ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Denis TROTABAS

Non annulation des fonctions L des formes modulaires de Hilbert au point central

Tome 61, nº 1 (2011), p. 187-259.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2011__61_1_187_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
61, 1 (2011) 187-259

NON ANNULATION DES FONCTIONS L DES FORMES MODULAIRES DE HILBERT AU POINT CENTRAL

par Denis TROTABAS

Résumé. — La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer donne des estimations fines sur le rang de certaines variétés abéliennes définies sur $\mathbf{Q}$. Dans le cas des jacobiennes des courbes modulaires, ce problème est équivalent à l'estimation de l'ordre d'annulation en $1/2$ des fonctions L des formes modulaires, et a été traité inconditionnellement par Kowalski, Michel et VanderKam. L'objet de ce travail est d'étendre cette approche dans le cas d'un corps totalement réel arbitraire, ce qui nécessite l'utilisation de la théorie adélique. Nous suivons la méthode des moments amolis initiée par Selberg. On généralise la formule de Petersson que l'on utilise pour étudier les deux premiers moments harmoniques, ce qui nous permet d'atteindre inconditionnellement les mêmes proportions de formes dont la fonction L est non nulle en $1/2$ que celles établies pour $\mathbf{Q}$. Dans cette situation, il y a un terme additionnel, issu des formes anciennes, à contrôler.

Abstract. — Birch and Swinnerton-Dyer conjecture allows for sharp estimates on the rank of certain abelian varieties defined over $\mathbf{Q}$. in the case of the jacobian of the modular curves, this problem is equivalent to the estimation of the order of vanishing at $1/2$ of L-functions of classical modular forms, and was treated, without assuming the Riemann hypothesis, by Kowalski, Michel and VanderKam. The purpose of this paper is to extend this approach in the case of an arbitrary totally real field, which necessitates an appeal of Jacquet-Langlands' theory and the adelization of the problem. To show that the L-function (resp. its derivative) of a positive density of forms does not vanish at $1/2$, we follow Selberg's method of mollified moments (Iwaniec, Sarnak, Kowalski, Michel and VanderKam among others applied it successfully in the case of classical modular forms). We generalize the Petersson formula, and use it to estimate the first two harmonic moments, this then allows us to match the same unconditional densities as the ones proved over $\mathbf{Q}$ by Kowalski, Michel and VanderKam. In this setting, there is an additional term, coming from old forms, to control.

Mots-clés : fonctions L, formes modulaires de Hilbert, valeurs spéciales, formes automorphes.
Classification math. : 11F41, 11M41, 11F70.

1. Introduction et résultats

Soit $F/\mathbf{Q}$ une extension finie de degré d, totalement réelle, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_F$, et soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_F$. Les représentations automorphes cuspidales de caractère central trivial de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ sont les facteurs irréductibles de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ sur $L^2_0(\mathrm{GL}_2(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F))$. On notera (π, V_π) ou simplement π un tel constituant, et on sait que l'on a une factorisation : $\pi \cong \widehat{\bigotimes}_v \pi_v$, v parcourant l'ensemble de toutes les places de F, chaque π_v étant une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ uniquement déterminée par cet isomorphisme. En séparant les places infinies et finies, on écrit : $\pi \cong \pi_\infty \otimes \pi_f$, et on dit que π est une forme modulaire de Hilbert de poids $\boldsymbol{k}$ s'il existe $\boldsymbol{k} = (k_j)_j \in 2\mathbf{N}^d_{\geqslant 1}$ tel que

$$\pi_\infty \cong \bigotimes_{j=1}^{d} \mathcal{D}(k_j - 1),$$

produit de séries discrètes de caractère central trivial, et de paramètres $k_j - 1$.

Pour $F = \mathbf{Q}$, cela équivaut aux formes modulaires classiques (*cf.* [9]), et il est nécessaire dans le cas d'un corps de nombres général de travailler adéliquement.

Soit $L(s, \pi_f) = \sum \lambda_\pi(\mathfrak{n}) N(\mathfrak{n})^{-s}$ (avec la convention qu'une telle somme ne porte que sur les idéaux *non nuls* de $\mathcal{O}_F$) la fonction L finie de π, convergente pour $\Re(s) > 1$, q_π le conducteur de π (c'est un idéal de $\mathcal{O}_F$).

Soit

$$\Lambda(s, \pi) := N(\mathrm{q}_\pi)^{s/2} L(s, \pi) = N(\mathrm{q}_\pi)^{s/2} L(s, \pi_\infty) L(s, \pi_f)$$

la fonction L complétée (*i.e.*, tenant compte des places archimédiennes, et incorporant le conducteur), qui se prolonge analytiquement au plan complexe, et satisfait à l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda(s, \pi) = \varepsilon_\pi \Lambda(1 - s, \pi) \tag{1.1}$$

pour $\varepsilon_\pi \in \{-1, 1\}$ (car $\pi \cong \check{\pi}$).

Les valeurs $L(1/2, \pi_f)$ sont liées à des problèmes arithmético-géométriques (*cf.* la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer), et on s'intéresse ici à leur non annulation. Plus précisément, si $\boldsymbol{k} \in \mathbf{N}^d_{\geqslant 1}$ est fixé, on considère $\Pi^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}$ l'ensemble (fini) des formes modulaires de Hilbert de poids $\boldsymbol{k}$ et de conducteur $\mathfrak{q}$, dont on note le cardinal $|\Pi^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}|$, et on a :

Théorème 1.1. — *Pour* $\boldsymbol{k} \geqslant \mathbf{2}$ *pair, et* $\mathfrak{q}$ *parcourant les idéaux premiers de* $\mathcal{O}_F$ *:*

$$\liminf_{N(\mathfrak{q})\to\infty} \frac{|\{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}; L(1/2,\pi) \neq 0\}|}{|\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}|} \geqslant \frac{1}{4}. \tag{1.2}$$

$$\liminf_{N(\mathfrak{q})\to\infty} \frac{|\{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}; \varepsilon_\pi = -1 \ et\ L'(1/2,\pi_f) \neq 0\}|}{|\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}|} \geqslant \frac{7}{16}. \tag{1.3}$$

Selon la terminologie de Kowalski et Michel [15], on dit qu'on a une densité *naturelle* positive de formes dont la fonction L (resp. la dérivée de la fonction L) ne s'annule pas en $1/2$.

Remarque 1.2. — Si $\varepsilon_\pi = -1$, alors $\Lambda(1/2,\pi) = 0$ d'après l'équation fonctionnelle. Comme on a asymptotiquement une même proportion entre les formes de signe 1 et -1, le résultat prouvé se réécrit :

$$\liminf_{N(\mathfrak{q})\to\infty} \frac{|\{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}} | L(1/2,\pi) \neq 0\}|}{|\{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}} | \varepsilon_\pi = +1\}|} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Le travail de Iwaniec, Luo et Sarnak [12], dans le cadre des formes modulaires classiques, permet d'atteindre une proportion de $9/16$, sous l'hypothèse de Riemann (GRH). De même, le résultat pour la dérivée s'écrit :

$$\liminf_{N(\mathfrak{q})\to\infty} \frac{|\{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}} | \varepsilon_\pi = -1 \text{ et } L'(1/2,\pi_f) \neq 0\}|}{|\{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}} | \varepsilon_\pi = -1\}|} \geqslant \frac{7}{8}$$

et [12] ont atteint, sous (GRH), $15/16$. Kowalski, Michel et VanderKam [18] ont montré (sur $\mathbf{Q}$) que cette meilleure précision pour les dérivées n'est pas un hasard. On conjecture en fait que les proportions ci-dessus sont 1, mais cela n'est pas atteignable avec les techniques d'analyse harmonique utilisées ici, dans [13], [18] et [24].

Dans ce travail, on prouve qu'il y a une densité *harmonique* positive de telles formes :

Théorème 1.3. — *Pour* $\boldsymbol{k} \geqslant \mathbf{2}$ *pair, et* $\mathfrak{q}$ *parcourant les idéaux premiers de* $\mathcal{O}_F$ *:*

$$\liminf_{N(\mathfrak{q})\to\infty} \sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} \mathbb{1}_{\Lambda(1/2,\pi)\neq 0} \geqslant \frac{1}{4}. \tag{1.4}$$

$$\liminf_{N(\mathfrak{q})\to\infty} \sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} \mathbb{1}_{\varepsilon_\pi=-1, L'(1/2,\pi_f)\neq 0} \geqslant \frac{7}{16}. \tag{1.5}$$

avec la notation : $\mathbb{1}_{\Lambda(1/2,\pi)\neq 0}$ vaut 1 si $\Lambda(1/2,\pi)\neq 0$, 0 sinon.

Le symbole $\sum^h$ indique que l'on pondère la somme par des coefficients, introduits plus tard, provenant de l'extension de la formule de Petersson à $\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$ (*cf.* section 6, définition 6.2).

Le passage du théorème 1.3 au théorème 1.1 est expliqué dans [15] : notre situation n'induit pas de nouvelle difficulté, et nous n'incluons pas ici de détails supplémentaires. Disons juste qu'il est possible d'ôter le poids harmonique en multipliant par $L(1,\operatorname{sym}^2\pi)$, qui est approximable pour presque toute forme π par un polynôme de Dirichlet de longueur moindre que $N(\mathfrak{q})^\varepsilon$. Se référer à la version longue du présent article [23] pour la preuve complète.

La méthode suivie ici est celle des moments amollis, initiée par Selberg, et l'amollisseur choisi a été introduit par Iwaniec et Sarnak [13], généralisé par [18] : par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut en effet écrire (tous les nombres sont réels) :

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h}\mathbb{1}_{\Lambda(1/2,\pi)\neq 0}\geqslant\frac{\left(\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h}\Lambda(1/2,\pi)\right)^2}{\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h}\Lambda(1/2,\pi)^2}.$$

Malheureusement, l'expression de droite tend vers 0 quand $N(\mathfrak{q})$ tend vers l'infini (elle est d'ordre $\log(N(\mathfrak{q}))^{-1}$), ce qui a suggéré d'écrire :

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h}\mathbb{1}_{\Lambda(1/2,\pi)\neq 0}\geqslant\frac{\left(\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h}\Lambda(1/2,\pi)\mathrm{M}(\pi)\right)^2}{\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h}\Lambda(1/2,\pi)^2\mathrm{M}(\pi)^2}.$$

Si la suite de nombres $\Big(\mathrm{M}(\pi)\Big)_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}$ est bien choisie, on peut espérer stabiliser le quotient, et obtenir une densité positive : on nomme alors cette suite un “amollisseur”. Iwaniec et Sarnak [13], puis Kowalski et al. [18] ont trouvé, sur $\mathbf{Q}$, une famille d'amollisseurs optimaux pour ce problème, parmi ceux de la forme :

$$\mathrm{M}(\pi)=\sum_{N(\mathfrak{m})\leqslant M}\lambda_\pi(\mathfrak{m})P_{\mathfrak{m}}$$

avec $M=N(\mathfrak{q})^{\Delta/2}$, pour Δ dans $]0,1[$. Plus précisément, pour P un polynôme tel que $P(0)=P'(0)=0$, $\Delta\in]0,1[$ tel que $M=N(\mathfrak{q})^{\Delta/2}\notin\mathbf{N}$, on prend :

$$P_{\mathfrak{m}}=\frac{\mu(\mathfrak{m})P\left(\frac{\log(M/N(\mathfrak{m}))}{\log(M)}\right)}{\psi(\mathfrak{m})N(\mathfrak{m})^{1/2}},$$

et on peut énoncer

Proposition 1.4. — *Avec les notations ci-dessus, quand $N(\mathfrak{q}) \to \infty$, parmi les idéaux premiers de $\mathcal{O}_F$, $\boldsymbol{k} \geqslant \mathbf{2}$ pair, on a :*

$$
\begin{aligned}
(1.6) \qquad M_1(\mathfrak{q}) &:= \sum_{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} \Lambda(1/2, \pi)\mathrm{M}(\pi) \\
&= C_{\boldsymbol{k}} \times \frac{2N(\mathfrak{q})^{1/4}}{\Delta \log(N(\mathfrak{q}))} \left(P'(1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(N(\mathfrak{q}))} \right) \right)
\end{aligned}
$$

(1.7)

$$
\begin{aligned}
M_2(\mathfrak{q}) &:= \sum_{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} \Lambda(1/2, \pi)^2 \mathrm{M}(\pi)^2 \\
&= C_{\boldsymbol{k}}^2 \times \frac{8N(\mathfrak{q})^{1/2}}{\log(N(\mathfrak{q}))^2} \left(\frac{\|P''\|_{L^2(0,1)}^2}{\Delta^3} + \frac{P'(1)^2}{\Delta^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(N(\mathfrak{q}))} \right) \right)
\end{aligned}
$$

avec $C_{\boldsymbol{k}} = \frac{\zeta_F(2)\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k}}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{\boldsymbol{k}}{2}} \operatorname{res}_{s=1}(\zeta_F)}$.

Ce résultat entraîne le théorème 1.3 de façon évidente (voir section 9, similairement pour la dérivée). Remarquons les constantes (impliquant la géométrie de F) intervenant dans l'asymptotique des deux moments amollis (à comparer avec [18], propositions 4.1 et 5.1). Il est assez étonnant que la proportion des formes, elle, n'en soit pas affectée, et qu'ainsi on puisse atteindre les mêmes bornes que sur $\mathbf{Q}$ – les meilleures connues inconditionnellement à ce jour.

Les deux expressions $M_1(\mathfrak{q})$ et $M_2(\mathfrak{q})$ sont les deux premiers moments amollis, et le terme principal des membres de droite proviennent de la “diagonale” de la formule de Petersson. Un effort important doit être fait pour montrer que le terme des sommes de Kloosterman a une contribution négligeable : c'est ici que le choix de l'amollisseur (*i.e.*, celui de [18]) s'avère crucial, puisqu'il permet d'éviter une contribution “hors-diagonale”, qui était présente lors d'un travail antérieur de Kowalski et Michel [16]. Outre les difficultés techniques déjà présentes sur $\mathbf{Q}$, il faut gérer les unités de F. De plus, nous ne supposons pas que $\mathcal{O}_F$ est principal, ce qui nécessite l'intervention de la théorie adélique. Enfin, même pour $\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$, il peut exister des formes non ramifiées, et par conséquent un terme supplémentaire à gérer : c'est un phénomène absent dans [18], mais une adaptation de la diagonalisation des formes anciennes selon [12] nous permet de le contrôler.

Un corollaire de l'étude du second moment est le résultat de grand crible suivant :

Théorème 1.5. — *Soit* $(x_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F}$ *une suite de nombres complexes,* $\mathfrak{q}$ *un idéal* quelconque *de* $\mathcal{O}_F$*. On pose :*

$$\|x_X\|_2 := \Big(\sum_{N(\mathfrak{n})\leqslant X} |x_{\mathfrak{n}}|^2\Big)^{1/2}$$

On a alors l'estimation :

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{k}}^{h} \Big|\sum_{N(\mathfrak{n})\leqslant X} \lambda_\pi(\mathfrak{n})x_{\mathfrak{n}}\Big|^2 \ll_F \left(1+\frac{X}{N(\mathfrak{q})}\right)\|x_X\|_2^2. \tag{1.8}$$

Cette estimation généralise l'inégalité de grand crible classique pour les formes modulaires sur $\mathbf{Q}$, ainsi que celle de [19], où il est supposé que F a un groupe de classes étroit trivial. La preuve est donnée en section 9.

Remerciements. Ce travail correspond pour l'essentiel à ma thèse, dirigée par Philippe Michel, qui fut un excellent directeur, patient, passionné et motivant. C'est lui qui m'a fait découvrir la théorie analytique des formes automorphes, et guidé dans le labyrinthe de Dédale. Si ce qui suit a de l'intérêt, c'est à lui qu'il le doit. Je remercie A. Venkatesh et E. Kowalski pour avoir rapporté ma thèse : ils m'ont donné de précieux conseils. E. Kowalski m'avait invité au séminaire de Bordeaux : je garde de son hospitalité un excellent souvenir. Il m'a aussi été d'une grande aide pour améliorer la qualité de la rédaction.

Organisation de ce travail. La section 2 fixe les notations utilisées de façon récurrente dans le texte. La section 3 définit les espaces des formes modulaires de Hilbert, la 4 rappelle les fondements de la théorie automorphe – et la définition automorphe des formes de Hilbert. Le cœur du travail commence en 5, où l'on prouve la formule de Petersson nécessaire, que l'on utilise lors de toutes les sections ultérieures pour étudier les divers moments harmoniques (sections 7, 8, 9 pour prouver (1.4) et section 10 pour la preuve de (1.5) dans le cas de la dérivée), l'inégalité de grand crible en 9. L'appendice final contient des résultats techniques concernant les formes anciennes : il s'agit de montrer que les termes issus de la formule de Petersson, paramétrés par les formes anciennes, n'ont pas de contribution asymptotique.

2. Notations et rappels

Dans toute la suite, on notera F une extension totalement réelle de $\mathbf{Q}$, de degré d, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_F$. On désignera par $\mathfrak{q}$ un idéal maximal, sauf dans la section 5, plus générale. On notera usuellement $\mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F. Les places de F seront notées v, F_v désignant le complété de F en v, et $\mathcal{O}_{F_v}$ ou $\mathcal{O}_v$ l'anneau local des entiers quand $v \not| \infty$. L'écriture F_∞ est ici pour $\mathbf{R}^d$, et $F_\infty^\times = (\mathbf{R}^\times)^d$ (respectivement : $F_\infty^{\times>0} = F_\infty^{\times+} = (\mathbf{R}_+^\times)^d$). $N_{F/\mathbf{Q}}$ désigne la norme, $\mathrm{Tr}_{F/\mathbf{Q}}$ la trace, et $N = |N_{F/\mathbf{Q}}|$ (prolongée aux idéaux fractionnaires).

La notation ϖ_v (ou éventuellement $\varpi_\mathfrak{p}$ si v est la valuation associée à l'idéal maximal $\mathfrak{p}$) désigne une uniformisante de l'anneau $\mathcal{O}_v$. Si $\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})}$ est un idéal fractionnaire, on notera $\mathrm{id}(\mathfrak{a})$ l'idèle fini $(\varpi_\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})})_\mathfrak{p}$ (s'il est besoin valant 1 aux places infinies). C'est cet idèle que l'on dit correspondre à $\mathfrak{a}$.

On note aussi $|X|$ le cardinal de l'ensemble fini X.

2.1. Géométrie de F

• On note $\mathfrak{D}_F$ la différente de F : cet idéal de $\mathcal{O}_F$ a pour norme $|\mathfrak{d}_F|$, où $\mathfrak{d}_F$ est le discriminant de F. La norme d'un idéal $\mathfrak{a}$ est égale à : $N(\mathfrak{a}) := [\mathcal{O}_F : \mathfrak{a}]$, définition que l'on peut prolonger par multiplicativité au groupe des idéaux fractionnaires de F, noté $\mathscr{I}(F)$.

Les d plongements de F dans $\mathbf{R}$ seront notés $\xi \mapsto \xi^{(j)}$ pour $j = 1, \ldots, d$. Si ξ vérifie : $\xi^{(j)} > 0$ pour tout j, on notera $\xi \gg 0$ (on dit alors que ξ est totalement positif), et pour tout sous-ensemble X de F, on pose :

$$X^+ = X^{\gg 0} := \Big\{x \in X ; x \gg 0\Big\}.$$

• L'ensemble $F^{\times \gg 0}$ est le sous-groupe de $\mathscr{I}(F)$ formé des idéaux principaux admettant un générateur totalement positif . Le groupe des classes étroit est le quotient :

$$\mathscr{C}\ell^+(F) := \mathscr{I}(F)/F^{\times \gg 0}.$$

Ce groupe admet la représentation adélique :

$$\mathscr{C}\ell^+(F) = \mathbb{A}_F^\times / F^\times F_\infty^{\times +} \widehat{\mathcal{O}}_F^\times$$

avec $\widehat{\mathcal{O}}_F = \prod_{v<\infty} \mathcal{O}_{F_v}$. C'est donc un groupe fini, de cardinal h_F^+, et on *choisit* une fois pour toutes un système de représentants $\big\{\mathfrak{a}\big\}$ dans $\mathscr{I}_F$: ce choix est inélégant, mais reste nécessaire dans la mesure où il permet de traduire le problème posé en terme d'analyse harmonique sur des espaces symétriques réels (problème de “l'adélisation”). De plus, la formule de Petersson pour un corps général (*i.e.*, dont le groupe des classes étroit n'est pas trivial) s'exprime avec des sommes de termes dépendant de ce choix, bien qu'invariante globalement. Techniquement, cela permet aussi de remplacer des sommes sur des idéaux par des sommes sur des entiers, et d'utiliser le lemme suivant (*cf.* [19] page 131), conséquence du théorème de Dirichlet sur les unités de F :

Lemme 2.1. — *Soit F un corps de nombres totalement réel. Il existe des constantes C_1, C_2 ne dépendant que de F telles que*

$$\forall \xi \in F, \exists \varepsilon \in \mathcal{O}_F^{\times +}, \forall j \in \{1, \ldots, d\} : \quad C_1|N(\xi)|^{1/d} \leqslant |(\varepsilon\xi)^{(j)}| \leqslant C_2|N(\xi)|^{1/d}. \tag{2.1}$$

• Étant donné $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux fractionnaires, on notera :

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \text{ et } \mathfrak{b} \text{ ont même image dans } \mathscr{I}_F \Leftrightarrow \exists \xi \in F^{\times > 0}; \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = \xi\mathcal{O}_F$$

et lorsque tel est le cas on notera $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}]$ le choix d'un ξ satisfaisant à la relation précédente.

• Nous noterons ζ_F la fonction de zêta de Dedekind du corps F. Cette série de Dirichlet permet de construire des fonctions arithmétiques, comme par exemple :

$*$ la généralisation de la fonction de Möbius, toujours notée μ, définie par la relation :

$$\mu(\mathfrak{n}) = \begin{cases} (-1)^r \text{ si } \mathfrak{n} \text{ est produit de } r \text{ idéaux premiers distincts} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On vérifie aisément l'identité pour $\Re(s) > 1$:

$$\zeta_F^{-1}(s) = \sum_{\mathfrak{n} \subset \mathcal{O}_F} \mu(\mathfrak{n}) N(\mathfrak{n})^{-s}$$

$*$ la fonction τ, définie par $\tau(\mathfrak{n}) := |\{\mathfrak{d} \subset \mathcal{O}_F | \mathfrak{n}\mathfrak{d}^{-1} \subset \mathcal{O}_F\}|$, donne le nombre de diviseurs, et vérifie toujours l'estimation, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\tau(\mathfrak{n}) \ll_\varepsilon N(\mathfrak{n})^\varepsilon.$$

Elle peut se voir comme les coefficients de la série ζ_F^2.

