu_x^\omega = w(x)$$

En faisant varier s :

$$(R_v^{\omega^*})_{\overline{\omega}}(x) \geqslant w(x)$$

IV. Maximalité des préfaisceaux d'espaces vectoriels.

Nous sommes maintenant en mesure de compléter le premier chapitre (paragraphe IV) sur les rapports qui existent entre la maximalité des espaces vectoriels et celle des cônes.

On a le théorème suivant :

76. THEOREME. – *Soit $\mathfrak{F}$ un préfaisceau maximal relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega , \partial\omega)\}$.*

On suppose que :

– $\mathfrak{F}$ est un faisceau

– $\mathfrak{F}$ est régulier

– $\mathfrak{F}$ possède une base $\mathcal{C}$ de cloches

– la base $\mathcal{B}$ est héréditaire.

Alors toute fonction $\mathcal{B}$-surmédiane par rapport à $\mathfrak{F} \cap (-\mathfrak{F})$ est une fonction de $\mathfrak{F}$.

En particulier, $\mathfrak{F} \cap (-\mathfrak{F})$ est un préfaisceau maximal d'espaces vectoriels relatif à la base $\mathcal{B}$.

Démonstration. – Soit $\mathcal{G}$ un préfaisceau maximal de cônes convexes relatif à $\mathcal{B}$ et contenant $\mathfrak{F} \cap (-\mathfrak{F})$.

Soit (α , V) une cloche de $\mathfrak{F}$ contenue dans un ouvert de $\mathcal{B}$. Il existe une fonction v de classe $\mathfrak{F}$ et continue au voisinage de $\overline{\alpha}$, et $v < 0$ sur $\overline{\alpha}$.

Soit $f \in \mathcal{G}(\overline{\alpha})$: il existe φ continue à support compact dans α, et $\lambda > 0$, tels que l'on ait :

$$f \geqslant \lambda v + \varphi \quad \text{sur} \quad \overline{\alpha}$$

Il résulte du lemme 58 que la fonction $-(R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+\lambda v})_{\overline{\alpha}}$ est continue sur $\overline{\alpha}$ et est localement surmédiane dans l'ouvert U de α où l'on a $\varphi + \lambda v < (R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+\lambda v})_{\overline{\alpha}}$. Dans U, $-(R^{\overline{\alpha}}_{\varphi+\lambda v})_{\overline{\alpha}}$ est donc localement $\mathcal{B}$-surmédiane, donc localement dans $\mathfrak{F}$. Comme $\mathfrak{F}$ est un faisceau, on a :

$$-\ (R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+\lambda v})_{\bar{\alpha}} \in \mathcal{F}(U) \cap (-\ \mathcal{F}(U))$$

Ainsi la fonction $f - (R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+\lambda v})_{\bar{\alpha}}$ appartient à $\mathcal{G}(U)$.

En chaque point $x \in \partial U$, on a :

$$\varliminf_{\substack{y \to x \\ y \in u}} [f(y) - (R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+\lambda v})_{\bar{\alpha}}(y)] \geqslant 0$$

La base $\mathcal{B}$ étant héréditaire, on en déduit l'inégalité :

$$f - (R^{\bar{\alpha}}_{\varphi+\lambda v})_{\bar{\alpha}} \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad U$$

On a donc l'inégalité sur α tout entier.

En faisant varier φ dans un ensemble filtrant croissant, on montre que l'on a $f \in \mathcal{F}(\alpha)$.

On termine en remarquant que $\mathcal{F}$ est un faisceau.

En particulier, toute fonction $\mathcal{B}$-médiane appartient à $\mathcal{F} \cap (-\ \mathcal{F})$.

77. COROLLAIRE. – *Si $\mathcal{F}$ vérifie les hypothèses du théorème précédent, il est l'unique préfaisceau maximal vérifiant le principe du minimum au sens usuel* (i.e. *sur tous les ouverts de $\mathcal{B} = \{(\omega\,,\, \partial\omega)\}$ contenant $\mathcal{F} \cap (-\ \mathcal{F})$*).

Remarque. – On a supposé $\mathcal{B}$ héréditaire. C'est une hypothèse naturelle car un préfaisceau maximal relatif à une base $\mathcal{B}'$ est maximal par rapport à la plus petite base héréditaire contenant $\mathcal{B}'$ dès que $\mathcal{F}$ est un faisceau.

V. Ensembles polaires.

Nous allons maintenant nous occuper d'une classe d'ensembles exceptionnels.

78. DEFINITION. – *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega\,,\, \partial\omega)\}$.*

Nous dirons qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(U)$ est "$\mathcal{F}$-propre" dans U *si l'on a :*

$$\forall\, x \in U,\ \forall\, \omega \in \mathcal{B},\ x \in \omega \subset \bar{\omega} \subset U,$$

$$\int f\,d\mu < +\infty, \quad \forall \mu \in M_x^{\mathcal{F}(\bar\omega)}(\partial\omega)$$

Remarque. – Si $\mathcal{F}$ est régulier, il est équivalent de dire que l'on a :

$$\sup\{R_\varphi^{\partial\omega}(x)/\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega)\,,\, \varphi \leqslant f\} < +\infty$$

Les fonctions "$\mathcal{F}$-propre" forment un préfaisceau de cônes convexes que nous noterons $\mathcal{F}'$.

79. Proposition. – *On suppose que $\mathcal{F}$ est un faisceau régulier, $\mathcal{B}$-saturé.*

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{U})$, *pour que f soit $\mathcal{F}$-propre, il faut et il suffit qu'il existe une base $\mathcal{B}_f$ de l'ouvert* U, *formée d'ouverts relativement compacts dans* U, *telle que $\mathcal{F}$ soit relatif à $\mathcal{B}_f$ et telle que l'on ait :*

$$\forall x \in \mathrm{U},\ \exists\, \omega \in \mathcal{B}_f,\ x \in \omega$$

tel que :

$$\int f\,d\mu < +\infty, \quad \forall \mu \in M_x^{\mathcal{F}(\bar\omega)}(\partial\omega)$$

Démonstration. – La nécessité est évidente.

Soient $x \in \mathrm{U}$, $\omega \in \mathcal{B}$, $x \in \omega \subset \bar\omega \subset \mathrm{U}$. Il existe $\omega_1 \in \mathcal{B}_f$ et vérifiant : $x \in \omega_1 \subset \bar\omega_1 \subset \omega$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\omega)$, $\varphi < f$ sur $\partial\omega$: il existe $v \in \mathcal{F}_c(\bar\omega)$, et vérifiant :

$$\varphi \leqslant v \quad \text{sur} \quad \partial\omega$$
$$v \leqslant f \quad \text{au voisinage de} \quad \bar\omega$$

On a alors :

$$R_\varphi^{\partial\omega}(x) \leqslant R_v^{\partial\omega}(x) \leqslant R_v^{\partial\omega_1}(x)$$

la deuxième inégalité résultant des hypothèses sur $\mathcal{F}$.

