logoAIF.pdf

ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Michel RAIBAUT

Fibre de Milnor motivique à l'infini et composition avec un polynôme non dégénéré

Tome 62, n^{o} 5 (2012), p. 1943-1981.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2012__62_5_1943_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
62, 5 (2012) 1943-1981

FIBRE DE MILNOR MOTIVIQUE À L'INFINI ET COMPOSITION AVEC UN POLYNÔME NON DÉGÉNÉRÉ

par Michel RAIBAUT (*)

RÉSUMÉ. — Soit k un corps de caractéristique nulle, P un polynôme de Laurent en d variables, à coefficients dans k et non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini. Soit d fonctions non constantes f_l à variables séparées et définies sur des variétés lisses. A la manière de Guibert, Loeser et Merle, dans le cas local, nous calculons dans cet article, la *fibre de Milnor motivique à l'infini* de la composée $P(f)$ en termes du polyèdre de Newton à l'infini de P. Pour P égal à la somme $x_1 + x_2$ nous obtenons une formule du type Thom-Sébastiani. Ceci permet d'introduire une notion de *cycles évanescents motiviques d'une fonction* g *pour la valeur infini* notée $S^{\Phi}_{g,\infty,U}$, qui vérifie comme dans le cas local une formule de convolution. En particulier si g est le polynôme $x_1 + ... + x_n + 1/x_1...x_n$, nous montrons que le spectre de $S^{\Phi}_{g,\infty,U}$ vaut $1 + t + .. + t^n$ ce qui coïncide avec le spectre à l'infini de g considéré par Douai et Sabbah.

ABSTRACT. — Let k be a field of characteristic zero and P be a Laurent polynomial in d variables, with coefficients in k and non degenerate for its Newton polyhedron at infinity. Let (f_l) be d non constant functions with separated variables and defined on smooth varieties. As Guibert, Loeser and Merle in the local case, we compute in this article the *motivic Milnor fiber at infinity* of $P(f)$ in terms of the Newton polyhedron at infinity of P. For P equal to the sum $x_1 + x_2$, we obtained a Thom-Sebastiani formula. Then we can introduce a notion of *motivic vanishing cycles of a function* g *for the infinite value* denoted by $S^{\Phi}_{g\infty,U}$, and which verified, as in the local case, a convolution formula. In particular if g is the polynomial $x_1 + ... + x_n + 1/x_1...x_n$, we show that the spectrum $S^{\Phi}_{g,\infty,U}$ is $1 + t + .. + t^n$ which coincides with the spectrum at infinity of g considered by Douai and Sabbah.

Mots-clés : Géométrie Algébrique, Singularités à l'infini, Fibre de Milnor, Intégration motivique, Fibre de Milnor motivique, Thom-Sébastiani, Cycles proches.
Classification math. : 14-99, 14J17, 14B05.
(*) Ce travail a bénéficié d'une aide des Agence Nationales de la Recherche portant les références ANR-08-JCJC-0118-0, et ANR-06-BLAN-0183, d'une aide du Projet de Recherche G.0318.06N de la Fondation de Recherche - Flandre (FWO) et d'une aide du projet ERC Advanced Grant NMNAG..

Introduction

Soit U une variété algébrique complexe lisse et $f : U \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ une application régulière non constante. Il existe $R > 0$ tel que la restriction de f de $U \setminus f^{-1}(\overline{D}(0,R))$ vers $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(0,R)$ est une fibration topologique localement triviale [17]. La fibre et la monodromie de cette fibration sont appellées *fibre de Milnor à l'infini* et *monodromie à l'infini de f*. Les espaces de cohomologie à support compact $H^*_c\left(f^{-1}(t),\mathbb{Q}\right)$ de la fibre en t sont munis d'une structure de Hodge mixte naturelle [2]. Steenbrink et Zucker [23] puis M. Saito [22] ont montré comment construire une structure de Hodge mixte limite lorsque t tend vers l'infini. Sabbah [21] l'a retrouvée en considérant la transformation de Fourier sur des modules convenables sur l'anneau des opérateurs différentiels. Cette structure de Hodge mixte est appellée *structure de Hodge mixte de la fibre de Milnor de f à l'infini*.

Dans [18], [20] et [19], grâce à l'intégration motivique, nous définissons $S_{f,\infty}$, *la fibre de Milnor motivique de f à l'infini*. Cet invariant de f, est construit à l'aide d'une compactification mais n'en dépend pas. Il se réalise par exemple en la classe de la structure de Hodge mixte de la fibre de Milnor à l'infini dans le groupe de Grothendieck des structures de Hodge munies d'un endomorphisme quasi-unipotent. Pour d'autres propriétés de cet objet on pourra se référer aux travaux de Kiyoshi Takeuchi et Yutaka Matsui [16] et [15].

Soit k un corps de caractéristique 0. Considérons d variétés sur k lisses $(\mathcal{U}_l)$, d morphismes non constants f_l de $\mathcal{U}_l$ vers $\mathbb{A}^1_k$ et P un polynôme de Laurent en d variables non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini. A la manière de Guibert, Loeser et Merle [9], nous calculons dans cet article, la fibre de Milnor motivique à l'infini de la composée $P(f_1,\dots,f_d)$ en termes du polyèdre de Newton à l'infini de P. Si les fonctions f_i sont les coordonnées de l'espace affine $\mathbb{A}^d_k$, la formule alors obtenue coïncide avec l'expression de la fibre de Milnor motivique à l'infini d'un polynôme non dégénéré pour son polyèdre de Newton [20, théorème 3.3]. Pour P égal à la somme $x_1 + x_2$ nous obtenons une formule du type Thom-Sébastiani. Ceci permet d'introduire une notion de *cycles évanescents motiviques de f pour la valeur infini* notée $S^{\Phi}_{f,\infty,U}$, qui vérifie comme dans le cas local une formule de convolution. En particulier si f est le polynôme $x_1 + ... + x_n + 1/x_1...x_n$, nous montrons que le spectre de $S^{\Phi}_{f,\infty,U}$ vaut $1 + t + .. + t^n$ ce qui coïncide avec le spectre à l'infini de f considéré par Douai et Sabbah [5], [6]

L'auteur tient à remercier les professeurs Johannes Nicaise et Wim Veys pour leur invitation pendant l'automne 2010 au département de mathématiques de l'université de Leuven où cet article a été rédigé.

L'auteur tient particulièrement à remercier Michel Merle, pour l'avoir intéressé à ces questions, pour ses conseils et enfin pour toute l'attention qu'il a portée à ce travail au cours de sa réalisation.

1. Notations

Dans cette partie nous rappelons quelques définitions et propriétés constamment utilisées par la suite, on pourra se référer à [4], [13], [14], [10] et [9].

1.1. Anneaux de Grothendieck

1.1.1. Variétés. Dans tout ce qui suit, k est un corps de caractéristique 0 et $\mathbb{G}_m$ est son groupe multiplicatif. On appelle *k-variété*, un schéma séparé réduit de type fini sur k. Si X est un schéma, on notera $|X|$ ou X_{red} le schéma réduit associé. On note Var_k la catégorie des k-variétés et pour une k-variété S on note Var_S la catégorie des S-variétés, c'est à dire des morphismes $X \to S$. Soit G un groupe algébrique, et X une variété sur laquelle G agit. L'action est dite *bonne*, si toute $G-$orbite est contenue dans un ouvert affine de X.

Soit X une variété sur k, et $p : A \to X$ un fibré affine pour la topologie de Zariski. Les fibres de p sont des espaces affines et les morphismes de transition entre les cartes sont des applications affines. Soit G un groupe algébrique linéaire. Une bonne action de G sur A est dite *affine* si et seulement si elle relève une bonne action de G sur X et sa restriction à toutes les fibres est affine. Dans toute la suite nous supposerons les actions bonnes.

1.1.2. Anneaux de Grothendieck. Soit S une k-variété. On considère une S-variété X munie d'une bonne action de $\mathbb{G}_m$ notée σ. On dit qu'un morphisme $\pi : X \to \mathbb{G}_m$ est *homogène* de poids n, si $\pi(\sigma(\lambda, x))$ est égal à $\lambda^n \pi(x)$ pour tout λ dans $\mathbb{G}_m$ et pour tout x dans X. Pour un entier n strictement positif, on note $Var_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m,n}$ la catégorie des variétés $X \to S\times\mathbb{G}_m$ munies d'une bonne action de $\mathbb{G}_m$, telle que les fibres de la projection sur S soient $\mathbb{G}_m$-invariantes et la projection sur $\mathbb{G}_m$ soit homogène de poids n.

DÉFINITION 1.1. — *Pour tout entier n strictement positif, l'*anneau de Grothendieck *noté $K_0(Var^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m})$ est défini dans* [10] *comme le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes des variétés relatives $X \to S\times\mathbb{G}_m$ de la catégorie $Var^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m}$, modulo les relations :*

(1)

$$[X \to S\times\mathbb{G}_m,\sigma] = [X' \to S\times\mathbb{G}_m,\sigma] + [X\setminus X' \to S\times\mathbb{G}_m,\sigma]$$

pour X' un fermé de X invariant sous $\mathbb{G}_m$

(2)

$$[X\times\mathbb{A}^n_k \to S\times\mathbb{G}_m,\sigma] = [X\times\mathbb{A}^n_k \to S\times\mathbb{G}_m,\sigma']$$

lorsque σ et σ' sont deux actions qui relèvent la même $\mathbb{G}_m$-action sur X en actions affines sur le fibré,

(3)

$$[X \to S\times\mathbb{G}_m,\sigma] = [X \to S\times\mathbb{G}_m,\sigma_l]$$

où $\sigma_l(\lambda,x)$ est égal à $\sigma(\lambda^l,x)$ pour tout λ dans $\mathbb{G}_m$ et pour tout x dans X, ceci pour tout entier l strictement positif et pour toute action σ de $\mathbb{G}_m$ sur une variété X.

Pour tout entier n strictement positif, le produit fibré au dessus de $S\times\mathbb{G}_m$ muni de l'action diagonale, induit naturellement un produit dans la catégorie $Var^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m}$ et une structure d'anneau sur le groupe $K_0(Var^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m})$. L'élément unité pour le produit, noté $1_{S\times\mathbb{G}_m}$, est la classe du morphisme identité sur $S\times\mathbb{G}_m$ où $\mathbb{G}_m$ agit trivialement sur S et par translation sur lui même. En particulier, l'anneau $K_0(Var^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m})$ a une structure de $K_0(Var_k)$-module.

1.1.3. Localisation. Pour tout entier n strictement positif, dans l'anneau $K_0(Var^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m})$ on note $\mathbb{L}$ la classe $[\mathbb{A}^1_k\times S\times\mathbb{G}_m,\pi_{S\times\mathbb{G}_m},\tau_n]$ où $\pi_{S\times\mathbb{G}_m}$ est la projection sur $S\times\mathbb{G}_m$ et $\tau_n(\lambda,(a,x,\mu))$ est égal à $(a,x,\lambda^n\mu)$, pour tout λ dans $\mathbb{G}_m$ et (a,x,μ) dans $\mathbb{A}^1_k\times S\times\mathbb{G}_m$. On note alors $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m}$ l'anneau localisé $K_0(Var^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m})[\mathbb{L}^{-1}]$.

1.1.4. Image directe, image inverse. Soit $f : S \to S'$ un morphisme de variétés. La composition par f fournit le morphisme de groupes *image directe* $f_! : \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m} \to \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m,n}_{S'\times\mathbb{G}_m}$. Le produit fibré au dessus de S' fournit le morphisme d'anneaux *image inverse* $f^{-1} : \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m,n}_{S'\times\mathbb{G}_m} \to \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m}$. On peut définir ces morphismes au niveau du K_0.

1.1.5. Limite inductive. Les catégories $Var_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m,n}$ et les anneaux $K_0(Var_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m,n})$ et $\mathcal{M}_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m,n}$ forment un système inductif induit par l'ordre partiel donné par la divisibilité entre les entiers. On note alors $Var_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$, $K_0(Var_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m})$ et $\mathcal{M}_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ les colimites.

1.1.6. Séries rationnelles. Soit A l'un des anneaux $\mathbb{Z}[\mathbb{L},\mathbb{L}^{-1}]$, $\mathbb{Z}[\mathbb{L},\mathbb{L}^{-1},(1/(1-\mathbb{L}^{-i}))_{i>0}]$ et $\mathcal{M}_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$. On note $A[[T]]_{sr}$ le sous A-module de $A[[T]]$ engendré par 1 et par un produit fini de termes $\mathbb{L}^eT^i/(1-\mathbb{L}^eT^i)$ notés $p_{e,i}(T)$ avec e dans $\mathbb{Z}$ et i dans $\mathbb{N}_{>0}$. Il existe un unique morphisme A-linéaire $\lim_{T\to\infty} : A[[T]]_{sr} \to A$ tel que pour toute famille $(e_i,j_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}_{>0}$ avec I fini ou vide, $\lim_{T\to\infty}(\prod_{i\in I} p_{e_i,j_i}(T))$ vaut $(-1)^{|I|}$.

1.1.7. Cône convexe polyédral. Soit I un ensemble fini. Un *cône convexe polyédral rationnel* de $\mathbb{R}^{*|I|}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^{*|I|}$ définie par un nombre fini d'inégalités linéaires à coefficients entiers du type $a \leqslant 0$ et $b > 0$ et stable sous la multiplication de $\mathbb{R}_{>0}$.

1.1.8. Lemme de rationnalité. Le lemme suivant est bien connu, on peut se référer à [8, 2.1.5] et [10, 2.9].

Lemme 1.2. — *Soit I un ensemble fini. Soit Δ un cône polyédral rationnel convexe dans $\mathbb{R}^I_{>0}$. On note $\overline{\Delta}$ l'adhérence de Δ dans $\mathbb{R}^I_{\geqslant 0}$. Soit l et ν deux formes linéaires sur $\mathbb{Z}^I$, supposons l strictement positive et ν positive sur $\overline{\Delta}\setminus\{0\}$. Dans l'anneau $\mathbb{Z}[\mathbb{L},\mathbb{L}^{-1}][[T]]$ notons $S_{\Delta,l,\nu}(T)$ les séries $\sum_{k\in\Delta\cap\mathbb{N}^I_{>0}} T^{l(k)}\mathbb{L}^{-\nu(k)}$. Lorsque Δ est ouvert dans son propre espace vectoriel engendré et $\overline{\Delta}$ est engendré par une famille de vecteurs que l'on peut compléter en une $\mathbb{Z}-$base du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^I$, les séries $S_{\Delta,l,\nu}(T)$ sont rationnelles et leur limite* $\lim_{T\to\infty} S_{\Delta,l,\nu}(T)$ *est égale à $(-1)^{dim(\Delta)}$. Dans le cas général, par additivité par rapport à l'union disjointe des cônes, grâce à l'hypothèse de positivité, les séries $S_{\Delta,l,\nu}(T)$ sont rationnelles et leur limite est égale à la caractéristique d'Euler à support compact du cône Δ .*

Notons que dans [10, 2.9], les formes linéaires l et ν sont supposées strictement positives sur $\overline{\Delta}\setminus\{0\}$, mais la même preuve permet de supposer seulement l strictement positive sur $\overline{\Delta}\setminus\{0\}$.

1.2. Résolutions

Soit X une variété lisse de dimension pure d, et soit Z une partie fermée de X de codimension partout plus grande que 1. Une *log-résolution* du couple (X,Z) est un morphisme propre $h : Y \to X$ avec Y lisse tel que la restriction $h : Y \setminus h^{-1}(Z) \to X \setminus Z$ est un isomorphisme et $h^{-1}(Z)$ est un diviseur à croisements normaux. Nous supposerons toujours que les composantes irréductibles du diviseur sont lisses. L'existence d'une log-résolution est dûe à Hironaka [11].

1.2.1. Stratification du diviseur exceptionnel. On note $(E_i)_{i\in A}$ les composantes irreductibles du diviseur $h^{-1}(Z)$. Pour I une partie de A, on note E_I l'intersection $\cap_{i\in I} E_i$ et E_I^0 le constructible $\cap_{i\in I} E_i \setminus \cup_{j\notin I} E_j$.

1.2.2. Diviseurs. Si $\mathcal{I}$ est un faisceau d'idéaux définissant un sous schéma fermé Z, et $h^{-1}(\mathcal{I})\mathcal{O}_Y$ est localement principal, on définit alors la multiplicité de $\mathcal{I}$ le long de E_i, notée $N_i(\mathcal{I})$, par l'égalité des diviseurs

$$h^{-1}(Z) = \sum_{i\in A} N_i(\mathcal{I}) E_i.$$

Si $\mathcal{I}$ est un faisceau d'idéaux principaux engendré par une fonction g, on écrira $N_i(g)$ à la place de $N_i(\mathcal{I})$. De la même manière on définit les ν_i par l'égalité

$$div Jac\, h = \sum_{i\in A} (\nu_i - 1) E_i$$

où $Jac\, h$ est le diviseur de l'idéal jacobien de h.