On utilisera aussi la fonction arithmétique ψ

$$\psi(\mathfrak{n}) := \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{n}} (1 + N(\mathfrak{p})^{-1}).$$

Dans le produit, $\mathfrak{p}$ désigne un idéal maximal. Son introduction dans l'amollisseur $\mathrm{M}(\pi)$ permet de calculer explicitement les termes principaux des premiers et deuxième moments. On se servira implicitement de l'estimation

$$|\{\mathfrak{n} \subset \mathcal{O}_F | N(\mathfrak{n}) = n\}| \ll_\varepsilon n^\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

pour la convergence de certaines sommes.

Enfin, nous noterons $\zeta_F^{(\mathfrak{q})}$ la fonction $\zeta_F \times (1 - N(\mathfrak{q})^{-s})$, c'est-à-dire la fonction ζ à laquelle on a ôté le facteur en $\mathfrak{q}$, idéal maximal de $\mathcal{O}_F$.

2.2. Sommes de Kloosterman

Par commodité, on rappelle ici la définition donnée par Venkatesh dans [26] (définition 2) des sommes de Kloosterman.

Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ deux idéaux fractionnaires de F, tels que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. On note $(\mathfrak{a}/\mathfrak{b})^\times$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ engendrant $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ en tant que $\mathcal{O}_F$-module. Pour un tel x, on note $\bar{x}$ l'unique élément $y \in (\mathfrak{a}^{-1}/\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-2})^\times$ tel que $xy \equiv 1 \bmod \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1}$. Cela étant posé, soient $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ deux idéaux fractionnaires, et $\mathfrak{c}$ un idéal tel que $\mathfrak{c}^2 \sim \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$. Soient aussi $\alpha_1 \in \mathfrak{a}_1^{-1}\mathfrak{D}_F^{-1}$, $\alpha_2 \in \mathfrak{a}_2^{-1}\mathfrak{D}_F^{-1}$ et $c \in \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$ étant un idéal fixé de $\mathcal{O}_F$. On pose

(2.2)
$$KS(\alpha_1, \mathfrak{a}_1; \alpha_2, \mathfrak{a}_2; c, \mathfrak{c}) = \sum_{x \in (\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}^{-1}/\mathfrak{a}_1 c)^\times} \exp\left(2i\pi \mathrm{Tr}_{F/\mathbf{Q}}\left(\frac{\alpha_1 x + \alpha_2 \bar{x}}{c}\right)\right)$$

Nous les renormaliserons en 6, et donnerons alors la borne de Weil qu'elles satisfont.

2.3. Rappels sur les groupes

De façon générale, si G est un groupe algébrique sur $\mathbf{Z}$, et R un anneau quelconque, $G(R)$ désigne le groupe des points de G à valeurs dans R. Si R est topologique, $G(R)$ peut être muni d'une topologie “forte”, issue de celle de R. En particulier, $G(F_\infty)$ désigne bien sûr $G(\mathbf{R})^d$ et $G^+(F_\infty)$ sa composante neutre. Nous travaillerons avec $G = \mathrm{GL}_2$, et aurons besoin de certains de ses sous-groupes : pour R un anneau (éventuellement topologique), on notera :

$$\begin{aligned}
Z(R) &:= \left\{\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}; z \in R^\times\right\} \\
N(R) &:= \left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; x \in R\right\} \\
A(R) &:= \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a \in R^\times\right\} \\
P(R) &:= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}; a, d \in R^\times, b \in R\right\}.
\end{aligned}$$

Les sous-groupes $\mathrm{SL}_2(R)$, $(\mathrm{S})\mathrm{O}_2(R)$ interviendront avec $R = F_\infty$. On pourra noter Z_∞ le centre de $\mathrm{GL}_2(F_\infty)$, et $Z_\infty^+ \cong F_\infty^{\times +}$ sa composante neutre. Dans le cas où F est un corps de nombres, certains groupes compacts sont utiles : pour $v|\infty$, on a déjà vu le sous-groupe compact maximal $K_v = \mathrm{SO}_2(F_v)$ de $\mathrm{GL}_2^+(F_v)$, et en faisant le produit sur toutes les places infinies on note $K_\infty = \mathrm{SO}_2(F_\infty)$ celui de $\mathrm{GL}_2^+(F_\infty)$. En v finie, le compact maximal de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ est $K_v = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$. D'autres sous-groupes compacts dans le cas non-archimédien sont importants : si $\mathfrak{q}_v \subset \mathcal{O}_{F_v}$ est un idéal, on notera

$$K_0(\mathfrak{q}_v) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v}), c_v \in \mathfrak{q}_v \right\}.$$

Ces sous-groupes locaux engendrent des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$. Soit $\mathfrak{q} \subset \mathcal{O}_F$ un idéal :

$$\begin{aligned} K_f &:= \prod_{v<\infty} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v}) \\ K_0(\mathfrak{q}) &:= \left\{ g \in K_f;\ \forall v \not| \infty, g_v \in K_0(\mathfrak{q}\mathcal{O}_{F_v}) \right\} \\ K &:= K_\infty K_f. \end{aligned}$$

L'importance de ces groupes réside notamment dans la décomposition d'Iwasawa :

Proposition 2.2. — *Soit F totalement réel, et v une place de F. L'application :*

$$\begin{array}{ccc} Z(F_v) \times N(F_v) \times A(F_v) \times K_v & \longrightarrow & \mathrm{GL}_2(F_v) \\ (z, n, a, k) & \longmapsto & znak \end{array}$$

• *est surjective, et sa restriction à $Z^+(F_v) \times N(F_v) \times A(F_v) \times K_v$ induit un homéomorphisme si $v|\infty$;*
• *est surjective si $v \not| \infty$. De plus, si $(p_0, k_0) \in P(F_v) \times K_v$ a pour image $g \in \mathrm{GL}_2(F_v)$, toutes les décompositions d'Iwasawa de g sont données par $\{(p_0 k^{-1}, k k_0), k \in P \cap K_v\}$.*

Pour $v|\infty, v \not| \infty, v = \infty$, on notera pour $g_v \in \mathrm{GL}_2(F_v)$ une décomposition d'Iwasawa :

$$g_v = z(g_v) n(g_v) a(g_v) k(g_v)$$

On notera aussi que pour $v|\infty$ ou $v = \infty$, on a aussi une décomposition d'Iwasawa pour $\mathrm{GL}_2^+(F_v)$:

$$Z_\infty^+ \times N(F_v) \times A^+(F_v) \times K_v.$$

On pourra utiliser l'isomorphisme exceptionnel $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ en notant $k \in \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$:

$$k = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

2.4. Mesures de Haar sur les corps locaux

Soit F un corps de nombres, que nous supposerons totalement réel pour raccourcir notre propos.

Dans ce cas, pour toute place archimédienne v, $F_v = \mathbf{R}$, et on munit $\mathbf{R}$ de la mesure de Lebesgue dx (qui est la mesure Haar normalisée dans ce cas). La mesure de Haar de $\mathbf{R}^\times$ est $d^\times x = \frac{dx}{|x|}$, et c'est aussi celle de $\mathbf{R}_+^\times$.

Pour v finie, on utilise les mesures normalisées de Tate (voir la thèse de Tate dans [5] pour plus de détails) : si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal correspondant à v, on note $n_\mathfrak{p}(\mathfrak{D}_F)$ la $\mathfrak{p}$-valuation de la différente globale (ou locale), et on choisit pour mesure de Haar normalisée celle qui vérifie $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_v) = N(\mathfrak{p})^{-n_\mathfrak{p}(\mathfrak{D}_F)/2}$, la notant dx. La mesure $\frac{dx}{|x|_v}$ est bien une mesure de Haar multiplicative, mais on note $d^\times x$ la mesure normalisée de telle sorte que $\mathrm{vol}^\times(\mathcal{O}_v^\times) = 1$.

On peut alors mettre sur les groupes adéliques $\mathbb{A}_F$ et $\mathbb{A}_F^\times$ les mesures limite inductive (bien définies car on a pris la peine d'assurer $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_v) = 1$ p.p.(v) et $\mathrm{vol}^\times(\mathcal{O}_v^\times) = 1$ p.p.(v)). Ces mesures sont caractérisées par leur valeur sur une base de la topologie : on pose $\mathrm{mes}(\prod_{v\in S} U_v \times \prod_{v\notin S} \mathcal{O}_v) = \prod_{v\in S} \mathrm{mes}_v(U_v)$ (avec S ensemble de places fini, U_v ouvert dans F_v) dans le cas de la mesure additive par exemple, et on fait pareillement pour la mesure multiplicative. On aura juste besoin en fait de savoir que $\mathrm{vol}(\mathbb{A}_F/F) = 1$ pour la mesure additive, soit encore $\mathrm{vol}(F_\infty/\mathcal{O}_F) = |\mathfrak{d}_F|^{1/2}$.

La décomposition d'Iwasawa permet également de normaliser la mesure de Haar de GL_2. En fait, remarquant que $Z(F_v) \cong F_v^\times$, $N(F_v) \cong F_v$, $A(F_v) \cong F_v^\times$, on peut montrer que

$$d\mu_{\mathrm{GL}_2(F_v)}(g) := d^\times z dx \frac{d^\times a}{|a|_v} d\mu_{K_v}$$

en notant

$$g = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k_v$$

avec $k_v \in K_v$. On normalise $d\mu_{K_v}$ pour en faire une mesure de probabilité. Voir la preuve dans [3], proposition 2.1.5.

La mesure de Haar de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ induit celle de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R})$ (on intègre sur $Z(\mathbf{R})^+, N(\mathbf{R}), A(\mathbf{R})^+)$; celle du quotient $Z(\mathbf{R})^+\backslash\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R})$ est paramétrée par $dx\frac{d^\times a}{|a|_v}d\mu_{K_v}$.

On déduit de ces mesures locales une mesure de Haar normalisée sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ déterminée par les valeurs mes $\left(\prod_{v\in S}U_v\times\prod_{v\notin S}\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_v)\right):=\prod_{v\in S}\mathrm{mes}_v(U_v)$. C'est dans un but global que l'on normalise les mesures locales.

2.5. Notations des fonctions

F étant de degré d, on aura à travailler avec des fonctions définies sur $\mathbf{R}^d$. On notera en caractères gras les vecteurs. Si $n\in\mathbf{N}$, $\boldsymbol{n}=(n,\dots,n)\in\mathbf{N}^d$.

Ainsi, si $\varphi=\otimes_j\varphi_j:\mathbf{C}^d\longrightarrow\mathbf{C}$, et $\boldsymbol{z}=(z_1,\dots,z_d)$, on note :

$$\varphi(\boldsymbol{z})=\prod_{j=1}^d\varphi_j(z_j).$$

De même, si $f:\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}$ est complexe, $f(\boldsymbol{z})$ désigne le nombre :

$$\prod_{j=1}^d f(z_j)$$

en particulier : $2^{\boldsymbol{z}}=2^{\sum_j z_j}$, $\Gamma(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})=\prod_j\Gamma(k_j-1)$, $2^{\boldsymbol{1}}=2^d\neq 2^1$. Cela permet d'étendre la norme à $\mathbf{C}^d$ par : $N(\boldsymbol{z}):=|\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{1}}|$.

Si, pour $\nu\in\mathbf{R}$, f_ν désigne une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$, alors pour $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\dots,\nu_d)\in\mathbf{R}^d$ et $\boldsymbol{z}\in\mathbf{C}^d$:

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{z})=\prod_{j=1}^d f_{\nu_j}(z_j).$$

Par exemple, pour $\boldsymbol{k}\in\mathbf{N}^d$, $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^d$, on pose

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{x}):=\prod_{j=1}^d J_{k_j-1}(x_j).$$

Par respect de ces conventions, nous noterons un élément du corps F $\boldsymbol{\xi}$ (et non ξ) quand il sera vu comme le vecteur $(\xi^{(j)})_{1\leqslant j\leqslant d}$.

Enfin, une notation utile pour comparer des fonctions : soit X,Y des ensembles, et $f,g:X\times Y\to\mathbf{R}$ deux fonctions. On notera :

$$f(x,y)\ll_y g(x,y)$$

s'il existe pour tout $y \in Y$ un réel positif $C(y)$ tel que pour tout x de X : $|f(x,y)| \leqslant C(y)|g(x,y)|$. Nous nous permettrons de ne pas indiquer l'ensemble de dépendance Y dans son intégralité, afin de ne pas alourdir trop les notations. Dans notre situation, toutes les inégalités dépendent a priori du corps de base F et du poids $\boldsymbol{k} \in \mathbf{N}^d$ – nous ne les mentionnerons donc pas toujours ; d'autre part, nous serons aussi amenés à choisir, et fixer des nombres (ε, δ) : les estimations dépendront de ces valeurs, et nous ne le mentionnerons pas toujours, car ils auront été fixés. par contre, l'uniformité en le niveau $\mathfrak{q}$ est cruciale, et c'est en ce paramètre que nos estimations seront fines.

3. Formes modulaires de Hilbert

Soit F un corps totalement réel, de degré d sur $\mathbf{Q}$. Soit $\mathfrak{H}^d$ le produit de d copies du demi-plan de Poincaré. On a l'action usuelle de $\mathrm{GL}_2^+(F) = \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(F); \det\gamma \gg 0\}$ sur $\mathfrak{H}^d$ (produit de d copies du demi-plan de Poincaré), et l'on définit :

$$\Gamma_0(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \Big\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(F);\ a,b \in \mathcal{O}_F,\ c \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}, \\ b \in \mathfrak{b},\ ad-bc \in \mathcal{O}_F^{\times +} \Big\}.$$

On a aussi :

$$\Gamma_0(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) := \mathrm{GL}_2^+(F) \cap \begin{pmatrix} \mathrm{id}(\mathfrak{b}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_0(\mathfrak{a}) \begin{pmatrix} \mathrm{id}(\mathfrak{b})^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notations. — Soit Δ le Laplacien de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbf{R})$, défini avec les coordonnées d'Iwasawa par :

$$\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + y\frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}.$$

Δ définit sur l'espace des fonctions lisses $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{GL}_2^+(F_\infty))$ d opérateurs $\{\Delta_j\}_{1\leqslant j\leqslant d}$ par :

$$\forall g_\infty, \Delta_j\varphi(g_\infty) = \Delta[h \mapsto \varphi(g_1,\ldots,\underbrace{h}_{\text{place j}},\ldots,g_d,)]|_{h=g_j}.$$

Soit $\boldsymbol{\Delta} = (\Delta_1,\ldots,\Delta_d)$, et pour $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}_+^d$, $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{GL}_2^+(F_\infty))$, on pose $\boldsymbol{\Delta}\varphi = \boldsymbol{\lambda}\varphi$ si, pour tout j dans $\{1,\ldots,d\}$:

$$\forall g_\infty \in \mathrm{GL}_2^+(F_\infty), \Delta_j\varphi(g_\infty) = \lambda_j\varphi(g_\infty).$$

Pour $k_\infty \in K_\infty$, $\mathrm{e}(\boldsymbol{k}k_\infty)$ désigne $\exp(i\boldsymbol{k\theta})$ si $k_\infty = \begin{pmatrix} \cos\boldsymbol{\theta} & \sin\boldsymbol{\theta} \\ -\sin\boldsymbol{\theta} & \cos\boldsymbol{\theta} \end{pmatrix}$ (avec les notations vectorielles de la section précédente).

L'espace *classique* des formes modulaires de Hilbert cuspidales de poids $\boldsymbol{k}$ pour $\Gamma_0(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ est, après l'identification usuelle $\mathfrak{H}^d \cong Z_\infty^+\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)/\mathrm{SO}_2(F_\infty)$:

(3.1)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{\boldsymbol{k}}(Z_\infty^+\Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty))\\
&:= \Big\{\varphi : \mathrm{GL}_2^+(F_\infty) \to \mathbf{C} \text{ bornée}\,; \varphi(\gamma z_\infty g k_\infty) = \mathrm{e}(\boldsymbol{k}k_\infty)\varphi(g)\\
&\forall(\gamma, z_\infty, g, k_\infty) \in \Gamma_0(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \times Z_\infty^+ \times \mathrm{GL}_2^+(F_\infty) \times \mathrm{SO}_2(F_\infty) \times K_0(\mathfrak{q});\\
&\boldsymbol{\Delta}\varphi = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{2}}\Big(\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{2}}\Big)\varphi \text{ et } \int_{N_\Gamma\backslash N(F_\infty)} \varphi(n(x)g)dx = 0\ \forall g \in \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)\Big\}.
\end{aligned}$$

On peut maintenant définir un premier espace de formes adéliques : c'est un espace auxiliaire, qui sera utile pour prouver la formule des traces de Petersson, car il permet une indexation pratique.

(3.2)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}} := \Big\{\varphi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \to \mathbf{C} \text{ bornée}\,; \varphi(\gamma z_\infty g k_\infty k_f) = \mathrm{e}(\boldsymbol{k}k_\infty)\varphi(g)\\
&\forall(\gamma, z_\infty, g, k_\infty, k_f) \in \mathrm{GL}_2(F) \times Z_\infty^+ \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \times \mathrm{SO}_2(F_\infty) \times K_0(\mathfrak{q});\\
&\boldsymbol{\Delta}\varphi = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{2}}\Big(\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{2}}\Big)\varphi \text{ et } \int_{F\backslash \mathbb{A}_F} \varphi(n(x)g)dx = 0\ \forall g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)\Big\}.
\end{aligned}$$

L'espace $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$ est muni du produit scalaire :

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}} := \int_{\mathrm{GL}_2(F)Z_\infty^+\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{q})} \varphi(g)\overline{\psi(g)}dg.$$

Le théorème d'approximation forte induit un homéomorphisme :

$$\mathrm{GL}_2(F)Z_\infty^+\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{q}) \cong \coprod_{\overline{\mathfrak{a}}\in\mathscr{C}\ell(F)} Z_\infty^+\Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty) \tag{3.3}$$

et entraîne l'isomorphisme suivant appelé "l'adélisation des formes modulaires" :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}} & \longrightarrow & \displaystyle\bigoplus_{\overline{\mathfrak{a}}\in\mathscr{C}\ell^+(F)} \mathcal{S}_{\boldsymbol{k}}(Z_\infty^+\Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty))\\
\varphi & \longmapsto & \Big\{\boldsymbol{g_\infty} \mapsto \varphi\Big(\boldsymbol{g_\infty}\begin{pmatrix} \mathrm{id}(\mathfrak{a}) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\Big)\Big\}_{\overline{\mathfrak{a}}\in\mathscr{C}\ell^+(F)}.
\end{array} \tag{3.4}$$

On a sur $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$ une action ρ non triviale de $\mathscr{C}\ell^+(F)$, quotient de l'action du centre :

$$\rho(\mathfrak{b})\varphi(g) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \mathrm{id}(\mathfrak{b}) & 0 \\ 0 & \mathrm{id}(\mathfrak{b}) \end{pmatrix} g\right)$$

et par conséquent on a la décomposition :

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{\mathscr{C}\ell^+(F)}} \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}[\chi] \tag{3.5}$$

$\widehat{\mathscr{C}\ell^+(F)}$ désignant le dual du groupe fini commutatif $\mathscr{C}\ell^+(F)$.

Définition 3.1. — L'espace des formes modulaires de Hilbert adéliques
L'espace des formes modulaires de Hilbert de poids $\boldsymbol{k} \in \mathbf{N}^d$, de niveau $\mathfrak{q}$ est défini par :

(3.6)

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}} = \Big\{\varphi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \to \mathbf{C} \textit{ bornée} \,; \varphi(\gamma z g k_\infty k_f) = \varphi(g)\mathrm{e}(\boldsymbol{k}k_\infty)$$
$$\forall(\gamma, z, g, k_\infty, k_f) \in \mathrm{GL}_2(F) \times Z(\mathbb{A}_F) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \times \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})^d \times K_0(\mathfrak{q});$$
$$\boldsymbol{\Delta}\varphi = \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}\right)\varphi \textit{ et } \int_{F\backslash\mathbb{A}_F} \varphi(n(x)g)dx = 0 \ \forall g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)\Big\}.$$

Cet espace est nul si $\boldsymbol{k} \notin 2\mathbb{Z}_{\geqslant 1}^d$. On a une injection évidente $\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}} \hookrightarrow \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$ (et même $\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}} = \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}[1]$).

L'espace $\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$ admet une structure hermitienne, avec le produit scalaire :

$$\langle\varphi, \psi\rangle_{\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}} = \int_{\mathrm{GL}_2(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{q})} \varphi(g)\overline{\psi(g)}dg$$

et on peut remarquer dès à présent que pour toute forme φ :

$$||\varphi||^2_{\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}} = [K_f : K_0(\mathfrak{q})] \int_{\mathrm{GL}_2(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)} |\varphi(g)|^2 dg$$

avec $[K_f : K_0(\mathfrak{q})] = N(\mathfrak{q}) + 1$ si $\mathfrak{q}$ premier.

4. Representations automorphes de GL_2

4.1. Formes automorphes pour GL_2

Soit $\mathbb{A}_F$ l'anneau des adèles de F, ω un caractère multliplicatif de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$. On se place dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$, et on utilisera les notations de la section 2.3. Outre les excellentes références usuelles [9], [3] sur les formes automorphes, les notes de Godement [10], moins populaires, m'ont été d'une grande utilité, pour tout ce qui regarde les fonctions L, ainsi que le livre récent de Bushnell et Henniart [4].

On ne redéfinira pas l'espace des formes automorphes du groupe GL_2 noté $\mathcal{A}(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F))$ (*cf.* [3], chapitre 3) : ce sont des fonctions à croissance modérée, finies (pour l'action par translation de K_f et du centre de l'algèbre enveloppante $Z(\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(2)_{\mathbf{C}})))$. Le sous-espace des formes paraboliques, défini par

$$\mathcal{A}_0(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)) = \Big\{\varphi \in \mathcal{A}(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F));\\ \int_{F\backslash\mathbb{A}_F} \varphi(n(x)g)dx = 0\Big\}$$

est constitué de fonctions à décroissance rapide ; on appelle représentation automorphe (resp. parabolique) irréductible un sous-espace irréductible de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}_0$). Il se trouve que $\mathcal{A}_0(\omega)$, sous-espace de $\mathcal{A}_0$ sur lequel $Z(\mathbb{A}_F)$ agit selon ω, est somme directe (algébrique) de représentations irréductibles.