On a ainsi :

$$R_\varphi^{\partial\omega}(x) \leqslant \sup\{R_\psi^{\partial\omega_1}(x) \mid \psi \in \mathcal{C}(\partial\omega_1),\ \psi \leqslant f\} < +\infty$$

80. Corollaire. – *$\mathcal{F}'$ est un faisceau.*

81. Proposition. – *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau saturé relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega\,,\,\partial\omega)\}$.*

Soit $$u \in \mathfrak{F}'(\mathrm{U})$$

posons $$\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{U} \mid u(x) < +\infty\}$$

La fonction

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{U} \\ +\infty & \text{si} \quad x \in \mathrm{U} \backslash \overline{\mathrm{A}} \end{cases}$$

est une fonction de $\mathfrak{F}'(\mathrm{U})$.

Démonstration. – Il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathrm{U}$ tout $\omega \in \mathcal{B}$, $\overline{\omega} \subset \mathrm{U}$, $x \in \omega$ on a :

$$\mu(\mathrm{U} \backslash \overline{\mathrm{A}}) = 0 \quad \text{pour} \quad \mu \in \mathrm{M}_x^{\mathfrak{F}(\overline{\omega})}(\partial \omega)$$

Or c'est évident, car u est μ-intégrable par hypothèse. On a alors $\mu(\mathrm{U} \backslash \overline{\mathrm{A}}) = 0$, donc μ est portée par $\mathrm{U} \cap \overline{\mathrm{A}}$. Il en résulte l'inégalité:

$$v(x) \geqslant \int v \, d\mu = 0$$

On a donc

$$v \in \mathfrak{F}'(\mathrm{U})$$

82. Definition. – *Soit* $\mathfrak{F}$ *un préfaisceau relatif à* $\mathcal{B} = \{(\omega, \partial\omega)\}$. *On dira qu'un ensemble* P *est polaire sur un ouvert* U *s'il existe une fonction* $f \in \mathfrak{F}'(\mathrm{U})$ *vérifiant :*

$$f = +\infty \quad \text{sur} \quad \mathrm{P} \cap \mathrm{U}$$

De même, P *sera dit localement polaire s'il est recouvrable par des ouverts* U_i *sur chacun desquels il est polaire.*

83. Proprietes immediates. – *Si* $\mathrm{Q} \subset \mathrm{P}$ *et si* P *est polaire (resp. localement polaire) sur un ouvert* U, *alors* Q *est polaire (resp. loc. polaire) sur* U.

Si P *et* Q *sont polaires (resp. localement polaires) sur* U, *leur réunion* $\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}$ *est polaire sur* U *(resp. localement polaire).*

Si P *est polaire sur* U, *il est sans point intérieur sur* U (*car il est* μ*-négligeable pour toute mesure* $\mu \in \mathrm{M}_x^{\mathfrak{F}(\overline{\omega})}(\partial\omega)$ $\omega \in \mathcal{B}$, $\overline{\omega} \subset \mathrm{U}$). *Il en est de même si* P *est localement polaire.*

Remarque. – Sous des conditions plus fortes, on peut améliorer ces propriétés.

84. LEMME. – *Soit* $\mathfrak{F}$ *un préfaisceau relatif à* $\mathcal{B}=\{(\omega\,,\partial\omega)\}$.

Pour toute fonction $f\in\mathfrak{F}(\mathrm{U})$, U *ouvert, pour tout* $x\in\mathrm{U}$, *et pour toute famille* $(\mu_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *de mesures à supports dans un* $\bar{\omega}_0$ *fixe,* $\omega_0\in\mathcal{B}$, *balayées de* ϵ_x *par rapport à* $\mathfrak{F}(\bar{\omega}_0)$, *filtrée par un ultrafiltre* $\mathcal{U}$ *sur* I *tel que l'on ait :*

$$\operatorname{Supp}\mu_i \longrightarrow \{x\} \quad \textit{suivant } \mathcal{U}$$

On a :

$$f(x)=\lim_{\mathcal{U}}\int f\,d\mu_i$$

Démonstration. – La famille μ_i converge vaguement sur $\bar{\omega}_0$ vers une mesure μ balayée de ϵ_x (l'ensemble de mesures balayées de ϵ_x par rapport à $\mathfrak{F}(\bar{\omega}_0)$ est compact. Le support de μ est $\{x\}$, donc μ est de la forme $\lambda\epsilon_x$. Il existe deux fonctions u et $v\in\mathfrak{F}(\bar{\omega}_0)$ vérifiant $u>0$ sur $\bar{\omega}_0$, $u(x)<+\infty$

et
$$v(x)<0$$

On en déduit que $\lambda=1$ donc $\mu=\epsilon_x$.

On a donc :

$$f(x)\geqslant\lim_{\mathcal{U}}\int f\,d\mu_i\geqslant f(x)$$

La première inégalité étant évidente, et la seconde résultant de la semi-continuité inférieure de l'application

$$\mu \rightsquigarrow \int f\,d\mu$$

85. THEOREME. – *Soit* $\mathfrak{F}$ *un préfaisceau maximal relatif à une base* $\mathcal{B}=\{(\omega\,,\omega^*)\}$ *régulière extérieurement.*

On suppose que $\mathfrak{F}$ *est un faisceau, que* $\mathfrak{F}$ *est régulier et que* $\mathfrak{F}$ *est* $\mathcal{B}$-*séparant.*

Soit P *un ensemble fermé et localement polaire. Si* v *est une fonction* $\in\mathfrak{F}(\Omega\backslash\mathrm{P})$ *bornée inférieurement au voisinage de chaque point de* P, *alors la fonction :*

$$\hat{v}(x)=\begin{cases} v(x) & si \quad x\in\Omega\backslash\mathrm{P}\\ \varliminf\limits_{\substack{y\to x\\ y\in\Omega\backslash\mathrm{P}}} v(y) & si \quad x\in\mathrm{P}\end{cases}$$

appartient à $\mathfrak{F}(\Omega)$.

Démonstration. – Il existe un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de P par des ouverts U_i tels que P soit polaire sur chaque U_i. On peut donc se ramener au cas où P est polaire sur Ω, car $\mathcal{F}$ est un faisceau.

Soit $w_P \in \mathcal{F}'(\Omega)$ telle que $w_P = +\infty$ sur P, w_P est finie sur un ensemble partout dense D.