1.2.3. U_I. Pour tout i dans A, on note ν_{E_i} le fibré normal de E_i dans Y et U_{E_i} le complémentaire de la section nulle dans le fibré ν_{E_i}. Pour I une partie de A non vide, telle que E_I soit non vide, on note ν_I le produit fibré des restrictions à E_I des fibrés ν_{E_i} où i appartient à I, U_I le produit fibré des restrictions à E_I^0 des fibrés U_{E_i} pour i dans I et π_I la projection canonique des deux fibrés sur leur base.

1.2.4. Soit X une variété lisse de dimension pure d et f un morphisme défini sur X. On suppose la fibre spéciale $f^{-1}(0)$ nulle part dense dans X et on la note $X_0(f)$. Soit F un diviseur réduit contenant $X_0(f)$, et $h : Y \to X$ une log-résolution de (X, F). On note E le diviseur exceptionnel, A l'ensemble indiçant les composantes irréductibles E_i de E et $N_i(f)$ les multiplicités du diviseur $div(f \circ h)$. Fixons une partie non vide I de A telle qu'il existe i dans I avec $N_i(f)$ strictement positif, $h(E_I^0)$ est alors contenu dans $X_0(f)$. En suivant [10, 3.4, 3.5] et [9, 2.6], nous montrons ici comment munir U_I d'une flèche f_I vers $\mathbb{G}_m$ et d'une action σ de $\mathbb{G}_m$ telles que l'objet $(U_I, (h \circ \pi_I, f_I), \sigma_I)$ appartienne à $Var^{\mathbb{G}_m}_{X_0(f)\times\mathbb{G}_m}$.

Le groupe $\mathbb{G}_m$ agit naturellement sur chaque U_{E_i}, l'action diagonale induit alors une $\mathbb{G}_m$-action σ sur U_I. Le morphisme f_I peut être défini à l'aide de la déformation au cône normal de E_I dans Y [7]. On considère l'espace affine $\mathbb{A}_k^{|I|}$ égal à $Spec\, k[(u_i)_{i\in I}]$ et le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{A}_k^{|I|}}[(u_i^{-1})_{i\in I}]$

$$\mathcal{A}_I := \sum_{n\in\mathbb{N}^{|I|}} \mathcal{O}_{Y\times\mathbb{A}_k^{|I|}}\left(-\sum_{i\in I} n_i(E_i\times\mathbb{A}_k^{|I|})\right)\prod_{i\in I} u_i^{-n_i}.$$

On note CY_I le spectre $Spec\,\mathcal{A}_I$. L'inclusion naturelle de $\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{A}_k^{|I|}}$ dans $\mathcal{A}_I$ induit un morphisme $\pi : CY_I \to Y\times\mathbb{A}_k^{|I|}$ et donc par composition avec la projection, un morphisme $p : CY_I \to \mathbb{A}_k^{|I|}$. L'anneau $\mathcal{A}_I$ étant un sous anneau gradué de l'anneau $\mathcal{O}_Y[(u_i,u_i^{-1})_{i\in I}]$, on considère l'action σ_I de $\mathbb{G}_m^I$ sur CY_I laissant invariante les sections de $\mathcal{O}_Y$ et agissant par $(\lambda_i,u_i)\mapsto\lambda_i^{-1}u_i$.

On dispose alors du lemme [10, 3.5, Lemme 5.12] :

Lemme 1.3. — *Le fibré ν_{E_I} est lisse et s'identifie de manière équivariante avec la fibre $p^{-1}(0)$. L'image de la fonction $f\circ h$ par l'inclusion de $\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{A}_k^{|I|}}$ dans $\mathcal{A}_I$ est divisible par $\prod_{i\in I} u_i^{N_i(f)}$. On note $\tilde f_I$ le quotient dans $\mathcal{A}_I$. La restriction de $\tilde f_I$ à la fibre $p^{-1}(0)$ est l'application f_I cherchée. Cette fonction ne s'annule pas sur U_I et induit un morphisme monomial lisse $f_I : U_I\to\mathbb{G}_m$.*

1.3. Arcs

1.3.1. Espaces d'arcs. Soit X une k-variété. On note $\mathcal{L}_n(X)$ l'*espace des n-jets*. Cet ensemble est un k-schéma dont les K-points rationnels, sont les morphismes $Spec\, K[t]/t^{n+1}\to X$, pour tout corps K contenant k. Il existe des morphismes canoniques $\mathcal{L}_{n+1}(X)\to\mathcal{L}_n(X)$. Ces morphismes sont des fibrés en $\mathbb{A}_k^d$ quand X est lisse de dimension pure d. L'*espace des arcs* noté $\mathcal{L}(X)$ est la limite projective de ce système. On note $\pi_n : \mathcal{L}(X)\to\mathcal{L}_n(X)$ les morphismes canoniques.

1.3.2. Action et coefficient angulaire. Le groupe $\mathbb{G}_m$ agit canoniquement sur $\mathcal{L}_n(X)$ et sur $\mathcal{L}(X)$ par $\lambda.\varphi(t) := \varphi(\lambda t)$. Dans toute la suite de l'article on note σ cette action.

Pour un élément φ de $K[[t]]$ ou de $K[t]/t^{n+1}$, on désigne par $\mathrm{ord}_t(\varphi)$ la valuation de φ et par $\mathrm{ac}(\varphi)$ son premier coefficient non nul. Par convention $\mathrm{ac}(0)$ est nul. Le scalaire $\mathrm{ac}(\varphi)$ est appelé coefficient angulaire de φ.

1.3.3. Ordre de contact. Soit X une variété et F un fermé de X. On note $\mathcal{I}_F$ l'idéal des fonctions s'annulant sur F. On désigne par $\mathrm{ord}_t F$ la fonction qui a tout arc φ dans $\mathcal{L}(X)$ associe la borne inférieure $\inf \mathrm{ord}_t g(\varphi)$ où g parcourt les sections locales de $\mathcal{I}_F$ en l'origine de φ.

1.3.4. Un lemme de réécriture. Par la suite nous utiliserons le lemme [3, 4.2] qui découle du lemme de Hensel.

LEMME 1.4. — *Soit X une variété lisse de dimension d, U un ouvert affine de X et une application étale $\Phi : U \to \mathbb{A}^d$. Dans la catégorie Var_k, pour tout entier n, Φ induit l'isomorphisme $\Psi_n : \mathcal{L}_n(U) \to U \times_{\mathbb{A}^d} \mathcal{L}_n(\mathbb{A}^d)$ qui associe à un n-jet φ le couple $(\varphi(0), \Phi \circ \varphi)$ où $U \times_{\mathbb{A}^d} \mathcal{L}_n(\mathbb{A}^d)$ est le produit fibré de Φ et de l'application "origine des arcs". Ceci induit par limite inductive un isomorphisme $\Psi : \mathcal{L}(U) \to U \times_{\mathbb{A}^d} \mathcal{L}(\mathbb{A}^d)$ qui associe à un arc φ le couple $(\varphi(0), \Phi \circ \varphi)$.*

1.4. Le morphisme fibre de Milnor motivique

Considérons X une variété et un morphisme $f : X \to \mathbb{A}^1_k$. Grâce au théorème de factorisation faible, Bittner [1] étend la fibre de Milnor motivique en un morphisme défini sur tout l'anneau de Grothendieck $\mathcal{M}_X$. Guibert, Loeser et Merle [10] donnent une construction différente basée sur l'intégration motivique. Nous l'expliquons ci-dessous et nous l'utiliserons par la suite.

DÉFINITION 1.5. — *Pour une variété X lisse de dimension d, U un ouvert partout dense de X et $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme, on considère pour deux entiers n et δ strictement positifs, l'espace d'arcs*

$$\mathscr{X}_n^\delta(f) := \{\varphi \in \mathcal{L}(X) \mid ord_t f(\varphi) = n, ord_t F.\varphi \leqslant n\delta\}$$

muni de la flèche "origine, coefficient angulaire" notée $(\pi_0, ac(f))$ vers $X_0(f) \times \mathbb{G}_m$ et de l'action standard de $\mathbb{G}_m$ sur les arcs. On considère alors la fonction zêta modifiée

$$Z^\delta_{f,U}(T) := \sum_{n \geqslant 1} \mu(\mathscr{X}_n^\delta(f)) T^n \in \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_0(f) \times \mathbb{G}_m}[[T]].$$

On dispose du théorème de rationalité à la Denef-Loeser démontré en [10, 3.8]

PROPOSITION 1.6. — *Soit U un ouvert dense d'une variété X lisse et de dimension pure d. Soit $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme. Il existe un entier*

δ_0 tel que pour tout entier δ supérieur à δ_0, les séries $Z^{\delta}_{f,U}(T)$ sont rationnelles et leur limite est indépendante de δ. On désignera par $\mathcal{S}_{f,U}$ la limite $-\lim_{T\to\infty} Z^{\delta}_{f,U}(T)$. De plus si $X_0(f)$ est nulle part dense dans X, et $h : Y \to X$ est une log-résolution de $(X, F \cup X_0(f))$ on dispose d'une formule d'image directe

$$\mathcal{S}_{f,U} = -\sum_{\substack{I\neq\emptyset \\ I\subset C}} (-1)^{|I|}[U_I] = h_!(\mathcal{S}_{f\circ h, h^{-1}(U)}) \in \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_0(f)\times\mathbb{G}_m}.$$

où C est l'ensemble $\{i \in A \mid N_i(t) \neq 0\}$.

Bittner, puis Guibert, Loeser et Merle prouvent alors le théorème d'extension à tout le groupe de Grothendieck ([1], [10, 3.9]) :

Théorème 1.7. — *Soit X une variété et $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme. Il existe un unique morphisme de groupe $\mathcal{M}_k$-linéaire $\mathcal{S}_f : \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_0(f)\times\mathbb{G}_m}$ tel que pour tout morphisme propre $p : Z \to X$ avec Z lisse, et pour toute partie U ouverte et dense dans Z, $\mathcal{S}_f([p : U \to X])$ vaut $p_!(S_{f\circ p,U})$.*

1.5. Convolution

Nous suivons dans ce paragraphe [10, partie 5] et [9, partie 3].

Définition 1.8. — *Fixons X une variété, n et m deux entiers strictement positifs et considérons la catégorie $Var^{\mathbb{G}^2_m,(n,m)}_{X\times\mathbb{G}^2_m}$. Ses objets sont de la forme $(A, (f, a, b), \alpha)$ où α est une bonne action de $\mathbb{G}^2_m$ sur la variété A, (a, b) est un morphisme (n, m)-monomial tel que $(a, b)(\alpha((\lambda, \mu), x))$ est égal à $(\lambda^n a(x), \mu^m b(x))$ pour tout x appartenant à A et pour tout (λ, μ) appartenant à $\mathbb{G}^2_m$ et f est un morphisme dont les fibres sont stables sous α. On note $K_0(Var^{\mathbb{G}^2_m,(n,m)}_{X\times\mathbb{G}^2_m})$ son groupe de Grothendieck défini comme en 1.1.2. On note $\mathbb{L}$ la classe $[\mathbb{A}^1 \times X \times \mathbb{G}^2_m, pr_{X\times\mathbb{G}^2_m}, \tau_{n,m}]$ où $\tau_{n,m}$ est la translation définie par $\tau_{n,m}(\lambda, (x, a, b))$ égal à $(x, \lambda^n a, \mu^m b)$.*

Définition 1.9. — *On considère le morphisme $\mathcal{M}_k$-linéaire de groupes*

$$\Psi^{n,m}_{\Sigma} : \mathcal{M}^{\mathbb{G}^2_m,(n,m)}_{X\times\mathbb{G}^2_m} \to \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m,nm}_{X\times\mathbb{G}_m}$$

défini par

$$\begin{aligned}&\Psi^{n,m}_{\Sigma}([(A, (f, a, b), \alpha)])\\ &= -[a+b \neq 0, (f, a+b), \alpha\circ(.^m, .^n)] + [(a+b = 0)\times\mathbb{G}_m, (f\circ pr_A, pr_2), \tau_{nm}]\end{aligned}$$

où "$a+b \neq 0$" désigne $(a+b)^{-1}(\mathbb{G}_m)$, "$a+b=0$" désigne la fibre $(a+b)^{-1}(0)$, $\alpha \circ (.^m, .^n)$ est l'action de $\mathbb{G}_m$ définie par $(\lambda, x) \mapsto \alpha((\lambda^m, \lambda^n), x)$ et τ_{nm} est la translation de poids nm définie par $(\lambda, (x, \mu) \mapsto (x, \lambda^{mn}\mu)$. On vérifie dans ces cas là que les morphismes sont bien nm-monomiaux.

Proposition 1.10. — *Comme en 1.1.5, avec des morphismes de transition du même type, les catégories $Var_{X\times\mathbb{G}_m^2}^{\mathbb{G}_m^2,(n,m)}$ forment un système inductif et on note $Var_{X\times\mathbb{G}_m^2}^{\mathbb{G}_m^2}$ la limite* [10, 2.5]*. Le morphisme précédent s'étend alors en un morphisme de groupes $\mathcal{M}_k$-linéaire*

$$\Psi_\Sigma : \mathcal{M}_{X\times\mathbb{G}_m^2}^{\mathbb{G}_m^2} \to \mathcal{M}_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}.$$

Définition 1.11. — *Considérons le morphisme canonique noté $\boxtimes$ de $\mathcal{M}_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} \times \mathcal{M}_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ vers $\mathcal{M}_{X\times\mathbb{G}_m^2}^{\mathbb{G}_m^2}$ qui envoie le couple formé de (A, a, σ_A) et (B, b, σ_B) sur $(A \times_X B, (a,b), (\sigma_A, \sigma_B))$ où (σ_A, σ_B) est l'action produit. Le* produit de convolution *est alors défini par*

$$\begin{array}{rccc} * : & \mathcal{M}_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} \times \mathcal{M}_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} & \to & \mathcal{M}_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} \\ & (A,B) & \mapsto & A * B = \Psi_\Sigma(A \boxtimes B). \end{array}$$

Proposition 1.12. — *Le produit de convolution sur $\mathcal{M}_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ est commutatif et associatif. L'élément neutre est la classe de l'identité de $X \times \mathbb{G}_m$ muni de la translation τ sur $\mathbb{G}_m$.*

2. Calcul de la fibre de Milnor motivique à l'infini au dessus du tore

Soit k un corps de caractéristique 0. Nous noterons dans la suite $\mathbb{A}^1$ au lieu de $\mathbb{A}_k^1$. Considérons d variétés algébriques lisses sur k notées $(\mathcal{U}_l)$, d morphismes non constants $f_l : \mathcal{U}_l \to \mathbb{G}_m$ et P un polynôme de Laurent en d variables et à coefficients dans k notés $(\alpha_d)_{d\in\mathbb{Z}}$. Ce polynôme définit une fonction $P : \mathbb{G}_m^d \to \mathbb{A}^1$. Nous supposerons P non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini Γ. Notons $\mathcal{U}$ la variété $\prod_{l=1}^d \mathcal{U}_l$, $P(f)$ la fonction $P(f_1, ..., f_d)$ et $\mathcal{U}^*$ l'ouvert $\mathcal{U} \setminus P(f)^{-1}(0)$. A la manière de Guibert, Loeser et Merle dans [9], nous calculons ici la fibre de Milnor motivique à l'infini de la composée $P(f)$ en termes du polyèdre de Newton à l'infini de P. Lorsque les f_i sont les fonctions coordonnées de $\mathbb{A}^d$, nous retrouvons la formule [20, théorème 3.3].

2.1. Polyèdre de Newton à l'infini

Fixons d un entier strictement positif et P un polynôme de Laurent appartenant à l'anneau $k[x_1,\, x_1^{-1}...,\, x_d,\, x_d^{-1}]$. Nous noterons $(\alpha_d)_{d\in\mathbb{Z}}$ ses coefficients. L'ensemble $\{\underline{k}\in\mathbb{Z}^d \mid \alpha_{\underline{k}}\neq 0\}$ est appelé *support* de f et on le note $\mathrm{supp}(P)$. L'enveloppe convexe de $\mathrm{supp}(P)\cup\{0\}$ notée Γ_- est un polyèdre que nous appelons *polyèdre de Newton à l'infini* de P. On note Γ les faces de Γ_- ne contenant pas l'origine.