Soit (π, V_π) une représentation automorphe irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$. Elle se factorise sous la forme d'un produit tensoriel restreint :

$$\pi \cong \bigotimes_v{}' \pi_v \tag{4.1}$$

π_v étant une représentation admissible de $\mathrm{GL}_2(F_v)$ si v finie (respectivement un $(\mathfrak{gl}_2(\mathbf{R}), \mathrm{O}_2(\mathbf{R}))$-module si v infinie), sa restriction à $Z(\mathbb{A}_F)$ induit un caractère de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$, noté ω_π, dit caractère central de π, dont chaque composante locale $(\omega_\pi)_v$ est le caractère central ω_{π_v} de π_v. La représentation automorphe (π, V_π) admet un modèle de Whittaker (*cf.* [3], chapitre 3.3), pour tout choix d'un caractère additif global $\psi = \otimes\psi_v$, qui se factorise aussi :

$$\mathcal{W}(\pi, \psi) \cong \bigotimes_v \mathcal{W}(\pi_v, \psi_v)$$

avec la compatibilité importante : si $\varphi = \otimes\varphi_v$ dans (4.1), alors l'élément de Whittaker correspondant $W\varphi$ vérifie : $W\varphi(g) = \prod_v W\varphi_v(g_v)$. De plus, on a par unicité du modèle de Whittaker la relation :

$$W\varphi(g) = \int_{F\backslash\mathbb{A}_F} \varphi(n(x)g)\overline{\psi(x)}dx.$$

Dans ces factorisations, presque toute π_v est non ramifiée, *i.e.,* admet un vecteur fixe par $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$, et on sait alors que ce vecteur est unique (à homothéties près). Si π_v est ramifiée, l'admissibilité de π_v assure quand même l'existence d'un entier $n(\pi_v)$ minimal tel que :

$$\left\{x \in V_v | \forall k \in K_0(\varpi_v^{n(\pi_v)})\ \ \pi_v(k)x = \omega_{\pi_v}(k)x\right\} \neq \{0\}$$

et un résultat célèbre de Casselman dit que cet espace est unidimensionnel (pour v finie). Ici on a posé :

$$\forall k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_0(\varpi_v^{n(\pi_v)}),\ \ \omega_{\pi_v}(k) := \omega_{\pi_v}(d).$$

Si v correspond à l'idéal maximal $\mathfrak{p}$ on note $n(\pi_v) = n(\pi_p)$ et l'idéal $\mathrm{q}_\pi = \prod \mathfrak{p}^{n(\pi_\mathfrak{p})}$ est nommé conducteur de π. L'idéal local $\varpi_v^{n(\pi_v)}\mathcal{O}_v$ est appelé conducteur de π_v ou conducteur en v de π.

Le point important est que les vecteurs du théorème de Casselman, dits vecteurs spéciaux, ont pour transformée de Mellin les facteurs locaux $L(s,\pi_v)$ de la fonction L de π (voir [20]) – *cf.* section 5.

Proposition 4.1. — *Pour toute place v finie, on note W_v^0 l'unique élément spécial du modèle de Whittaker local tel que $W_v^0(1) = 1$. Si ψ_v est non ramifié, W_v^0 vérifie alors pour $\Re(s) > 0$:*

$$L(s,\pi_v) = \int_{F_v^\times} W_v^0\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)|a|_v^{s-1/2} d^\times a \tag{4.2}$$

(l'intégrale est absolument convergente).

Modulo des adaptations techniques, on peut montrer une telle égalité dans le cas archimédien aussi (même référence). D'ailleurs, la fonction notée W_∞^0 au début de la section 5 est précisément, dans le cas des séries discrètes de $\mathrm{GL}_2(F_\infty)$, cet élément spécial.

Supposons, ce qui sera notre cas dans la suite, que l'on parte d'une représentation globale parabolique π dont le caractère central est trivial, et dont le conducteur est sans facteur carré : on peut alors donner la forme des fonctions L locales. Le résultat suivant résume la situation (*cf.* [10] pour les preuves) :

Proposition 4.2. — *Soit $v \leftrightarrow \mathfrak{p}$ une place finie de F, ψ_v un caractère additif non-ramifié :*

- *si π_v est non-ramifiée, alors π_v est une série principale et on peut écrire*

$$L(s,\pi_v) = (1 - \alpha_{\pi,1}(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}(1 - \alpha_{\pi,2}(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1},$$

le facteur epsilon est égal à un.

• *Si* π_v *est ramifiée de conducteur* $\varpi_v\mathcal{O}_v$, *alors* π_v *est une représentation spéciale et on peut écrire :*

$$L(s,\pi_v) = (1-\alpha_\pi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

Le facteur epsilon est donné par :

$$\varepsilon(s,\pi,\psi_v) = \varepsilon_{\pi_v}N(\mathfrak{p})^{\frac{1}{2}-s}$$

avec $\varepsilon_{\pi_v} = -N(\mathfrak{p})^{1/2}\alpha_\pi(\mathfrak{p}) \in \{1,-1\}$.

• *Dans tous les cas,* π_v *est auto-duale (vrai sans hypothèse de ramification).*

Remarque 4.3. — Si k est un entier positif, et $\pi_{\mathbf{R}}$ une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$, isomorphe à une série discrète $\mathcal{D}(k)$ de caractère central trivial, alors :

$$L(s,\pi_{\mathbf{R}}) = (2\pi)^{-\left(s+\frac{k}{2}\right)}\Gamma\left(s+\frac{k}{2}\right).$$

L'équation fonctionnelle est dans ce cas :

$$L(s,\pi_{\mathbf{R}}) = i^{k+1}L(1-s,\pi_{\mathbf{R}}).$$

Ces résultats donnent une description complète des fonctions L d'une certaine classe de représentations automorphes : celle des formes modulaires de Hilbert de conducteur sans facteurs carrés (voir ci-dessous la justification de la confusion entre formes et représentations, qui sera exploitée en 6 dans un cas simple).

Définition 4.4. — *Soit* $\boldsymbol{k} \in 2\mathbf{N}^d$. *Une forme modulaire de Hilbert de poids* $\boldsymbol{k}$ *est une représentation automorphe parabolique* π *de caractère central trivial telle que* $\pi_\infty \cong \mathcal{D}(\boldsymbol{k}-\mathbf{1}) = \bigotimes_{1\leqslant j\leqslant d}\mathcal{D}(k_j-1)$.

Notation. — On note $\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$ l'ensemble des formes (représentations) modulaires de Hilbert de poids $\boldsymbol{k}$ (référant au paramètre à l'infini), de conducteur $\mathfrak{q}$.

Une première chose à préciser est le lien entre formes (fonctions) automorphes, et les représentations, pour justifier la “confusion” entre les deux. En effet $\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$ se décompose à l'aide des $\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$: pour π dans cette famille, écrivons

$$(\pi,V_\pi)^{K_\infty K_0(\mathfrak{q})} = \Big\{\varphi \in (\pi,V_\pi) | \varphi(gk_\infty k_f) = \varphi(g)\mathrm{e}(\boldsymbol{k}k_\infty), \\ \forall (g,k_\infty,k_f) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)\times K_\infty \times K_0(\mathfrak{q})\Big\}.$$

Cet ensemble est unidimensionnel si $\mathrm{q}_\pi = \mathfrak{q}$, engendré par un vecteur spécial global $\varphi_\pi = \otimes_v \varphi_v^0$, produit des vecteurs spéciaux locaux. Si $\mathrm{q}_\pi \neq \mathfrak{q}$, on sait calculer sa dimension (grâce à Casselman). Ceci donne donc :

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}} = \bigoplus_{\mathfrak{r}|\mathfrak{q}} \bigoplus_{\pi \in \Pi_{\mathfrak{r}}^{\boldsymbol{k}}} (\pi, V_\pi)^{K_\infty \times K_0(\mathfrak{q})}. \tag{4.3}$$

On appelle espace des *formes nouvelles* l'espace $\bigoplus_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}} \mathbf{C}\varphi_\pi$, et l'espaces des *formes anciennes* est $\bigoplus_{\substack{\mathfrak{r}|\mathfrak{q}\\ \mathfrak{r}\neq\mathfrak{q}}} \bigoplus_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{r}}^{\boldsymbol{k}}} (\pi, V_\pi)^{K_\infty\times K_0(\mathfrak{q})}$.

Revenant aux fonctions L, posons $L(s,\pi_\infty) = (2\pi)^{-(\boldsymbol{s}+\frac{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}{2})}\Gamma\left(s+\frac{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}{2}\right)$. On pose donc :

$$L(s,\pi) = \prod_v L(s,\pi_v) = L(s,\pi_\infty)L(s,\pi_f) \tag{4.4}$$

produit eulérien convergent pour $\Re(s) > 1$, et la partie finie est une série de Dirichlet, une fois le produit développé, convergente pour $\Re(s) > 1$ de la forme :

$$L(s,\pi_f) = \sum_{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F} \lambda_\pi(\mathfrak{n}) N(\mathfrak{n})^{-s}$$

indexée par les idéaux *non nuls* de $\mathcal{O}_F$. Cette fonction admet un prolongement analytique. L'équation fonctionnelle de $L(s,\pi)$ est le produit des équations locales, soit dans le cas où le conducteur global $\mathrm{q}_\pi = \mathfrak{q}$ est premier :

$$N(\mathrm{q}_\pi)^{\frac{s}{2}} L(s,\pi) = \varepsilon_\pi |\mathfrak{d}_F|^{\frac{1-2s}{2}} N(\mathrm{q}_\pi)^{\frac{1-s}{2}} L(1-s,\pi) \tag{4.5}$$

avec $\varepsilon_\pi = -i^{\boldsymbol{k}}\lambda_\pi(\mathfrak{q})N(\mathfrak{q})^{1/2} \in \{1,-1\}$ (il n'y a de série discrète de paramètre $k-1$ que si k est un entier pair). Le facteur en $|\mathfrak{d}_F|$ est présent, car le caractère global choisi est $\psi_F = \psi_{\mathbf{Q}} \circ \mathrm{Tr}_{F/\mathbf{Q}}$, ramifié en les places divisant la différente : les facteurs epsilon sont alors modifiés.

Vu l'équation fonctionnelle, on pose $\Lambda(s,\pi) = N(\mathrm{q}_\pi)^{s/2}L(s,\pi)$. Nous aurons besoin des valeurs $\Lambda(1/2,\pi)$ et $\Lambda(1/2,\pi)^2$, qui sont en dehors de la zone de convergence de (4.4).

Proposition 4.5. — *Soit π une forme modulaire de poids $\boldsymbol{k}$, conducteur $\mathfrak{q}$ (quelconque). On a :*

$$\Lambda(1/2,\pi) = (1+\varepsilon_\pi)N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F} \frac{\lambda_\pi(\mathfrak{n})}{\sqrt{N(\mathfrak{n})}} F(N(\mathfrak{n})/N(\mathfrak{q})^{1/2}) \tag{4.6}$$

avec :

$$F(y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(3/2)} y^{-s} L\left(s+\frac{1}{2},\pi_\infty\right)\frac{ds}{s} \tag{4.7}$$

et :

$$\Lambda(1/2,\pi)^2 = 2N(\mathfrak{q})^{1/2} \sum_{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F} \frac{\lambda_\pi(\mathfrak{n})}{\sqrt{N(\mathfrak{n})}}\tau(\mathfrak{n})G(N(\mathfrak{n})/N(\mathfrak{q})) \tag{4.8}$$

avec :

$$G(y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(3/2)} y^{-s}\zeta_F^{(\mathfrak{q})}(1+2s)L\left(s+\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2 \frac{ds}{s}. \tag{4.9}$$

Pour ce faire, on pose pour $\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$:

$$I(\pi) = \int_{(3/2)} \Lambda(s+1/2,\pi)\frac{ds}{s}.$$

L'equation fonctionnelle (1.1) assure que :

$$(1+\varepsilon_\pi)I(\pi) = \Lambda(1/2,\pi)$$

puis, en développant $I(\pi)$ en série, on trouve bien :

$$\Lambda(1/2,\pi) = (1+\varepsilon_\pi)N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F} \frac{\lambda_\pi(\mathfrak{n})}{\sqrt{N(\mathfrak{n})}}F(N(\mathfrak{n})/N(\mathfrak{q})^{1/2}). \tag{4.10}$$

L'autre égalité se montre de la même manière. Ces sommes sont absolument convergentes.

4.2. Représentations et fonctions de Bessel

Dans cette section, π désigne une représentation unitaire irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$, que nous supposerons de caractère central trivial pour simplifier. Soit ψ un caractère additif de $\mathbf{R}$.

Les séries de Poincaré que nous définirons dans la section 5 sont produites à partir d'éléments particuliers du modèle de Whittaker $\mathcal{W}(\pi,\psi)$, et lors du calcul du produit scalaire apparaissent des intégrales d' “entrelacement”. Dans la proposition suivante, $J_{\pi,\psi}$ désigne la fonction de Bessel associée (*cf.* [6], [22]), et $\omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 4.6. — *Soit π une représentation unitaire irréductible de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{R})$. Pour $b \in \mathbf{R}^\times$, on pose :*

$$\mathscr{E} : \begin{array}{ccc} \mathcal{W}(\pi,\psi) & \longrightarrow & \mathcal{W}(\pi,\psi) \\ W & \longmapsto & \left[g \mapsto \int_{N(\mathbf{R})}\psi(-n)W\left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\omega n g\right)dn\right]. \end{array}$$

L'intégrale définissant $\mathscr{E}$ *est convergente, et on a :*

$$\forall g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{R}),\ \mathscr{E}(W)(g) = \frac{1}{|m|} J_{\pi,\psi}(b) W(g) \tag{4.11}$$

si $\psi = \exp(2im\pi.)$.

C'est ce résultat, écrit sous une autre forme, qui est au cœur de la proposition 9.4 de [1], et par conséquent de la formule de Kuznetsov. Dans notre situation, en section 5, on pourrait conclure plus élémentairement (pour $F = \mathbf{Q}$, la formule de Petersson se passe de celui-ci), mais il est important de remarquer qu'il est central dans toutes les formes "difficiles" des formules de traces de Petersson/Kuznetsov.

Nous serons dans le cas où $\pi \cong \mathcal{D}(k-1)$, auquel cas [6] donne, pour $\psi(x) = \exp(2i\pi m x)$:

$$\forall x > 0,\ J_{\pi,\psi}(x) = (-1)^{k/2} 2\pi |m| \sqrt{x} J_{k-1}(4\pi |m| \sqrt{x}) \tag{4.12}$$

J_ν étant la fonction de Bessel classique, dont la forme la plus utilisée par la suite sera (*cf.* [19]) :

$$J_\nu(x) = \int_{(\sigma)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+s}{2}+1\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^s ds,\ \text{si } 0 < \sigma < \Re(\nu). \tag{4.13}$$

5. La formule de Petersson

Soient $\boldsymbol{k} \in 2\mathbf{Z}^d_{\geqslant 1}$ un vecteur pair, $\mathfrak{q}$ un idéal *quelconque* de $\mathcal{O}_F$. Soit $\Pi^k_{\mathfrak{q}}$ la famille des formes modulaires de Hilbert de conducteur $\mathfrak{q}$, de caractère central trivial.

Pour $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$, on note $g = g_\infty g_f$ la factorisation en places infinies et finies, et on écrira parfois $g_\infty = (g_1, \ldots, g_d)$ les composantes infinies (bien sûr, si v est une place, g_v dénote la composante en v de g).

Toute cette section est adaptée du travail de Venkatesh ([26], section 6), qui a étendu la formule de Kuznetsov dans ce contexte adélique. Le lecteur est invité à se référer à cet article, dont nous suivons les notations.

5.1. Analyse harmonique réelle

Sur les espaces $\mathcal{S}_{\boldsymbol{k}}(Z^+_\infty \Gamma_0(\mathfrak{q}, \mathfrak{a}) \backslash \mathrm{GL}^+_2(F_\infty))$, on dispose de l'analyse de Fourier classique. Plus précisément, soit ψ_∞ le quasi-caractère additif de

$\mathbf{C}^d$ défini par :

$$\forall \boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^d,\ \psi_\infty(\boldsymbol{z}) = \exp(2i\pi\boldsymbol{z}) = \exp\Big(2i\pi \sum_{j=1}^{d} z_j\Big).$$

Comme un élément g de $\mathrm{GL}_2^+(F_\infty)$ admet une unique représentation

$$g = z(g)n(g)a(g)k(g) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k_\infty \tag{5.1}$$

avec $\boldsymbol{z} \in F_\infty^{\times>0}$, $\boldsymbol{x} \in F_\infty$, $\boldsymbol{y} \in F_\infty^{\times>0}$, $k_\infty \in K_\infty$ (décomposition d'Iwasawa), on peut définir :

$$\begin{aligned} W_\infty^0(g) &= \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{k}/\mathbf{2}} \psi_\infty(\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}))\mathrm{e}(\boldsymbol{k}k_\infty) \\ &= \prod_{j=1}^{d} y_j^{k_j/2} \exp(2i\pi \sum_{j=1}^{d} k_j(x_j+iy_j)) \exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\theta}). \end{aligned} \tag{5.2}$$

La notation est cohérente (avec (4.2)), car cet élément est précisément le vecteur nouveau du modèle de Whittaker des séries discrètes $\bigotimes_j \mathcal{D}(k_j-1)$ de $\mathrm{GL}_2(F_\infty)$ (restreint à $\mathrm{GL}_2^+(F_\infty)$).

La théorie de Fourier classique permet d'écrire, pour $g \in \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)$, $\varphi_{\mathfrak{a}} \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{k}}(Z_\infty^+\Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty))$, sous forme de série normalement convergente :

$$\varphi_{\mathfrak{a}}(g) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{D}_F^{-1} \\ \alpha \gg 0}} c(\alpha,\varphi_{\mathfrak{a}}) W_\infty^0\Big(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big). \tag{5.3}$$

5.2. Séries de Poincaré

On va définir sur $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$ des fonctions, généralisant les séries de Poincaré classiques (sur les espaces de formes modulaires), comme l'a fait Venkatesh dans le contexte des formes de Maass.

Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux fractionnaires. On se donne aussi α (resp. α') un élément non nul de $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{D}_F^{-1}$ (resp. $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)^{-1}\mathfrak{D}_F^{-1}$). On notera $\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a}) = N(F_\infty) \cap \Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a})$, $Z_\Gamma = Z_\infty^+ \cap \Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a})$. Pour $g_\infty \in \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)$, on pose, avec les coordonnées d'Iwasawa :

$$W_\infty^\alpha(g_\infty) := \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{k}/2} \psi_\infty(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}))\mathrm{e}(\boldsymbol{k}k_\infty). \tag{5.4}$$

Ce qui revient au même :

$$W_\infty^\alpha(g_\infty) = \boldsymbol{j}(g_\infty)^{-\boldsymbol{k}} \psi_\infty(\boldsymbol{\alpha} g_\infty.\boldsymbol{i}). \tag{5.5}$$

Sur l'espace $\mathcal{S}_{\boldsymbol{k}}(Z_\infty^+\Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty))$, on peut définir la série convergente :

$$P_{\mathfrak{a}}^\alpha(g_\infty) = \sum_{\gamma\in Z_\Gamma\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash\Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a})} W_\infty^\alpha(\gamma g_\infty).$$

La convergence absolue de cette série pour $\boldsymbol{k} > 2$ est bien connue (*cf.* [8]), ainsi que ses propriétés de modularité, grâce à la dernière écriture de W_∞^α.

Définition 5.1. — *Avec ces notations, on définit pour tout couple* $(\alpha,\mathfrak{a})$ *une série de Poincaré encore notée* $P_{\mathfrak{a}}^\alpha \in \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$ *par :*

$$\begin{cases} \left(P_{\mathfrak{a}}^\alpha\right)_{\overline{\mathfrak{b}}} = 0 \ \textit{si}\ \overline{\mathfrak{b}} \neq \overline{\mathfrak{a}} \\ \left(P_{\mathfrak{a}}^\alpha\right)_{\overline{\mathfrak{b}}} = P_{\mathfrak{a}}^\alpha \ \textit{si}\ \overline{\mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{a}} \end{cases}$$

les composantes étant celles de l'isomorphisme (3.4).

On obtient traditionnellement la formule de Petersson en calculant de deux façons différentes le produit scalaire de deux séries de Poincaré. Il sera crucial plus tard de disposer d'une formule du type "$\sum_\pi \lambda_\pi(\mathfrak{n})\lambda_\pi(\mathfrak{m})$" avec $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ quelconques (et pas forcément dans la même classe) : pour cela, il faut permuter les composantes connexes de $\mathrm{GL}_2(F)Z_\infty^+\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{q})$, et donc user de l'action naturelle à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ sur $L_0^2(Z(\mathbb{A}_F)\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F))$, notée ρ. On pose :

$$\rho(\mathfrak{b})P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'}(g) := P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'}\left(g\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{b}) & 0\\ 0 & \mathrm{id}(\mathfrak{b})\end{pmatrix}\right),\ \forall g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F).$$

Puisqu'on peut écrire, par le principe de l'approximation forte :

$$\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{b}) & 0\\ 0 & \mathrm{id}(\mathfrak{b})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{a}) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_\infty = \gamma^{-1}\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} g'_\infty k_f$$

avec $\gamma\in\mathrm{GL}_2(F)$, $k_f\in K_0(\mathfrak{q})$ et $g_\infty, g'_\infty\in\mathrm{GL}_2^+(F_\infty)$, il vient d'une part : $\gamma\in\Gamma(\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2) := \mathrm{GL}_2^+(F)\cap\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}K_0(\mathfrak{q})\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{id}(\mathfrak{b})^{-1}\end{pmatrix}$, d'autre part, en notant $\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}$ la composante infinie d'un tel γ :

$$\rho(\mathfrak{b})P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'}\left(g_\infty\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{a}) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'}\left(\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2} g_\infty\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\rho(\mathfrak{b})P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'}\left(g_\infty\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{a}') & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = 0 \text{ si } \overline{\mathfrak{a}}'\neq\overline{\mathfrak{a}}.$$

On peut donc réécrire :

$$\rho(\mathfrak{b})P^{\alpha'}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}\Big(g_\infty\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{a}) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Big) = \sum_{\gamma\in Z_\Gamma\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)\backslash\Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)} W^{\alpha'}_\infty(\gamma\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}g_\infty)$$
$$= \sum_{\gamma\in Z_\Gamma\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)\backslash\Gamma(\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)} W^{\alpha'}_\infty(\gamma g_\infty).$$

En suivant [26], on peut énoncer :

Lemme 5.2. — *On a les propriétés suivantes :*
• *On a explicitement :*

$$\Gamma(\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2) = \Big\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_2^+(F) \mid a\in\mathfrak{b}, b\in\mathfrak{a}\mathfrak{b}, c\in\mathfrak{q}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1},$$
$$d\in\mathfrak{b}^{-1}, ad-bc\in\mathcal{O}_F^{\times+}\Big\}$$

• *De plus l'application* $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma(\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)\to(c,a,ad-bc)$ *induit une bijection de* $\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)\backslash\Gamma(\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)/\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a})$ *sur l'ensemble* $\Big\{(c,x,\varepsilon)\mid c\in\mathfrak{q}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}, \varepsilon\in\mathcal{O}_F^{\times+}, x\in\mathfrak{b}, x$ *engendre* $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2(c)\Big\}$.