La fonction :

$$v_n = \begin{cases} v + \dfrac{1}{n} w_P & \text{sur} \quad \Omega \backslash P \\ +\infty & \text{sur} \quad P \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 1)$$

est une fonction $v_n \in \mathcal{F}(\Omega)$, d'après le théorème 35. Soit $\hat{v}$ la régularisée s.c.i. de l'enveloppe inférieure de la suite v_n : elle appartient à $\mathcal{F}(\Omega)$ d'après le théorème 50, et vérifie :

$$\hat{\hat{v}} \geqslant v \quad \text{dans} \quad \Omega \backslash P$$

Il existe un ensemble filtrant croissant de couples (Ω_i, g_i), avec $g_i \in \mathcal{F}_c(\Omega_i)$, $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$ et

$$\hat{v} = \sup_i g_i \qquad (g_i \text{ continue sur } \Omega_i)$$

Pour tout i, on a dans Ω_i :

$$g_i \leqslant v_n \quad \text{pour tout} \quad n$$

donc :

$$g_i \leqslant v \quad \text{sur} \quad P \cap \Omega_i$$

On va démontrer la même inégalité sur $\Omega_i \backslash P$. Soit $x \in \Omega_i \backslash P$, et soit $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset \Omega_i \backslash P$, $x \in \omega$, on a

$$v(x) \geqslant \int v \, d\mu \geqslant \int g_i \, d\mu$$

pour $\mu \in M_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}(\partial\omega)$, car on a $g_i \leqslant v$ μ-presque partout. On applique le lemme 84 et on en déduit l'inégalité :

$$v(x) \geqslant g_i(x)$$

D'après la définition de $\hat{v}$, on a alors :

$$g_i \leqslant \hat{v} \quad \text{sur} \quad \Omega_i$$

d'où à la limite :

$$\hat{\hat{v}} \leqslant \hat{v} \quad \text{sur} \quad \Omega$$

D'autre part, on a sur $\Omega \backslash \mathrm{P}$

$$\hat{\hat{v}} \geqslant v \quad \text{donc} \quad \hat{\hat{v}} = v \quad \text{sur} \quad \Omega \backslash \mathrm{P}$$

Soit $x \in \mathrm{P}$, et soit $(\omega_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille filtrante décroissante de voisinages de x, $\omega_i \in \mathcal{B}$ et soit $\mu_i \in \mathrm{M}_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega}_i)}(\partial \omega_i)$. Si $\mathcal{U}$ est un ultra filtre sur I plus fin que le filtre des sections de I, on a d'après le lemme 84 :

$$\hat{v}(x) = \lim_{\mathcal{U}} \int \hat{\hat{v}}\, d\mu_i$$

soit, puisque P est μ_i-négligeable pour tout i :

$$\hat{v}(x) = \lim_{\mathcal{U}} \int v\, d\mu_i$$

qui peut s'écrire :

$$\hat{v}(x) \geqslant \lim_{\mathcal{U}} \mu_i(1) \times \lim_{\mathcal{U}} \operatorname{Inf}\{v\ (y) \mid y \in \partial\omega_i \backslash \mathrm{P}\}$$

ou :

$$\hat{v}(x) \geqslant 1 \times \lim_{\mathcal{U}} \operatorname{Inf}\{v\ (y) \mid y \in \bar{\omega}_i \backslash \mathrm{P}\} \geqslant \hat{v}(x)$$

finalement, on a :

$$\hat{\hat{v}} = \hat{v} \quad \text{sur } \Omega, \text{ et donc} \quad \hat{v} \in \mathcal{F}(\Omega)$$

c.q.f.d.

86. Corollaire. – *Sous les hypothèses du théorème 85 si* $h \in \mathcal{F}(\Omega \backslash \mathrm{P}) \cap (-\mathcal{F}(\Omega \backslash \mathrm{P}))$ *et est bornée au voisinage de chaque point de* P, *alors* h *est prolongeable par continuité à* Ω *tout entier, et son prolongement appartient à* $\mathcal{F}(\Omega) \cap (-\mathcal{F}(\Omega))$.

Démonstration. – La fonction

$$\hat{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \backslash \mathrm{P} \\ \varliminf\limits_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega \backslash \mathrm{P}}} h(y) & \text{si} \quad x \in \mathrm{P} \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{F}(\Omega)$ d'après le théorème 85.

De même la fonction :

$$\check{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \backslash \mathrm{P} \\ \overline{\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega \backslash \mathrm{P}}}} \; h(y) & \text{si} \quad x \in \mathrm{P} \end{cases}$$

appartient à $-\mathcal{F}(\Omega)$.

Pour tout $x \in \Omega$, tout $\omega \in \mathcal{B}$ suffisamment petit, et toute mesure $\mu \in \mathrm{M}_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}(\partial\omega)$, on a les inégalités :

$$\mu(\hat{h}) \leqslant \hat{h}(x) \leqslant \check{h}(x) \leqslant \mu(\check{h})$$

Or, la fonction $\check{h} - \hat{h}$ est μ-négligeable car elle est nulle en dehors d'un ensemble polaire. On a donc l'égalité, et le résultat s'ensuit.

Remarque.

1) Le théorème précédent s'applique à toutes les théories axiomatiques locales du potentiel.

2) On peut remarquer que dans la démonstration du théorème 85 et du corollaire 86, il suffit d'utiliser le fait que la fonction $\mathcal{W}_p$ vérifie seulement la propriété suivante : pour tout $x \in \Omega$, et pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de x, il existe $\omega \in \mathcal{B}$, $x \in \omega \subset \bar{\omega} \subset \mathcal{V}$ et il existe $\mu \in \mathrm{M}_x^{\mathcal{F}(\bar{\omega})}(\partial\omega)$ telle que $\mathcal{W}_p$ soit μ-intégrable. Ceci permet d'appliquer le théorème 85 aux fonctions séparément surharmoniques sur $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$, ou bien plurisurharmoniques sur $\mathbf{C}^n$.

*

* *

VI. Les ouverts de Green en théorie axiomatique de Brelot.

On rappelle qu'un ouvert U est dit de Green, dans une théorie axiomatique de Brelot munie des axiomes I, II, III (cf. [9]) s'il existe un potentiel $p > 0$ sur U.

Nous allons caractériser les ouverts de Green par une propriété de maximalité.