Pour γ une face de Γ_- on note P_γ le polynôme $\sum_{\underline{k}\in\gamma}\alpha_{\underline{k}}\,\underline{x}^{\underline{k}}$. Au sens de Kouchnirenko [12], on dit que le polynôme P est *non dégénéré* pour son polyèdre de Newton à l'infini, si pour toute face γ de Γ le polynôme P_γ est lisse sur $\mathbb{G}_m^d$. Nous supposons dans toute la suite que le polynôme de Laurent P est non dégénéré pour Γ.

Enfin pour toute face γ de Γ, on introduit la variété

$$X_\gamma(0) := \{x\in\mathbb{G}_m^d \mid P_\gamma(x)=0\}.$$

2.2. Compactifications

On considère $j:\mathbb{A}^1\to\mathbb{P}^1$ l'injection qui a un élément a associe $[1:a]$. On désignera par ∞ l'élément $[0:1]$ et on notera par abus a l'élément $[1:a]$.

2.2.1. Compactification des f_l. Pour tout entier l dans $\{1,...,d\}$, soit $(X_l,i_l,\widehat{f_l})$ une compactification du morphisme $(\mathcal{U}_l,f_l)$ c'est à dire : X_l est une variété, $i_l:\mathcal{U}_l\to X_l$ est une immersion ouverte dominante et $\widehat{f_l}:X_l\to\mathbb{P}^1$ est une application propre, telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} U_l \arrow[r, "i_l"] \arrow[d, "f_l"'] & X_l \arrow[d, "\hat{f}_l"] \\ \mathbb{A}^1 \arrow[r, "j"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

Désignons par F_l, le fermé à l'infini $X_l\setminus i_l(\mathcal{U}_l)$ et par X_l^a, la fibre de $\widehat{f_l}$ en a, pour tout a dans $\mathbb{P}^1$. Notons enfin $1/\hat{f}_l$, l'application régulière définie sur $X_l\setminus X_l^0$ qui prolonge $1/f_l$ et $\hat{f}_l-a$, l'application régulière définie sur $X_l\setminus X_l^\infty$ qui prolonge f_l-a pour toute valeur a dans $\mathbb{A}^1$.

Remarque 2.1. — Les fibres X_l^∞ et X_l^0 sont respectivement les zéros et les pôles de la fonction rationnelle $1/\hat{f}_l$ définie sur X_l. Notons que le fermé à l'infini F_l contient X_l^∞ et X_l^0.

2.2.2. Compactification de $P(f)$. On désignera par X l'adhérence du graphe de $P(f)$ dans la variété propre $(\prod_{l=1}^{d} X_l) \times \mathbb{P}^1$. On notera $\widehat{P(f)}$ la restriction de la projection $(\prod_{l=1}^{d} X_l) \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ à X et i le plongement naturel de $\mathcal{U}$ dans X :

$$\begin{array}{cccc} i & : & \mathcal{U} & \to & X \\ & & \underline{a_l} & \mapsto & (\underline{i_l(a_l)}, [1 : P(f)(\underline{a_l})]) \end{array}$$

Proposition 2.2. — *Le triplet $(X, i, \widehat{P(f)})$ est une compactification de $(\mathcal{U}, P(f))$.*

Démonstration. — La variété X est propre comme fermé contenu dans la variété propre $(\prod_{l=1}^{d} X_l) \times \mathbb{P}^1$. Par conséquent, la projection $\widehat{P(f)}$ est propre. Les variables étant séparées, le produit i des immersions ouvertes i_l est une immersion ouverte dans le produit $\prod_{l=1}^{d} X_l$. L'ouvert $i(U)$ est le produit des ouverts denses $\prod_{l=1}^{d} i_l(\mathcal{U}_l)$. Il est donc dense dans X. Enfin pour tout élément (u_l) du produit $\prod_{l=1}^{d} \mathcal{U}_l$, pour tout entier l de $\{1, .., d\}$, l'image $\widehat{f_l}(i_l(u_l))$ vaut $[1 : f_l(u_l)]$. Ainsi $\widehat{P(f)}(i(\underline{u_l}))$ est égal à $j(P(f))(\underline{u_l})$. □

Notations 2.3. — On note F le fermé à l'infini $X \setminus i(U)$, X_0 la fibre de $\widehat{P(f)}$ en zéro, X_∞ la fibre en la valeur infini, X^* l'ouvert $X \setminus X_0$, F^* le constructible $F \setminus X_0$ et $1/\widehat{P(f)}$ l'application régulière définie sur X^* qui prolonge $1/P(f)$.

2.3. Fibre de Milnor motivique à l'infini de $P(f)$

2.3.1. Espace d'arcs. Soit δ et n deux entiers strictement positifs, notons

$$\mathscr{X}_n^\delta := \left\{ \varphi \in \mathcal{L}(X) \,\middle|\, \begin{array}{c} ord_t F.\varphi \leqslant n\delta \\ ord_t 1/\widehat{P(f)}(\varphi(t)) = n \end{array} \right\}.$$

Cet espace d'arcs est muni de σ l'action standard de $\mathbb{G}_m$ sur les arcs et de la flèche (π_0, ac) vers $X_\infty \times \mathbb{G}_m$, qui à un arc φ associe son origine $\varphi(0)$ et le coefficient angulaire $ac(1/\widehat{P(f)}(\varphi))$. Pour tout entier k, les tronqués $(\pi_{n\delta+k}(\mathscr{X}_n^\delta), (\pi_0, ac), \sigma)$ appartiennent à $Var_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$.

Cet espace d'arcs est mesurable, même si la compactification est singulière. L'ordre de contact des arcs avec le lieu singulier étant borné sa mesure appartient à l'anneau de Grothendieck $\mathcal{M}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ sans nécessité de complétion [3, lemme 4.1].

2.3.2. Fonction zêta motivique et fibre de Milnor motivique à l'infini.

Définition 2.4. — *Considérons la* fonction zêta motivique à l'infini *de $P(f)$,*

$$Z^{\delta}_{1/\widehat{P(f)},i(U^*)}(T) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(\mathscr{X}_n^{\delta})T^n \in \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty\times\mathbb{G}_m}[[T]].$$

Proposition 2.5. — *Il existe un entier δ_0, tel que pour tout entier δ supérieur à δ_0, la fonction zêta modifée $Z^{\delta}_{1/\widehat{P(f)},i(U^*)}(T)$ est rationnelle et sa limite ne dépend pas de δ. L'opposé de cette limite est*

$$S_{1/\widehat{P(f)}}([i : U^* \to X])$$

qui appartient à l'anneau $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty\times\mathbb{G}_m}$.

Démonstration. — Cette proposition est une conséquence du théorème de rationalité (1.6) et du théorème d'extension (1.7). On pourra se référer à la preuve de [20, Proposition 2.3]. □

Dans notre contexte, rappelons la définition de la *fibre de Milnor motivique à l'infini*. On pourra se référer à la note [18] et au théorème [20, théorème 2.4]. Pour d'autres propriétés de cet objet on pourra se référer aux travaux en cours de Kiyoshi Takeuchi et Yutaka Matsui [16] et [15].

Définition 2.6. — *La* fibre de Milnor motivique à l'infini *de $P(f)$, notée $S_{P(f),\infty}$, est l'image directe $\widehat{P(f)}_! S_{1/\widehat{P(f)},i(U^*)}$. Elle appartient à l'anneau $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\mathbb{G}_m}$ et ne dépend pas des compactifications précédentes.*

Nous montrons dans cette partie le théorème

Théorème 2.7. — *Pour une famille de fonctions $f_l : \mathcal{U}_l \to \mathbb{G}_m$, à source lisse, pour un polynôme non dégénéré P, la fibre de Milnor motivique à l'infini est égale à*

$$S_{P(f),\infty} = -\sum_{\gamma\in\Gamma} P_{\gamma !}\, i^{-1}_{P_\gamma\neq 0}(S^{\sigma(\gamma)}_{f,\infty}),$$

où $S^{\sigma(\gamma)}_{f,\infty}$ désigne les cycles proches motiviques généralisés à l'infini appartenant à $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\mathbb{G}_m^d}$ et associés aux fonctions f_i et à la face γ .

La preuve s'organise comme suit : Dans la partie 2.4, nous construisons une log-résolution (Y^*, E^*) du couple (X^*, F^*) à partir de log-résolutions des couples (X_l, F_l). Rappelons que par application du critère de propreté, h induit une bijection entre $\mathcal{L}(Y^*) \setminus \mathcal{L}(E^*)$ et $\mathcal{L}(X^*) \setminus \mathcal{L}(F^*)$.

Dans la partie 2.5 nous donnons les propriétés du polyèdre de Newton à l'infini utiles par la suite. Nous pouvons alors classer en 2.6.1 les différents arcs suivant les faces du polyèdre de Newton et les strates du diviseur E^*. On obtient à la proposition 2.15 et à la formule (2.2) une décomposition adéquate de la fonction zêta motivique à l'infini. Par le lemme clé 1.2 on obtient l'égalité

$$S_{P(f),\infty} = -\sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{(I_l)\in\mathcal{P}} \chi(C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)})[U_{\underline{I_l}} \setminus P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)]. \tag{2.1}$$

Dans la partie 2.7, comme il est fait en [9, 2.8] dans le cas local, nous introduisons les *cycles proches motiviques généralisés à l'infini* notés $S^{\sigma(\gamma)}_{f,\infty}$ et associés aux fonctions f_l et à la face γ. Modulo l'opérateur $P_{\gamma !}i^{-1}_{P_\gamma\neq 0}$, leur calcul correspond aux sommes

$$\sum_{(I_l)\in\mathcal{P}} \chi(C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)})[U_{\underline{I_l}} \setminus P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)].$$

Si P est le polynôme $x_1 + x_2$, l'expression 2.1 fournit dans la partie 4, une formule du type Thom-Sébastiani à l'infini. De même, si les f_l sont les coordonnées de $\mathbb{G}^d_m$, on obtient la formule [20, théorème 3.3].

2.4. Log-résolutions

2.4.1. Log-résolution de (X_l, F_l). Pour tout l dans $\{1, ..., d\}$ on fixe (Y_l, E_l, h_l) une log-résolution de (X_l, F_l). Comme X^∞_l et X^0_l sont des diviseurs contenus dans F_l, les fibres $h^{-1}_l(X^\infty_l)$ et $h^{-1}_l(X^0_l)$ sont des diviseurs contenus dans E_l et disjoints. On note A_l l'ensemble indiçant les composantes irréductibles $E^{(i)}_l$ du diviseur E_l et $N^\infty_{l,i}$ et $N^0_{l,i}$ les multiplicités définies par :

$$h^{-1}_l(X^\infty_l) = \sum_{i\in A_l} N^\infty_{l,i}E^{(i)}_l \text{ et } h^{-1}_l(X^0_l) = \sum_{i\in A_l} N^0_{l,i}E^{(i)}_l.$$

Nous noterons alors le diviseur

$$div(1/\hat{f}_l \circ h_l) := \sum_{i\in A_l} N_i(f_l)E^{(i)}_l.$$

En particulier $N_i(f_l)$ vaut $N^\infty_{l,i}$ pour $E^{(i)}_l$ une composante irréductible de $h^{-1}_l(X^\infty_l)$ et $-N^0_{l,i}$ pour $E^{(i)}_l$ une composante irréductible de $h^{-1}_l(X^0_l)$. On notera pour tout fermé F_l

$$div(h^{-1}_l(F_l)) := \sum_{i\in A_l} N_i(F_l)E^{(i)}_l$$

et enfin le diviseur associé au jacobien $div(Jac(h_l)) := \sum_{i\in A_l}(\nu_{l,i} - 1)E^{(i)}_l$.

2.4.2. Log-résolution de (X, F) et (X^*, F^*).

Proposition et notations 2.8. — *Soit Y le produit $\prod_{l=1}^d Y_l$, h le produit $\prod_{l=1}^d h_l$ et E l'union des cylindres $\bigcup_{l=1}^d (\prod_{i<l} Y_i) \times E_l \times (\prod_{i>l} Y_i)$. Le triplet (Y, E, h) est une log-résolution de (X, F). Les composantes irréductibles de E sont les $(\prod_{j<l} Y_j) \times E_l^{(i)} \times (\prod_{j>l} Y_j)$ notés $E_{l,i}$ où $E_l^{(i)}$ désigne les composantes irréductibles du diviseur E_l. On note Y^* l'ouvert $Y \setminus h^{-1}(X_0)$ et E^* le constructible $E \setminus h^{-1}(X_0)$. Le triplet (Y^*, E^*, h) est une log-résolution de (X^*, F^*). On note*

$$h^{-1}(X_\infty) := \sum_{l=1}^{d} \sum_{i \in A_l} N_{l,i}(1/\widehat{P(f)}) E_{l,i}.$$

Démonstration. — La variété Y est lisse comme produit de variétés lisses, l'application h est propre car ses composantes le sont et E est un diviseur à croisements normaux car les E_i le sont. Les ouverts $Y \setminus E$ et $X \setminus F$ sont égaux aux produits $\prod_{l=1}^d Y_l \setminus E_l$ et $\prod_{l=1}^d X_l \setminus F_l$. Or pour tout l, le morphisme $h_l : Y_l \setminus E_l \to X_l \setminus F_l$ est un isomorphisme, donc $h : Y \setminus E \to X \setminus F$ est un isomorphisme comme produit d'isomorphismes. □

2.4.3. Partitions. Pour l appartenant à $\{1, .., d\}$ et I_l une partie de A_l, on pose

$$E_{I_l}^0 := \begin{cases} Y_l \setminus E_l & \text{si } I_l = \emptyset \\ \cap_{i \in I_l} E_l^{(i)} \setminus \cup_{i \notin I_l} E_l^{(i)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note alors $\mathcal{P}_l := \{I_l \subset A_l \mid E_{I_l}^0 \neq \emptyset\}$ et $\mathcal{P} := (\prod_{l=1}^d \mathcal{P}_l) \setminus \{\emptyset\}^d$. On obtient alors la stratification

$$E = \bigsqcup_{(I_l) \in \mathcal{P}} E_{\underline{I_l}}^0$$

où $E_{\underline{I_l}}^0$ est le produit $\prod_{l=1}^d E_{I_l}^0$.

Remarquons que les fibres X_l^0 et X_l^∞ sont disjointes donc pour tout élément I_l de $\mathcal{P}_l$ non vide, les entiers $N_i(f_l)$ sont de même signe.

2.5. Polyèdre de Newton à l'infini

Notation 2.9. — Pour tout arc $\varphi_l(t)$ tracé dans X_l, l'arc de Laurent $\hat{f}_l(\varphi_l(t))$ sera noté $P_l(t)/t^{\omega_l}$ où $P_l(t)$ est une série formelle inversible ($P_l(0)$ est non nul) et ω_l est l'ordre de $1/\hat{f}_l(\varphi_l(t))$.

Remarque 2.10. — Pour tout arc φ tracé dans X et non contenu dans le fermé à l'infini F, le point générique de l'arc appartient à l'ouvert affine, par conséquent on a

$$ord_t 1/\widehat{P(f)}(\underline{\varphi_l(t)}) = ord_t 1/P(\underline{\hat{f}_l(\varphi_l(t))}) = ord_t 1/P(\underline{P_l(t)/t^{\omega_l}}),$$

car $1/\widehat{P(f)}$ prolonge $1/P(f)$, et pour tout l, $\hat{f}_l$ prolonge f_l.

Proposition et notations 2.11. — *Soit ω dans $\mathbb{Z}^d$ et φ un arc de Laurent de la forme $(P_l(t)/t^{\omega_l})$ où chaque $P_l(t)$ est une série formelle inversible.*

(1) *Le maximum de la forme linéaire $(\omega \mid .)$ restreinte à Γ_- sera noté $m_\Gamma(\omega)$, il est positif et atteint sur une face de Γ_- notée $\gamma(\omega)$. La forme linéaire $(\omega \mid .)$ est constante sur la face $\gamma(\omega)$.*

(2) *Notons $(\alpha_{\underline{k}})_{\underline{k}}$ les coefficients de P et posons pour toute face γ*

$$\tilde{P}_\gamma(\underline{x}, u) := P_{\gamma(\omega)}(\underline{x}) + \sum_{\underline{k} \notin \gamma} \alpha_{\underline{k}} u^{m_\Gamma(\underline{\omega}) - (\underline{k}|\omega)}\, \underline{x}^{\underline{k}}.$$

On dispose de l'égalité $P(\varphi(t)) = (1/t^{m_\Gamma(\omega)})\tilde{P}_{\gamma(\omega)}(\underline{P_l(t)}, t)$.