• *Enfin, si on note* $B^+(F)=\Big\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2^+(F)\Big\}$ *alors* $\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)\backslash\Gamma(\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)\cap B^+(F)$ *est non vide si et seulement si* $\mathfrak{b}$ *est principal, et admet le système de représentants* $\Big\{\begin{pmatrix}[\mathfrak{b}]\varepsilon & 0\\ 0 & [\mathfrak{b}]^{-1}\end{pmatrix}, \varepsilon\in\mathcal{O}_F^{\times+}\Big\}$, $[\mathfrak{b}]$ *étant un générateur fixé de* $\mathfrak{b}$.

Nous renvoyons à [26] pour la preuve.

5.3. La formule de Petersson pour $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$

Nous allons maintenant évaluer le produit scalaire $\Big\langle P^{\alpha}_{\mathfrak{a}}, P^{\alpha'}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}\Big\rangle_{\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}$, ceci avec les mêmes notations que précédemment. Comme pour la formule de Kuznetsov, on fait ce calcul de deux façons : l'une, directe, utilise la paramétrisation du dernier lemme, avec la propriété d' “entrelacement” du lemme 4.6 (dont l'intervention est moralement justifiée par la définition des séries de Poincaré, via des éléments spéciaux des modèles de Whittaker aux places infinies) ; l'autre vient de la décomposition spectrale de l'espace $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$, qui ici est techniquement facile à gérer, car cet espace est de dimension finie.

• **Calcul direct du produit scalaire.**

On doit donc calculer :

$$\begin{aligned}
&\left\langle P_{\mathfrak{a}}^{\alpha}, \rho(\mathfrak{b}) P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'} \right\rangle_{\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}} \\
&= \int_{Z_\infty^+ \mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{q})} \overline{P_{\mathfrak{a}}^{\alpha}(g)} P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'}\left(g \begin{pmatrix} \mathrm{id}(\mathfrak{b}) & 0 \\ 0 & \mathrm{id}(\mathfrak{b}) \end{pmatrix}\right) dg \\
&= \sum_{\overline{\mathfrak{a}} \in \mathscr{C}\ell^+(F)} \int_{Z_\infty^+ \Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \left(\overline{P_{\mathfrak{a}}^{\alpha}}\right)_{\mathfrak{a}}(g) \left(\rho(\mathfrak{b}) P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'}\right)_{\mathfrak{a}}(g) dg \\
&= \int_{Z_\infty^+ \Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \overline{P_{\mathfrak{a}}^{\alpha}\left(g \begin{pmatrix} \mathrm{id}(\mathfrak{a}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)} \\
&\qquad\qquad P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'}\left(\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2} g \begin{pmatrix} \mathrm{id}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) dg \\
&= \int_{Z_\infty^+ \Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \left(\sum_{\gamma \in Z_\Gamma \Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a})} \overline{W_\infty^{\alpha}(\gamma g)} \right) \left(P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'}\right)_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2} (\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2} g) dg \\
&= \int_{Z_\infty^+ \Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \overline{W_\infty^{\alpha}(g)} \left(\sum_{\gamma \in Z_\Gamma \Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)\backslash \Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)} W_\infty^{\alpha'}(\gamma\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2} g) \right) dg \\
&= \int_{Z_\infty^+ \Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \overline{W_\infty^{\alpha}(g)} \left(\sum_{\gamma \in Z_\Gamma \Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)\backslash \Gamma(\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)} W_\infty^{\alpha'}(\gamma g) \right) dg.
\end{aligned}$$

On peut donc écrire : $\left\langle P_{\mathfrak{a}}^{\alpha}, P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'} \right\rangle = I_1 + I_2$, avec :

(5.6)
$$I_1 = \int_{Z_\infty^+ \Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \overline{W_\infty^{\alpha}(g)} \left(\sum_{\gamma \in Z_\Gamma \Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)\backslash (\Gamma(\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)\cap B^+(F))} W_\infty^{\alpha'}(\gamma g) \right) dg$$

(5.7)
$$I_2 = \int_{Z_\infty^+ \Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \overline{W_\infty^{\alpha}(g)} \left(\sum_{\substack{\gamma \in Z_\Gamma \Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)\backslash \Gamma(\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2) \\ \gamma \notin B^+(F)}} W_\infty^{\alpha'}(\gamma g) \right) dg.$$

Calculons d'abord I_1 : par le lemme 5.2, on peut écrire, en se rappelant que l'ensemble d'indices n'est pas vide que si $\mathfrak{b}$ est principal :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{\varepsilon \in \mathcal{O}_F^{\times +}} \int_{Z_\infty^+ \Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \overline{W_\infty^{\alpha}(g)} W_\infty^{\alpha'}\left(\begin{pmatrix} \varepsilon[\mathfrak{b}] & 0 \\ 0 & [\mathfrak{b}]^{-1} \end{pmatrix} g \right) dg \\
&= \sum_{\varepsilon \in \mathcal{O}_F^{\times +}} \int_{F_\infty^{\times +}} \frac{d^\times \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}} \overline{W_\infty^{\alpha}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)} W_\infty^{\alpha'}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon y [\mathfrak{b}]^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \times \\
&\qquad\qquad \int_{\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash N(F_\infty)} \overline{W_\infty^{\alpha}(n(\boldsymbol{x}))} W_\infty^{\alpha'}(n(\boldsymbol{\varepsilon}[\mathfrak{b}]^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x})) dx
\end{aligned}$$

cette dernière ligne étant obtenue avec les coordonnées d'Iwasawa. L'intégrale interne vaut :

$$\int_{\mathfrak{a}\backslash F_\infty} \overline{W_\infty^\alpha\left(\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)} W_\infty^{\alpha'}\left(\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x\varepsilon}[\mathfrak{b}]^{\mathbf{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) dx = \mathrm{vol}(\mathfrak{a}\backslash F_\infty)\mathbb{1}_{\alpha=\varepsilon[\mathfrak{b}]^2\alpha'}.$$

En l'insérant dans le calcul, et en utilisant la valeur explicite de W_∞^α, il vient :

(5.8)

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{vol}(\mathfrak{a}\backslash F_\infty) \sum_{\varepsilon\in\mathcal{O}_F^{\times+}} ([\mathfrak{b}]\varepsilon)^{\boldsymbol{k}/2} \mathbb{1}_{\alpha=\varepsilon[\mathfrak{b}]^2\alpha'} \int_{F_\infty^{\times+}} \frac{d\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} e^{-2\pi\boldsymbol{\alpha y}-2\pi\boldsymbol{\alpha'\varepsilon}[\mathfrak{b}]^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y}} \\ &= \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}} \mathrm{vol}(\mathfrak{a}\backslash F_\infty) \frac{N(\mathfrak{b})}{(\boldsymbol{\alpha\alpha'})^{\frac{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}{2}}} \mathbb{1}_{\alpha\alpha'^{-1}[\mathfrak{b}]^{-2}\in\mathcal{O}_F^{\times+}}. \end{aligned}$$

Précisons que $\mathrm{vol}(\mathfrak{a}\backslash F_\infty)$ désigne le volume de $\mathfrak{a}\backslash F_\infty$ pour la mesure de Lebesgue de $F_\infty = \mathbf{R}^d$, $\mathfrak{a}$, plongé diagonalement, étant un réseau.

Maintenant, I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{Z_\infty^+\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \sum_{\gamma\in Z_\Gamma\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{ab}^2)\backslash\left(\Gamma(\mathfrak{a}\to\mathfrak{ab}^2)\backslash B^+(F)\right)} \overline{W_\infty^\alpha(g)} W_\infty^{\alpha'}(\gamma g) dg \\ &= \int_{Z_\infty^+\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \sum_{\gamma\in Z_\Gamma\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{ab}^2)\backslash\left(\Gamma(\mathfrak{a}\to\mathfrak{ab}^2)\backslash B^+(F)\right)/\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a})} \overline{W_\infty^\alpha(g)} W_\infty^{\alpha'}(\gamma g) dg \\ &= \sum_{\gamma\in Z_\Gamma\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{ab}^2)\backslash\left(\Gamma(\mathfrak{a}\to\mathfrak{ab}^2)\backslash B^+(F)\right)/\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a})} \int_{Z_\infty^+\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \overline{W_\infty^\alpha(g)} W_\infty^{\alpha'}(\gamma g) dg \end{aligned}$$

après interversion de somme et intégrale, justifiée a posteriori par les calculs à venir.

Prenons un système de représentants γ, et écrivons leur décomposition de Bruhat :

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & (ad-bc)c^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

légitime, car $c \neq 0$, par hypothèse sur l'ensemble d'indices. En notant $n_1(\gamma)$, $n_2(\gamma)$ les composantes unipotentes, ω pour l'élément de Weyl, et a_γ pour la composante centrale, on a donc :

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_\gamma \int_{Z_\infty^+\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \overline{W_\infty^\alpha(g)} W_\infty^{\alpha'}\Big(n_1(\gamma)\omega a(\gamma) n_2(\gamma) g\Big) dg \\ &= \sum_\gamma W_\infty^\alpha(n_2(\gamma)) W_\infty^{\alpha'}(n_1(\gamma)) \int_{Z_\infty^+\backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \overline{W_\infty^\alpha(g)} W_\infty^{\alpha'}\Big(\omega a(\gamma) g\Big) dg \end{aligned}$$

avec $W_\infty^\alpha(n_2(\gamma)) = \psi_\infty(\frac{\boldsymbol{\alpha d}}{\boldsymbol{c}})$, et $W_\infty^{\alpha'}(n_1(\gamma)) = \psi_\infty(\frac{\boldsymbol{\alpha' a}}{\boldsymbol{c}})$. On utilise alors la description explicite d'un ensemble de représentants donnée par le lemme 5.2 et cela donne :

$$I_2 = \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}} \sum_{\varepsilon \in \mathcal{O}_F^{\times +}/\mathcal{O}_F^{\times 2}} KS(\varepsilon\alpha, \mathfrak{a}; \alpha', \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2; c, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) \times \int_{Z_\infty^+ \backslash \mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \overline{W_\infty^\alpha(g)} W_\infty^{\alpha'}\left(\omega \begin{pmatrix} \boldsymbol{c^2\varepsilon^{-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) dg$$

où l'on a noté la somme de Kloosterman comme Venkatesh (voir section 2.2) :

$$KS(\varepsilon\alpha, \mathfrak{a}; \alpha', \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2; c, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \sum_{x \in (\mathfrak{b}^{-1}/\mathfrak{a}(c))^\times} \exp\left(2i\pi \mathrm{Tr}_{F/\mathbf{Q}}\left(\frac{\varepsilon\alpha x + \alpha' \bar{x}}{c}\right)\right). \tag{5.9}$$

Remarquer qu'il faut échanger les rôles de d et a pour appliquer le lemme 5.2 de paramétrisation : comme a parcourt $(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2(c))^\times$, d décrit $(\mathfrak{b}^{-1}/\mathfrak{a}(c))^\times$. Le facteur $\frac{1}{2}$ apparaît car l'ensemble d'indices ici n'est pas exactement l'ensemble des doubles classes étudié au lemme 5.2 : il y a un quotient supplémentaire par Z_Γ, et une invariance par multiplication par -1. On a donc :

$$\begin{aligned} I_2 =& \frac{1}{2} \sum_{\substack{c \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\} \\ \varepsilon \in \mathcal{O}_F^{\times +}/\mathcal{O}_F^{\times 2}}} KS(\varepsilon\alpha, \mathfrak{a}; \alpha', \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2; c, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) \int_{F_\infty^{\times +}} \frac{d^\times \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}} \overline{W_\infty^\alpha\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)} \times \\ & \int_{F_\infty} \psi(-\boldsymbol{\alpha x}) W_\infty^{\alpha'}\left(\omega \begin{pmatrix} \boldsymbol{c^2\varepsilon^{-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) dx \\ =& \frac{1}{2} \sum_{\substack{c \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\} \\ \varepsilon \in \mathcal{O}_F^{\times +}/\mathcal{O}_F^{\times 2}}} KS(\varepsilon\alpha, \mathfrak{a}; \alpha', \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2; c, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) \int_{F_\infty^{\times +}} \frac{d^\times \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}} \overline{W_\infty^\alpha\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)} \times \\ & \frac{N(\alpha')}{N(\alpha)} \int_{F_\infty} \psi_\infty(\boldsymbol{\alpha' x}) W_\infty^{\alpha'}\left(\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\varepsilon\alpha}}{\boldsymbol{\alpha' c^2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \omega \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\alpha y}}{\boldsymbol{\alpha'}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) dx. \end{aligned}$$

L'intégrale interne est calculable grâce au lemme 4.6, et précisément, on a :

$$\begin{aligned} &\int_{F_\infty} \psi_\infty(-\boldsymbol{\alpha' x}) W_\infty^{\alpha'}\left(\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\varepsilon\alpha}}{\boldsymbol{\alpha' c^2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \omega \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\alpha y}}{\boldsymbol{\alpha'}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) dx \\ &\qquad = N(\alpha')^{-1} J_{\mathcal{D}(\boldsymbol{k-1}), \psi_\infty(\boldsymbol{\alpha'}\cdot)}\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon\alpha}}{\boldsymbol{\alpha' c^2}}\right) W_\infty^{\alpha'}\left(\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\alpha y}}{\boldsymbol{\alpha'}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned} \tag{5.10}$$

avec :

$$J_{\mathcal{D}(\boldsymbol{k-1}), \psi_\infty(\boldsymbol{\alpha'}\cdot)}(\boldsymbol{z}) = (2\pi)^d (-1)^{\boldsymbol{k}/2} N(\alpha') |\boldsymbol{z}|^{1/2} J_{\boldsymbol{k-1}}(4\pi|\boldsymbol{\alpha'}|\sqrt{\boldsymbol{z}}). \tag{5.11}$$

En conséquence, en se rappelant que α, α' sont totalement positifs :

$$\begin{aligned}
I_2 =&\frac{1}{2} \sum_{\substack{c\in\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}\\ \varepsilon\in\mathcal{O}_F^{\times+}/\mathcal{O}_F^{\times 2}}} \frac{KS(\varepsilon\alpha,\mathfrak{a};\alpha',\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2;c,\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{N(c)} \times \frac{\sqrt{N(\alpha\alpha')}}{N(\alpha')}(-1)^{\boldsymbol{k}/2}(2\pi)^d \\
&\times J_{\boldsymbol{k-1}}\left(4\pi\frac{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon\alpha\alpha'}}}{|\boldsymbol{c}|}\right)\int_{F_\infty^{\times+}}\frac{d^\times \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}} \overline{W_\infty^\alpha\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{y} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)} W_\infty^{\alpha'}\left(\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\alpha y}}{\alpha'} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\\
=&\frac{1}{2} \sum_{\substack{c\in\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}\\ \varepsilon\in\mathcal{O}_F^{\times+}/\mathcal{O}_F^{\times 2}}} \frac{KS(\varepsilon\alpha,\mathfrak{a};\alpha',\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2;c,\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{N(c)}\\
&\times \frac{\sqrt{N(\alpha\alpha')}}{N(\alpha')}(-1)^{\boldsymbol{k}/2}(2\pi)^d \times J_{\boldsymbol{k-1}}\left(4\pi\frac{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon\alpha\alpha'}}}{|\boldsymbol{c}|}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha'}}\right)^{\boldsymbol{k}/2}\int_{F_\infty^{\times+}}\frac{d^\times \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}}\\
&\qquad\left|W_\infty^\alpha\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{y} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\right|^2\\
=&\frac{1}{2} \sum_{\substack{c\in\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}\\ \varepsilon\in\mathcal{O}_F^{\times+}/\mathcal{O}_F^{\times 2}}} \frac{KS(\varepsilon\alpha,\mathfrak{a};\alpha',\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2;c,\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{N(c)} \times \frac{\sqrt{N(\alpha\alpha')}}{N(\alpha')}(-1)^{\boldsymbol{k}/2}(2\pi)^d\\
&\qquad \times J_{\boldsymbol{k-1}}\left(4\pi\frac{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon\alpha\alpha'}}}{|\boldsymbol{c}|}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha'}}\right)^{\boldsymbol{k}/2} \times \frac{\Gamma(\boldsymbol{k-1})}{(4\pi\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{k}-1}}
\end{aligned}$$

soit, après simplification :

$$\begin{aligned}
I_2 =&\frac{\Gamma(\boldsymbol{k-1})(-1)^{\boldsymbol{k}/2}(2\pi)^d}{2(4\pi\sqrt{\boldsymbol{\alpha\alpha'}})^{\boldsymbol{k-1}}}\\
&\times \sum_{\substack{c\in\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}\\ \varepsilon\in\mathcal{O}_F^{\times+}/\mathcal{O}_F^{\times 2}}} \frac{KS(\varepsilon\alpha,\mathfrak{a};\alpha',\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2;c,\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{N(c)} J_{\boldsymbol{k-1}}\left(4\pi\frac{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon\alpha\alpha'}}}{|\boldsymbol{c}|}\right).
\end{aligned}\tag{5.12}$$

• **Calcul spectral.**

Soit $\{\phi\}$ une base orthonormée quelconque (finie) de $\mathcal{S}_\mathfrak{q}^{\boldsymbol{k}}$. On supposera cette base *adaptée* à la décomposition (3.5), c'est-à-dire réunion de bases orthonormées de chacune des composantes isotypiques de (3.5). On peut écrire :

$$\left\langle P_\mathfrak{a}^\alpha, \rho(\mathfrak{b})P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'}\right\rangle_{\mathcal{S}_\mathfrak{q}^{\boldsymbol{k}}} = \sum_\phi \left\langle P_\mathfrak{a}^\alpha, \phi\right\rangle_{\mathcal{S}_\mathfrak{q}^{\boldsymbol{k}}} \overline{\left\langle \rho(\mathfrak{b})P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'}, \phi\right\rangle}_{\mathcal{S}_\mathfrak{q}^{\boldsymbol{k}}}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\left\langle P_{\mathfrak{a}}^{\alpha},\phi\right\rangle_{\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}} &= \int_{Z_\infty^+\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{q})} \overline{P_{\mathfrak{a}}^{\alpha}(g)}\phi(g)dg \\ &= \int_{Z_\infty^+\Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash\mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \overline{P_{\mathfrak{a}}^{\alpha}(g)}\phi\left(g\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{a}) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)dg \\ &= \int_{Z_\infty^+\Gamma_N(\mathfrak{q},\mathfrak{a})\backslash\mathrm{GL}_2^+(F_\infty)} \overline{W_\infty^{\alpha}(g)}\phi\left(g\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{a}) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)dg.\end{aligned}$$

Rappelons maintenant que

$$\phi\left(g\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{a}) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \phi_{\mathfrak{a}}(g) = \sum_{\substack{\xi\in\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{D}_F^{-1}\\ \xi\gg 0}} c(\xi,\mathfrak{a},\phi)W_\infty^0\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right).$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned}\left\langle P_{\mathfrak{a}}^{\alpha},\phi\right\rangle_{\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}} &= \int_{F_\infty^{\times +}} \frac{d^\times\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}}\overline{W_\infty^{\alpha}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{y} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)} \\ &\quad\times\int_{\mathfrak{a}\backslash F_\infty}\psi_\infty(-\boldsymbol{\alpha x})\phi_{\mathfrak{a}}\left(\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{x}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) \\ &= \int_{F_\infty^{\times +}} \frac{d^\times\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}}\overline{W_\infty^{\alpha}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{y} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)} \\ &\quad\times\frac{c(\alpha,\mathfrak{a},\phi)}{\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{k}/2}}\,\mathrm{vol}(\mathfrak{a}\backslash F_\infty)\frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}}}W_\infty^0\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha y} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

soit finalement :

$$\left\langle P_{\mathfrak{a}}^{\alpha},\phi\right\rangle_{\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}} = \frac{c(\alpha,\mathfrak{a},\phi)}{\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{k}/2-\boldsymbol{1}}}\times\mathrm{vol}(\mathfrak{a}\backslash F_\infty)\times\frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}}}. \tag{5.13}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned}&\left\langle \rho(\mathfrak{b})P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'},\phi\right\rangle_{\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}} \\ &= \int_{Z_\infty^+\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{q})} \overline{P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'}\left(g\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{b}) & 0\\ 0 & \mathrm{id}(\mathfrak{b})\end{pmatrix}\right)}\phi(g)dg \\ &= \omega_\phi(\mathfrak{b}^{-1})\int_{Z_\infty^+\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{q})} \overline{P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{\alpha'}(g)}\phi(g)dg\end{aligned}$$

car on a choisi la base $\{\phi\}$ de telle sorte que l'action du centre soit un twist par un Grössencharakter. Donc :

$$\begin{aligned}&\left\langle \rho(\mathfrak{b}) P^{\alpha'}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}, \phi \right\rangle_{\mathcal{S}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}} \\ &= \omega_\phi(\mathfrak{b}^{-1}) \int_{Z^+_\infty \Gamma_0(\mathfrak{q},\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)\backslash \mathrm{GL}^+_2(F_\infty)} \overline{P^{\alpha'}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}(g)} \phi\left(g\begin{pmatrix} \mathrm{id}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) dg \\ &= \omega_\phi(\mathfrak{b}^{-1}) \times \frac{c(\alpha', \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2, \phi)}{\boldsymbol{\alpha'}^{\boldsymbol{k}/2-\mathbf{1}}} \times \mathrm{vol}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2\backslash F_\infty) \times \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}}\end{aligned}$$

ceci par les mêmes calculs que précédemment.