LEMME TOPOLOGIQUE. – *Soit* Ω *un espace localement compact, non compact, à base dénombrable. Toute fonction* f s.c.i. $> -\infty$ *sur* Ω *est la borne supérieure d'une suite croissante de fonctions finies continues.*

Démonstration. – On se ramène au cas $0 < f \leqslant 1$. Il existe alors une suite croissante de fonctions φ_n continues à support compact vérifiant :

$$0 \leqslant \varphi_n < f$$

Posons :
$$\varphi = \sum_{n \geqslant 1} 2^{-n} \varphi_n .$$

On a :
$$0 < \varphi < f .$$

La fonction $f - \varphi$ est elle-même la borne supérieure d'une suite croissante de fonctions ψ_n continues à support compact, telles que $0 \leqslant \psi_n < f - \varphi$. On a ainsi :

$$f = \sup_n (\varphi + \psi_n)$$

avec
$$0 < \varphi + \psi_n < f .$$

87. THEOREME. – *Soit* Ω *un espace localement compact à base dénombrable, non compact, connexe et localement connexe, muni d'un faisceau* $\mathcal{H}^*$ *de fonctions hyperharmoniques associé à une axiomatique de Brelot vérifiant les axiomes* I, II, III. *On suppose que les constantes sont harmoniques et que tout point est localement polaire.*

Soit $\mathcal{B}$ *une base héréditaire de* Ω, *formée d'ouverts* ω *relativement compacts, munis de leur frontière topologique* $\partial\omega$, $\mathcal{B} = \{(\omega , \partial\omega)\}$. *Alors :*

I) *pour tout ouvert* U *de* Ω, $\mathcal{H}^*(\mathrm{U})$ *est un cône maximal parmi les cônes convexes de fonctions* s.c.i. $> -\infty$ *sur* U, *vérifiant le principe du minimum relativement à* $\mathcal{B}$.

II) U *est un ouvert de Green si et seulement si le cône* $\mathcal{H}_b^*(\mathrm{U})$ *des fonctions hyperharmoniques bornées inférieurement dans* U *est maximal parmi les cônes convexes de fonctions* s.c.i. *bornées inférieurement dans* U *et vérifiant le principe du minimum relativement à* $\mathcal{B}$.

Démonstration.

I) Nous allons d'abord montrer que les fonctions finies continues de $\mathcal{H}^*(\mathrm{U})$ séparent les points de U.

D'après un théorème d'Anandam (th. 3-4, [1 , a]), pour tout point x_0 de $\mathcal{V}$, il existe f surharmonique dans U, valant $+\infty$ en x_0.

Soit $y_0 \neq x_0$: on peut supposer que f est harmonique au voisinage de y_0 (en l'y remplaçant au besoin par la solution d'un problème de Dirichlet). Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\mathrm{U})$, $\varphi < f$, $\varphi(x_0) > f(y_0)$ (lemme topologique). La fonction R_φ^u est surharmonique continue dans U (démonstration identique à celle du cas $\varphi \geqslant 0$). L'inégalité $\varphi \leqslant \mathrm{R}_\varphi^u \leqslant f$ montre que l'on a :

$$\mathrm{R}_\varphi^u(x_0) \geqslant \varphi(x_0) > f(y_0) \geqslant \mathrm{R}_\varphi^u(y_0)$$

Nous allons maintenant montrer que chaque point x_0 de U possède une base de voisinages ouverts relativement compacts δ dans U pour chacun desquels la mesure $\rho_{x_0}^\delta$ (définie par $v \mapsto \mathrm{R}_v^{\partial\delta}(\chi_0)$, v surharmonique continue au voisinage de $\overline{\delta}$) est l'unique mesure balayée de ϵ_{x_0} par rapport à la restriction de $\mathcal{H}^*(\mathrm{U})$ à $\overline{\delta}$.

Soit α un ouvert relativement compact dans U et contenant x_0. D'après la séparation des points de U, il existe une fonction f surharmonique continue vérifiant :

$$f(x_0) > 0$$
$$f < 0 \quad \text{sur} \quad \partial\alpha .$$

Soit f_n une suite de fonctions surharmoniques continues dans U engendrant un sous-espace vectoriel dense de $\mathcal{C}(\overline{\alpha})$. Soit K_n une suite croissante de compacts de réunion U. Posons $\lambda_n = \operatorname{Inf}_{\mathrm{K}_n} f_n$. Il existe une suite ϵ_n de réels > 0 telle que la série

$$v = \sum_n \epsilon_n (f_n - \lambda_n)$$

converge uniformément au voisinage de $\overline{\alpha}$. Sur tout compact K, v est la somme d'une fonction surharmonique et d'une série de fonctions surharmoniques $\geqslant 0$. v est donc surharmonique dans U et continue au voisinage de $\overline{\alpha}$.

Pour ϵ assez petit, $f + \epsilon v$ vérifie :

$$f(x_0) + \epsilon v(x_0) > 0$$
$$f + \epsilon v < 0 \quad \text{sur} \quad \partial\alpha .$$

Soit δ l'ensemble des points de α où $f + \epsilon v > 0$. δ est un ouvert d'adhérence $\overline{\delta}$ compacte incluse dans α.

Soit μ une mesure balayée de ϵ_{x_0} par rapport à $\mathcal{H}^*(U)|_{\overline{\delta}}$. L'égalité

$$\mathrm{Inf}\{v \in \mathcal{H}^*(U) \mid v \geqslant w \text{ sur } \partial\delta\} = \mathrm{Inf}\{v \in \mathcal{H}^*(\overline{\delta}) \mid v \geqslant w \text{ sur } \partial\delta\}$$

valable pour toute w surharmonique continue dans U entraîne que μ est balayée de $\rho^\delta_{x_0}$ par rapport à $\mathcal{H}^*(U)|_{\overline{\delta}}$.

On a ainsi :

$$\int (f + \epsilon v)\, d\rho^\delta_{x_0} = 0 = \int (f + \epsilon v)\, d\mu$$

et

$$\int f\, d\rho^\delta_{x_0} \geqslant \int f\, d\mu \ , \ \int f_n\, d\rho^\delta_{x_0} \geqslant \int f_n\, d\mu$$

Il s'ensuit que l'on a $\int f_n\, d\rho^\delta_{x_0} = \int f_n\, d\mu$ pour tout n, d'où $\mu = \rho^\delta_{x_0}$.

Soit maintenant S un cône convexe de fonctions s.c.i. $> -\infty$ dans U, vérifiant le principe du minimum relativement à la base $\mathcal{B}$, et contenant $\mathcal{H}^*(U)$. Pour toute $s \in S$, on a :

$$s(x_0) \geqslant \int s\, d\rho^\delta_{x_0}$$

Ceci montre que la fonction s est surmédiane dans U par rapport au préfaisceau $\mathcal{H}^*$ et à la base $\mathcal{B}$ (cf. rem. 38 bis,2). Donc, s appartient à $\mathcal{H}^*(U)$ (maximalité du préfaisceau $\mathcal{H}^*$).