(3) *L'ordre $\mathrm{ord}_t 1/P(\varphi(t))$ vaut $m_\Gamma(\omega) - \mathrm{ord}_t \tilde{P}_{\gamma(\omega)}(\underline{P_l(t)}, t)$. En particulier, si cet ordre est strictement positif alors $m_\Gamma(\omega)$ est strictement positif.*

(4) *Si $(P_l(0))$ n'annule pas $P_{\gamma(\omega)}$, le coefficient angulaire ac $1/P(\varphi(t))$ est égal à $1/P_{\gamma(\omega)}(\underline{P_l(0)})$.*

(5) *On note Ω l'ouvert $\left\{\omega \in \mathbb{Z}^d \mid m_\Gamma(\omega) > 0\right\}$. Pour tout ω dans Ω, la face $\gamma(\omega)$ ne contient pas 0, elle appartient à Γ.*

(6) *Pour toute face γ dans Γ, on désigne par $\sigma(\gamma)$ l'intérieur, dans son espace vectoriel engendré dans $\mathbb{R}^d$, du cône positif engendré par l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid \gamma(\omega) = \gamma\}$. Cet ensemble est un cône polyédral rationnel convexe relativement ouvert. L'ensemble Ω est la réunion disjointe des cônes $\sigma(\gamma)$ pour γ appartenant à Γ. Pour une face γ de la forme $\gamma_1 \cap \ldots \cap \gamma_s$ intersections de faces de codimension 1, en notant $\alpha^{(i)}$ le vecteur normal à γ_i, extérieur à Γ, à coordonnées entières et de plus petite norme, le cône $\sigma(\gamma)$ est égal à la somme $\sum_{i=1}^s \mathbb{R}_*^+ \alpha^{(i)}$ de dimension $d - \dim \gamma$.*

Démonstration. — voir [20, proposition 3.8]. □

2.6. Calcul de la fibre de Milnor motivique à l'infini au dessus du tore

2.6.1. Le découpage. Soit (I_l) un élément de $\mathcal{P}$ défini en 2.4.3 et une famille $(k_{l,i})$ notée $\underline{k}$ appartenant à $\prod_{l=1}^{d}\mathbb{N}^{*|I_l|}$. On définit un d-uplet ω avec ω_l égal à $\sum_{i\in I_l} N_i(f_l)k_{l,i}$. Si I_l est vide, on adopte la convention usuelle que la somme est nulle, en particulier ω_l est nul. On note alors

$$\mathscr{Y}_{\underline{k}} := \left\{(\varphi_l) \in \mathcal{L}(Y) \mid \forall l \in \{1,..,d\}, ord_t E_l^{(i)}\varphi_l = \left\{\begin{array}{ll} k_{l,i}, & i \in I_l \\ 0, & i \in A_l \setminus I_l \end{array}\right\}\right\}.$$

Cette variété est munie de l'action standard de $\mathbb{G}_m$ sur les arcs et de la flèche vers $X_\infty \times \mathbb{G}_m$

$$\varphi \mapsto \Big(h(\varphi(0)), ac(1/\widehat{P(f)} \circ h(\varphi))\Big)$$

Les différentes images de $\mathscr{Y}_{\underline{k}}$ sous les morphismes de troncations munies du morphisme et de l'action ci-dessus sont des éléments de $Var_{X_\infty\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$. On considère les espaces d'arcs

$$\mathscr{Y}_{\underline{k}}^{=} := \Big\{(\varphi_l) \in \mathscr{Y}_{\underline{k}} \mid ord_t 1/P(\underline{\hat{f}_l(h_l(\varphi_l)(t))}) = m_\Gamma(\omega)\Big\}.$$

et

$$\mathscr{Y}_{\underline{k},n}^{<} := \Big\{(\varphi_l) \in \mathscr{Y}_{\underline{k}} \mid ord_t 1/P(\underline{\hat{f}_l(h_l(\varphi_l)(t))}) = n\Big\}$$

munis de l'action standard de $\mathbb{G}_m$ et de la flèche (π_0, ac).

Remarque 2.12. — Quelques remarques :

(1) Par 2.11, pour tout arc φ appartenant à $\mathscr{Y}_{\underline{k}}$, si on écrit $\hat{f}_l(h_l(\varphi_l(t)))$ sous la forme $P_l(t)/t^{\omega_l}$ alors φ appartient à $\mathscr{Y}_{\underline{k}}^{=}$ si et seulement si $P_l(0)$ n'appartient pas à $X_\gamma(0)$ et φ appartient à $\mathscr{Y}_{\underline{k},n}^{<}$ si et seulement si $P_l(0)$ appartient à $X_\gamma(0)$.

(2) Les arcs de $\mathscr{Y}_{\underline{k},n}^{<}$ et $\mathscr{Y}_{\underline{k}}^{=}$ ont leur origine et leur condition de tangence fixée. Notons en particulier que l'ordre du jacobien de h est constant sur $\mathscr{Y}_{\underline{k},n}^{<}$ et $\mathscr{Y}_{\underline{k}}^{=}$.

Notation 2.13. — Pour tout élément (I_l) de $\mathcal{P}$ défini en 2.4.3, on considère la forme linéaire

$$\begin{array}{cccc} l_\Gamma & : & \prod_{l=1}^{d}\mathbb{R}^{*|I_l|} & \to & \mathbb{R} \\ & & (k_{l,i}) & \mapsto & (\omega := (\sum_{i\in I_l} N_i(f_l)k_{l,i}) \mid a) \end{array}$$

où a appartient à la face $\gamma(\omega)$. Par 2.11 ceci ne dépend pas de a.

Notations 2.14. — Pour tout (I_l) appartenant à $\mathcal{P}$, on considère le cône de $\prod_{l=1}^{d}\mathbb{R}^{*|I_l|}$

$$C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)} = \left\{ \underline{k} \in \prod_{l=1}^{d} \mathbb{R}^{*|I_l|}_{>0} \;\middle|\; \begin{array}{l} (\sum_{i\in I_l} N_i(f_l)k_{l,i} = \omega_l) \in \sigma(\gamma) \\ \forall l \in \{1,..,d\}\ \sum_{i\in I_l} N_i(F_l)k_{l,i} \leqslant l_\Gamma(\underline{k})\delta \end{array} \right\}$$

et le cône de $\mathbb{R}^*_{>0} \times \prod_{l=1}^{d}\mathbb{R}^{*|I_l|}_{>0}$

$$C^{\delta,<}_{\sigma(\gamma),(I_l)} = \left\{ (n,\underline{k}) \in \mathbb{R}^*_{>0} \times \prod_{l=1}^{d} \mathbb{R}^{*|I_l|}_{>0} \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 < n < l_\Gamma(\underline{k}) \\ (\sum_{i\in I_l} N_i(f_l)k_{l,i} = \omega_l) \in \sigma(\gamma) \\ \forall l \in \{1,..,d\}\ \sum_{i\in I_l} N_i(F_l)k_{l,i} \leqslant n\delta \end{array} \right\}.$$

On notera $C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l),\mathbb{N}}$ et $C^{\delta,<}_{\sigma(\gamma),(I_l),\mathbb{N}}$ les intersections $C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)} \cap \mathbb{N}^{*|I_l|}$ et $C^{\delta,<}_{\sigma(\gamma),(I_l)} \cap \mathbb{N}^* \times \prod_{l=1}^{d}\mathbb{N}^{*|I_l|}$.

Proposition 2.15. — *La fonction zêta se décompose comme suit*

$$\begin{aligned} Z^{\delta}_{1/\widehat{P(f)},i(U^*)}(T) = &\sum_{(I_l)\in\mathcal{P}} \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{\underline{k}\in C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l),\mathbb{N}}} \mathbb{L}^{-\sum_{l=1}^{d}\sum_{i\in I_l} k_{l,i}(\nu_{l,i}-1)} \mu(\mathscr{Y}^{=}_{\underline{k}}) T^{m_\Gamma(\omega)} \\ &+ \sum_{(I_l)\in\mathcal{P}} \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{(n,\underline{k})\in C^{\delta,<}_{\sigma(\gamma),(I_l),\mathbb{N}}} \mathbb{L}^{-\sum_{l=1}^{d}\sum_{i\in I_l} k_{l,i}(\nu_{l,i}-1)} \mu(\mathscr{Y}^{<}_{\underline{k}}) T^{n} \end{aligned}.$$

Démonstration. — Par la proposition 2.11 on classe les arcs selon les faces du polyèdre de Newton :

$$\begin{aligned} Z^{\delta}_{1/\widehat{P(f)},i(U^*)}(T) &= \sum_{n\geqslant 1} \mu(\mathscr{X}^{\delta}_n(f))T^n \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{\omega\in\sigma(\gamma)} \mu(\mathscr{X}^{\delta,=}_{m_\Gamma(\omega),\omega}) T^{m_\Gamma(\omega)} \\ &\qquad + \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{\omega\in\sigma(\gamma)} \sum_{n<m_\Gamma(\omega)} \mu(\mathscr{X}^{\delta,<}_{n,\omega}) T^n \end{aligned}$$

avec pour toute face γ de Γ, pour tout ω dans $\sigma(\gamma)$ et pour tout entier n de $\{1,...,m_\Gamma(\omega)\}$

$$\mathscr{X}^{\delta,=}_{n,\omega} = \left\{ (\varphi_j) \in \mathcal{L}(X^*) \;\middle|\; \begin{array}{lll} ord_t F.\varphi \leqslant n\gamma & , & ord_t 1/\widehat{P(f)}(\varphi(t)) = n \\ \forall j,\ \hat{f}_j(\varphi_j(t)) = P_j(t)/t^{\omega_j}, & P_j(t) \in k[[t]], & (P_j(0)) \notin X_\gamma(0) \end{array} \right\}$$

et

$$\mathscr{X}^{\delta,<}_{n,\omega} = \left\{ (\varphi_j) \in \mathcal{L}(X^*) \;\middle|\; \begin{array}{lll} ord_t F.\varphi \leqslant n\gamma & , & ord_t 1/\widehat{P(f)}(\varphi(t)) = n \\ \forall j,\ \hat{f}_j(\varphi_j(t)) = P_j(t)/t^{\omega_j}, & P_j(t) \in k[[t]], & (P_j(0)) \in X_\gamma(0) \end{array} \right\}.$$

Par (2.11), si $\mathscr{X}^{\delta,=}_{n,\omega}$ est non vide alors n est égal à $m_\Gamma(\omega)$.

On classifie ensuite plus finement les arcs en utilisant la log-résolution précédente : les arcs sont classés par l'origine et l'ordre de contact de leur relevé sur le diviseur exceptionnel E.

La fonction zêta se réécrit alors

$$Z^{\delta}_{1/\widehat{P(f)},i(U^*)}(T) = \sum_{(I_l)\in\mathcal{P}} \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{\underline{k}\in C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l),\mathbb{N}}} \mu(\mathscr{X}^{=}_{\underline{k}}) T^{l_\Gamma(\underline{k})} + \sum_{(I_l)\in\mathcal{P}} \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{(n,\underline{k})\in C^{\delta,<}_{\sigma(\gamma),(I_l),\mathbb{N}}} \mu(\mathscr{X}^{<}_{\underline{k},n}) T^{n} \tag{2.2}$$

avec $\mathscr{X}^{=}_{\underline{k}}$ égal à $h(\mathscr{Y}^{=}_{\underline{k}})$ et $\mathscr{X}^{<}_{\underline{k},n}$ égal à $h(\mathscr{Y}^{<}_{\underline{k},n})$.

On conclut par la formule de changement de variables de Denef et Loeser [3, 3.3]

$$\mu(\mathscr{X}^{=}_{\underline{k}}) = \mathbb{L}^{-\sum_{l=1}^{d}\sum_{i\in I_l} k_{l,i}(\nu_{l,i}-1)} \mu(\mathscr{Y}^{=}_{\underline{k}})$$

et

$$\mu(\mathscr{X}^{<}_{\underline{k},n}) = \mathbb{L}^{-\sum_{l=1}^{d}\sum_{i\in I_l} k_{l,i}(\nu_{l,i}-1)} \mu(\mathscr{Y}^{<}_{\underline{k},n}).$$

□

A la partie 2.6.2 nous calculons les mesures

$$\mu(\mathscr{Y}^{=}_{\underline{k}}) = [U_{\underline{I_l}} \setminus P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)]\mathbb{L}^{-\sum_{l=1}^{d}\sum_{i\in I_l} k_{l,i}} \tag{2.3}$$

et

$$\mu(\mathscr{Y}^{<}_{\underline{k},n}) = \mathbb{L}^{-\sum_{l=1}^{d}\sum_{i\in I_l} k_{l,i}} \mathbb{L}^{-(l_\Gamma(\underline{k})-n)}[\mathbb{G}_m \times P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)]. \tag{2.4}$$

Grâce au lemme 1.2, en 2.6.3 et en 2.6.4, nous prouvons la rationalité et nous calculons la limite quand $T \to \infty$ des sommes

$$\sum_{\underline{k}\in C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)},\mathbb{N}} \mathbb{L}^{-\sum_{l=1}^{d}\sum_{i\in I_l} k_{l,i}} T^{l_\Gamma(\underline{k})} \quad \text{et} \quad \sum_{n,\underline{k}\in C^{\delta,<}_{\sigma(\gamma),(I_l)},\mathbb{N}} \mathbb{L}^{-(l_\Gamma(\underline{k})-n)} T^{n}.$$

A la proposition 2.31, nous obtiendrons alors l'expression 2.1.

2.6.2. Le calcul des mesures $\mu(\mathscr{Y}^{<}_{\underline{k},n})$ et $\mu(\mathscr{Y}^{=}_{\underline{k}})$. Soit (I_l) (noté aussi $\underline{I_l}$) un élément de $\mathcal{P}$ tel que $C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)}$ ou $C^{\delta,<}_{\sigma(\gamma),(I_l)}$ soit non vide. Soit $\underline{k}$ une famille appartenant à $C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l),\mathbb{N}}$ si le cône est non vide et $(\underline{k}, n)$ une famille appartenant à $C^{\delta,<}_{\sigma(\gamma),(I_l),\mathbb{N}}$ si le cône est non vide. Notons alors (ω_l) le d-uplet $(\sum_{i\in I_l} N_i(f_l)k_{l,i})$.

Nous appliquons dans tout ce qui suit exactement la même démarche que [10, 5.11] et [9, 3.3].

Remarque 2.16. — Nous utilisons les notations 1.2.1. Dans notre situation, à variables séparées, pour (I_l) un élément de $\mathcal{P}$, le fibré $\nu_{E_{\underline{I_l}}}$ associé à $E_{\underline{I_l}}$ (l'adhérence de $E^0_{\underline{I_l}}$) est simplement le produit des $\nu_{E_{I_l}}$, avec pour I_l vide $\nu_{E_{I_l}}$ égal à $Y_l \setminus E_l$. De même, le fibré $U_{E_{\underline{I_l}}}$ est le produit des $U_{E_{I_l}}$, avec pour I_l vide $U_{E_{I_l}}$ égal à $Y_l \setminus E_l$. Nous noterons $U_{\underline{I_l}}$ le fibré $U_{E_{\underline{I_l}}}$.

Considérons le sous faisceau de $\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{A}^1}[u^{-1}]$

$$\mathcal{A}_{\underline{k}} := \sum_{l=1}^{d} \sum_{n_l\in\mathbb{N}^{I_l}} \mathcal{O}_{Y\times\mathbb{A}^1}(-\sum_{l=1}^{d}\sum_{i\in I_l} n_{l,i}(E_{l,i}\times\mathbb{A}^1))u^{-\sum_{l=1}^{d}\sum_{i\in I_l} k_{l,i}n_{l,i}},$$

et notons $CY_{\underline{k}}$ le schéma $Spec\,\mathcal{A}_{\underline{k}}$.
L'inclusion naturelle $\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{A}^1}\to\mathcal{A}_{\underline{k}}$ induit les morphismes $\pi : CY_{\underline{k}}\to Y\times\mathbb{A}^1$ et $p : CY_{\underline{k}} \to \mathbb{A}^1$.

Remarque 2.17. — En notant E_{l,I_l} l'intersection $\cap_{i\in I_l} E_l^{(i)}$, nous constatons que pour tout l, les $N_i(f_l)$ étant tous de même signe 2.4.3, ω_l est strictement positif si et seulement si $h_l(E_{l,I_l})$ est contenu dans X_l^∞, ω_l est strictement négatif si et seulement si $h_l(E_{l,I_l})$ est contenu dans X_l^0 et ω_l est nul si et seulement si $h_l(E_{l,I_l})$ est contenu dans la variété $X_l \setminus (X_l^0\cup X_l^\infty)$.