• **Bilan.**

Avec les normalisations des mesures de Haar choisies ($\mathrm{vol}(\mathbb{A}_F/F) = 1$), on a

$$\mathrm{vol}(\mathcal{O}_F\backslash F_\infty) = |\mathfrak{d}_F|^{1/2}$$

et par conséquent, pour deux idéaux fractionnaires $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$:

$$\mathrm{vol}(\mathfrak{a}\backslash F_\infty) = N(\mathfrak{a})|\mathfrak{d}_F|^{1/2}, \mathrm{vol}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2\backslash F_\infty) = N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)|\mathfrak{d}_F|^{1/2}.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{S}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}$ et $g \in \mathrm{GL}^+_2(F_\infty)$, on écrit comme précédemment :

$$\varphi\left(g\begin{pmatrix} \mathrm{id}(\mathfrak{a}) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{D}_F^{-1}\\ \alpha\gg 0}} c(\alpha,\mathfrak{a},\varphi) W^0_\infty\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right)$$

et posons pour alléger :

$$\lambda(\alpha,\mathfrak{a},\varphi) = c(\alpha,\mathfrak{a},\varphi)N(\alpha\mathfrak{a}\mathfrak{D}_F)^{1/2}. \tag{5.14}$$

Nous avons donc démontré :

Proposition 5.3 (Formule de Petersson pour $\mathcal{S}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}$). — *Soit $\boldsymbol{k} \in 2\mathbf{N}^d_{\geqslant 1}$ et $\{\phi\}$ une base orthonormée adaptée de $\mathcal{S}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}$. Soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ des idéaux fractionnaires de F et $\alpha \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{D}_F^{-1}$ (respectivement $\alpha' \in (\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)^{-1}\mathfrak{D}_F^{-1}$). On a alors la relation :*

(5.15)

$$\begin{aligned}&\sum_\phi \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}|\mathfrak{d}_F|^{1/2}} \omega_\phi(\mathfrak{b})\lambda(\alpha,\mathfrak{a},\phi)\overline{\lambda(\alpha',\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2,\phi)} = \mathbb{1}_{\alpha\mathfrak{a}=\alpha'\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2} \\ &+ \frac{(-1)^{\boldsymbol{k}/2}(2\pi)^d}{2|\mathfrak{d}_F|^{1/2}} \sum_{\substack{c\in\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{q}\backslash\{0\}\\ \varepsilon\in\mathcal{O}_F^{\times +}/\mathcal{O}_F^{\times 2}}} \frac{KS(\varepsilon\alpha,\mathfrak{a};\alpha',\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2;c,\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{N(c\mathfrak{a}\mathfrak{b})} J_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}\left(4\pi\frac{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon\alpha\alpha'}}}{|\boldsymbol{c}|}\right).\end{aligned}$$

Remarque 5.4. — Nous avons prouvé la formule de Petersson pour $\boldsymbol{k} > \mathbf{2}$, car ce n'est que dans ce cas que les séries de Poincaré convergent absolument. Cependant, la formule est aussi valable pour $\boldsymbol{k} \geqslant \mathbf{2}$, comme dans le cas des formes modulaires classiques. On peut le prouver en adaptant un argument de passage à la limite dû à Rankin [21], section 5.7, ou en partant de la formule de Kuznetsov prouvée par [2], en choisissant la fonction test de sorte à isoler les formes de poids $\boldsymbol{k}$.

5.4. La formule de Petersson pour $\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$

On va pouvoir maintenant énoncer le résultat principal de cette partie, à savoir la formule de Petersson pour l'espace $\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$. Pour cela, soit $\{\varphi\}$ une base *orthogonale* de $\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$. Notons d'abord que :

$$(5.16)\qquad \begin{aligned} ||\varphi||^2_{\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}} &= \int_{Z(\mathbb{A}_F)\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{q})} |\varphi(g)|^2 dg \\ &= \frac{1}{h_F^+} \int_{Z_\infty^+ \mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{q})} |\varphi(g)|^2 dg = \frac{1}{h_F^+} ||\varphi||^2_{\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}. \end{aligned}$$

Puis, $\{\varphi\}$ est une base orthogonale de $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}[1]$ dans la décomposition (3.5). Soient maintenant $\mathfrak{n}, \mathfrak{m}$ deux idéaux fractionnaires de F, et $\alpha \in \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{D}_F^{-1}$ (resp. $\beta \in \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{D}_F^{-1}$). On veut calculer :

$$\begin{aligned} &\sum_{\varphi} \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} |\mathfrak{d}_F|^{1/2} ||\varphi||^2_{\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}} \lambda(\alpha, \mathfrak{n}, \varphi)\overline{\lambda(\beta, \mathfrak{m}, \varphi)} \\ &\qquad = h_F^+ \sum_{\varphi} \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} |\mathfrak{d}_F|^{1/2} ||\varphi||^2_{\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}} \lambda(\alpha, \mathfrak{n}, \varphi)\overline{\lambda(\beta, \mathfrak{m}, \varphi)}. \end{aligned}$$

Or, en prenant $\{\phi\}$ une base orthonormée de $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$ comme précédemment, un calcul simple montre que :

$$(5.17)\qquad \begin{aligned} &\sum_{\varphi} \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} |\mathfrak{d}_F|^{1/2} ||\varphi||^2_{\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}} \lambda(\alpha, \mathfrak{n}, \varphi)\overline{\lambda(\beta, \mathfrak{m}, \varphi)} \\ &= \frac{1}{h_F^+} \sum_{\overline{\mathfrak{b}} \in \mathscr{C}\ell^+(F)} \sum_{\phi} \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} |\mathfrak{d}_F|^{1/2}} \lambda(\alpha, \mathfrak{n}, \phi)\overline{\lambda(\beta, \mathfrak{m}, \phi)} \omega_\phi(\mathfrak{b}) \\ &= \frac{1}{h_F^+} \sum_{\overline{\mathfrak{b}}^2 = \overline{\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}}} \sum_{\phi} \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} |\mathfrak{d}_F|^{1/2}} \lambda(\alpha, \mathfrak{n}, \phi)\overline{\lambda(\beta, \mathfrak{m}, \phi)} \omega_\phi(\mathfrak{b}). \end{aligned}$$

ce que l'on réécrit, en notant $[\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{b}^{-2}]$ un générateur totalement positif de cet idéal :

(5.18)

$$\sum_{\varphi}\frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}|\mathfrak{d}_F|^{1/2}||\varphi||^2_{\mathcal{S}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}}}\lambda(\alpha,\mathfrak{n},\varphi)\overline{\lambda(\beta,\mathfrak{m},\varphi)}$$
$$=\frac{1}{h_F^+}\sum_{\overline{\mathfrak{b}}^2=\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}}}\sum_{\phi}\frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}|\mathfrak{d}_F|^{1/2}}\lambda(\alpha,\mathfrak{n},\phi)\overline{\lambda(\beta[\mathfrak{m}\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{b}^{-2}],\mathfrak{n}\mathfrak{b}^{-2},\phi)}\omega_\phi(\mathfrak{b})$$

on applique maintenant la formule de Petersson pour $\mathcal{S}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}$, et il vient après réindexation (on remplace la somme sur $\mathfrak{b}$ par une somme sur $\mathfrak{c}=\mathfrak{n}\mathfrak{b}$), qui donne :

$$\sum_{\varphi}\frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}|\mathfrak{d}_F|^{1/2}||\varphi||^2_{\mathcal{S}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}}}\lambda(\alpha,\mathfrak{n},\varphi)\overline{\lambda(\beta,\mathfrak{m},\varphi)}=\mathbb{1}_{\alpha\mathfrak{n}=\beta\mathfrak{m}}+\frac{(-1)^{\boldsymbol{k}/2}(2\pi)^d}{2|\mathfrak{d}_F|^{1/2}h_F^+}$$
$$\sum_{\substack{\overline{\mathfrak{c}}^2=\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}\, c\in\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}\\ \varepsilon\in\mathcal{O}_F^{\times+}/\mathcal{O}_F^{\times 2}}}\frac{KS(\varepsilon\alpha,\mathfrak{n};\beta[\mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{c}^{-2}],\mathfrak{m};c,\mathfrak{c})}{N(c\mathfrak{c})}J_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}\left(4\pi\frac{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon\alpha\alpha'}[\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}{\mathfrak{c}^{-2}}]}}{|\boldsymbol{c}|}\right)$$

et, en prenant la norme de $\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}$, on a prouvé :

Théorème 5.5 (Formule de Petersson). — *Soit $\mathfrak{q}$ un idéal quelconque de $\mathcal{O}_F$, $\boldsymbol{k}\in 2\mathbf{N}^d_{\geqslant 1}$. Soit $\{\varphi\}$ une base orthogonale de $\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$ des idéaux fractionnaires, $\alpha\in\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{D}_F^{-1}$ (respectivement $\beta\in\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{D}_F^{-1}$). Soient $\{\lambda(\xi,\mathfrak{a},\varphi)\}$ les coefficients tels que pour tout $g\in\mathrm{GL}_2^+(F_\infty)$:*

$$\varphi\left(g\begin{pmatrix}\mathrm{id}(\mathfrak{a}) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\sum_{\substack{\xi\in\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{D}_F^{-1}\\ \xi\gg 0}}\frac{\lambda(\xi,\mathfrak{a},\varphi)}{N(\xi\mathfrak{a}\mathfrak{D}_F)^{1/2}}W^0_\infty\left(\begin{pmatrix}\xi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right).$$

On a alors la relation :

$$\sum_{\varphi}\frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}|\mathfrak{d}_F|^{1/2}||\varphi||^2_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}}}\lambda(\alpha,\mathfrak{n},\varphi)\overline{\lambda(\beta,\mathfrak{m},\varphi)}=\mathbb{1}_{\alpha\mathfrak{n}=\beta\mathfrak{m}}$$
$$+\frac{C}{|\mathfrak{d}_F|^{1/2}}\sum_{\substack{\overline{\mathfrak{c}}^2=\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}\\ c\in\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}\\ \varepsilon\in\mathcal{O}_F^{\times+}/\mathcal{O}_F^{\times 2}}}\frac{KS(\varepsilon\alpha,\mathfrak{n};\beta[\mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{c}^{-2}],\mathfrak{m};c,\mathfrak{c})}{N(c\mathfrak{c})}J_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}\left(4\pi\frac{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon\alpha\alpha'}[\mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{c}^{-2}]}}{|\boldsymbol{c}|}\right)$$

avec $C=\frac{(-1)^{\boldsymbol{k}/2}(2\pi)^d}{2}$ et $[\mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{c}^{-2}]$ un générateur totalement positif de $\mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{c}^{-2}$.

Remarque 5.6. — Dans la formule de Petersson, les sommes sur $\mathfrak{c}$ et ε sont des sommes finies, tenant compte du fait que le corps F n'a pas forcément un groupe des classes étroit trivial. Si cela est le cas, on retrouve alors le résultat de [19].

Remarque 5.7. — On a travaillé par simplicité avec des formes de caractère central trivial. Il est clair cependant que l'on peut adapter les calculs précédents à des formes dont le caractère central est arithmétique, *i.e.,* trivial sur les places infinies, comme l'a d'ailleurs fait [26]. La formule est la même, à ceci près qu'il faut remplacer les sommes de Kloosterman "KS" par "KS_χ", sommes de Kloosterman twistées.

6. Lien avec les fonctions L

Nous allons ici expliquer comment utiliser la formule de Petersson quand on manipule des fonctions L. Ce qui est dit ici est bien connu, mais il est plus prudent de l'expliciter, compte tenu des maintes normalisations de la littérature. Soit π une représentation parabolique de GL_2, sur F. On a vu, dans la section 2, que $\pi \cong \bigotimes \pi_v$, et que dans chaque modèle de Whittaker local $\mathcal{W}(\pi_v, \psi_v)$, on peut trouver un unique élément spécial W_v^0 tel que

$$L(s, \pi_v) = \int_{F_v^\times} W_v^0 \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) |a|^{s-1/2} d^\times a$$

à condition que ψ_v soit pris non ramifié. Or, travaillant avec l'analyse harmonique, on est conduit à choisir comme caractère additif global $\psi = \psi_{\mathbf{Q}} \circ \mathrm{Tr}_{F/\mathbf{Q}}$, qui est ramifié en les places divisant la différente. Cependant, avec ce choix, prenons W_v^0 l'unique élément spécial (*i.e.*, invariant par $K_0(\mathfrak{q}_v)$) tel que

$$W_v^0 \left(\begin{pmatrix} \varpi_v^{-d_v} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1$$

où d_v est déterminé comme suit : on écrit $\mathfrak{D}_F = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{d_{\mathfrak{p}}}$, et si v est la place finie correspondant à $\mathfrak{p}$, on pose $d_v = d_{\mathfrak{p}}$. Cet élément vérifie alors :

$$\int_{F_v^\times} W_v^0 \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) |a|_v^{s-1/2} d^\times a = |\varpi_v|^{d_v(1/2-s)} L(s, \pi_v)$$

et donc l'élément W_π de $\mathcal{W}(\pi, \psi)$, défini par $W_\pi = W_\infty^0 \otimes (\bigotimes W_v^0) = W_\infty^0 \otimes W_\pi^0$ satisfait à :

$$\int_{\mathbb{A}_F^\times} W_\pi \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) |a|^{s-1/2} d^\times a = |\mathfrak{d}_F|^{s-1/2} L(s, \pi)$$

et en notant $\mathbb{A}_f$ les adèles finis :

$$\int_{\mathbb{A}_f^\times} W_\pi^0\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)|a|^{s-1/2}d^\times a = |\mathfrak{d}_F|^{s-1/2}L(s,\pi_f)$$

en développant les intégrale de gauche place par place, et en développant en produit eulérien

$$L(s,\pi_f) = \sum_{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F}\lambda_\pi(\mathfrak{n})N(\mathfrak{n})^{-s}$$

on obtient la relation :

$$\lambda_\pi(\mathfrak{n}) = N(\mathfrak{n})^{1/2}W_\pi^0\left(\begin{pmatrix} \mathrm{id}(\mathfrak{n}\mathfrak{D}_F^{-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \tag{6.1}$$

et par conséquent, si φ_π est l'élément spécial global de l'espace de π correspondant à W_π, et $\alpha\in\mathfrak{n}^{-1}$:

$$\lambda_\pi(\alpha\mathfrak{n}) = \lambda(\alpha,\mathfrak{n}\mathfrak{D}_F^{-1},\varphi_\pi). \tag{6.2}$$

On a vu en 4 le décomposition de $\mathcal{H}_\mathfrak{q}^{\boldsymbol{k}}$ à l'aide des $\Pi_\mathfrak{q}^{\boldsymbol{k}}$. Dans le cas où $\mathfrak{q}$ est un idéal maximal (cas dans lequel on se placera dans les sections ultérieures), on a donc la décomposition plus simple :

$$\mathcal{H}_\mathfrak{q}^{\boldsymbol{k}} = \bigoplus_{\pi\in\Pi_\mathfrak{q}^{\boldsymbol{k}}}\mathbf{C}\varphi_\pi \oplus \bigoplus_{\pi\in\Pi_{\mathcal{O}_F}^{\boldsymbol{k}}}(\pi,V_\pi)^{K_\infty K_0(\mathfrak{q})}.$$

L'espace des formes anciennes peut être nul (si $F=\mathbf{Q}$, et $k\leqslant 10$ par exemple), mais si π est non ramifiée, alors l'espace $(\pi,V_\pi)^{K_\infty K_0(\mathfrak{q})}$ est de dimension deux.

Dans ce qui va suivre, la contribution des formes anciennes est négligeable, et on a préféré indiquer dans un appendice pourquoi (il s'agit de trouver une base orthogonale "adaptée" des formes anciennes, et d'évaluer leur contribution) : la raison principale vient du fait que si φ est non ramifiée, alors $||\varphi||^2_{\mathcal{H}_\mathfrak{q}^{\boldsymbol{k}}} = (N(\mathfrak{q})+1)||\varphi||^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{O}_F}^{\boldsymbol{k}}}$, et cela fait baisser d'un facteur $N(\mathfrak{q})$ cette contribution.

Venons-en maintenant à la formule de Petersson. D'abord, on normalise les sommes de Kloosterman :

Définition 6.1. — *Soient* $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$ *des idéaux fractionnaires de* F, $\mathfrak{c}$ *tel que* $\mathfrak{c}^2\sim\mathfrak{m}\mathfrak{n}$, *et* $\alpha\in\mathfrak{n}^{-1}$, $\beta\in\mathfrak{m}^{-1}$. *On pose :*

$$\mathcal{K}\ell(\alpha,\mathfrak{n};\beta,\mathfrak{m};c,\mathfrak{c}) = KS(\alpha,\mathfrak{n}\mathfrak{D}_F^{-1};\beta[\mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{c}^{-2}],\mathfrak{m}\mathfrak{D}_F^{-1};c,\mathfrak{c}). \tag{6.3}$$

On a alors la borne de Weil :

$$|\mathcal{K}\ell(\alpha,\mathfrak{n};\beta,\mathfrak{m};c,\mathfrak{c})| \ll_F N\big((\alpha)\mathfrak{n},(\beta)\mathfrak{m},(c)\mathfrak{c}\big)^{1/2}\tau\big((c)\mathfrak{c}\big)N(c\mathfrak{c})^{1/2}. \tag{6.4}$$

Dans la définition, on a noté $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ le p.g.c.d. des idéaux $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. La borne de Weil est énoncée dans [26], section 2.6.

On peut énoncer la forme “pratique” de la formule de Petersson :

Définition 6.2. — *Soit* $\{x_\pi\}_{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}$ *une suite de nombres complexes. Soit* ω_π *le poids*

$$\omega_\pi = \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} |\mathfrak{d}_F|^{1/2} ||\varphi_\pi||^2_{\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}}. \tag{6.5}$$

On note alors :

$$\sum_{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} x_\pi := \sum_{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}} \omega_\pi x_\pi. \tag{6.6}$$

Proposition 6.3. — *Soit* $\mathfrak{q}$ *un idéal quelconque de* $\mathcal{O}_F$, $\boldsymbol{k} \in 2\mathbf{N}^d_{\geqslant 1}$. *Soient* $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ *des idéaux fractionnaires,* $\alpha \in \mathfrak{n}^{-1}$ *(respectivement* $\beta \in \mathfrak{m}^{-1}$*).*

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} \lambda_\pi(\alpha\mathfrak{n})\lambda_\pi(\beta\mathfrak{m}) + \text{ (Formes Anciennes) } &= \mathbb{1}_{\alpha\mathfrak{n}=\beta\mathfrak{m}} \\ + \frac{C}{|\mathfrak{d}_F|^{1/2}} \sum_{\substack{\bar{\mathfrak{c}}^2 = \overline{\mathfrak{m}\mathfrak{n}} \\ c \in \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\backslash\{0\} \\ \varepsilon \in \mathcal{O}_F^{\times +}/\mathcal{O}_F^{\times 2}}} & \frac{\mathcal{K}\ell(\varepsilon\alpha, \mathfrak{n}; \beta, \mathfrak{m}; c, \mathfrak{c})}{N(c\mathfrak{c})} J_{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}\left(4\pi \frac{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon\alpha\beta}[\mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{c}^{-2}]}}{|\boldsymbol{c}|}\right) \end{aligned} \tag{6.7}$$

avec

$$\text{(Formes Anciennes)} = \sum_{\varphi} \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} |\mathfrak{d}_F|^{1/2} ||\varphi||^2_{\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}} \lambda(\alpha, \mathfrak{n}\mathfrak{D}_F^{-1}, \varphi) \overline{\lambda(\beta, \mathfrak{m}\mathfrak{D}_F^{-1}, \varphi)}$$

$\{\varphi\}$ *parcourant une base orthogonale des formes anciennes,* $[\mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{c}^{-2}]$ *dénotant un générateur totalement positif de* $\mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{c}^{-2}$, *et*

$$C = \frac{(-1)^{\boldsymbol{k}/2}(2\pi)^d}{2}. \tag{6.8}$$

Remarque 6.4. — Les coefficients $\lambda_\pi(\mathfrak{n})$ sont réels, dans le cas étudié : c'est pour cela que la conjugaison complexe n'apparaît pas dans la partie des formes nouvelles.

La formule de Petersson, ainsi qu'une étude des termes provenant des formes anciennes, permet de voir que :

$$\lim_{N(\mathfrak{q}) \to \infty} \sum_{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} 1 = 1.$$

Pour une suite $\{x_\varphi\}$, indexée par une base orthogonale de $\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$, on posera

$$\sum_{\varphi}^{h} x_\varphi := \sum_{\varphi} \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})}{(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}}|\mathfrak{d}_F|^{1/2}||\varphi||^2_{\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}} x_\varphi.$$

La formule de Petersson est valable pour un conducteur quelconque. Cependant, on ne saura évaluer le terme venant des formes anciennes que dans le cas d'un idéal premier : cette difficulté est prévisible car la décomposition (4.3) dépend de la complexité arithmétique du conducteur.

7. Le premier moment

Dans cette partie, nous allons prouver l'estimation (1.6), rappelons-la :

$$\begin{aligned} M_1(\mathfrak{q}) &:= \sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} \Lambda(1/2,\pi)\mathrm{M}(\pi) \\ &= C_{\boldsymbol{k}} \times \frac{2N(\mathfrak{q})^{1/4}}{\Delta\log(N(\mathfrak{q}))}\left(P'(1)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(N(\mathfrak{q}))}\right)\right) \end{aligned}$$

avec $C_{\boldsymbol{k}} = \frac{\zeta_F(2)\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k}}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{\boldsymbol{k}}{2}}\operatorname{res}_{s=1}(\zeta_F)}$. Rappelons d'abord que l'on prend pour amollisseur :

$$\mathrm{M}(\pi) = \sum_{N(\mathfrak{m})\leqslant M} \frac{\mu(\mathfrak{m})P\left(\frac{\log(M/N(\mathfrak{m}))}{\log(M)}\right)}{\psi(\mathfrak{m})N(\mathfrak{m})^{1/2}}\lambda_\pi(\mathfrak{m})$$

où P est un polynôme tel que $P(0)=P'(0)=0$, $M=N(\mathfrak{q})^{\Delta/2}$, $\Delta\in]0,1[$ tel que $M\notin\mathbf{N}$: notons ici même que 1 est un point d'accumulation l'ensemble des $\Delta\in]0,1[$ tels que $N(\mathfrak{q})^{\Delta/2}$ n'est entier pour *aucun* idéal maximal $\mathfrak{q}$.

La représentation π parcourt l'ensemble des formes modulaires de Hilbert de poids $\boldsymbol{k}$, de conducteur l'idéal premier $\mathfrak{q}$, et de caractère central trivial. Il s'agit donc d'obtenir une asymptotique quand $N(\mathfrak{q})$ tend vers l'infini, avec Δ fixe.