II) Soit U un ouvert de Green : pour tout x_0 dans U, il existe un potentiel $p > 0$ valant $+\infty$ en x_0. On en déduit comme ci-dessus que pour tout α ouvert relativement compact dans U contenant x_0 il existe une fonction surharmonique continue positive f dans U, vérifiant :

$$f(x_0) > 1$$
$$f < 1 \quad \text{sur} \quad \partial\alpha .$$

La même démonstration qu'au I montre alors que $\rho_{x_0}^{\delta}$, pour un certain ouvert δ relativement compact dans α et contenant x_0, est l'unique mesure balayée de ϵ_{x_0} par rapport au cône $\mathcal{H}_b^*(U)$.

Réciproquement, si U n'est pas un ouvert de Green, on sait que toutes les fonctions hyperharmoniques bornées inférieurement dans U sont constantes. Il suffit donc de montrer que le cône $\mathbf{R} \cdot 1$ n'est pas maximal. Soit F une partie fermée dans U, distincte de U, connexe et non compacte (il en existe). Notons φ la fonction caractéristique du complémentaire de F dans U. Le cône $\mathbf{R} \cdot 1 + \mathbf{R} \cdot \varphi$ vérifie le principe du minimum relativement à la base $\mathcal{B}$. En effet, il suffit de démontrer :

$$\omega \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \partial\omega \cap F = \emptyset \Rightarrow \bar{\omega} \cap F = \emptyset$$

On a : $\quad F = (F \cap \partial\omega) \cup (F \cap \omega) \cup (F \cap C\,\bar{\omega})$

F étant connexe : $\emptyset = F \cap \omega \quad$ soit $\quad \bar{\omega} \cap F = \emptyset$

ou $F = F \cap \omega$ i.e. $F \subset \omega$ ce qui est impossible car ω est relativement compact dans U.

q.e.d.

CHAPITRE V

AXIOME DE CONVERGENCE

Nous allons maintenant étudier l'axiome de convergence : nous suivrons pas à pas le début de la quatrième partie de l'article de Mokobodzki et Sibony [20]. Avec des hypothèses convenables, leurs idées s'appliquent bien à notre cadre.

88. DEFINITION. – *Soit* $\mathcal{F}$ *un préfaisceau maximal relatif à une base* $\mathcal{B} = \{(\omega, \partial\omega)\}$. *On dit que* $\mathcal{F}$ *est normal* ([30]), *s'il vérifie les conditions suivantes :*

1) (condition du balayage renforcée) : *pour tout compact* K *et pour tout point* $x \in K$, *il existe deux fonctions* u *et* $v \in \mathcal{F}(K)$ *telles que :*

$$u > 0 \ \textit{sur}\ K,\ u(x) < +\infty,\ u \ \textit{continue en}\ x\ \textit{sur}\ K,$$

$$v < 0\ \textit{sur}\ K,\ v\ \textit{continue en}\ x\ \textit{sur}\ K.$$

2) *pour tout* $\omega \in \mathcal{B}$, *toute* $v \in \mathcal{F}(\overline{\omega})$ v *bornée sur* $\overline{\omega}$, *la fonction* $R_v^{\partial\omega}$ *est* s.c.s. *dans* ω.

89. PROPOSITION. – *Soit* $\mathcal{F}$ *un préfaisceau maximal relatif à une base* $\mathcal{B} = \{(\omega, \partial\omega)\}$. *On suppose que* $\mathcal{F}$ *est normal. Alors, pour tout ouvert* U, *toute fonction* u $\mathcal{B}$*-surmédiane dans* U (cf. déf. 56,a) *localement bornée inférieurement, la régularisée* s.c.i. $\hat{u}$ *de* u *appartient à* $\mathcal{F}(U)$.

Démonstration. – Il suffit de montrer que $\hat{u}$ vérifie la condition d'appartenance (on a évidemment $\hat{u} > -\infty$) : soient $\omega \in \mathcal{B}$, $\overline{\omega} \subset U$, $v \in \mathcal{F}(\overline{\omega})$ v bornée sur $\overline{\omega}$, $\hat{u} + v \geqslant 0$ sur $\partial\omega$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(\overline{\omega})$, $f \geqslant v$ sur $\partial\omega$, on a :

$$u + f \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega$$

donc
$$u + f \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \overline{\omega}$$

([30]) Le mot "normal" a été choisi à défaut d'un meilleur

On en déduit :

$$u + R_v^{\partial\omega} \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \bar{\omega}$$

soit :

$$u \geqslant - R_v^{\partial\omega} \quad \text{sur} \quad \bar{\omega}$$

Par régularisation s.c.i., il vient :

$$\hat{u} \geqslant - R_v^{\partial\omega} \quad \text{sur} \quad \omega$$

soit :

$$\hat{u} + v \geqslant \hat{u} + R_v^{\partial\omega} \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \omega$$

On en déduit $\hat{u} \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$ d'après la propriété 5,9.

90. COROLLAIRE. – *Si des* u_i *appartiennent à* $\mathfrak{F}(\mathrm{U})$ *et sont localement uniformément bornées inférieurement dans* U, *la fonction* $u = \operatorname{Inf}_i u_i$ *est* $\mathcal{B}$*-surmédiane dans* U ; *donc sa régularisée s.c.i.* $\hat{u}$ *appartient à* $\mathfrak{F}(\mathrm{U})$.

91. PROPOSITION. – *Soit* $\mathfrak{F}$ *un préfaisceau maximal relatif à* $\mathcal{B} = \{(\omega\,,\,\partial\omega)\}$. *On suppose que* $\mathfrak{F}$ *est normal et* $\mathcal{B}$*-séparant. Alors, pour tout ouvert relativement compact* α, *et toute fonction* φ *continue finie dans* α, *la fonction* R_φ^α *est continue dans* α *et appartient à* $\mathfrak{F}(\alpha)$.

Démonstration. – R_φ^α est $\mathcal{B}$-surmédiane dans α, et localement bornée inférieurement dans α. Sa régularisée s.c.i. $\hat{R}_\varphi^\alpha$ appartient à $\mathfrak{F}(\alpha)$ (prop. 88) et majore φ dans α. Elle vaut donc R_φ^α qui est ainsi s.c.i. dans α.

Il reste à voir que R_φ^α est s.c.s. dans α. Soient $x_0 \in \alpha$, $u \in \mathfrak{F}(\bar{\alpha})$, $u > 0$ sur $\bar{\alpha}$, $u(x_0) < +\infty$, u continue en x_0.

Si $R_\varphi^\alpha(x_0) = +\infty$, $R_\varphi^\alpha(x_0)$ est s.c.s. en x_0.

Soient $\lambda > R_\varphi^\alpha(x_0)$, $f \in \mathfrak{F}(\alpha)$, $f \geqslant \varphi$, $f(x_0) < \lambda$.