Notations 2.18. — Si $h_l(E_{l,I_l})$ est contenu dans X_l^∞, ω_l est la somme $\sum_{i\in I_l} N^\infty_{l,i}k_{l,i}$. Par l'inclusion précédente, avec π_{Y_l} la projection de Y sur Y_l, la fonction $\hat{f}_l\circ h_l\circ\pi_{Y_l}$ est divisible dans $\mathcal{A}_{\underline{k}}$ par u^{ω_l}, on note $\overline{f_l}$ le quotient. De même, si $h_l(E_{l,I_l})$ est contenu dans X_l^0, alors ω_l est égal à $-\sum_{i\in I_l} N^0_{l,i}k_{l,i}$. La fonction $\hat{f}_l\circ h_l\circ\pi_{Y_l}$ est divisible dans $\mathcal{A}_{\underline{k}}$ par $u^{-\omega_l}$, on note $\overline{f_l}$ le quotient.

Remarque 2.19. — Avec ces notations et la proposition 2.11 on obtient l'égalité

$$1/\widehat{P(f)}\circ h = u^{m_\Gamma(\omega)}/\tilde{P}_\gamma(\overline{f_1},...,\overline{f_d},u)$$

car $1/\widehat{P(f)}$ prolonge $1/P(f)$ et $\hat{f}_l$ prolonge $1/f_l$ pour tout l.

Notations 2.20. — On note ensuite $\tilde{E}_{l,i}$ le pullback du diviseur $E_{l,i}\times\mathbb{A}^1$ par π, par D le diviseur globalement défini sur $CY_{\underline{k}}$ par l'équation $u=0$, et par $CE_{l,i}$ les diviseurs $\tilde{E}_{l,i}-k_{l,i}D$ pour i dans I_l et $\tilde{E}_{l,i}$ pour i n'appartenant pas à I_l. On note par $CY^0_{\underline{k}}$ le complémentaire de l'union des CE_i dans $CY_{\underline{k}}$, pour i dans A_l et par Y^0 le complémentaire de l'union des $E_{l,i}$ pour tout l dans $\{1,...,d\}$ et i dans A_l.

Proposition 2.21. — *Le schéma $CY_{\underline{k}}$ est lisse, le morphisme π induit un isomorphisme au dessus de $\mathbb{A}^1\setminus\{0\}$, le morphisme p est lisse et sa* *fibre $p^{-1}(0)$ s'identifie naturellement avec le fibré $\nu_{E_{\underline{I_l}}}$. De plus quand il est restreint à $CY^0_{\underline{k}}$ la fibre de p en 0 s'identifie naturellement avec $U_{\underline{I_l}}$ et π induit un isomorphisme entre $CY^0_{\underline{k}} \setminus p^{-1}(0)$ et $Y^0 \times \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Enfin les fonctions $\overline{f_l}$ restreintes à $U_{\underline{I_l}}$ sont lisses et à valeurs dans $\mathbb{G}_m$.*

Démonstration. — Les variables sont séparées, on peut donc raisonner par produit et appliquer ([10, 5.12]). En particulier on recouvre CY_k par des parties ouvertes de la forme $Spec\,\mathcal{O}_U[(y_{l,i}), u]/(z_{l,i} - u^{k_{l,i}} y_{l,i})_{(l,i)}$ avec U un ouvert sur lequel les diviseurs $E_{l,i}$ sont donnés par les équations $z_{l,i} = 0$. □

L'anneau $\mathcal{A}_{\underline{k}}$ étant un sous anneau gradué de l'anneau $\mathcal{O}_Y[u, u^{-1}]$, on peut considérer la $\mathbb{G}_m$- action σ sur $CY_{\underline{k}}$ laissant les sections de $\mathcal{O}_Y$ invariantes et agissant sur u par $\sigma(\lambda) : u \mapsto \lambda^{-1}u$. Elle se restreint sur $U_{\underline{I_l}}$ en l'action diagonale induite par l'action canonique de $\mathbb{G}_m^{|I_1|+\ldots+|I_d|}$ sur $U_{\underline{I_l}}$ via le morphisme fini $\lambda \mapsto (\lambda^{k_{l,i}})$. On dispose alors de deux actions différentes de $\mathbb{G}_m$ sur les arcs tronqués $\mathcal{L}_n(CY^0_{\underline{k}})$: celle induite par l'action standard de $\mathbb{G}_m$ sur les arcs et celle définie par σ. On note alors $\tilde{\sigma}$ la composition de ces deux actions (qui commutent).

On note ensuite $\tilde{\mathcal{L}}_n(CY^0_{\underline{k}})$ l'ensemble des arcs φ dans $\mathcal{L}_n(CY^0_{\underline{k}})$ tels que $p(\varphi(t))$ est égal à t. En particulier l'origine de φ appartient à $U_{\underline{I_l}}$. Pour un tel arc φ la composition avec π envoie φ sur un arc dans $\mathcal{L}_n(Y \times \mathbb{A}^1)$ qui est le graphe d'un arc dans $\mathcal{L}_n(Y)$ non contenu dans l'union des diviseurs $E_{l,i}$ pour i dans I_l et l dans $\{1, ..., d\}$. Notons que $\tilde{\mathcal{L}}_n(CY^0_{\underline{k}})$ est stable par $\tilde{\sigma}$.

Lemme 2.22. — *Le morphisme $\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{L}}_n(CY^0_{\underline{k}}) \to \pi_n(Y)$ induit par la projection $CY^0_{\underline{k}} \to Y$ est un fibré affine de fibre $\mathbb{A}^{\sum_{i\in I_l} k_{l,i}}$. De plus si $\tilde{\mathcal{L}}_n(CY^0_{\underline{k}})$ est muni de l'action induite par $\tilde{\sigma}$ et $\pi_n(\mathscr{Y}_{\underline{k}})$ de l'action standard de $\mathbb{G}_m$, $\tilde{\pi}_l$ est alors $\mathbb{G}_m$-équivariant et l'action de $\mathbb{G}_m$ sur le fibré affine est affine. Pour tout arc φ de $\tilde{\mathcal{L}}_n(CY^0_{\underline{k}})$, on dispose pour tout l appartenant à $\{1, .., d\}$*

$$ac(1/\hat{f}_l \circ h_l \circ \pi_l \circ \tilde{\pi}(\varphi))^{-1} = ac(\overline{f_l}(\varphi(0)))$$

et

$$ac(1/\widehat{P(f)} \circ h(\tilde{\pi}(\varphi))) = ac(\tilde{P}_\gamma(\overline{f_1}(\varphi), ..., \overline{f_d}(\varphi), t))^{-1}$$

(car $u(t)$ est égal à t) et si de plus $P_\gamma(\underline{\overline{f_l}(\varphi(0))})$ est non nul alors par 2.11 on dispose de

$$ac(1/\widehat{P(f)} \circ h(\tilde{\pi}(\varphi))) = P_\gamma(\underline{\overline{f_l}(\varphi(0))})^{-1}.$$

Démonstration. — Chaque point de $E^0_{\underline{I_l}}$ est contenu dans une partie ouverte U de Y où les diviseurs $E_{l,i}$, pour l dans $\{1,..,d\}$ et i dans I_l sont définis dans U par les équations $z_{l,i}=0$ et où il existe $dimY-\sum_{l=1}^{d}|I_l|$ fonctions w_j sur U telles que la famille $(z_{l,i},w_j)$ soit un morphisme étale $U\to\mathbb{A}^{dimY}$. Par le lemme de réécriture 1.4, ce morphisme induit un isomorphisme entre $\mathcal{L}_n(U)$ et le produit $U\times_{\mathbb{A}^{dimY}}\mathcal{L}_n(\mathbb{A}^{dimY})$. En ajoutant en plus la coordonnée u, on obtient un isomorphisme entre $\mathcal{L}_n(U\times\mathbb{A}^1)$ et le produit $(U\times\mathbb{A}^1)\times_{\mathbb{A}^{dimY+1}}\mathcal{L}_n(\mathbb{A}^{dimY+1})$. Rappelons que l'équation locale du diviseur $E_{l,i}$ dans l'ouvert U, notée $z_{l,i}$, est divisible par $u^{k_{l,i}}$, on note $y_{l,i}$ le quotient. La famille $(\underline{y_{l,i}},\underline{w_j},u)$ avec $z_{l,i}$ égal à $u^{k_{l,i}}y_{l,i}$ induit un morphisme étale $\pi^{-1}(U\times\mathbb{A}^1)\to\mathbb{A}^{dimY+1}$ et donc un isomorphisme entre $\mathcal{L}_n(\pi^{-1}(U\times\mathbb{A}^1))$ et le produit $\pi^{-1}(U\times\mathbb{A}^1)\times_{\mathbb{A}^{dimY+1}}\mathcal{L}_n(\mathbb{A}^{dimY+1})$. Sous cet isomorphisme $\tilde{\pi}$ correpond à la multiplication de chaque composante $y_{l,i}$ d'un arc par $t^{k_{l,i}}$. La fibration se fait par la troncation modulo t^{n+1}. En particulier, l'action $\tilde{\sigma}(\lambda)$ sur une composante $y_{l,i}(t)$ est donnée par $y_{l,i}(t)\mapsto\lambda^{k_{l,i}}y_{l,i}(\lambda t)$; dont $\tilde{\pi}$ est $\mathbb{G}_m$-équivariant. Tout suit de cette description. □

Notations 2.23. — On définit alors $\tilde{\mathscr{Y}}^{=}_{\underline{k}}$ et $\tilde{\mathscr{Y}}^{<}_{\underline{k},n}$ les préimages respectives de $\mathscr{Y}^{=}_{\underline{k}}$ et $\mathscr{Y}^{<}_{\underline{k},n}$ par la fibration $\tilde{\pi}$.

On déduit du lemme 2.22 le lemme suivant :

Lemme 2.24. — *Les arcs de $\tilde{\mathscr{Y}}^{=}_{\underline{k}}$ sont les arcs φ de $\mathcal{L}(CY^0_{\underline{k}})$ dont l'origine appartient au complémentaire de $P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)$ dans $U_{\underline{I_l}}$. En particulier l'ordre $ord_t\tilde{P}_\gamma((\overline{f_l}),u)(\varphi)$ est nul. Au contraire, les arcs de $\tilde{\mathscr{Y}}^{<}_{\underline{k},n}$ sont les arcs φ de $\mathcal{L}(CY^0_{\underline{k}})$ dont l'origine appartient à $U_{\underline{I_l}}$ et à $P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)$ et tels que l'ordre $ord_t\tilde{P}_\gamma((\overline{f_l}(\varphi)),t)$ vaut $m_\Gamma(\omega)-n$ égal à $l_\Gamma(\underline{k})-n$. On obtient alors l'égalité des classes dans $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty\times\mathbb{G}_m}$*

$$[\pi_{n\delta}(\tilde{\mathscr{Y}}^{=}_{\underline{k}})]=[\pi_{n\delta}(\mathscr{Y}^{=}_{\underline{k}})]\mathbb{L}^{\sum_{l=1}^{d}\sum_{i\in I_l}k_{l,i}}$$

et

$$[\pi_{n\delta}(\tilde{\mathscr{Y}}^{<}_{\underline{k},n})]=[\pi_{n\delta}(\mathscr{Y}^{<}_{\underline{k},n})]\mathbb{L}^{\sum_{l=1}^{d}\sum_{i\in I_l}k_{l,i}}.$$

Notation 2.25. — On note $[U_{\underline{I_l}}\setminus P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)]$ la classe de $U_{\underline{I_l}}\setminus P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)$ dans $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty\times\mathbb{G}_m}$, l'action de $\mathbb{G}_m$ étant l'action diagonale de poids $(k_{l,i})$ sur $U_{\underline{I_l}}\setminus P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)$ et le morphisme vers $\mathbb{G}_m$ étant la restriction de $P_\gamma((\overline{f}_l))$. On considère aussi la classe $[\mathbb{G}_m\times P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)]$ de $\mathbb{G}_m\times P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)$ dans $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty\times\mathbb{G}_m}$ où l'action de $\mathbb{G}_m$ est la translation et le morphisme vers $\mathbb{G}_m$ est la première projection.

Remarque 2.26. — Par la construction du groupe de Grothendieck $\mathcal{M}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ faîte en [9, 2.2] (voir 1.1.2), par ramification, les classes précédentes ne dépendent pas de l'action.

Lemme 2.27. — *Dans l'anneau $\mathcal{M}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$, on dispose des égalités*

(1) $[\pi_{n\delta}(\tilde{\mathscr{Y}}_{\underline{k}}^{=})] = \mathbb{L}^{ndim(Y)\delta}[U_{\underline{I_l}} \setminus P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)]$.

(2) $[\pi_{n\delta}(\tilde{\mathscr{Y}}_{\underline{k},n}^{<})] = \mathbb{L}^{n\delta dim(Y)-(l_\Gamma(\underline{k})-n)}[\mathbb{G}_m \times P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)]$.

Démonstration. — Les arcs de $\pi_{n\delta}(\tilde{\mathscr{Y}}_{\underline{k}}^{=})$ sont les arcs φ de $\mathcal{L}_{n\gamma}(CY_{\underline{k}}^0)$ dont l'origine appartient à $U_{\underline{I_l}} \setminus P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)$ et tels que $u(\varphi(t))$ est égal à t. On montre alors que $\pi_{n\delta}(\tilde{\mathscr{Y}}_{\underline{k}}^{=})$ est un fibré affine sur $U_{\underline{I_l}} \setminus P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)$ de fibre $\mathbb{A}^{n\delta(dim(Y)+1)-n\delta}$. On construit les morphismes de trivialisation en considérant en tout point x_0 de $U_{\underline{I_l}} \setminus P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)$ un voisinage ouvert Ω de x_0 dans $CY_{\underline{k}}^0$ et un morphisme étale défini sur Ω commençant par u. On applique alors le lemme (4.2)[3] (voir 1.4) pour conclure.

Dans le deuxième cas, les arcs de $\pi_{n\delta}(\tilde{\mathscr{Y}}_{\underline{k},n}^{<})$ sont les arcs φ de $\mathcal{L}_{n\gamma}(CY_{\underline{k}}^0)$ dont l'origine appartient à $U_{\underline{I_l}} \cap P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)$ et tels que l'ordre $ord_t\tilde{P}_\gamma((\overline{f_k}(\varphi)), t)$ est égal à $m_\Gamma(\omega) - n$ lui même égal à $l_\Gamma((k_{l,i})) - n$. La fonction $(\tilde{P}_\gamma((\overline{f}_l), u), u)$ est lisse car $(\overline{f}_l)$ et u sont lisses sur $U_{\underline{I_l}}$, de plus par 2.11 pour tout a appartenant à $\mathbb{G}_m^d$, $\frac{\partial \tilde{P}_\gamma}{\partial x_i}(a, 0)$ est égal à $\frac{\partial P_\gamma}{\partial x_i}(a)$ et enfin P_γ est lisse car P est non dégénéré pour son polyèdre de Newton. On montre alors que $\pi_{n\delta}(\tilde{\mathscr{Y}}_{\underline{k},n}^{<})$ est un fibré affine sur $U_{\underline{I_l}} \cap P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)$ de fibre $\mathbb{A}^{n\delta(dim(Y)+1)-n\delta-(l_\Gamma(\underline{k})-n)}$. On construit les morphismes de trivialisation en considérant en tout point x_0 de $U_{\underline{I_l}} \cap P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)$ un voisinage ouvert Ω de x_0 dans $CY_{\underline{k}}^0$ et un morphisme étale défini sur Ω commençant par $(\tilde{P}_\gamma((\overline{f}_l), u), u)$. On applique alors le lemme (4.2) [3] (voir 1.4) pour conclure. □

Des lemmes 2.24 et 2.27 et du fait que CY est lisse on obtient les mesures 2.3 et 2.4.

2.6.3. Caractéristique d'Euler des cônes $C_{\sigma(\gamma),(I_l)}^{\delta,=}$ et $C_{\sigma(\gamma),(I_l)}^{\delta,<}$.

Notation 2.28. — Considérons l'application linéaire continue sur $\mathbb{R}^d$

$$N_{(I_l)} : \begin{array}{ccc} \prod_{l=1}^d \mathbb{R}^{I_l} & \to & \mathbb{R}^d \\ (k_{l,i}) & \mapsto & (\omega_l = \sum_{i\in I_l} N_i(f_l)k_{l,i}). \end{array}$$

L'image inverse du cône $\sigma(\gamma)$ par $N_{(I_l)}$ est un cône polyédral rationnel relativement ouvert.

Notation 2.29. — Rappelons que pour tout l dans $\{1,...,d\}$, $\tilde{A}_l$ désigne l'ensemble des composantes irréductibles du diviseur E_l de la variété Y_l. Notons $\tilde{A}_l$ l'ensemble $\{i \in A_l \mid N_i(f_l) \neq 0\}$.