Nous supposons également dans cette partie et la suivante que M n'est pas un entier : cette hypothèse, non restrictive, permet d'utiliser une écriture intégrale de P. En effet, Kowalski, Michel et VanderKam [18] associent à

$$P(X) = \sum_k a_k X^k$$

la fraction rationnelle

$$\widehat{P_M}(X) = \sum_k a_k k!(X\log(M))^{-k}$$

de telle sorte que pour M non entier, et P s'annulant en 0 :

$$P\left(\frac{\log(M/N(\mathfrak{m}))}{\log(M)}\right)\mathbb{1}_{N(\mathfrak{m})<M}=\frac{1}{2i\pi}\int_{(1)}\frac{M^s}{N(\mathfrak{m})^s}\widehat{P_M}(s)\frac{ds}{s}. \tag{7.1}$$

Rappelons (voir (4.6)) que $\Lambda(1/2,\pi)$ est donné par :

$$\Lambda(1/2,\pi)=(1+\varepsilon_\pi)N(\mathfrak{q})^{1/4}\sum_{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F}\frac{\lambda_\pi(\mathfrak{n})}{\sqrt{N(\mathfrak{n})}}F(N(\mathfrak{n})/N(\mathfrak{q})^{1/2})$$

avec :

$$F(y)=\frac{1}{2i\pi}\int_{(3/2)}y^{-s}L\left(s+\frac{1}{2},\pi_\infty\right)\frac{ds}{s}.$$

Un changement de droite d'intégration dans l'écriture de F montre que :

$$\begin{array}{cccc} F(y) & \ll & 1 & \text{si } y\leqslant 1\\ F(y) & \ll_A & y^{-A} & \text{si } y>1. \end{array} \tag{7.2}$$

La valeur explicite du signe de l'équation fonctionnelle est donnée par :

$$\varepsilon_\pi=-i^{\boldsymbol{k}}N(\mathfrak{q})^{1/2}\lambda_\pi(\mathfrak{q}). \tag{7.3}$$

Afin de gagner en lisibilité, nous userons de la notation condensée suivante :

$$F_{\mathfrak{n}}:=\frac{F(N(\mathfrak{n})/N(\mathfrak{q})^{1/2})}{N(\mathfrak{n})^{1/2}} \tag{7.4}$$

$$P_{\mathfrak{m}}:=\frac{\mu(\mathfrak{m})P\left(\frac{\log(M/N(\mathfrak{m}))}{\log(M)}\right)}{\psi(\mathfrak{m})N(\mathfrak{m})^{1/2}}. \tag{7.5}$$

On considère donc

$$M_1(\mathfrak{q})=\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h}\Lambda(1/2,\pi)M(\pi).$$

En développant l'expression de M(π), on voit que $M_1(\mathfrak{q})$ est donnée par :

$$\begin{aligned}M_1(\mathfrak{q})&=N(\mathfrak{q})^{1/4}\sum_{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F}\sum_{N(\mathfrak{m})\leqslant M}F_{\mathfrak{n}}P_{\mathfrak{m}}\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h}\Big(1-N(\mathfrak{q})^{1/2}\lambda_\pi(\mathfrak{q})\Big)\lambda_\pi(\mathfrak{n})\lambda_\pi(\mathfrak{m})\\ &=N(\mathfrak{q})^{1/4}\sum_{\substack{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F\\ N(\mathfrak{m})\leqslant M}}F_{\mathfrak{n}}P_{\mathfrak{m}}\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h}\lambda_\pi(\mathfrak{n})\lambda_\pi(\mathfrak{m})\\ &\qquad-N(\mathfrak{q})^{3/4}\sum_{\substack{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F\\ N(\mathfrak{m})\leqslant M}}F_{\mathfrak{n}}P_{\mathfrak{m}}\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h}\lambda_\pi(\mathfrak{n}\mathfrak{q})\lambda_\pi(\mathfrak{m})=A+B.\end{aligned}$$

Pour utiliser la formule de Petersson, on choisit un système de représentants de $\mathscr{C}\ell^+(F)$, comme à la section 2, noté $\{\bar{\mathfrak{a}}\}$ (resp. $\{\bar{\mathfrak{b}}\}$). On effectue donc le changement de variables $\mathfrak{n}=\nu\mathfrak{a}, \mathfrak{m}=\xi\mathfrak{b}$, et ν (resp. ξ) parcourt $(\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}$ mod $\mathcal{O}_F^{\times +}$ (resp. $(\mathfrak{b}^{-1})^{\gg 0}$ mod $\mathcal{O}_F^{\times +}$) :

$$A = N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{\bar{\mathfrak{a}},\bar{\mathfrak{b}}} \sum_{\nu \in (\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}} \sum_{\substack{\xi \in (\mathfrak{b}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +} \\ N(\xi) \leqslant MN(\mathfrak{b})^{-1}}} F_{\nu\mathfrak{a}} P_{\xi\mathfrak{b}} \sum_{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} \lambda_\pi(\nu\mathfrak{a})\lambda_\pi(\xi\mathfrak{b})$$

$$B = -N(\mathfrak{q})^{3/4} \sum_{\bar{\mathfrak{a}},\bar{\mathfrak{b}}} \sum_{\nu \in (\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}} \sum_{\substack{\xi \in (\mathfrak{b}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +} \\ N(\xi) \leqslant MN(\mathfrak{b})^{-1}}} F_{\nu\mathfrak{a}} P_{\xi\mathfrak{b}} \sum_{\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} \lambda_\pi(\nu\mathfrak{a}\mathfrak{q})\lambda_\pi(\xi\mathfrak{b}).$$

On peut maintenant appliquer la formule de Petersson (proposition 6.3) :

$$(7.6)\quad A = N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{\bar{\mathfrak{a}},\bar{\mathfrak{b}}} \sum_{\nu \in (\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}} \sum_{\substack{\xi \in (\mathfrak{b}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +} \\ N(\xi) \leqslant MN(\mathfrak{b})^{-1}}} F_{\nu\mathfrak{a}} P_{\xi\mathfrak{b}}$$
$$\times \Bigg\{ \mathbb{1}_{\nu\mathfrak{a}=\xi\mathfrak{b}} + \frac{C}{|\mathfrak{d}_F|^{1/2}} \sum_{\substack{\bar{\mathfrak{c}}^2=\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \\ c \in \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\} \\ \varepsilon \in \mathcal{O}_F^{\times +}/\mathcal{O}_F^{\times 2}}} \frac{\mathcal{K}\ell(\varepsilon\nu, \mathfrak{a}; \xi, \mathfrak{b}; c, \mathfrak{c})}{N(c\mathfrak{c})} J_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}}\left(4\pi \frac{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon\nu\xi}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-2}]}}{|\boldsymbol{c}|}\right)$$
$$+ \text{(Formes Anciennes)} \Bigg\}$$

$$(7.7)\quad B = -N(\mathfrak{q})^{3/4} \sum_{\bar{\mathfrak{a}},\bar{\mathfrak{b}}} \sum_{\nu \in (\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}} \sum_{\substack{\xi \in (\mathfrak{b}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +} \\ N(\xi) \leqslant MN(\mathfrak{b})^{-1}}} F_{\nu\mathfrak{a}} P_{\xi\mathfrak{b}}$$
$$\times \Bigg\{ \mathbb{1}_{\nu\mathfrak{a}\mathfrak{q}=\xi\mathfrak{b}} + \frac{C}{|\mathfrak{d}_F|^{1/2}} \sum_{\substack{\bar{\mathfrak{c}}^2=\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \\ c \in \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\} \\ \varepsilon \in \mathcal{O}_F^{\times +}/\mathcal{O}_F^{\times 2}}} \frac{\mathcal{K}\ell(\varepsilon\nu, \mathfrak{a}\mathfrak{q}; \xi, \mathfrak{b}; c, \mathfrak{c})}{N(c\mathfrak{c})} J_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}}\left(4\pi \frac{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon\nu\xi}[\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-2}]}}{|\boldsymbol{c}|}\right)$$
$$+ \text{(Formes Anciennes)} \Bigg\}.$$

On revient à $M_1(\mathfrak{q}) = A + B$ en regroupant les termes diagonaux, ceux en sommes de Kloosterman, et ceux venant des formes anciennes. On écrit donc :

$$M_1(\mathfrak{q}) = M_1^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) + M_1^{\mathrm{Kloost}}(\mathfrak{q}) + M_1(\mathfrak{q}, \text{Formes Anciennes}).$$

La démarche sera donc la suivante : on étudie le terme diagonal, et en donne une asymptotique qui est celle de (1.6) ; on montre que le terme venant des sommes de Kloosterman est négligeable. Enfin, il faut estimer $M_1(\mathfrak{q}, \text{Formes Anciennes})$: ce sera expliqué dans l'appendice.

- **Le terme diagonal.**

En appliquant la formule de Petersson à $M_1(\mathfrak{q})$, les termes diagonaux ont la forme : $\mathbb{1}_{\nu\mathfrak{a}=\xi\mathfrak{b}}$ et $\mathbb{1}_{\nu\mathfrak{a}\mathfrak{q}=\xi\mathfrak{b}}$. Le dernier est nul, car $N(\xi\mathfrak{b}) \leqslant M < N(\mathfrak{q})^{1/2}$. Il n'y a donc qu'une diagonale, et l'on peut réindexer avec des sommes d'idéaux, en posant $\mathfrak{m} = \nu\mathfrak{a} = \xi\mathfrak{b}$:

$$M_1^{\text{diag}}(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{N(\mathfrak{m}) \leqslant M} F_{\mathfrak{m}} P_{\mathfrak{m}} = \frac{N(\mathfrak{q})^{1/4}}{(2i\pi)^2} \iint_{(3/2),(1)} D_1(s,t) N(\mathfrak{q})^{s/2} M^t L\left(s + \frac{1}{2}, \pi_\infty\right) \widehat{P_M}(t) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}$$

en utilisant les expressions intégrales de P et F données précédemment et en notant : $D_1(s,t) = \sum_{\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_F} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{\psi(\mathfrak{m}) N(\mathfrak{m})^{1+s+t}}$. La série donnant $D_1(s,t)$ se prolonge analytiquement au voisinage de $\Re(t+s) = 0$. En effet, pour $\Re(t+s) > 0$, on a :

$$\sum_{\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_F} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{\psi(\mathfrak{m}) N(\mathfrak{m})^{1+t+s}} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{N(\mathfrak{p})^{-(1+t+s)}}{1 + N(\mathfrak{p})^{-1}}\right) = \zeta_F(1+t+s)^{-1} \times \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{1 + N(\mathfrak{p})^{-1} - N(\mathfrak{p})^{-(1+t+s)}}{(1 + N(\mathfrak{p})^{-1})(1 - N(\mathfrak{p})^{-(1+t+s)})}\right)$$

et un développement limité assure que le produit de droite converge pour $\Re(s+t) > -1$. On note encore $D_1(s,t)$ ce prolongement holomorphe.

Pour aller plus loin, nous devons effectuer des changements de droite d'intégration : Kowalski, Michel et VamderKam ont exploité cette technique avec beaucoup d'efficacité dans [18].

On change d'abord de droite d'intégration en s (de $(3/2)$ à (-1)), ce qui donne :

$$\frac{N(\mathfrak{q})^{1/4}}{2i\pi} \int_{(1)} \operatorname{res}_{s=0} \left(N(\mathfrak{q})^{s/2} L\left(s + \frac{1}{2}, \pi_\infty\right) D_1(s,t) s^{-1}\right) M^t \widehat{P_M}(t) \frac{dt}{t} + \frac{N(\mathfrak{q})^{1/4}}{(2i\pi)^2} \iint_{(-1),(1)} D_1(s,t) N(\mathfrak{q})^{s/2} M^t L\left(s + \frac{1}{2}, \pi_\infty\right) \widehat{P_M}(t) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}.$$

Le second terme est en $\mathcal{O}\left(N(\mathfrak{q})^{1/4-\delta}\right)$ pour un $\delta > 0$, puisque $|N(\mathfrak{q})^{s/2} M^t| = N(\mathfrak{q})^{\frac{-1+\Delta}{2}}$. On continue avec le premier :

$$M_1^{\text{diag}}(\mathfrak{q}) = \frac{N(\mathfrak{q})^{1/4} L\left(\frac{1}{2}, \pi_\infty\right)}{2i\pi} \int_{(1)} D_1(0,t) M^t \widehat{P_M}(t) \frac{dt}{t} + \mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/4-\delta}).$$

De la même manière on change de ligne d'intégration en t. On écrit donc :

$$M_1^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{q})^{1/4} L\left(\frac{1}{2}, \pi_\infty\right) \mathrm{res}_{t=0}\left(D_1(0,t) M^t \widehat{P_M}(t) t^{-1}\right)$$
$$+ \frac{N(\mathfrak{q})^{1/4} L\left(\frac{1}{2}, \pi_\infty\right)}{2i\pi} \int_{(-1/4)} D_1(0,t) M^t \widehat{P_M}(t) \frac{dt}{t} + \mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/4-\delta}).$$

Là encore, le terme intégral est un $\mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/4-\delta})$; il faut évaluer le résidu. Pour cela, on développe en série entière M^t, $\widehat{P_M}(t)$, et on remarque que :

$$D_1(0,t) \underset{t\to 0}{\sim} \zeta_F(1+t)^{-1} \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - N(\mathfrak{p})^{-2}\right) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\zeta_F(2) t}{\mathrm{res}_{t=1}(\zeta_F)}.$$

Ceci montre que l'on peut écrire :

$$D_1(0,t) = \sum_{\ell \geqslant 1} \alpha_\ell t^\ell.$$

La contribution d'un facteur $\ell \geqslant 1$ au résidu est de la forme :

$$\sum_{k-j+\ell=0} \frac{\log(M)^k}{k!} \frac{a_j j!}{\log(M)^j} \alpha_\ell = \mathcal{O}(\log(M)^{-\ell})$$

ainsi, seul le premier terme ($\ell = 1$) contribue. On fait le calcul, et on trouve :

$$M_1^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) = \frac{N(\mathfrak{q})^{1/4} L\left(\frac{1}{2}, \pi_\infty\right) \zeta_F(2)}{\mathrm{res}_1(\zeta_F)} \sum_{k-j=-1} \frac{\log(M)^k}{k!} \frac{a_j j!}{\log(M)^j}$$
$$+ \mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/4} / \log(M)^2) + \mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/4-\delta})$$
$$= \frac{N(\mathfrak{q})^{1/4} L\left(\frac{1}{2}, \pi_\infty\right) \zeta_F(2)}{\mathrm{res}_1(\zeta_F) \log(M)} \left(P'(1) + \mathcal{O}\Big(1/\log(N(\mathfrak{q}))\Big)\right) \tag{7.8}$$

ce que nous voulions, compte tenu de l'égalité : $L(1/2, \pi_\infty) = (2\pi)^{-\boldsymbol{k}/2}$ $\Gamma(\boldsymbol{k}/2)$.

• **Le terme en sommes de Kloosterman.**

Nous allons montrer que la contribution des termes venant des sommes de Kloosterman est négligeable devant le terme diagonal. On notera $M_{1,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathrm{Kloost}}(\mathfrak{q})$ la contribution des classes $\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}}$ au terme en sommes de Kloosterman noté ci-dessus $M_1^{\mathrm{Kloost}}(\mathfrak{q})$ et on va montrer que $M_{1,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathrm{Kloost}}(\mathfrak{q}) \ll_{\boldsymbol{k}} N(\mathfrak{q})^{1/4-\eta}$, avec $\eta > 0$. Ceci montrera bien que

$$M_1^{\mathrm{Kloost}}(\mathfrak{q}) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} M_{1,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathrm{Kloost}}(\mathfrak{q}) \ll_{\boldsymbol{k}} N(\mathfrak{q})^{1/4-\eta}.$$

De plus, les quelques sommes d'ensembles d'indices finis (*i.e.*, celles sur $\varepsilon, \mathfrak{c}$) ne contribuant pas asymptotiquement, on fixe un représentant $\mathfrak{c}$ tel que

$\mathfrak{c}^2 \sim \mathfrak{ab}$ et on désigne par $\mathrm{Err}(\mathfrak{q})$ (dans lequel $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \varepsilon$ sont fixés) l'expression ainsi définie. Pour majorer ce terme d'erreur, on écrit d'abord :

$$\mathrm{Err}(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{q})^{1/4} \times \sum_{\nu \in (\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}} \sum_{\substack{\xi \in (\mathfrak{b}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +} \\ N(\xi) \leqslant MN(\mathfrak{b})^{-1}}} F_{\nu\mathfrak{a}} P_{\xi\mathfrak{b}}$$
$$\times \left\{ \frac{C}{|\mathfrak{d}_F|^{1/2}} \sum_{c \in \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times +}} \sum_{\eta \in \mathcal{O}_F^{\times +}} \frac{\mathcal{K}\ell(\nu, \mathfrak{a}; \xi, \mathfrak{b}; c\eta^{-1}, \mathfrak{c})}{N(c)} J_{\boldsymbol{k-1}}\left(4\pi \frac{\sqrt{\boldsymbol{\nu\xi}[\mathfrak{abc}^{-2}]}\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{c}|}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{CN(\mathfrak{q})^{1/2}}{|\mathfrak{d}_F|^{1/2}} \sum_{\substack{c \in \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times +} \\ \eta \in \mathcal{O}_F^{\times +}}} \frac{\mathcal{K}\ell(\varepsilon\nu, \mathfrak{aq}; \xi, \mathfrak{b}; c\eta, \mathfrak{c})}{N(c)} J_{\boldsymbol{k-1}}\left(4\pi \frac{\sqrt{\boldsymbol{\nu\xi}[\mathfrak{abc}^{-2}]}\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{c}|}\right)\right\}.$$

On choisit les représentants $c \in \mathfrak{q}/\mathcal{O}_F^{\times +}$, $\nu \in \mathfrak{a}^{-1}/\mathcal{O}_F^{\times +}$ et $\xi \in \mathfrak{b}^{-1}/\mathcal{O}_F^{\times +}$ satisfaisant au lemme 2.1 de la section 2.1. Concrètement, on peut supposer que $N(c)^{1/d} \ll c^{(j)} \ll N(c)^{1/d}$ pour tout j, ainsi que pour ν et ξ. Soit $0 < \delta \leqslant 1$ fixé. D'après Luo ([19] page 136), on a le crucial résultat :

$$\sum_{\eta \in \mathcal{O}_F^{\times +}} \prod_{|\eta^{(j)}| > 1} |\eta^{(j)}|^{-\delta} < \infty. \tag{7.9}$$

Celui-ci permet de contrôler la somme interne portant sur les unités de F (la somme en $\eta \in \mathcal{O}_F^{\times +}$) : pour chaque η, on pose $\boldsymbol{\delta} = (\delta_j)_j$ avec $\delta_j = \delta/d$ si $|\eta^{(j)}| > 1$, 0 sinon (pour $1 \leqslant j \leqslant d$). Cette dépendance en η n'est pas gênante, puisque l'on a pour tout entier $k \geqslant 2$, tout complexe z, et tout $0 < \delta \leqslant 1$:

$$J_{k-1}(z) \ll |z|^{1-\delta} \tag{7.10}$$

(indépendamment de δ) et par conséquent pour tout $\boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^d$: $J_{\boldsymbol{k-1}}(\boldsymbol{z}) \ll |\boldsymbol{z}|^{1-\boldsymbol{\delta}}$. On a donc :

$$\mathrm{Err}(\mathfrak{q}) \ll N(\mathfrak{q})^{1/4} \times \sum_{\nu \in (\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}} \sum_{\substack{\xi \in (\mathfrak{b}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +} \\ N(\xi) \leqslant MN(\mathfrak{b})^{-1}}} |F_{\nu\mathfrak{a}} P_{\xi\mathfrak{b}}|$$
$$\times \left\{ \sum_{c \in \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times +}} \sum_{\eta \in \mathcal{O}_F^{\times +}} \frac{|\mathcal{K}\ell(\nu, \mathfrak{a}; \xi, \mathfrak{b}; c\eta^{-1}, \mathfrak{c})|}{N(c)} \left|\frac{\sqrt{\boldsymbol{\nu\xi}}\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{c}|}\right|^{\boldsymbol{1-\delta}}\right.$$
$$\left. + N(\mathfrak{q})^{1/2} \sum_{\substack{c \in \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times +} \\ \eta \in \mathcal{O}_F^{\times +}}} \frac{|\mathcal{K}\ell(\varepsilon\nu, \mathfrak{aq}; \xi, \mathfrak{b}; c\eta, \mathfrak{c})|}{N(c)} \left|\frac{\sqrt{\boldsymbol{\nu\xi}}\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{c}|}\right|^{\boldsymbol{1-\delta}}\right\}.$$

En utilisant la borne de Weil pour les sommes de Kloosterman, il vient donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Err}(\mathfrak{q}) \ll N(\mathfrak{q})^{1/4} \times \sum_{\nu\in(\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}} \sum_{\substack{\xi\in(\mathfrak{b}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\xi)\leqslant MN(\mathfrak{b})^{-1}}} |\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\xi}^{\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta}}{2}} F_{\nu\mathfrak{a}} P_{\xi\mathfrak{b}}| \\ \times \Bigg\{ \sum_{c\in\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times +}} \sum_{\eta\in\mathcal{O}_F^{\times +}} \frac{N\Big((\nu\mathfrak{a}, \xi\mathfrak{b}, c\mathfrak{c})\Big)\tau(c\mathfrak{c})N(\mathfrak{c})^{1/2}}{N(c)^{1/2}} \left(\frac{|\boldsymbol{\eta}|}{|\boldsymbol{c}|}\right)^{\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta}} \\ + N(\mathfrak{q})^{1/2} \sum_{\substack{c\in\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ \eta\in\mathcal{O}_F^{\times +}}} \frac{N\Big((\nu\mathfrak{a}, \xi\mathfrak{b}, c\mathfrak{c})\Big)\tau(c\mathfrak{c})N(\mathfrak{c})^{1/2}}{N(c)^{1/2}} \left(\frac{|\boldsymbol{\eta}|}{|\boldsymbol{c}|}\right)^{\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta}} \Bigg\}.\end{aligned}$$