On peut supposer f bornée au voisinage de x_0 en la remplaçant au besoin par une fonction de la forme $\operatorname{Inf}(f\,,\,nu)$ pour n suffisamment grand. Soit v ce voisinage. Soit $\epsilon > 0$ tel que :

$$\varphi(x_0) < \epsilon u(x_0) + f(x_0) < \lambda$$

Comme $\mathfrak{F}$ est normal, il existe $w \in \mathfrak{F}(\bar{\alpha})$ w continue en x_0, tel que :

$$\varphi(x_0) < -\ w(x_0) < \epsilon u(x_0) + f(x_0)$$

Il existe donc un voisinage de x_0, $\omega \in \mathcal{B}$, $\bar{\omega} \subset \mathcal{V}$, tel que l'on ait :

$$\varphi(x) < -\ w(x) < \epsilon u(x) + f(x),\ \forall x \in \omega$$

On a alors :

$$\varphi(x) < -\ w(x) \leqslant \mathrm{R}^{\partial\omega}_{\epsilon u+f}(x),\ \ \forall x \in \bar{\omega}$$

La fonction

$$g = \begin{cases} \operatorname{Inf}(\mathrm{R}^{\partial\omega}_{\epsilon u+f}\ ,\ \epsilon u + f) & \text{dans} \quad \omega \\ \epsilon u + f & \text{dans} \quad \alpha\backslash\omega \end{cases}$$

est $\mathcal{B}$-surmédiane dans α, ($\mathcal{F}$ est en effet un faisceau) et on a :

$$\varphi \leqslant g \qquad \text{dans} \quad \alpha\ ,$$

donc $\qquad \varphi \leqslant \hat{g} \qquad \text{dans} \quad \alpha\ ,$

d'où : $\qquad \mathrm{R}^{\alpha}_{\varphi} \leqslant \hat{g} \leqslant g \qquad \text{dans} \quad \alpha\ ,$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{R}^{\alpha}_{\varphi} \leqslant \mathrm{R}^{\partial\omega}_{\epsilon u+f} \quad \text{dans} \quad \omega\ .$$

Or, on a :

$$\mathrm{R}^{\partial\omega}_{\epsilon u+f}(x_0) \leqslant \epsilon u(x_0) + f(x_0) < \lambda$$

soit $\mathrm{R}^{\alpha}_{\varphi} < \lambda$ au voisinage de x_0.

92. THEOREME. – *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau maximal relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega\ ,\ \partial\omega)\}$. Si $\mathcal{F}$ est normal et $\mathcal{B}$-séparant, $\mathcal{F}$ est régulier.*

Démonstration. – On va d'abord montrer que pour tout ouvert α relativement compact, il existe une fonction continue $w \in \mathcal{F}(\alpha)$, $w < 0$ sur α. Soit $v \in \mathcal{F}(\alpha)$, $v < 0$ sur α, et soit φ continue finie sur α, $\varphi \leqslant v$. La fonction $\mathrm{R}^{\alpha}_{\varphi}$ est la fonction w cherchée.

Soit maintenant $v \in \mathcal{F}(\mathrm{U})$, U ouvert. Soient K compact $\subset$ U, et φ continue sur K, $\varphi < v$ sur K. Il existe un ouvert relativement compact α, $\mathrm{K} \subset \alpha \subset \bar{\alpha} \subset \mathrm{U}$, et une fonction ψ finie continue sur $\bar{\alpha}$, vérifiant :

$$\varphi < \psi \quad \text{sur} \quad \mathrm{K} \qquad \text{et} \qquad \psi < v \quad \text{sur} \quad \bar{\alpha}$$

On a alors :

$$\psi \leqslant R_\psi^\alpha \leqslant v \quad \text{sur} \quad \alpha$$

Il existe une fonction w continue sur α, $w \in \mathfrak{F}(\alpha)$, $w < 0$ sur α, et $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que l'on ait :

$$\varphi < R_\psi^\alpha + \epsilon w \quad \text{sur} \quad K$$

et

$$R_\psi^\alpha + \epsilon w < v \quad \text{sur} \quad K$$

Ce qui donne le résultat.

93. PROPOSITION. – *Soit $\mathfrak{F}$ un préfaisceau maximal relatif à $\mathcal{B} = (\omega, \partial\omega)$. On suppose que $\mathfrak{F}$ est normal, et $\mathcal{B}$-séparant. Alors toute fonction u localement bornée, s.c.i. et $\mathcal{B}$-médiane ($\mathcal{B}$-surmédiane ainsi que $-u$) est continue. En particulier, pour tout ouvert α relativement compact tel que $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$ sépare linéairement $\overline{\alpha}$, et pour toute fonction $v \in \mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, v finie continue sur $\overline{\alpha}$, la réduite $R_v^{\partial\alpha}$ est continue dans α.*

Démonstration. – Soit $\omega \in \mathcal{B}$, $\overline{\omega} \subset U$, on a évidemment :

$$u \geqslant R_u^{\partial\omega} \quad \text{dans} \quad \omega$$

Soit $f \in \mathfrak{F}(\overline{\omega})$, $f \geqslant u$ sur $\partial\omega$: on a alors $f - u \geqslant 0$ sur $\partial\omega$; on en déduit que $R_u^{\partial\omega} - u \geqslant 0$ sur ω. La fonction $u = R_u^{\partial\omega}$ est donc s.c.i. et s.c.s. dans ω, c'est-à-dire continue dans ω.

Si maintenant v est une fonction de $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, α relativement compact, linéairement séparé par $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, et si v est finie continue dans $\overline{\alpha}$, la fonction $R_v^{\partial\alpha}$ est $\leqslant v < +\infty$, et $> -\infty$ (condition du balayage renforcée due à la normalité). Elle est donc $\mathcal{B}$-médiane dans α, comme elle est s.c.s. d'après la normalité de $\mathfrak{F}$, elle est donc continue dans α.

94. LEMME. – *On suppose que Ω est à base dénombrable, que $\mathfrak{F}$ est un préfaisceau maximal relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega, \partial\omega)\}$, que $\mathfrak{F}$ est $\mathcal{B}$-séparant. Soit α un ouvert relativement compact tel que $\mathfrak{F}(\overline{\alpha})$ sépare linéairement $\overline{\alpha}$, et tel que $R_v^{\partial\alpha}$ soit continue dans α pour toute fonction $v \in \mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, v continue sur $\overline{\alpha}$. Alors, pour toute fonction $v \in \mathfrak{F}(\overline{\alpha})$, on a l'égalité :*

$$R_v^{\partial\alpha}(x) = \int v \, d\rho_x^\alpha \quad \textit{pour tout} \quad x \in \alpha .$$

Démonstration. – La démonstration qui suit est la transcription dans notre cadre d'une démonstration classique due à Brelot [7].

Il existe une suite croissante de fonctions $v_n \in \mathcal{S}(\overline{\alpha})$, v_n continues sur $\overline{\alpha}$, tendant vers v sur $\overline{\alpha}$.