Proposition 2.30. — *Pour tout d-uplet (I_l), si l'un des I_l n'est pas contenu dans $\tilde{A}_l$ alors la caractéristique d'Euler de $C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)}$ est nulle. Dans le cas contraire pour tout entier δ supérieur au plus grand des quotients $N_i(F_l)/N_i(f_l)$ cette caractérisitque d'Euler ne dépend pas de δ. Pour tout d-uplet (I_l) la caractéristique d'Euler de $C^{\delta,<}_{\sigma(\gamma),(I_l)}$ est nulle.*

Démonstration. — Si il existe l_0 avec I_{l_0} non contenu dans $\tilde{A}_{l_0}$ alors il existe i dans I_{l_0} tel que $N_i(f_{l_0})$ est nul. Or tous les $N_i(F_l)$ sont non nuls et positifs, par conséquent la condition de bord

$$C_{l_0} := \sum_{i\in I_{l_0}} N_i(F_{l_0})k_{l_0,i} \leqslant l_\Gamma((k_{l,i}))\delta = \delta \sum_{l=1}^{d}(\sum_{i\in I_l} N_i(f_l)k_{l,i})a_l$$

n'est pas vérifiée pour tous les $(k_{l,i})$ dans $C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)}$.
Notons $(C_{l_j})_{j\in\{1,..,t\}}$, les conditions non vérifiées et $\varphi_{l_j} : \underline{k} \mapsto \sum_{i\in I_{l_j}} N_i(F_{l_j})k_{l_j,i}$ les formes linéaires associées. Le cône $C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)}$ est alors la réunion disjointe des cônes polyédraux rationnels convexes

$$C_{J,\geqslant} := \left\{\underline{k} \in N^{-1}_{(I_l)}(\sigma(\gamma)) \,\middle|\, \begin{array}{ll} \varphi_{l_i}(\underline{k}) = \varphi_{l_j}(\underline{k}) & \forall i,j \in J \\ \delta l_\Gamma(\underline{k}) \geqslant \varphi_{l_i}(\underline{k}) > \varphi_{l_p}(\underline{k}) & \forall i \in J,\, \forall p \in \{l_1,...l_t\}\setminus J \end{array}\right\}$$

pour tout partie J non vide de $\{l_1,...l_t\}$. Ce cône est contenu dans le cône convexe polyédral relativement ouvert $\{\underline{k} \in N^{-1}_{(I_l)}(\sigma(\gamma)) \mid \varphi_{l_i}(\underline{k}) = \varphi_{l_j}(\underline{k}) > \varphi_{l_p}(\underline{k}) \quad \forall i,j \in J,\ \forall p \in \{l_1,...l_t\}\setminus J\}$ noté C_J et son complémentaire dans C_J est un cône convexe relativement ouvert polyédral rationnel de même dimension que C_J. Par conséquent, par additivité de la caractéristique d'Euler $\chi_c(C_{J,\geqslant})$ puis $\chi_c(C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)})$ sont nulles. Le deuxième cas découle immédiatement de la définition de $C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)}$ et de l'hypothèse faîte sur δ.

On montre de même que $\chi_c(C^{\delta,<}_{\sigma(\gamma),(I_l)})$ est nulle. On considérera pour cela le cône $\{n \in \mathbb{R}^*_{>0}, (k_{l,i}) \in N^{-1}_{(I_l)}(\sigma(\gamma)) \,\big|\, 0 < n < l_\Gamma(k_{l,i})\ \}$ qui est polyédral convexe rationnel et relativement ouvert et on remarquera que les conditions $\sum_{i\in I_l} N_i(F_l)k_{l,i} \leqslant n\delta$ ne sont pas toutes vérifiées puis on raisonne comme ci-dessus. ☐

2.6.4. Les formes linéaires l_Γ et ν. Sur le cône $C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)}$ on considère la forme linéaire $l_\Gamma : (k_{l,i}) \mapsto \sum_{l=1}^{d}(\sum_{i\in I_l} N_i(f_l)k_{l,i})a_l$ où a appartient à γ.

Les conditions au bord

$$\forall l \in \{1,..,d\},\ \sum_{i \in I_l} N_i(F_l) k_{l,i} \leqslant l_\Gamma(\underline{k})\delta$$

passent à la limite par continuité. Les entiers $k_{l,i}$ sont positifs et les entiers $N_i(F_l)$ sont strictement positifs, car les f_l sont à valeurs dans $\mathbb{G}_m$, donc chaque fermé F_l contient les fibres X_l^0 et X_l^∞. Par conséquent si l'image $l_\Gamma(\underline{k})$ est nulle, $k_{l,i}$ est alors nul pour tout couple (l,i). La forme l_Γ est donc strictement positive sur $\overline{C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)}} \setminus \{0\}$.

La forme linéaire $\nu : \underline{k} \mapsto \sum_{l=1}^{d} \nu_{l,i} k_{l,i}$. est clairement positive sur le cône $C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)}$.

Sur le cône $C^{\delta,<}_{\sigma(\gamma),(I_l)}$ nous considérons les formes linéaires :

$$l_\Gamma : (n,\underline{k}) \mapsto n \text{ et } \nu : (n,\underline{k}) \mapsto \textstyle\sum_{l=1}^{d} \nu_{l,i} k_{l,i} + (l_\Gamma(\underline{k}) - n).$$

La forme linéaire l est strictement positive sur $\overline{C^{\delta,<}_{\sigma(\gamma),(I_l)}} \setminus \{0\}$: si n est nul alors par les conditions de bords tous les $k_{l,i}$ sont nuls car les $N_{l,i}(F_l)$ sont tous strictement positifs. La forme linéaire ν est elle aussi positive.

2.6.5. Conclusion partielle. Par conséquent, par application du lemme 1.2, nous obtenons avec les notations précédentes, une expression de la fibre de Milnor motivique à l'infini de $P(f)$ en termes de la log-résolution (Y,E,h) et du polyèdre de Newton Γ

Proposition 2.31. — *La fibre de Milnor motivique à l'infini de $P(f)$ vaut*

$$S_{P(f),\infty} = -\sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{(I_l) \in \mathcal{P}} \chi(C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),(I_l)})[U_{\underline{I_l}} \setminus P_\gamma((\overline{f}_l))^{-1}(0)].$$

Donnons maintenant une expression de la fibre de Milnor motivique à l'infini de $P(f)$ uniquement en termes du polyèdre Γ. En suivant [9] nous utilisons une fonction zêta relative à un cône.

2.7. La classe $S^{C,l}_{f,\infty}$

Soit C un cône polyédral convexe relativement ouvert contenu dans $\mathbb{Z}^d$. Soit l une forme linéaire sur $\mathbb{Z}^d$ strictement positive sur $\overline{C} \setminus \{0\}$. Soit d fonctions à source lisse $f_l : \mathcal{U}_l \to \mathbb{G}_m$. Pour tout k dans $\{1,..,d\}$ on considère une compactification $(X_k, i_k, \hat{f}_k)$ de f_k. On note F_k le fermé $X_k \setminus i_k(\mathcal{U}_k)$,

X le produit des X_k et $\hat{f}$ le d-uplet $(\hat{f}_1, ..., \hat{f}_d)$. Pour tout δ strictement positif, pour tout ω dans C, on note,

$$\mathscr{X}_\omega^\delta = \left\{ \varphi = (\varphi_i) \in \mathcal{L}(X) \middle| \begin{array}{ll} \forall i \in \{1,..,d\} & ord_t 1/\hat{f}_i(\varphi_i) = \omega_i \\ & ord_t F_i.\varphi_i \leqslant l(\omega)\delta \end{array} \right\}.$$

On munit cet objet de l'action standard de $\mathbb{G}_m$ sur les arcs et des flèches "origine" et "coefficients angulaires". Ses images sous les morphismes de troncations sont des éléments de $Var^{\mathbb{G}_m}_{X\times\mathbb{G}_m^d}$. On considère alors la fonction zêta

$$Z^{C,l,\delta}_{\hat{f},i(U)}(T) := \sum_{\omega\in C} \mu(\mathscr{X}_\omega^\delta) T^{l(\omega)}.$$

Par la suite nous considérerons le cône

$$\mathcal{C}^\delta_{C,(I_l)} = \left\{ \underline{k} \in \prod_{l=1}^d \mathbb{R}^{*|I_l|}_{>0} \middle| \begin{array}{c} (\sum_{i\in I_l} N_i(f_l) k_{l,i} = ord_t 1/\hat{f}_l\varphi = \omega_l) = \omega \in C \\ \forall l \in \{1,..,d\} \ \sum_{i\in I_l} N_i(F_l) k_{l,i} \leqslant l(\omega)\delta = l_k(\underline{k})\delta \end{array} \right\}$$

avec

$$\begin{array}{cccll} l_k & : & \mathcal{C}^\delta_{C,(I_l)} & \to & \mathbb{Z} \\ & & \underline{k} & \mapsto & l_k(\underline{k}) := l((\sum_{i\in I_l} N_i(f_l) k_{l,i})_{l\in\{1,...,d\}}) \end{array}.$$

Proposition 2.32. — *Avec les notations précédentes, pour δ assez grand, la fonction zêta $Z^{C,l,\delta}_{\hat{f},i(U)}(T)$ est rationnelle, on note $S^{C,l,\delta}_{\hat{f},i(U)}$ la limite $\lim_{T\to\infty} Z^{C,l,\delta}_{\hat{f},i(U)}(T)$. Cette limite ne dépend ni de la forme linéaire l, ni de δ, on la note $S^C_{\hat{f},i(U)}$. Pour une log-résolution (Y,E,h) de (X,F) issue des log-résolutions (Y_l,E_l,h_l) de (X_l,F_l) on dispose de l'égalité*

$$S^{C,l,\delta}_{\hat{f},i(U)} = h_! \sum_{(I_l)\in\mathcal{P}} \chi(\mathcal{C}^\delta_{C,(I_l)})[U_{\underline{I_l}}] = h_! S^{C,l,\delta}_{\hat{f}\circ h, h^{-1}(i(U))} \in \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X\times\mathbb{G}_m^d}.$$

L'image directe sur le point $p_! S^C_{\hat{f},i(U)}$, notée $S^C_{f,\infty}$, appartient à $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\mathbb{G}_m^d}$ et ne dépend pas des compactifications.

Démonstration. — On montre la rationalité de la fonction zêta comme suit : comme précédemment on considère une log-résolution (Y,E,h) de (X,F) issue de log-résolutions (Y_l,E_l,h_l) de (X_l,F_l), on classifie les arcs suivant l'ordre de contact de leur remontée sur le diviseur à croisements normaux et on applique la formule de changement de variables de Denef-Loeser [3]. Ce qui donne avec les notations précédentes :

$$Z^{C,l,\delta}_{\hat{f},i(U)}(T) = \sum_{(I_l)\in\mathcal{P}} \sum_{\underline{k}\in\mathcal{C}^\delta_{C,(I_l)}\cap\prod_{l=1}^d \mathbb{N}^{*|I_l|}} \mathbb{L}^{-\sum_{l=1}^d \sum_{i\in I_l} k_{l,i}(\nu_{l,i}-1)} \mu(Y_{\underline{k}}) T^{l_k(\underline{k})}$$

avec

$$Y_{\underline{k}} := \left\{ (\varphi_l) \in \mathcal{L}(Y) \middle| \begin{array}{l} \forall l \in \{1,..,d\},\ \forall i \in I_l \neq \emptyset,\ ord_t(E_l)_i\varphi_l = k_{l,i} \\ \forall l \in \{1,..,d\},\ \forall i \in A_l \setminus I_l \neq \emptyset,\ ord_t(E_l)_i\varphi_l = 0 \end{array} \right\}$$

muni de l'action standard de $\mathbb{G}_m$ sur les arcs et de la flèche vers $X \times \mathbb{G}_m^d$ formée des flèches "origine" (qui a un arc φ associe l'élément $h(\varphi(0))$ dans X) et "coefficients angulaires" (qui a un arc φ associe $(ac(1/\hat{f}_l(\varphi_l)))$ dans $\mathbb{G}_m^d$) qui est $\mathbb{G}_m$-homogène pour σ. Avec ce qui précède 2.6.2 et les mêmes notations on obtient l'égalité

$$\mu(Y_{\underline{k}}) = [\pi_{n\delta}(Y_{\underline{k}})]\mathbb{L}^{-n\delta dim(Y)} = [U_{\underline{I_l}}]\mathbb{L}^{-\sum_{l=1}^{d}\sum_{i\in I_l} k_{l,i}}$$

où l'on note $[U_{\underline{I_l}}]$ la classe de $U_{\underline{I_l}}$ dans $\mathcal{M}_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$, l'action de $\mathbb{G}_m$ étant l'action diagonale de poids $(k_{l,i})$ sur $U_{\underline{I_l}}$ et le morphisme vers $\mathbb{G}_m$ étant les restrictions des $(\overline{f}_l)$.
Enfin on introduit la forme linéaire $\nu : (k_{l,i}) \mapsto \sum_{l=1}^{d} \nu_{l,i}k_{l,i}$. Elle est positive sur le cône $\mathcal{C}_{C,(I_l)}^{\delta}$.
Par les inégalités

$$\forall l \in \{1,..,d\} \quad \sum_{i\in I_l} N_i(F_l)k_{l,i} \leqslant l(\omega)\delta = l_k(\underline{k})\delta$$

la forme linéaire l_k est strictement positive sur $\overline{\mathcal{C}_{C,(I_l)}^{\delta}} \setminus \{0\}$ car chaque coefficient $N_i(F_l)$ est strictement positif. Par application du lemme 1.2 on obtient le résultat.

Montrons que $\chi(\mathcal{C}_{C,(I_l)}^{\delta})$ ne dépend pas de δ. Notons d'abord que le cône polyédral rationnel $N_{(I_l)}^{-1}(C)$ est relativement ouvert 2.6.3. Remarquons ensuite que s'il existe δ_0 tel que pour tout $k_{l,i}$ on ait les conditions

$$C_{l_0} := \sum_{i\in I_{l_0}} N_i(F_{l_0})k_{l_0,i} \leqslant l_k(\underline{k})\delta_0 = \delta_0 l\left(\left(\sum_{i\in I_l} N_i(f_l)k_{l,i}\right)\right)$$

il en est de même pour tout $\delta > \delta_0$ car l est positive. Si toutes les conditions sont vérifiées en ce cas là, le cône $C_{\sigma(\gamma),(I_l)}^{\delta,=}$ est égal à $N_{(I_l)}^{-1}(C)$ qui ne dépend pas de l.
Si pour tout δ, il existe des $k_{l,i}$ ne vérifiant pas une condition C_l alors par le même argument d'additivité de la caractéristique d'Euler que dans 2.30 la caractéristique d'Euler $\chi(\mathcal{C}_{C,(I_l)}^{\delta})$ est nulle et ne dépend donc ni de δ, ni de l.

Les variables étant séparées, l'indépendance de la compactification se montre de la même manière qu'en [20, Théorème 2.5] en travaillant composante par composante. □

2.7.1. L'opérateur $P_! i^{-1}_{P\neq 0}$. Pour un polynôme quasi-homogène P de $\mathbb{A}^d$ vers $\mathbb{A}^1$ et une variété S fixe et un élément de $Var^{\mathbb{G}_m}_{S\times\mathbb{G}_m}$ notée $(A,(p_S,p_{\mathbb{G}_m^d}),\sigma)$ tel que $A\setminus p^{-1}_{\mathbb{G}_m^d}(P^{-1}(0))$ est stable sous σ, on notera

$$P_! i^{-1}_{P\neq 0}(A,(p_S,p_{\mathbb{G}_m^d}),\sigma) := (A\setminus p^{-1}_{\mathbb{G}_m^d}(P^{-1}(0)),\left(p_S, P\circ p_{\mathbb{G}_m^d}\right),\sigma).$$

Exemple 2.33. — Avec les notations de la partie précédente, pour γ une face de Γ le polyèdre de Newton à l'infini de P, le polynôme associé P_γ est quasi-homogène et $S^{\sigma(\gamma)}_{f,\infty}\setminus p^{-1}_{\mathbb{G}_m^d}(P_\gamma^{-1}(0))$ est stable par rapport à l'action σ de $\mathbb{G}_m$ sur $S^{\sigma(\gamma)}_{f,\infty}$. Ceci résulte du fait que le polynôme P_γ est homogène pour les poids ω appartenant à $\sigma(\gamma)$. On peut donc considérer $P_{\gamma !} i^{-1}_{P_\gamma\neq 0}(S^{\sigma(\gamma)}_{f,\infty})$.

2.7.2. Conclusion. Des notations 2.14, de la décomposition de la fonction zêta 2.15, de la preuve de 2.31 et de la partie précédente nous obtenons le théorème 2.7.

3. Calcul de la fibre de Milnor motivique à l'infini

Supposons maintenant que les fonctions f_l sont à valeurs dans $\mathbb{A}^1$. Rappelons que chaque f_l est définie sur une variété lisse $\mathcal{U}_l$ et que l'on note $\mathcal{U}$ le produit des $\mathcal{U}_l$. Rappelons aussi que P est un polynôme de Laurent en d-variables non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini.