On peut alors effectuer la somme sur η en utilisant (7.9), tout en notant que $\frac{\tau(c\mathfrak{c})}{N(c)^{1/2}}|\boldsymbol{c}|^{-\mathbf{1}+\boldsymbol{\delta}} \ll_\delta N(c)^{-3/2+\delta}$, de plus on majore la somme portant sur c en une portant sur les idéaux $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{q}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Err}(\mathfrak{q}) \ll_\delta N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{\substack{\nu,\xi\\ N(\xi)\leqslant MN(\mathfrak{b})^{-1}}} |\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\xi}^{\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta}}{2}} F_{\nu\mathfrak{a}} P_{\xi\mathfrak{b}}| \cdot \\ \times \left(\sum_{\mathfrak{c}\subset\mathfrak{q}} \frac{N\Big((\nu\mathfrak{a}, \xi\mathfrak{b}, \mathfrak{c})\Big)^{1/2}}{N(\mathfrak{c})^{3/2-\delta}} + N(\mathfrak{q})^{1/2} \sum_{\mathfrak{c}\subset\mathfrak{q}} \frac{N\Big((\nu\mathfrak{a}\mathfrak{q}, \xi\mathfrak{b}, \mathfrak{c})\Big)^{1/2}}{N(\mathfrak{c})^{3/2-\delta}} \right).\end{aligned}$$

Or, on a la brutale majoration :

$$\begin{aligned}\sum_{\mathfrak{c}\subset\mathfrak{q}} \frac{N\Big((\mathfrak{n}, \mathfrak{m}, \mathfrak{c})\Big)^{1/2}}{N(\mathfrak{c})^{3/2-\delta}} \leqslant \frac{N\Big((\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{q})\Big)^{1/2}}{N(\mathfrak{q})^{3/2-\delta}} \sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_F} \frac{N\Big((\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{a})\Big)^{1/2}}{N(\mathfrak{a})^{3/2-\delta}} \\ \ll \frac{N\Big((\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{q})\Big)^{1/2}}{N(\mathfrak{q})^{3/2-\delta}} \sum_{\mathfrak{d}|(\mathfrak{n},\mathfrak{m})} \frac{N(\mathfrak{d})^{1/2}}{N(\mathfrak{d})^{3/2-\delta}} \ll \frac{N\Big((\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{q})\Big)^{1/2}}{N(\mathfrak{q})^{3/2-\delta}} N\Big((\mathfrak{n}, \mathfrak{m})\Big)^{\delta}.\end{aligned} \tag{7.11}$$

Cette dernière estimation donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{Err}(\mathfrak{q}) \ll_\delta N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{\nu\in\mathfrak{a}^{-1}/\mathcal{O}_F^{\times +}} \sum_{\substack{\xi\in\mathfrak{b}^{-1}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\xi)\leqslant MN(\mathfrak{b})^{-1}}} |\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\xi}^{\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta}}{2}} F_{\nu\mathfrak{a}} P_{\xi\mathfrak{b}}| \\ \times N\Big((\nu\mathfrak{a}, \mu\mathfrak{b})\Big)^{\delta} \left(\frac{N\Big((\nu\mathfrak{a}, \xi\mathfrak{b}, \mathfrak{q})\Big)^{1/2}}{N(\mathfrak{q})^{3/2-\delta}} + \frac{N\Big((\nu\mathfrak{a}\mathfrak{q}, \xi\mathfrak{b}, \mathfrak{q})\Big)^{1/2}}{N(\mathfrak{q})^{1-\delta}} \right).\end{aligned}$$

On a par hypothèse $N(\xi\mathfrak{b}) \leqslant M$ donc

$$(\nu\mathfrak{a}\mathfrak{q}, \xi\mathfrak{b}, \mathfrak{q}) = (\nu\mathfrak{a}, \xi\mathfrak{b}, \mathfrak{q}) = \mathcal{O}_F.$$

En utilisant (7.2) (et donc en coupant la somme en ν en deux, selon que $N(\nu)$ est plus petit ou plus grand que $N(\mathfrak{q})^{1/2}$) on obtient :

$$\mathrm{Err}(\mathfrak{q}) \ll_\delta N(\mathfrak{q})^{1/4} \times \frac{N(\mathfrak{q})^{1/2+\delta/4} M^{1+\delta/2}}{N(\mathfrak{q})^{1-\delta}} \ll_\delta N(\mathfrak{q})^{1/4} \times N(\mathfrak{q})^{\frac{\Delta-1}{2}+2\delta}$$

et Δ étant fixé dans $]0,1[$, cela termine la preuve de l'estimation asymptotique du premier moment.

8. Le deuxième moment

Cette partie est analogue à la précédente, et procèdera de la même façon, afin de prouver (1.7) :

$$\begin{aligned} M_2(\mathfrak{q}) &:= \sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} \Lambda(1/2,\pi)^2 \mathrm{M}(\pi)^2 \\ &= C_{\boldsymbol{k}}^2 \times \frac{8N(\mathfrak{q})^{1/2}}{\log(N(\mathfrak{q}))^2} \left(\frac{\|P''\|^2_{L^2(0,1)}}{\Delta^3} + \frac{P'(1)^2}{\Delta^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(N(\mathfrak{q}))}\right)\right) \end{aligned}$$

avec $C_{\boldsymbol{k}} = \frac{\zeta_F(2)\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k}}{2}\right)}{(2\pi)^{\boldsymbol{k}/2}\operatorname{res}_{s=1}(\zeta_F)}$. On cherche donc un équivalent de l'expression :

$$M_2(\mathfrak{q}) = \sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} \Lambda(1/2,\pi)^2 M(\pi)^2$$

avec (voir (4.8)) :

$$\Lambda(\pi,1/2)^2 = 2N(\mathfrak{q})^{1/2} \sum_{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F} \frac{\lambda_\pi(\mathfrak{n})}{\sqrt{N(\mathfrak{n})}} \tau(\mathfrak{n}) G(N(\mathfrak{n})/N(\mathfrak{q}))$$

où :

$$G(y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(3/2)} y^{-s}\zeta_F^{(\mathfrak{q})}(1+2s) L\left(s+\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2 \frac{ds}{s}.$$

On utilisera l'estimation suivante de G, *cf.* [24], lemme 2.3 :

$$\begin{aligned} G(y) &\ll \exp(-Cy^{1/2d}) && \text{si } y \geqslant 1 \\ G(y) &\ll \log(y)^2 && \text{si } 0 < y \leqslant 1 \end{aligned} \tag{8.1}$$

où $C > 0$ est une constante. D'autre part, on aura recours à la notation :

$$G_{\mathfrak{n}} := \frac{G(N(\mathfrak{n})/N(\mathfrak{q}))\tau(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})^{1/2}} \tag{8.2}$$

$$P_{\mathfrak{m}} := \frac{\mu(\mathfrak{m})P\left(\frac{\log(M/N(\mathfrak{m}))}{\log(M)}\right)}{\psi(\mathfrak{m})N(\mathfrak{m})^{1/2}}. \tag{8.3}$$

En développant le second moment, on arrive à :
(8.4)

$$M_2(\mathfrak{q}) = 2N(\mathfrak{q})^{1/2} \sum_{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F} \sum_{\substack{N(\mathfrak{m}_1)\leqslant M\\ N(\mathfrak{m}_2)\leqslant M}} G_{\mathfrak{n}} P_{\mathfrak{m}_1} P_{\mathfrak{m}_2} \sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} \lambda_\pi(\mathfrak{n})\lambda_\pi(\mathfrak{m}_1)\lambda_\pi(\mathfrak{m}_2).$$

La formule de Petersson donne une expression pour les formes bilinéaires en les coefficients des fonctions L. Pour l'appliquer, il faut transformer la forme trilinéaire ci-dessus, ce qui se fait en utilisant les propriétés multiplicatives de ces coefficients :

$$\lambda_\pi(\mathfrak{m}_1)\lambda_\pi(\mathfrak{m}_2) = \sum_{\mathfrak{d}|(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2)} \lambda_\pi(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{d}^{-2})\chi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{d})$$

avec $\chi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{d}) = 0$ si $\mathfrak{q}|\mathfrak{d}$, 1 sinon. Soit, après un changement de variables $(\mathfrak{m}_1 \leftarrow \mathfrak{m}_1\mathfrak{d}^{-1}, \mathfrak{m}_2 \leftarrow \mathfrak{m}_2\mathfrak{d}^{-1})$ en notant qu'ici $\chi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{d}) = 1$ (car $N(\mathfrak{d}) \leqslant M < N(\mathfrak{q})$) :

$$\begin{aligned} M_2(\mathfrak{q}) = 2N(\mathfrak{q})^{1/2} \sum_{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F} \sum_{N(\mathfrak{d})\leqslant M} \sum_{\substack{N(\mathfrak{m}_1)\leqslant M/N(\mathfrak{d})\\ N(\mathfrak{m}_2)\leqslant M/N(\mathfrak{d})}} G_{\mathfrak{n}} \\ \times P_{\mathfrak{d}\mathfrak{m}_1}\cdot P_{\mathfrak{d}\mathfrak{m}_2} \sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} \lambda_\pi(\mathfrak{n})\lambda_\pi(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2). \end{aligned} \tag{8.5}$$

Pareillement à la précédente section, on pose $\mathfrak{n} = \nu\mathfrak{a}, \mathfrak{m}_1 = \xi_1\mathfrak{b}_1, \mathfrak{m}_2 = \xi_2\mathfrak{b}_2$: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ parcourent un ensemble de représentants du groupe restreint $\mathscr{C}\ell^+(F)$, ν parcourt $(\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0} \mod \mathcal{O}_F^{\times +}$, ξ_j décrit $(\mathfrak{b}_j^{-1})^{\gg 0} \mod \mathcal{O}_F^{\times +}$ et on applique la formule de Petersson.

Il s'ensuit un terme diagonal, qui est dominant ; un terme en sommes de Kloosterman, qui est négligeable ; un terme en les formes anciennes, qui l'est aussi comme on le verra dans l'appendice.

Nous montrerons donc ici les deux premiers points.

• **Le terme diagonal**.

Le terme diagonal s'écrit :

$$M_2^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) = 2N(\mathfrak{q})^{1/2} \sum_{\bar{\mathfrak{a}},\bar{\mathfrak{b}_1},\bar{\mathfrak{b}_2}} \sum_{N(\mathfrak{d})\leqslant M} \sum_{\nu\in(\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}} G_{\nu\mathfrak{a}} \times \sum_{\substack{\xi_1\in(\mathfrak{b}_1^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\xi_1\mathfrak{b}_1)\leqslant M/N(\mathfrak{d})}} \sum_{\substack{\xi_2\in(\mathfrak{b}_2^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\xi_2\mathfrak{b}_2)\leqslant M/N(\mathfrak{d})}} P_{\xi_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}} P_{\xi_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}} \times \mathbb{1}_{\nu\mathfrak{a}=\xi_1\xi_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}. \tag{8.6}$$

On peut donc reparamétrer ces sommes par les idéaux $\mathfrak{m}_1 = \xi_1\mathfrak{b}_1, \mathfrak{m}_2 = \xi_2\mathfrak{b}_2$ ce qui donne :

$$M_2^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) = 2N(\mathfrak{q})^{1/2} \sum_{N(\mathfrak{d})\leqslant M} \sum_{N(\mathfrak{m}_1)\leqslant M/N(\mathfrak{d})} \sum_{N(\mathfrak{m}_2)\leqslant M/N(\mathfrak{d})} G_{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2} P_{\mathfrak{m}_1\mathfrak{d}} P_{\mathfrak{m}_2\mathfrak{d}} \tag{8.7}$$

et donc, avec les expressions intégrales des fonctions G et P rappelées précédemment :

$$M_2^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) = \frac{2N(\mathfrak{q})^{1/2}}{(2i\pi)^3} \iiint_{(\frac{3}{2}),(\frac{1}{2}),(\frac{1}{2})} M^{t_1+t_2} \widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2) \times N(\mathfrak{q})^s \zeta_F^{(\mathfrak{q})}(1+2s) L\left(s+\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2 D_2(s,t_1,t_2)\frac{ds}{s}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2} \tag{8.8}$$

où l'on a posé pour s, t_1, t_2 de parties réelles positives

$$D_2(s,t_1,t_2) = \sum_{\mathfrak{d},\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2} \frac{\mu(\mathfrak{m}_1\mathfrak{d})\mu(\mathfrak{m}_2\mathfrak{d})\tau(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2)}{\psi(\mathfrak{m}_1\mathfrak{d})\psi(m_2\mathfrak{d})N(\mathfrak{d})^{1+t_1+t_2}N(\mathfrak{m}_1)^{1+s+t_1}N(\mathfrak{m}_2)^{1+s+t_2}}.$$

Pour simplifier l'exposition qui suit, résumons ici quelques faits à propos de D_2 :

Lemme 8.1. — *On a le développement eulérien, convergent pour $\Re(t_1 + t_2) > 0, \Re(s+t_1) > 0, \Re(s+t_2) > 0$:*

$$D_2(s,t_1,t_2) = \prod_{\mathfrak{p}}\left(1 + \frac{N(\mathfrak{p})^{-(1+t_1+t_2)}}{(1+N(\mathfrak{p})^{-1})^2} - \frac{2N(\mathfrak{p})^{-(1+s+t_1)}}{1+N(\mathfrak{p})^{-1}} - \frac{2N(\mathfrak{p})^{-(1+s+t_2)}}{1+N(\mathfrak{p})^{-1}} + \frac{3N(\mathfrak{p})^{-(2+2s+t_1+t_2)}}{(1+N(\mathfrak{p})^{-1})^2}\right).$$

De plus, on peut écrire :

$$D_2(s,t_1,t_2) = \frac{\zeta_F(1+t_1+t_2)}{\zeta_F(1+s+t_1)^2\zeta_F(1+s+t_2)^2}\eta(s,t_1,t_2) \tag{8.9}$$

où η est homolomorphe sur (au moins) $\{\Re(t_1+t_2) > -1/2, \Re(s+t_1) > -1/2, \Re(s+t_2) > -1/2\}$, et vaut en zéro :

$$\eta(0,0,0) = \zeta_F(2)^2. \tag{8.10}$$

La preuve est un calcul facile. L'expression de D_2 permet de voir qu'elle est prolongeable méromorphiquement sur un voisinage de zéro, ce qui permettra d'effectuer des changements de ligne d'intégration comme dans la section précédente. C'est dans le calcul explicite de $\eta(0,0,0)$, nécessaire pour un équivalent explicite du second moment, que l'introduction du terme $\psi(\mathfrak{m})$ dans la définition de l'amollisseur est important, car il permet d'achever les calculs. Pour le vérifier, on regarde le facteur en $\mathfrak{p}$ du développement eulérien de η, en prenant $s = t_1 = t_2 = 0$:

$$\begin{aligned}&\Big(1 + \frac{N(\mathfrak{p})^{-1}}{(1+N(\mathfrak{p})^{-1})^2} - \frac{2N(\mathfrak{p})^{-1}}{1+N(\mathfrak{p})^{-1}} - \frac{2N(\mathfrak{p})^{-1}}{1+N(\mathfrak{p})^{-1}} + \frac{3N(\mathfrak{p})^{-2}}{(1+N(\mathfrak{p})^{-1})^2}\Big)\\ &\times \frac{1-N(\mathfrak{p})^{-1}}{(1-N(\mathfrak{p})^{-1})^4} = \frac{1-N(\mathfrak{p})^{-1}}{(1+N(\mathfrak{p})^{-1})^2} \times \frac{1}{(1-N(\mathfrak{p})^{-1})^3} = (1-N(\mathfrak{p})^{-2})^{-2}.\end{aligned}$$

En faisant le produit sur tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$, on trouve bien $\eta(0,0,0) = \zeta_F(2)^2$.

Revenons au second moment amolli : soit δ un (petit) réel > 0 ; on change de droite d'intégration en s de $(\frac{3}{2})$ à $(-\frac{1}{2}+\delta)$:

(8.11)
$$\begin{aligned}M_2^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) = \frac{2N(\mathfrak{q})^{1/2}}{(2i\pi)^2} \iint_{(\frac{1}{2}),(\frac{1}{2})} & M^{t_1+t_2} \widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2)\\ &\times \operatorname{res}_{s=0}\left(s^{-1}N(\mathfrak{q})^s \zeta_F^{(\mathfrak{q})}(1+2s) L\left(s+\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2 D_2(s,t_1,t_2)\right)\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\\ &+ \frac{2N(\mathfrak{q})^{1/2}}{(2i\pi)^3} \iiint_{(-\frac{1}{2}+\delta),(\frac{1}{2}),(\frac{1}{2})} M^{t_1+t_2}\widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2) N(\mathfrak{q})^s \zeta_F^{(\mathfrak{q})}(1+2s)\\ &\times L\left(s+\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2 D_2(s,t_1,t_2)\frac{ds}{s}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\end{aligned}$$

si δ est choisi tel que $0 < \delta < \frac{1-\Delta}{2}$, auquel cas on a :

(8.12)
$$\begin{aligned}M_2^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) &= \frac{2N(\mathfrak{q})^{1/2}}{(2i\pi)^2} \iint_{(\frac{1}{2}),(\frac{1}{2})} M^{t_1+t_2} \widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2)\\ &\times \operatorname{res}_{s=0}\left(s^{-1}N(\mathfrak{q})^s \zeta_F^{(\mathfrak{q})}(1+2s) L\left(s+\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2 D_2(s,t_1,t_2)\right)\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\\ &+ \mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/2-\delta'})\end{aligned}$$

avec $\delta' = \frac{1-\Delta}{2} - \delta > 0$, toujours noté δ dans la suite.

Il faut donc calculer le terme constant du développement en série entière (en s) de $N(\mathfrak{q})^s\zeta_F^{(\mathfrak{q})}(1+2s)L\left(s+\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2 D_2(s,t_1,t_2)$; en fait, on voit que ce terme s'écrit :

$$\frac{\mathrm{res}_1(\zeta_F^{(\mathfrak{q})})}{2}\log(N(\mathfrak{q}))D_2(0,t_1,t_2)L\left(\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2+\mathrm{res}_1(\zeta_F^{(\mathfrak{q})})L\left(\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2 \times\frac{\partial D_2}{\partial s}(0,t_1,t_2)+\dots$$

où les autres termes n'ont pas de contribution au terme principal. On a donc :

$$(8.13)\quad M_2^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q})=\frac{2N(\mathfrak{q})^{1/2}}{(2i\pi)^2}\iint_{(\frac{1}{2}),(\frac{1}{2})}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}M^{t_1+t_2}\widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2) \times\Big(\frac{\mathrm{res}_1(\zeta_F)}{2}\log(N(\mathfrak{q}))L\left(\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2D_2(0,t_1,t_2)+\mathrm{res}_1(\zeta_F)L\left(\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2 \times\frac{\partial D_2}{\partial s}(0,t_1,t_2)\Big)+\mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/2-\delta}).$$

On peut donc écrire :

$$M_2^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q})=M_{21}(\mathfrak{q})+M_{22}(\mathfrak{q})+\mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/2-\delta})$$

avec :

$$(8.14)\quad M_{21}(\mathfrak{q})=\frac{N(\mathfrak{q})^{1/2}\log(N(\mathfrak{q}))\,\mathrm{res}_1(\zeta_F)L\left(\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2}{(2i\pi)^2} \times\iint_{(\frac{1}{2}),(\frac{1}{2})}M^{t_1+t_2}\widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2)D_2(0,t_1,t_2)\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}$$

$$(8.15)\quad M_{22}(\mathfrak{q})=\frac{2N(\mathfrak{q})^{1/2}\,\mathrm{res}_1(\zeta_F)L\left(\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2}{(2i\pi)^2} \times\iint_{(\frac{1}{2}),(\frac{1}{2})}M^{t_1+t_2}\widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2)\frac{\partial D_2}{\partial s}(0,t_1,t_2)\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}.$$

En déplaçant les lignes d'intégration, on trouve donc :

$$(8.16)\quad M_{21}(\mathfrak{q})=N(\mathfrak{q})^{1/2}\log(N(\mathfrak{q}))\,\mathrm{res}_1(\zeta_F)L\left(s+\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2 \times\mathrm{res}_{(t_1,t_2)=(0,0)}\Big(t_1^{-1}t_2^{-1}M^{t_1+t_2}\widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2)D_2(0,t_1,t_2)\Big)+\mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/2-\delta})$$

et

(8.17)

$$M_{22}(\mathfrak{q}) = 2N(\mathfrak{q})^{1/2}\operatorname{res}_1(\zeta_F)L\left(\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2$$
$$\times\operatorname{res}_{(t_1,t_2)=(0,0)}\Big(t_1^{-1}t_2^{-1}M^{t_1+t_2}\widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2)\frac{\partial D_2}{\partial s}(0,t_1,t_2)\Big)+\mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/2-\delta}).$$

En se référant au lemme précédent, on note que dans le terme $\frac{\partial D_2}{\partial s}(0,t_1,t_2)$, seul $\zeta_F(1+t_1+t_2)\eta(0,t_1,t_2)\frac{\partial}{\partial s}(\zeta_F(1+s+t_1)^{-2}\zeta_F(1+s+t_2)^{-2})|_{s=0}$ produit un terme principal pour $M_{22}(\mathfrak{q})$. De plus, il est facile de voir que pour trouver les termes principaux de $M_{21}(\mathfrak{q})$ et $M_{22}(\mathfrak{q})$ on peut remplacer toutes les expressions en $\zeta_F(1+x)$ par $\operatorname{res}(\zeta_F)x^{-1}$: les autres termes du développement de ζ_F ont une contribution inférieure d'une puissance en $\log(M)$:

$$M_{21}(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{q})^{1/2}\log(N(\mathfrak{q}))\operatorname{res}_1(\zeta_F)^{-2}L\left(\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2$$
$$\times\Big\{\operatorname{res}_{(t_1,t_2)=(0,0)}\left(M^{t_1+t_2}\widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2)\eta(0,0,0)\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}\right)+\mathcal{O}(\log(M)^{-4})\Big\}$$
$$+\mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/2-\delta})$$

et

$$M_{22}(\mathfrak{q}) = 2N(\mathfrak{q})^{1/2}\operatorname{res}_1(\zeta_F)^{-2}L\left(\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2$$
$$\times\left\{\operatorname{res}_{(t_1,t_2)=(0,0)}\left(M^{t_1+t_2}\widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2)\eta(0,0,0)\right)+\mathcal{O}(\log(M)^{-3})\right\}$$
$$+\mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/2-\delta}).$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{res}_{(t_1,t_2)=(0,0)}\left(M^{t_1+t_2}\widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2)\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}\right)\\
&=\operatorname{res}_{t_2=0}\left\{M^{t_2}\widehat{P_M}(t_2)\operatorname{res}_{t_1=0}\left(M^{t_1}\widehat{P_M}(t_1)\frac{t_1}{1+t_1/t_2}\right)\right\}\\
&=\operatorname{res}_{t_2=0}\left\{M^{t_2}\widehat{P_M}(t_2)\operatorname{res}_{t_1=0}\left(M^{t_1}\widehat{P_M}(t_1)\sum_{k\geqslant 0}(-t_2)^{-k}t_1^{k+1}\right)\right\}\\
&=\operatorname{res}_{t_2=0}\left\{M^{t_2}\widehat{P_M}(t_2)\sum_{\ell+k+1-j=-1}\frac{\log(M)^\ell}{\ell!}(-t_2)^{-k}\frac{a_j j!}{\log(M)^j}\right\}\\
&=\sum_{\ell+k+1-j=-1}\log(M)^{\ell-j+k-1}\frac{a_j j!}{\ell!}(-1)^k\sum_{r-s=k-1}\frac{a_s s!}{r!}
\end{aligned}$$

en notant alors $P^{(n)}$ la n-ième dérivée de P, et

$$^{(n)}P(X) = \sum_k \frac{a_{n+k}}{(n+k)(n+k-1)\dots(k+1)} X^{n+k}$$

on a alors, en se référant à l'appendice de [18] où ces résidus sont calculés :

(8.18)
$$\begin{aligned}&\mathrm{res}_{(t_1,t_2)=(0,0)}\left(M^{t_1+t_2}\widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2)\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}\right)\\&= \log(M)^{-3}\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k P^{(k+2)}(1)^{(k-1)}P(1) = \log(M)^{-3}\int_0^1 P''(t)^2dt.\end{aligned}$$

On trouve plus facilement :

$$\mathrm{res}_{(t_1,t_2)=(0,0)}\left(M^{t_1+t_2}\widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2)\right) = \log(M)^{-2}P'(1)^2 \tag{8.19}$$

ce qui, tout compte fait, donne :

(8.20)
$$\begin{aligned}M_2^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) &= 8N(\mathfrak{q})^{1/2}\,\mathrm{res}_1(\zeta_F)^{-2}L\left(\frac{1}{2},\pi_\infty\right)^2\zeta_F(2)^2\\ \times&\left\{\frac{\log(N(\mathfrak{q}))}{8}\log(M)^{-3}\int_0^1 P''(t)^2dt+\frac{\log(M)^{-2}}{4}P'(1)^2+\mathcal{O}(\log(N(\mathfrak{q}))^{-3})\right\}\\ &+\mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/2-\delta})\end{aligned}$$

qui est bien le terme annoncé dans (1.6).