Soient $x \in \alpha$, $\epsilon > 0$, $f_n \geqslant v_n$ sur $\partial\alpha$, $f_n \in \mathcal{S}(\overline{\alpha})$, tels que :

$$f_n(x) - \mathrm{R}_{v_n}^{\partial\alpha}(x) \leqslant \epsilon \cdot 2^{-n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

La fonction

$$w = \operatorname*{Sup}_n \mathrm{R}_{v_n}^{\partial\alpha} + \sum_{n \geqslant 1} (f_n - \mathrm{R}_{v_n}^{\partial\alpha})$$

appartient à $\mathcal{S}(\alpha)$. On a :

$$w \geqslant \mathrm{R}_{v_n}^{\partial\alpha} + f_n - \mathrm{R}_{v_n}^{\partial\alpha} = f_n \quad \text{dans} \quad \alpha\,, \forall n\,.$$

donc :

$$\mathop{\underline{\mathrm{Lim}}}_{y \to z \in \alpha} w(y) \geqslant \mathop{\underline{\mathrm{Lim}}}_{y \to z \in \partial\alpha} f_n(y) = f_n(z) \ \forall n, \ \forall z \in \partial\alpha\,.$$

puis :

$$\mathop{\underline{\mathrm{Lim}}}_{y \to z \in \partial\alpha} w(y) \geqslant v(z) \ \ \forall z \in \partial\alpha\,.$$

On en déduit l'inégalité :

$$w \geqslant \mathrm{R}_v^{\partial\alpha} \quad \text{sur} \quad \alpha$$

Au point x, on a :

$$w(x) \leqslant \sup_n \mathrm{R}_{v_n}^{\partial\alpha}(x) + \epsilon$$

puis :

$$\mathrm{R}_w^{\partial\alpha}(x) \leqslant \sup_n \mathrm{R}_{v_n}^{\partial\alpha}(x) + \epsilon$$

ϵ étant arbitraire :

$$\mathrm{R}_v^{\partial\alpha}(x) \leqslant \sup_n \mathrm{R}_{v_n}^{\partial\alpha}(x)$$

L'inégalité inverse étant évidente, on a :

$$\mathrm{R}_v^{\partial\alpha}(x) = \sup \int v_n \, d\rho_x^\alpha = \int v \, d\rho_x^\alpha$$

([31]) ρ_x^α est la mesure $u \rightsquigarrow \mathrm{R}_u^{\partial\alpha}(x)$ pour u continue $\in \mathcal{S}(\overline{\alpha})$ (voir remarque 65).

95. PROPOSITION. — *Les hypothèses sont les mêmes que celles de la proposition 93. On suppose de plus que Ω est à base dénombrable. Alors, si v appartient à $\mathcal{F}(\overline{\alpha})$, v localement bornée dans α, la fonction $R_v^{\partial\alpha}$ est finie continue dans α.*

Démonstration. — $R_v^{\partial\alpha}$ est localement bornée dans α d'après l'hypothèse. D'après le lemme 94, c'est la borne supérieure d'une suite croissante de fonctions médianes continues dans α : elle est donc médiane s.c.i. donc continue dans α (proposition 93).

96. THEOREME. — *On suppose Ω à base dénombrable, soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau maximal relatif à une base $\mathcal{B} = \{(\omega\,,\,\partial\omega)\}$, $\mathcal{B}$-séparant et régulier. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *$\mathcal{F}$ est normal.*

b) *pour tout $\omega \in \mathcal{B}$, toute fonction v* s.c.i. *bornée, $v \in \mathcal{F}(\overline{\omega})$, la fonction $R_v^{\partial\omega}$ est continue dans ω.*

c) i) *pour toute famille filtrante croissante h_i, localement uniformément bornée supérieurement, $h_i \in \mathcal{F}(U) \cap (-\mathcal{F}(U))$, U ouvert, l'enveloppe supérieure $h = \sup h_i$ est dans $\mathcal{F}(U) \cap (-\mathcal{F}(U))$.*

ii) *il existe une base $\mathcal{C}$ d'ouverts relativement compacts δ tels que l'application $x \rightsquigarrow \int \varphi\, d\rho_x^\delta$ soit continue dans δ pour toute fonction continue φ sur $\partial\delta$.*

d) i) *toute famille localement uniformément bornée de fonctions appartenant à $\mathcal{F}(U) \cap (-\mathcal{F}(U))$ pour U ouvert, est équicontinue.*

ii) *même condition qu'en* c) ii).

Démonstration. — On va faire la démonstration selon le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, Rightarrow] & & \\ & c \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & d \\ b \arrow[uu, Rightarrow] & & \end{tikzcd}$$

a) $\Rightarrow$ c) : le i) résulte de la proposition 93. Enfin, pour chaque $\omega \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ par exemple) et pour toute fonction $v \in \mathcal{F}(\overline{\omega})$ v continue sur $\overline{\omega}$, $R_v^{\partial\omega}$ est $\mathcal{B}$-médiane s.c.i., donc continue : La fonction $x \rightsquigarrow \int v\, d\rho_x^\omega$ est ainsi continue dans ω. Comme toute fonction φ continue sur $\partial\omega$ est limite uniforme de différences de fonctions continues de $\mathcal{F}(\overline{\omega})$, il s'ensuit que la fonction $x \rightsquigarrow \int \varphi \, d\rho_x^\omega$ est continue dans ω par convergence uniforme grâce au principe du minimum.

Il suffit donc de prendre $\mathcal{C} = \mathcal{B}$.

c) $\Rightarrow$ b) soit $\omega \in \mathcal{B}$, et soit $v \in \mathcal{H}(\overline{\omega})$, v continue. Pour $\delta \in \mathcal{C}$, $\overline{\delta} \subset \omega$, on a :

$$\mathrm{R}^{\partial\delta}_{\mathrm{R}_v^{\partial\omega}} = \mathrm{R}_v^{\partial\omega} \quad \text{dans} \quad \delta \text{ (tronquage)}$$

Soit f_i l'ensemble filtrant décroissant des fonctions continues, $f_i \in \mathcal{H}(\overline{\omega})$, $f_i \geqslant v$ sur $\partial\omega$. On a :

$$\mathrm{R}_v^{\partial\omega} = \operatorname*{Inf}_i f_i \quad \text{dans} \quad \omega$$

donc :

$$\mathrm{R}_v^{\partial\omega} = \mathrm{R}^{\partial\delta}_{\mathrm{R}_v^{\partial\omega}} = \operatorname*{Inf}_i \mathrm{R}^{\partial\delta}_{f_i} \quad \text{(lemme de Dini)}$$

donc $\mathrm{R}_v^{\partial\omega}$ est continue dans δ d'après le i).