L'image inverse par f de la stratification de l'ensemble de définition de P en produit de tores induit une stratification de $\mathcal{U}$. En particulier on considère le diviseur de $\mathcal{U}$ dont les composantes sont données par $f_l = 0$.

Notation 3.1. — Pour tout i appartenant à $\{1,..,d\}$ on note maintenant E_i le produit $\prod_{l=1}^{i-1}\mathcal{U}_l\times(f_i=0)\times\prod_{l=i+1}^{d}\mathcal{U}_l$. Pour toute partie I de $\{1,..,d\}$ on note E_I^0 le constructible $\bigcap_{i\in I}E_i\setminus\bigcup_{j\notin I}E_j$. Enfin, on note $\mathcal{I}$ l'ensemble des parties de $\{1,..,d\}$ induit par la stratification du domaine de définition de P en produit de tores. En particulier $\mathcal{U}$ est égal à $\bigsqcup_{I\in\mathcal{I}}E_I^0$.

Exemples 3.2. — Si I est vide alors $E^0_\emptyset$ est égal au produit des ouverts $\prod_{l=1}^d\mathcal{U}_l\setminus(f_l=0)$. Pour k dans $\{1,..,d\}$, le constructible $E^0_{\{1,..,k\}}$ est égal au produit $\prod_{l=1}^k(f_l=0)\times\prod_{l=k}^d(\mathcal{U}_l\setminus f_l^{-1}(0))$. Enfin pour P un polynôme à d variables, $\mathcal{I}$ est l'ensemble des parties de $\{1,..,d\}$ et pour P un polynôme de Laurent à d variables dont le domaine de définition est $\mathbb{G}_m^d$, $\mathcal{I}$ est vide.

THÉORÈME 3.3. — *Pour une famille de fonctions $f_l:\mathcal{U}_l\to\mathbb{A}^1$, à source lisse, pour un polynôme non dégénéré P, avec les notations précédentes, la* *fibre de Milnor motivique à l'infini est égale à*

$$S_{P(f),\infty} = -\sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{\gamma\in\Gamma(P_I)} P_{I,\gamma !} i^{-1}_{P_{I,\gamma}\neq 0}\left(S^{\sigma(\gamma,I)}_{(f_i)_{i\notin I},\infty}\right)\prod_{i\in I}[f_i^{-1}(0)]$$

où $\mathcal{I}$ indice la stratification du produit $\prod_{l=1}^{d}\mathcal{U}_l$ induite par celle du domaine de définition de P en produit de tores, où pour tout I dans $\mathcal{I}$, $\Gamma(P_I)$ est le polyèdre de Newton à l'infini de P_I, $P_{I,\gamma}$ est le polynôme issu de P_I et associé à la face γ et $\sigma(\gamma,I)$ est le cône dual de γ par rapport à Γ_I.

Démonstration. — Par additivité de la fibre de Milnor (théorème 3.9 [10]) on dispose de l'égalité

$$S_{1/\widehat{P(f)}}([\mathcal{U} \xrightarrow{i} X]) = \sum_{I\in\mathcal{I}} S_{1/\widehat{P(f)}}([E_I^0 \xrightarrow{i} X]).$$

Soit I un élément de $\mathcal{I}$. On considère le polynôme $P_I(\underline{x_j})$ appartenant à $k[x_j, x_j^{-1}, j\notin I]$ et égal à $P(\alpha_1 x_1, .., \alpha_d x_d)$ avec α_i nul pour i dans I et vaut 1 sinon. Ce polynôme est non dégénéré pour son polyèdre de Newton (et commode si P l'est). En remarquant que nous sommes à variables séparées nous obtenons

$$\begin{aligned} &p_! S_{1/\widehat{P(f)}}([E_I^0 \xrightarrow{i} X]) \\ &\qquad = p_! S_{1/P_I\widehat{(f_j, j\notin I)}}([\prod_{j\notin I} U_j \setminus f_j^{-1}(0) \xrightarrow{i} \prod_{j\notin I} X_j])\prod_{i\in I}[f_i^{-1}(0)]. \end{aligned}$$

On applique alors le théorème 2.7. □

4. Une formule du type Thom-Sébastiani

4.1. Une formule du type Thom-Sébastiani

Définition 4.1. — *Notons inv l'opération $\mathcal{M}_k$-linéaire sur $\mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ induite par l'inversion $x\mapsto x^{-1}$ sur $\mathbb{G}_m$ notée encore inv*

$$\begin{array}{cccc} inv & : & \mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} & \rightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} \\ & & [A \xrightarrow{p} \mathbb{G}_m, \sigma] & \mapsto & [A \xrightarrow{inv\circ p} \mathbb{G}_m, \sigma] \end{array}.$$

Théorème 4.2. — *Pour deux fonctions $f_1 : U_1 \to \mathbb{A}^1$ et $f_2 : U_2 \to \mathbb{A}^1$ à source lisse on dispose de l'égalité*

$$invS^{\Phi}_{f_1+f_2,\infty,U_1\times U_2} = invS^{\Phi}_{f_1,\infty,U_1} * invS^{\Phi}_{f_2,\infty,U_2}$$

où $*$ est le produit de convolution 1.11 et où pour un morphisme $f : U \to \mathbb{A}^1$ on note

$$S^{\Phi}_{f,\infty,U} := (-1)^{dim_U - 1}(S_{f,\infty} - ([U - p_! S_{f,\infty}]).1)$$

avec $p_!$ l'image directe sur le point et 1 la classe $[\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m, id_{\mathbb{G}_m}, \tau]$ où τ est la translation.

Définition 4.3. — *Le morphisme f, n'a pas de fibre à l'infini intrinsèque, il n'y a donc pas de notions de cycles évanescents, au sens de Deligne, pour la valeur infini. Néanmoins, par analogie avec le cas local, nous appellerons* cycles évanescents motiviques pour la valeur infini de *f l'objet $S^{\Phi}_{f,\infty,U}$. Cet objet ne dépend d'aucune compactification et vérifie comme dans le cas local une formule de convolution.*

Remarque 4.4. — Notons que $S^{\Phi}_{f,\infty,U}$ dépend de l'ouvert U, ce n'est donc pas un invariant local à l'infini. On introduit alors un invariant de f indépendant de l'ouvert U

$$S^{\Phi}_{f,\infty} := (-1)^{\dim U - 1}(S_{f,\infty} + p_! S_{f,\infty}.1).$$

Pour des compactifications X_1 et X_2, on considère

$$S_{f_1+f_2,\infty,\infty} := \widehat{f_1 + f_2}_! \, i^{-1}_{X_1^{\infty} \times X_2^{\infty} \times \mathbb{G}_m} \, S_{\widehat{f_1+f_2}^{\infty}, U_1 \times U_2}$$

et

$$S^{\Phi}_{f_1+f_2,\infty,\infty} := (-1)^{\dim U_1 + \dim U_2 - 1}(S_{f_1+f_2,\infty,\infty} + p_! S_{f_1+f_2,\infty,\infty}.1).$$

Le calcul de l'objet $S_{f_1+f_2,\infty,\infty}$ ne fait intervenir que des arcs dont l'origine appartient aux fibres à l'infini. Les calculs de la preuve de 4.2 montrent alors l'égalité

$$inv S^{\Phi}_{f_1+f_2,\infty,\infty} = inv S^{\Phi}_{f_1,\infty} * inv S^{\Phi}_{f_2,\infty}.$$

La formule obtenue est un analogue à l'infini de la formule de Thom-Sébastiani de Denef-Loeser dans le cas des germes, voir par exemple ([10, 5.18]).

Démonstration. — Nous faisons ici la preuve au dessus du tore, en appliquant le raisonnement de la partie 3 on obtient le cas général. Considérons deux fonctions $f_1 : U_1 \to \mathbb{G}_m$ et $f_2 : U_2 \to \mathbb{G}_m$ à source lisse et P le polynôme $x_1 + x_2$. Ce polynôme est non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini. On considère comme précédemment deux compactifications $(X_1, i_1, \hat{f}_1)$ et $(X_2, i_2, \hat{f}_2)$ ainsi que des log-résolutions associées (Y_1, E_1, h_1) et (Y_2, E_2, h_2). On note a la face $(1, 0)$, b la face $(0, 1)$ et ab la face joignant a et b du polyèdre de Newton de P. Pour k appartenant à $\{1, 2\}$, on note A_k l'ensemble indiçant les composantes du diviseur E_k, C_k^{∞}

l'ensemble $\{i \in A_k \mid N_{i,k}^{\infty} \neq 0\}$ et C_k l'ensemble $\{i \in A_k \mid N_i(f_k) \neq 0\}$. On utilisera les notations de 2.4.1.

Par la proposition 2.31 on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}
-S_{f_1+f_2,\infty} = & \sum_{\substack{I_1 \subset C_1^{\infty} \\ I_2 \subset C_2}} \chi(C^{=}_{\sigma(a),I_1,I_2})[U_{I_1} \times U_{I_2}, \overline{f_{I_1}}, \sigma_1] \\
& + \sum_{\substack{I_2 \subset C_2^{\infty} \\ I_1 \subset C_1}} \chi(C^{=}_{\sigma(b),I_1,I_2})[U_{I_1} \times U_{I_2}, \overline{f_{I_2}}, \sigma_2] \\
& + \sum_{\substack{I_1 \subset C_1^{\infty} \\ I_2 \subset C_2^{\infty}}} \chi(C^{=}_{\sigma(ab),I_1,I_2})[U_{I_1} \times U_{I_2} \setminus (\overline{f_{I_1}} + \overline{f_{I_2}} = 0), (\overline{f_{I_1}} + \overline{f_{I_2}})^{-1}, \sigma_{1,2}].
\end{aligned}$$

En effet, pour (ω_1, ω_2) appartenant à $\sigma(a)$, ω_1 est strictement positif donc I_1 est contenu dans C_1^{∞}, de même pour (ω_1, ω_2) appartenant à $\sigma(b)$, I_2 est contenu dans C_2^{∞} et pour (ω_1, ω_2) appartenant à $\sigma(ab)$, ω_1 et ω_2 sont strictement positifs et I_1 et I_2 sont respectivement contenus dans C_1^{∞} et C_2^{∞}. Enfin par 2.30, pour tout k dans $\{1,2\}$, si I_k n'est pas contenu dans C_k alors la caractéristique d'Euler est nulle.
Rappelons l'écriture du cône $C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),I_1,I_2}$, pour une face γ du polyèdre Γ et δ un entier strictement positif

$$C^{\delta,=}_{\sigma(\gamma),I_1,I_2} = \left\{ (k_{1,i}) \in \mathbb{R}_{>0}^{*|I_1|}, (k_{2,i}) \in \mathbb{R}_{>0}^{*|I_2|} \;\middle|\; \begin{array}{c} \omega := \left(\sum_{i \in I_1} N_i(f_1)k_{1,i}, \sum_{i \in I_2} N_i(f_2)k_{2,i}\right) \in \sigma(\gamma) \\ \sum_{i \in I_1} N_i(F_1)k_{1,i} \leqslant m_{\Gamma}(\omega)\delta \\ \sum_{i \in I_2} N_i(F_2)k_{2,i} \leqslant m_{\Gamma}(\omega)\delta \end{array} \right\}.$$

Nous précisons ici δ mais par 2.30 les caractéristiques d'Euler n'en dépendent pas pour δ assez grand. Examinons les caractéristique d'Euler de ces cônes.

Si γ est la face a alors

$$C^{\delta,=}_{\sigma(a),I_1,I_2} = \left\{ (k_{1,i}) \in \mathbb{R}_{>0}^{*|I_1|}, (k_{2,i}) \in \mathbb{R}_{>0}^{*|I_2|} \;\middle|\; \begin{array}{ll} (1) & \sum_{i \in I_2} N_i(f_2)k_{2,i} < \sum_{i \in I_1} N_i(f_1)k_{1,i} \\ (2) & \sum_{i \in I_1} N_i(F_1)k_{1,i} \leqslant \delta \sum_{i \in I_1} N_i(f_1)k_{1,i} \\ (3) & \sum_{i \in I_2} N_i(F_2)k_{2,i} \leqslant \delta \sum_{i \in I_1} N_i(f_1)k_{1,i} \end{array} \right\}$$

car $m_{\Gamma}(\omega) = ((\omega_1, \omega_2) \mid (1,0)) = \omega_1$.

Si I_2 n'est pas contenu dans C_2^∞ et $I_2 \neq \emptyset$ alors par 2.4.1 $N_i(f_2) < 0$ pour tout i appartenant à I_2 donc (1) est toujours vérifiée car $N_i(f_1) > 0$ pour tout i appartenant à I_1 contenu dans C_1^∞. Si δ est supérieur au $max_{i\in I_1}(N_i(F_1)/N_i(f_1))$ alors (2) est vérifiée. La condition (3) est à imposer car les variables sont séparées. La caractéristique d'Euler de ce cône est alors nulle.

Si I_2 est vide alors la condition (1) est automatique, la condition (2) est vérifiée pour δ supérieur au $max_{i\in I_1}(N_i(F_1)/N_i(f_1))$ et la condition (3) aussi car en ce cas l'ordre $ord_t F_g \varphi_g$ est nul. La caractéristique d'Euler vaut alors $(-1)^{|I_1|}$.

Si I_2 est contenu dans C_2^∞ alors la condition (1) est à imposer et les conditions (2) et (3) sont vérifiées pour δ supérieur à $max_{i\in I_1}(N_i(F_1)/N_i(f_1))$ et $max_{i\in I_2}(N_i(F_2)/N_i(f_2))$. En effet on dispose de l'inégalité

$$\sum_{i\in I_2} N_i(F_2)k_{2,i} \leqslant \delta \sum_{i\in I_2} N_i(f_2)k_{2,i} < \delta \sum_{i\in I_1} N_i(f_1)k_{1,i}$$

par conséquent pour δ assez grand la caractéristique d'Euler vaut $(-1)^{|I_1|+|I_2|}$.

Si γ est la face b on travaille par symétrie.

Si γ est la face ab alors I_1 est contenu dans C_1^∞, I_2 est contenu dans C_2^∞ et on obtient l'égalité $m_\Gamma(\omega) = \omega_1 = \omega_2$ pour tout ω dans $\sigma(ab)$. En ce cas on dispose de l'égalité

$$C_{ab,I_1,I_2}^{\delta,=} = \left\{ (k_{1,i}) \in \mathbb{R}_{>0}^{*|I_1|}, (k_{2,i}) \in \mathbb{R}_{>0}^{*|I_2|} \;\middle|\; \begin{array}{ll} (1) & \sum_{i\in I_2} N_i(f_2)k_{2,i} = \sum_{i\in I_1} N_i(f_1)k_{1,i} \\ (2) & \sum_{i\in I_1} N_i(F_1)k_{1,i} \leqslant \delta \sum_{i\in I_1} N_i(f_1)k_{1,i} \\ (3) & \sum_{i\in I_2} N_i(F_2)k_{2,i} \leqslant \delta \sum_{i\in I_1} N_i(f_1)k_{1,i} \end{array} \right\}.$$

La première condition est à imposer, les deux suivantes sont vérifiées dès que δ est supérieur a $max_{i\in I_1}(N_i(F_1)/N_i(f_1))$ et $max_{i\in I_2}(N_i(F_2)/N_i(f_2))$. Le cône est alors de caractéristique d'Euler égale à $(-1)^{|I_1|+|I_2|-1}$. Par conséquent nous obtenons la formule

$$\begin{aligned}
S_{f_1+f_2,\infty} = &- \sum_{\substack{\emptyset\neq I_1\subset C_1^\infty \\ \emptyset\neq I_2\subset C_2^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|}[U_{I_1}\times U_{I_2}, \overline{f_{I_1}}, \sigma_1] \\
&- \sum_{\emptyset\neq I_1\subset C_1^\infty} (-1)^{|I_1|}[U_{I_1}\times Y_2\setminus E_2, \overline{f_{I_1}}, \sigma_1] \\
&- \sum_{\substack{\emptyset\neq I_2\subset C_2^\infty \\ \emptyset\neq I_1\subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|}[U_{I_1}\times U_{I_2}, \overline{f_{I_2}}, \sigma_1] \\
&- \sum_{\emptyset\neq I_2\subset C_2^\infty} (-1)^{|I_2|}[Y_1\setminus E_1\times U_{I_2}\overline{f_{I_2}}, \sigma_2] \\
&- \sum_{\substack{\emptyset\neq I_2\subset C_2^\infty \\ \emptyset\neq I_1\subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|-1}[U_{I_1}\times U_{I_2}\setminus(\overline{f_{I_1}}+\overline{f_{I_2}}=0), (\overline{f_{I_1}}+\overline{f_{I_2}})^{-1}, \sigma_{1,2}]
\end{aligned}$$

car pour I_k vide, U_{I_k} est égal $Y_k\setminus E_k$ isomorphe à U_k.