Il reste à voir qu'il en est de même si v est seulement s.c.i. bornée. D'après le lemme 94, on a :

$$\mathrm{R}_v^{\partial\omega}(x) = \int v \, d\rho_x^\omega = \sup_i \int v_i \, d\rho_x^\omega = \sup_i \mathrm{R}_v^{\partial\omega}(x) \qquad x \in \omega$$

v_i étant un ensemble filtrant croissant de fonctions continues de $\mathcal{H}(\overline{\omega})$, d'enveloppe supérieure v.

b) $\Rightarrow$ a) évident.

d) $\Rightarrow$ c) évident.

c) $\Rightarrow$ d) soit H un ensemble localement uniformément borné dans $\mathcal{H}(\mathrm{U}) \cap (-\mathcal{H}(\mathrm{U}))$, U ouvert. Soit $x_0 \in \mathrm{U}$: on va montrer que H est équicontinu dans un voisinage compact de x_0.

Soient δ et $\delta' \in \mathcal{C}$,

$$x_0 \in \delta' \subset \overline{\delta'} \subset \delta \subset \overline{\delta} \subset \mathrm{U}$$

Considérons les applications T et T' définies par :

$$\begin{aligned} \mathrm{T} : \mathcal{C}(\overline{\delta}) &\longrightarrow \mathcal{C}(\overline{\delta'}) \\ \varphi &\longmapsto \int \varphi \, d\rho_x^\delta \quad (x \in \overline{\delta'}) \\ \mathrm{T}' : \mathcal{C}(\overline{\delta'}) &\longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{K}) \\ \varphi &\longmapsto \int \varphi \, d\rho_x^{\delta'} \quad (x \in \mathrm{K}) \end{aligned}$$

$\mathrm{K} \subset \delta'$, K voisinage compact de x_0.

Pour toute suite φ_n croissante bornée dans $\mathcal{C}(\overline{\delta})$, la suite $T(\varphi_n)$ converge uniformément sur $\overline{\delta}'$: d'après un théorème de Grothendieck, [13,a], T est faiblement compacte. Il en est de même pour T'.

Soit h_n une suite extraite de H. La suite $\overline{h}_n = T(h_n)$ est donc faiblement relativement compacte dans $\mathcal{C}(\overline{\delta}')$. D'après le théorème de Smulian [13,a], on peut en extraire une sous-suite $\overline{h}_{n_k}$ qui converge faiblement dans $\mathcal{C}(\overline{\delta}')$. Toujours d'après Grothendieck [13,a], la suite $T'(\overline{h}_{n_k}) = h_{n_k}$ converge dans $\mathcal{C}(K)$, c'est-à-dire uniformément sur K.

Il résulte alors du théorème d'Ascoli que H est équicontinu sur K([32]).

Le ii) est évident.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AHLFORS, Complex analysis, *N.Y.* Mc Graw-Hill Book company (1953).

[1a] V. ANANDAM, Thèse Université Paris VI (1971).

[2] V. AVANISSIAN, Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques, *Annales E.N.S.* 3e série, 78 (1960), 101.

[3] H. BAUER, Silovscher Rand und Dirichletsches Problem, *Annales Inst. Four.*, 11 (1961), 89.

[4] H. BAUER, Harmonische Raüme und ihre Potential theorie, *Lecture Notes,* 22 (1966).

[5] N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU, A. CORNEA, Axiomatic theory of harmonic functions, *Annales Inst. Four.,* 15 (1965), fasc. 1, p. 283 et fasc. 2, p. 37).

[6] N. BOBOC, A. CORNEA, Convex cones of lower semicontinuous functions on compact spaces, *Revue roumaine de math. pures et appliquées,* (1967), tome XII, n° 4, p. 471-525.

([32]) L'idée de la démonstration c) ⇒ d) se trouve dans [20] p. 430.

[7] N. BOBOC, A. CORNEA, Cônes convexes ordonnés, H-cônes et adjoints de H-cônes. *C.R. Acad. Sci. Paris,* t. 270, p. 596-599.

[8] M. BRELOT, Eléments de la théorie classique du potentiel, *C.D.U.* 3ème édition, (1965).

[9] M. BRELOT, Axiomatique des fonctions harmoniques. *Cours d'été 65*, Montréal, Les presses de l'Université.

[10] C. CONSTANTINESCU, A. CORNEA, Potential theory on harmonic spaces, Springer.

[11] D. FEYEL, A. de LA PRADELLE, Principes du minimum et maximalité dans les préfaisceaux. Esquisse d'une théorie locale, *C.R. Ac. Sc.* 272, p. 19.

[12] D. FEYEL, A. de LA PRADELLE, Quelques propriétés de la réduite dans les préfaisceaux maximaux, *C.R. Ac. Sc.* 274, p. 1285.

[13] K. GOWRISANKARAN, Multiply harmonic functions, *Nagoya Math. J.* vol. 28, octobre (1966), 27.

[13a] A. GROTHENDIECK, Espaces vectoriels topologiques, *Pub. Soc. Math. S. Paule,* (1966).

[14] L.L. HELMS, Maximal wedges of subharmonic functions, *Am. J. of Math.,* mai (1963), 710-712.

[15] R.M. HERVE, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Four.*, 12 (1962), 415 (571).

[16] J. KOHN, Harmonische Raüme mit einer Basis semiregülarer Meugen, *Seminar über potential theorie,* p. 1-12, Springer (1968).

[17] A. de LA PRADELLE, A propos du mémoire de G.F. Vincent-Smith sur l'approximation des fonctions harmoniques, *Ann. Inst. Four.* t. 19 (1969), fasc. 2, 355-370.

[18] P. LELONG, Les fonctions plurisousharmoniques, *Ann. E.N.S.* 62, (1945), p. 301.

[18a] P.A. MEYER, Probabilités et Potentiel, *Act. Scient. et indust.* Hermann, Paris (1966).

[19] G. MOKOBODZKI, D. SIBONY, Sur une propriété caractéristique des cônes de potentiel, *C.R. Ac. Sc.* série A, 266, (1968), 215-218.

[20] G. MOKOBODZKI, D. SIBONY, Principe du minimum et maximalité en théorie du potentiel, *Ann. Inst. Four.* 17, n° 1 (1967), 401-442.

[21a] G. MOKOBODZKI, D. BONY, Séminaire Brelot-Choquet-Deny 11ème année 1966/67, n° 8.

[21] G.F. VINCENT-SMITH, Uniform approximation of harmonic functions, *Ann. Inst. Four.* tome 19, fasc. 2, (1969), 339-353.

Manuscrit reçu le 21 décembre 1972
accepté par M. Brelot.

D. FEYEL et A. de LA PRADELLE,
Université de Paris VI
Mathématiques – Tour 46
9, Quai St Bernard
75 005 Paris