En utilisant l'expression de $S_{f_k,\infty}$ sur une log-résolution 1.6 en factorisant on a $(*)$

$$\begin{aligned}
S_{f_1+f_2,\infty} &= ([U_1]-p_!S_{f_1,\infty})S_{f_2,\infty} + ([U_2]-p_!S_{f_2,\infty})S_{f_1,\infty} \\
&+ \sum_{\substack{\emptyset\neq I_2\subset C_2^\infty \\ \emptyset\neq I_1\subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|}[U_{I_1}\times U_{I_2}\setminus(\overline{f_{I_1}}+\overline{f_{I_2}}=0),\ (\overline{f_{I_1}}+\overline{f_{I_2}})^{-1}, \sigma_{1,2}]
\end{aligned}$$

avec $[U_1]-p_!S_{f_1,\infty}$ et $[U_2]-p_!S_{f_2,\infty}$ appartenant à $\mathcal{M}_k$ et $p_!$ l'image directe sur le point.

En appliquant la définition du produit de convolution 1.11 et de l'inversion on obtient alors

$$\begin{aligned}
S_{f_1+f_2,\infty} &= ([U_2]-p_!S_{f_2,\infty})S_{f_1,\infty} + ([U_1]-p_!S_{f_1,\infty})S_{f_2,\infty} \\
&\quad - inv(invS_{f_1,\infty} * invS_{f_2,\infty}) + \sum_{\substack{\emptyset\neq I_2\subset C_2^\infty \\ \emptyset\neq I_1\subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|}[\overline{f_{I_1}}+\overline{f_{I_2}}=0].1.
\end{aligned}$$

En passant à l'inversion il vient

$$\begin{aligned}
&invS_{f_1+f_2,\infty} = -inv(S_{f_1,\infty}-([U_1]-p_!S_{f_1,\infty}).1)*inv(S_{f_2,\infty}-([U_2]-p_!S_{f_2,\infty}).1) \\
&+\Big(([U_1]-p_!S_{f_1,\infty})([U_2]-p_!S_{f_2,\infty}) + \sum_{\substack{\emptyset\neq I_2\subset C_2^\infty \\ \emptyset\neq I_1\subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|}[\overline{f_{I_1}}+\overline{f_{I_2}}=0]\Big).1.
\end{aligned}$$

On note α la quantité

$$([U_1]-p_!S_{f_1,\infty})([U_2]-p_!S_{f_2,\infty})+\sum_{\substack{\emptyset\neq I_2\subset C_2^\infty\\ \emptyset\neq I_1\subset C_1^\infty}}(-1)^{|I_1|+|I_2|}[\overline{f_{I_1}}+\overline{f_{I_1}}=0].$$

Montrons que α est égal à $[U_1\times U_2]-p_!S_{f_1+f_2,\infty}$. En effet en développant on obtient

$$\alpha=[U_1][U_2]-[U_1]p_!S_{f_2,\infty}-[U_2]p_!S_{f_1,\infty}+p_!S_{f_1,\infty}p_!S_{f_2,\infty}\\ +\sum_{\substack{\emptyset\neq I_2\subset C_2^\infty\\ \emptyset\neq I_1\subset C_1^\infty}}(-1)^{|I_1|+|I_2|}[\overline{f_{I_1}}+\overline{f_{I_2}}=0].$$

Notons que par image directe sur le point de $(*)$ on a dans $\mathcal{M}_k$

$$p_!S_{f_1+f_2,\infty}=([U_1]-p_!S_{f_1,\infty})p_!S_{f_2,\infty}+([U_2]-p_!S_{f_2,\infty})p_!S_{f_1,\infty}\\ +\sum_{\substack{\emptyset\neq I_2\subset C_2^\infty\\ \emptyset\neq I_1\subset C_1^\infty}}(-1)^{|I_1|+|I_2|}[U_{I_1}\times U_{I_2}\setminus\overline{f_{I_1}}+\overline{f_{I_2}}=0]$$

par conséquent on obtient dans $\mathcal{M}_k$

$$[U_1\times U_2]-p_!S_{f_1+f_2,\infty}=[U_1][U_2]-([U_1]-p_!S_{f_1,\infty})p_!S_{f_2,\infty}\\ -([U_2]-p_!S_{f_2,\infty})p_!S_{f_1,\infty}+2p_!S_{f_1,\infty}p_!S_{f_2,\infty}-\sum_{\substack{\emptyset\neq I_2\subset C_2^\infty\\ \emptyset\neq I_1\subset C_1^\infty}}(-1)^{|I_1|+|I_2|}[U_{I_1}\times U_{I_2}]\\ +\sum_{\substack{\emptyset\neq I_2\subset C_2^\infty\\ \emptyset\neq I_1\subset C_1^\infty}}(-1)^{|I_1|+|I_2|}[\overline{f_{I_1}}+\overline{f_{I_2}}=0]$$

or

$$\sum_{\substack{\emptyset\neq I_2\subset C_2^\infty\\ \emptyset\neq I_1\subset C_1^\infty}}(-1)^{|I_1|+|I_2|}[U_{I_1}\times U_{I_2}]=p_!S_{f_1,\infty}p_!S_{f_2,\infty}$$

ceci donne la formule.

□

4.2. Exemples de Douai et Sabbah

Dans [5] et [6], Douai et Sabbah montrent que le spectre à l'infini (pour la cohomologie de la paire $(f^{-1}(t),\mathbb{G}_m^n)$), des polynômes f de la forme $x_1+...+x_n+\frac{1}{x_1....x_n}$ est $1+t+...+t^n$. Nous considérons ici la quantité évanescente associée à la paire $(\mathbb{G}_m^n, f^{-1}(t))$ issue de la formule de Thom-Sébastiani 4.2 :

$$S^{\Phi}_{f,\infty,U} = (-1)^{n-1}(S_{f,\infty} - ([\mathbb{G}_m^n] - p_! S_{f,\infty}).1)$$

et nous montrons

Proposition 4.5. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a*

$$Sp(S^{\Phi}_{f,\infty,U}) = 1 + t + ... + t^n.$$

Démonstration. — Le polynôme f est un polynôme de Laurent commode et non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini, Γ. Par [20, Théorème 3.3] ou [18, Théorème 4.1], sa fibre de Milnor motivique à l'infini est de la forme :

$$S_{f,\infty} = -\sum_{\gamma\in\Gamma}(-1)^{d-dim(\gamma)}[\mathbb{G}_m^n \setminus f_\gamma^{-1}(0), f_\gamma^{-1}, \sigma_\gamma]. \tag{4.1}$$

La preuve repose alors sur deux lemmes :

Lemme 4.6. — *La fibre de Milnor motivique de f à l'infini est égale à*

$$S_{f,\infty} = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k-1}C_{n+1}^k \begin{bmatrix} \begin{matrix} \mathbb{G}_m^n \setminus x_1 + ... + x_k = 0 \\ \downarrow \\ \mathbb{G}_m \end{matrix} & 1/(x_1 + ... + x_k),\ \sigma_{(x_1,..,x_k)} \end{bmatrix}$$

où $\sigma_{(x_1,..,x_k)}$ est l'action de $\mathbb{G}_m$ associée à la face de sommets $\{x_1, .., x_k\}$.

Démonstration. — Ce lemme repose sur la formule 4.1, sur la symétrie dans les variables et sur le changement de variables :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m^n & \to & \mathbb{G}_m^n \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & (x_1, ..., x_{n-1}, 1/(x_1...x_n)) \end{array}$$

Par ce type d'isomorphisme, on constate que pour tout k, on a égalité entre les objets :

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} \mathbb{G}_m^n \setminus x_1 + ... + x_{k-1} + 1/x_1...x_n = 0 \\ \downarrow \\ \mathbb{G}_m \end{matrix} & 1/(x_1 + ... + x_{k-1} + 1/x_1...x_n),\ \sigma_{(x_1,..,x_{k-1},1/x_1...x_n)} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} \mathbb{G}_m^n \setminus x_1 + ... + x_k = 0 \\ \downarrow \\ \mathbb{G}_m \end{matrix} & 1/(x_1 + ... + x_k), & \sigma_{(x_1,..,x_k)} \end{bmatrix}.$$

où $\sigma_{(x_1,..,x_{k-1},1/x_1...x_n)}$ est l'action de $\mathbb{G}_m$ associée à la face de sommets $\{x_1, .., x_{k-1}, 1/x_1...x_n\}$. □

LEMME 4.7. — *Pour tout entier k on a l'égalité*

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m^n \setminus x_1+...+x_k=0 & & \\ \downarrow & 1/(x_1+...+x_k), & \sigma_{(x_1,..,x_k)} \\ \mathbb{G}_m & & \end{array}\right] = \sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l \left[\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m^{n-l} & & \\ \downarrow & x_1, & \sigma_{x_1} \\ \mathbb{G}_m & & \end{array}\right] = \sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l[\mathbb{G}_m]^{n-l-1}.1_{\mathbb{G}_m}.$$

Démonstration. — La preuve se fait par récurence, en remarquant que pour tout k, la projection $(x_1,...,x_n)\mapsto(x_1,..,\hat{x_k},..,x_n)$ de $\mathbb{G}_m^n$ dans $\mathbb{G}_m^{n-1}$ induit un isomorphisme entre les variétés

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m^n \setminus x_1+...+x_k=0 & & \\ \downarrow & 1/(x_1+...+x_k), & \sigma_{(x_1,..,x_k)} \\ \mathbb{G}_m & & \end{array}\right)$$

et

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m^n \setminus x_1+...+x_{k-1}=0 & & \\ \downarrow & 1/(x_1+...+x_{k-1}), & \sigma_{(x_1,..,x_{k-1})} \\ \mathbb{G}_m & & \end{array}\right).$$

□

Par conséquent on a l'égalité suivante

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}S^{\Phi}_{f,\infty,U} \\ &= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k-1}C^k_{n+1}(\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l[\mathbb{G}_m]^{n-l-1}) \\ &\quad -\left([\mathbb{G}_m]^n - -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k-1}C^k_{n+1}(\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l[\mathbb{G}_m]^{n-l})\right).1_{\mathbb{G}_m}.\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}S^{\Phi}_{f,\infty,U} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C^k_{n+1}(\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l[\mathbb{G}_m]^{n-l-1}) \\ &\quad -\left([\mathbb{G}_m]^n - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C^k_{n+1}(\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l[\mathbb{G}_m]^{n-l})\right).1_{\mathbb{G}_m}\end{aligned}$$

en changeant d'indice on peut réécrire ceci sous la forme

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}&S^{\Phi}_{f,\infty,U}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C^{k}_{n+1}(\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}[\mathbb{G}_m]^{n-l})\\ &\quad - \left([\mathbb{G}_m]^n - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C^{k}_{n+1}(\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{l}[\mathbb{G}_m]^{n-l})\right).1_{\mathbb{G}_m}\end{aligned},$$

par sommation nous obtenons

$$(-1)^{n-1}S^{\Phi}_{f,\infty,U} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C^{k}_{n+1}([\mathbb{G}_m]^n + (-1)^{k-1}[\mathbb{G}_m]^{n-k}) - [\mathbb{G}_m]^n,$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}S^{\Phi}_{f,\infty,U} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1}C^{k}_{n+1}[\mathbb{G}_m]^{n-k} + (-(-1)^{n-1}[\mathbb{G}_m]^n\\ + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C^{k}_{n+1}[\mathbb{G}_m]^n - [\mathbb{G}_m]^n)\end{aligned}$$

ou encore

$$(-1)^{n-1}S^{\Phi}_{f,\infty,U} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1}C^{k}_{n+1}[\mathbb{G}_m]^{n-k} + \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n-k}C^{k}_{n+1}[\mathbb{G}_m]^n$$

par la formule du binôme de Newton le dernier terme de cette somme est nul, donc

$$S^{\Phi}_{f,\infty,U} = \sum_{k=0}^{n} C^{k}_{n+1}[\mathbb{G}_m]^{n-k}$$

en appliquant la formule du triangle de Pascal on obtient

$$S^{\Phi}_{f,\infty,U} = [\mathbb{G}_m]^n + \sum_{k=1}^{n} C^{k}_{n}[\mathbb{G}_m]^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} C^{k-1}_{n}[\mathbb{G}_m]^{n-k}$$

qui par la formule du binôme de Newton donne

$$S^{\Phi}_{f,\infty,U} = \mathbb{L}^n + \sum_{k=1}^{n-1} C^{k-1}_{n}[\mathbb{G}_m]^{n-k}.$$

On pose alors $I(n) := \sum_{k=0}^{n} C^{k}_{n+1}[\mathbb{G}_m]^{n-k}$. Et l'on montre par récurence que

$$I(n) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{L}^k.$$

D'après ce qui précède il n'y a que les cas de base à vérifier : $I(0)$ est clairement égal à 1, tout comme $I(1)$ est égal à $\mathbb{L} - 1 + 2$ soit $\mathbb{L} - 1$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Bittner, « On motivic zeta functions and the motivic nearby fiber », *Math. Z.* **249** (2005), n° 1, p. 63-83.

[2] P. Deligne, « Théorie de Hodge. III », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1974), n° 44, p. 5-77.

[3] J. Denef & F. Loeser, « Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration », *Invent. Math.* **135** (1999), n° 1, p. 201-232.

[4] ———, « Geometry on arc spaces of algebraic varieties », in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 327-348.

[5] A. Douai & C. Sabbah, « Gauss-Manin systems, Brieskorn lattices and Frobenius structures. I », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **53** (2003), n° 4, p. 1055-1116.

[6] A. Douai & C. Sabbah, « Gauss-Manin systems, Brieskorn lattices and Frobenius structures. II », (2004), p. 1-18.

[7] W. Fulton, *Intersection theory*, second éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998, xiv+470 pages.

[8] G. Guibert, « Espaces d'arcs et invariants d'Alexander », *Comment. Math. Helv.* **77** (2002), n° 4, p. 783-820.

[9] G. Guibert, F. Loeser & M. Merle, « Nearby cycles and composition with a nondegenerate polynomial », *Int. Math. Res. Not.* (2005), n° 31, p. 1873-1888.

[10] ———, « Iterated vanishing cycles, convolution, and a motivic analogue of a conjecture of Steenbrink », *Duke Math. J.* **132** (2006), n° 3, p. 409-457.

[11] H. Hironaka, « Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II », *Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109–203 ; ibid. (2)* **79** (1964), p. 205-326.

[12] A. G. Kouchnirenko, « Polyèdres de Newton et nombres de Milnor », *Invent. Math.* **32** (1976), n° 1, p. 1-31.

[13] F. Loeser, « Seattle lectures on motivic integration », in *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, p. 745-784.

[14] E. Looijenga, « Motivic measures », *Astérisque* (2002), n° 276, p. 267-297, Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.

[15] Y. Matsui & K. Takeuchi, « Monodromy at infinity of polynomial map and mixed Hodge modules », *arXiv :0912.5144v5*.

[16] ———, « Monodromy zeta functions at infinity, Newton polyhedra and constructible sheaves », *Math. Z.* **268** (2011), n° 1-2, p. 409-439.

[17] F. Pham, « Vanishing homologies and the n variable saddlepoint method », in *Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, p. 319-333.

[18] M. Raibaut, « Fibre de Milnor motivique à l'infini », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **348** (2010), n° 7-8, p. 419-422.

[19] ———, « Singularités à l'infini et intégration motivique », *Thèse, Université Nice Sophia Antipolis* (2010).

[20] ———, « Singularités à l'infini et intégration motivique », *Bull. Soc. Math. France* **140** (2012), n° 1, p. 51-100.

[21] C. SABBAH, « Monodromy at infinity and Fourier transform », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **33** (1997), n° 4, p. 643-685.

[22] M. SAITO, « Mixed Hodge modules », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **26** (1990), n° 2, p. 221-333.

[23] J. STEENBRINK & S. ZUCKER, « Variation of mixed Hodge structure. I », *Invent. Math.* **80** (1985), n° 3, p. 489-542.

Manuscrit reçu le 30 novembre 2010,
accepté le 8 février 2011.

Michel RAIBAUT
Université de Nice,
Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné,
Parc Valrose, 06108 NICE Cedex 2,
France
University of Leuven,
Department of Mathematics,
Celestijnenlaan 200 B,B-3001 Leuven (Heverlee),
Belgium
Current address:
Institut de mathématiques de Jussieu,
4 place Jussieu, Case 247
75252 Paris Cedex 5
France
raibaut@unice.fr