• **Le terme de Kloosterman**.

Comme dans la section 7, on peut écrire la contribution des termes en sommes de Kloosterman du deuxième moment sous la forme :

$$M_2^{\mathrm{Kloost}}(\mathfrak{q}) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2} M_{2,\mathfrak{a},\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2}^{\mathrm{Kloost}}(\mathfrak{q}) \tag{8.21}$$

où $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ désignent une famille de représentants de $\mathscr{C}\ell^+(F)$ telle que celle choisie en section 2, et avec :

$$(8.22)\quad M^{\mathrm{Kloost}}_{2,\mathfrak{a},\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2}(\mathfrak{q}) = 2N(\mathfrak{q})^{1/2} \sum_{\nu\in(\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}} G_{\nu\mathfrak{a}}$$
$$\times \sum_{N(\mathfrak{d})\leqslant M} \sum_{\substack{\xi_1\in(\mathfrak{b}_1^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\xi_1\mathfrak{b}_1)\leqslant M/N(\mathfrak{d})}} \sum_{\substack{\xi_2\in(\mathfrak{b}_2^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\xi_2\mathfrak{b}_2)\leqslant M/N(\mathfrak{d})}} P_{\xi_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}} P_{\xi_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}}$$
$$\sum_{\substack{\overline{\mathfrak{c}}^2=\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}\\ c\in\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}\\ \varepsilon\in\mathcal{O}_F^{\times +}/\mathcal{O}_F^{\times 2}}} \frac{\mathcal{K}\ell(\varepsilon\nu,\mathfrak{a};\xi_1\xi_2,\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2;c,\mathfrak{c})}{N(c\mathfrak{c})} J_{\boldsymbol{k-1}}\left(4\pi\frac{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon\nu\xi_1\xi_2}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}^{-2}]}}{|\boldsymbol{c}|}\right).$$

Fixons donc $\mathfrak{a},\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ et $\mathfrak{c}$ tel que $\mathfrak{c}^2\sim\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$. La somme finie en ε n'a pas d'incidence analytique ; on doit donc traiter :

$$(8.23)\quad \mathrm{Err}_1(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{q})^{1/2} \sum_{\nu\in(\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}} G_{\nu\mathfrak{a}}$$
$$\times \sum_{N(\mathfrak{d})\leqslant M} \sum_{\substack{\xi_1\in(\mathfrak{b}_1^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\xi_1\mathfrak{b}_1)\leqslant M/N(\mathfrak{d})}} \sum_{\substack{\xi_2\in(\mathfrak{b}_2^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\xi_2\mathfrak{b}_2)\leqslant M/N(\mathfrak{d})}} P_{\xi_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}} P_{\xi_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}}$$
$$\sum_{c\in\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}} \frac{\mathcal{K}\ell(\nu,\mathfrak{a};\xi_1\xi_2,\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2;c,\mathfrak{c})}{N(c)} J_{\boldsymbol{k-1}}\left(4\pi\frac{\sqrt{\boldsymbol{\nu\xi_1\xi_2}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}^{-2}]}}{|\boldsymbol{c}|}\right).$$

Bien entendu, on supposera que le système ν,ξ_1,ξ_2 satisfait au lemme 2.1, et on utilisera aussi (7.9) dans les mêmes circonstances.

Dans un premier temps, on réduit la somme en ν, grâce à l'estimation (8.1). On a donc, en utilisant la borne de Weil pour les sommes de Kloosterman, comme le fait [25] dans le lemme 3.2 :

$$(8.24)\quad N(\mathfrak{q})^{1/2} \sum_{N(\nu\mathfrak{a})\geqslant N(\mathfrak{q})^{1+\varepsilon}} \sum_{\mathfrak{d}} \sum_{\xi_1,\xi_2} \frac{G(N(\nu)/N(\mathfrak{q}))\tau(\nu)}{N(\nu)^{1/2}} P_{\xi_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}} P_{\xi_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}}$$
$$\times \sum_{c\in\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}} \frac{\mathcal{K}\ell(\nu,\mathfrak{a};\xi_1\xi_2,\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2;c,\mathfrak{c})}{N(c)} J_{\boldsymbol{k-1}}\left(4\pi\frac{\sqrt{\boldsymbol{\nu\xi_1\xi_2}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}^{-2}]}}{|\boldsymbol{c}|}\right)$$
$$\ll_\varepsilon \exp(-CN(\mathfrak{q})^\varepsilon)$$

pour tout $\varepsilon>0$ fixé (on fixe ici un valeur pour ε et on trouvera à la fin de ce calcul une condition simple pour assurer la petitesse du terme de

Kloosterman), ce qui réduit l'étude à :

(8.25)
$$\mathrm{Err}_2(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{q})^{1/2} \sum_{N(\nu\mathfrak{a})\leqslant N(\mathfrak{q})^{1+\varepsilon}} \sum_{\mathfrak{d}} \sum_{\xi_1,\xi_2} \frac{G(N(\nu)/N(\mathfrak{q}))\tau(\nu)}{N(\nu)^{1/2}} P_{\xi_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}} P_{\xi_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}}$$
$$\times \sum_{\eta\in\mathcal{O}_F^{\times+}} \sum_{c\in\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times+}} \frac{\mathcal{K}\ell(\nu,\mathfrak{a};\xi_1\xi_2,\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2;c\eta,\mathfrak{c})}{N(c)} J_{\boldsymbol{k-1}}\left(4\pi\frac{\sqrt{\boldsymbol{\nu\xi_1\xi_2}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}^{-2}]}}{|\boldsymbol{c\eta}|}\right).$$

Pour étudier cette somme, on utilise l'expression intégrale suivante :

$$(8.26)\qquad J_{\boldsymbol{k-1}}(\boldsymbol{x}) = \int_{(\boldsymbol{\sigma})} \frac{\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k-1-s}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k-1+s}}{2}+\mathbf{1}\right)} \left(\frac{\boldsymbol{x}}{2}\right)^{\boldsymbol{s}} d\boldsymbol{s}$$
$$= \prod_{j=1}^{d} \int_{(\sigma_j)} \frac{\Gamma\left(\frac{k_j-1-s_j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_j-1+s_j}{2}+1\right)} \left(\frac{x_j}{2}\right)^{s_j} ds_j$$

où l'on choisit $\sigma_j = 1$ si $|\eta_j| \leqslant 1$ et $\sigma_j = 1+\delta$ sinon, avec $\delta > 0$, de sorte que la somme sur η soit convergente (toujours grâce à [19], page 136). Cela donne :

$$(8.27)\quad \mathrm{Err}_2(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{q})^{1/2} \sum_{\eta\in\mathcal{O}_F^{\times+}} \int_{(\boldsymbol{\sigma})} \frac{\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k-1-s}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k-1+s}}{2}+\mathbf{1}\right)} \left(\frac{4\pi[\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}^{-2}]}{\boldsymbol{\eta}}\right)^{\boldsymbol{s}}$$
$$\sum_{\substack{\nu\in(\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times+}\\ N(\nu)\leqslant N(\mathfrak{q})^{1+\varepsilon}}} G_{\nu\mathfrak{a}}\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{s}/2} \sum_{N(\mathfrak{d})\leqslant M} \sum_{\substack{\xi_1\in(\mathfrak{b}_1^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times+}\\ N(\xi_1\mathfrak{b}_1)\leqslant M/N(\mathfrak{d})}} \sum_{\substack{\xi_2\in(\mathfrak{b}_2^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times+}\\ N(\xi_2\mathfrak{b}_2)\leqslant M/N(\mathfrak{d})}}$$
$$P_{\xi_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}} P_{\xi_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}} (\boldsymbol{\xi_1\xi_2})^{\boldsymbol{s}/2} \sum_{c\in\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}} \frac{\mathcal{K}\ell(\nu,\mathfrak{a};\xi_1\xi_2,\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2;c,\mathfrak{c})}{N(c)\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{s}/2}} \frac{d\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{s}}.$$

Considérons l'expression interne, formée par les sommes en $\mathfrak{d},\nu,\xi_1,\xi_2,c$. En ouvrant les sommes de Kloosterman, elle s'écrit :

$$R(s) = \sum_{c\in\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times+}} \frac{1}{N(c)\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{s}}} \sum_{N(\mathfrak{d})\leqslant M} \sum_{x\in(\mathfrak{a}\mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{c}^{-1}/\mathfrak{a}\mathfrak{D}_F^{-1}c)^{\times}} \sum_{\substack{\nu\in(\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times+}\\ N(\nu)\leqslant N(\mathfrak{q})^{1+\varepsilon}}} G_{\nu\mathfrak{a}}$$
$$\times \boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{s}/2}\psi_\infty\left(\frac{\boldsymbol{x\nu}}{\boldsymbol{c}}\right) \sum_{\substack{\xi_1\in(\mathfrak{b}_1^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times+}\\ N(\xi_1\mathfrak{b}_1)\leqslant M/N(\mathfrak{d})}} P_{\xi_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}} P_{\xi_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}} (\boldsymbol{\xi_1\xi_2})^{\boldsymbol{s}/2} \psi_\infty\left(\frac{\bar{\boldsymbol{x}}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}^{-2}]\boldsymbol{\xi_1\xi_2}}{\boldsymbol{c}}\right).$$

Posons momentanément :

$$X_{\nu\mathfrak{a}} = G_{\nu\mathfrak{a}}\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{s}/2}\psi_\infty\left(\frac{\boldsymbol{x\nu}}{\boldsymbol{c}}\right)$$

$$Y_{\xi_1,\xi_2,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{d}} = P_{\xi_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}}P_{\xi_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}}(\boldsymbol{\xi_1\xi_2})^{\boldsymbol{s}/2}\psi_\infty\left(\frac{\bar{\boldsymbol{x}}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}^{-2}]\boldsymbol{\xi_1\xi_2}}{\boldsymbol{c}}\right).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à la somme en x donne :

$$R(s) \leqslant \sum_{N(\mathfrak{d})\leqslant M}\ \sum_{c\in\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times+}} \frac{1}{N(c)|\boldsymbol{c}|^{\Re(\boldsymbol{s})}}$$
$$\left(\sum_{x\in(\mathfrak{a}\mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{c}^{-1}/\mathfrak{a}\mathfrak{D}_F^{-1}c)^\times}\left|\sum_{\substack{\nu\in(\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times+}\\ N(\nu)\leqslant N(\mathfrak{q})^{1+\varepsilon}}} X_{\nu\mathfrak{a}}\right|^2\right)^{1/2}$$
$$\left(\sum_{x\in(\mathfrak{a}\mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{c}^{-1}/\mathfrak{a}\mathfrak{D}_F^{-1}c)^\times}\left|\sum_{\substack{\xi_1\in(\mathfrak{b}_1^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times+}\\ N(\xi_1\mathfrak{b}_1)\leqslant M/N(\mathfrak{d})}} Y_{\xi_1,\xi_2,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{d}}\right|^2\right)^{1/2}.$$

On fait maintenant usage du grand crible additif suivant (*cf.* [11], p. 178, (7.30) ou [7]) :

$$\text{(8.28)}\qquad \sum_{\boldsymbol{d}\in\mathbb{Z}^d/\boldsymbol{c}\mathbb{Z}^d}\left|\sum_{\substack{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d\\ n_j\leqslant X}} y_{\boldsymbol{n}}\mathrm{e}\left(\frac{\boldsymbol{d.n}}{\boldsymbol{c}}\right)\right|^2 \ll \left(N(\boldsymbol{c})+X^d\right)\sum_{\substack{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d\\ n_j\leqslant X}}|y_{\boldsymbol{n}}|^2.$$

L'hypothèse faite sur les choix de ν, ξ_1, ξ_2 (à savoir que leurs composantes sont bornées par la norme, selon le lemme 2.1 de la section 2.1) permet de l'appliquer ici et donne, en se souvenant que $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}$ ont été fixés au début :

$$\sum_{x\in(\mathfrak{a}\mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{c}^{-1}/\mathfrak{a}\mathfrak{D}_F^{-1}c)^\times}\left|\sum_{\substack{\nu\in(\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times+}\\ N(\nu)\leqslant N(\mathfrak{q})^{1+\varepsilon}}} X_{\nu\mathfrak{a}}\right|^2$$
$$\ll \left(N(c)+N(\mathfrak{q})^{1+\varepsilon}\right)\sum_{N(\nu)\leqslant N(\mathfrak{q})^{1+\varepsilon}}|G_{\nu\mathfrak{a}}\boldsymbol{\nu}^{\Re(\boldsymbol{s})}|^2$$

$$\sum_{x\in(\mathfrak{a}\mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{c}^{-1}/\mathfrak{a}\mathfrak{D}_F^{-1}c)^\times}\Big|\sum_{\substack{\xi_j\in(\mathfrak{b}_j^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\xi_j\mathfrak{b}_j)\leqslant M/N(\mathfrak{d})}} Y_{\xi_1,\xi_2,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{d}}\Big|^2$$
$$\ll \sum_{\substack{\xi_j\in(\mathfrak{b}_j^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\xi_j\mathfrak{b}_j)\leqslant M/N(\mathfrak{d})}} \tau(\xi_1\xi_2)|P_{\xi_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}}P_{\xi_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{d}}|^2|\boldsymbol{\xi_1\xi_2}|^{\Re(\boldsymbol{s})}.$$

En remplaçant $G_{\nu\mathfrak{a}}$ et $P_{\xi_j\mathfrak{b}_j}$ par leur valeur, il vient :

(8.29)
$$R(s)\ll\sum_{N(\mathfrak{d})\leqslant M}N(\mathfrak{d})^{-1}\sum_{c\in\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times +}}\left(N(c)\boldsymbol{c}^{\Re(\boldsymbol{s})}\right)^{-1}\left(N(c)+N(\mathfrak{q})^{1+\varepsilon}\right)^{\frac12}$$
$$\times\left(\sum_{\substack{\nu\in(\mathfrak{a}^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\nu)\leqslant N(\mathfrak{q})^{1+\varepsilon}}}|G(N(\nu\mathfrak{a})/N(\mathfrak{q}))|^2\tau(\nu\mathfrak{a})^2|\nu|^{\Re(\boldsymbol{s})-1}\right)^{\frac12}\left(N(c)+\left(\frac{M}{N(\mathfrak{d})}\right)^2\right)^{\frac12}$$
$$\times\left(\sum_{\substack{\xi_j\in(\mathfrak{b}_j^{-1})^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\xi_j\mathfrak{b}_j)\leqslant M/N(\mathfrak{d})}}\frac{\tau(\xi_1\xi_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)P\Big(\frac{\log(M/N(\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1\xi_1))}{\log(M)}\Big)^2P\Big(\frac{\log(M/N(\mathfrak{d}\mathfrak{b}_2\xi_2))}{\log(M)}\Big)^2|\xi_1\xi_2|^{\Re(\boldsymbol{s})}}{\psi(\mathfrak{d}\xi_1\mathfrak{b}_1)^2\psi(\mathfrak{d}\mathfrak{b}_2\xi_2)^2|\xi_1\xi_2|}\right)^{\frac12}$$
$$\ll\sum_{c\in\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times +}}\left(N(c)\boldsymbol{c}^{\Re(\boldsymbol{s})}\right)^{-1}\left(N(c)+N(\mathfrak{q})^{1+\varepsilon}\right)^{1/2}N(\mathfrak{q})^{(1+\varepsilon)(1+d\delta)/2}$$
$$\times\left(N(c)+\left(\frac{M}{N(\mathfrak{d})}\right)^2\right)^{1/2}M^{1+d\delta}\ll N(\mathfrak{q})^{-1-\delta}N(\mathfrak{q})^{(1/2+\varepsilon/2)(1+d\delta)}N(\mathfrak{q})^{\frac{\Delta}{2}(1+d\delta)}$$
$$\ll N(\mathfrak{q})^{-\alpha}$$

pour un $\alpha>0$ dépendant de $\Delta,\varepsilon,\delta$, dès que ε,δ sont choisis assez petits. Cette dernière inégalité implique que :

$$\mathrm{Err}_2(\mathfrak{q})\ll N(\mathfrak{q})^{1/2-\alpha} \tag{8.30}$$

et achève donc cette section.

9. Conclusion

9.1. Fin de la preuve du théorème 1.3

Les estimations (1.6) et (1.7) étant maintenant prouvées, on a donc, comme dit en introduction :

$$\liminf_{N(\mathfrak{q})\to\infty} \sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{k}}^{h} \mathbb{1}_{\Lambda(1/2,\pi)\neq 0} \geqslant \frac{\Delta P'(1)^2}{2(||P''||_{L^2(0,1)} + \Delta P'(1)^2)} \tag{9.1}$$

et ce pour tous $\Delta \in]0,1[$ tel que $N(\mathfrak{q})^{\Delta/2} \notin \mathbf{N}$ et P polynôme d'ordre au moins deux en zéro. Ceci entraîne :

$$\liminf_{N(\mathfrak{q})\to\infty} \sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{k}}^{h} \mathbb{1}_{\Lambda(1/2,\pi)\neq 0} \geqslant \sup_{\substack{P \\ P(0)=P'(0)=0}} \frac{1}{2\left(1+\frac{\int_0^1 P''(t)^2dt}{P'(1)^2}\right)} \tag{9.2}$$

or, d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$P'(1)^2 = \left(\int_0^1 P''(t)dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 P''(t)^2dt$$

avec égalité si et seulement si P'' est constante. Ceci donne donc l'inégalité

$$\liminf_{N(\mathfrak{q})\to\infty} \sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{k}}^{h} \mathbb{1}_{\Lambda(1/2,\pi)\neq 0} \geqslant \frac{1}{4} \tag{9.3}$$

obtenue pour le polynôme optimal $P(X) = X^2$.

9.2. L'inégalité de grand crible

Venons-en maintenant au grand crible, dont la preuve suit le même modèle que ce qui précède. Soit $x = (x_{\mathfrak{n}})$ une suite de nombres complexes, X un réel positif, et $\mathfrak{q}$ un idéal quelconque. On écrit, par positivité :

$$\begin{aligned} \sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{k}}^{h} \Big|\sum_{\mathfrak{n}\leqslant X} \lambda_\pi(\mathfrak{n})x_{\mathfrak{n}}\Big|^2 &\leqslant \sum_{\varphi}^{h} \Big| \sum_{\overline{\mathfrak{a}}} \sum_{\substack{\nu\in(\mathfrak{a}^\times)^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +} \\ N(\nu\mathfrak{a})\leqslant X}} \lambda(\nu,\mathfrak{a},\varphi)x_{\nu\mathfrak{a}}\Big|^2 \\ &= \sum_{\varphi}^{h} \sum_{\substack{\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{b}} \\ \nu,\mu}} \lambda(\nu,\mathfrak{a},\varphi)\overline{\lambda(\mu,\mathfrak{b},\varphi)}x_{\nu,\mathfrak{a}}\overline{x_{\mu\mathfrak{b}}} \end{aligned} \tag{9.4}$$

φ parcourant une base orthogonale de $\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$. Comme précédemment, $\{\mathfrak{a},\mathfrak{b}\}$ désignent une famille de représentants du groupe des classes étroit et on a posé $\mathfrak{n}=\nu\mathfrak{a},\mathfrak{m}=\mu\mathfrak{b}$, ν et μ satisfaisant au lemme 2.1. On applique la formule de Petersson (théorème 5.5) :

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h}\Big|\sum_{\mathfrak{n}\leqslant X}\lambda_\pi(\mathfrak{n})x_{\mathfrak{n}}\Big|^2\leqslant\sum_{\substack{N(\mathfrak{n})\leqslant X\\ N(\mathfrak{m})\leqslant X}}x_{\mathfrak{n}}\overline{x_{\mathfrak{m}}}\mathbb{1}_{\mathfrak{n}=\mathfrak{m}}+\frac{C}{|\mathfrak{d}_F|^{1/2}}$$
$$\times\sum_{\bar{\mathfrak{a}},\bar{\mathfrak{b}}}\sum_{\substack{\nu\in(\mathfrak{a}^{-1})^{\gg0}/\mathcal{O}_F^{\times+}\\ \mu\in(\mathfrak{b}^{-1})^{\gg0}/\mathcal{O}_F^{\times+}\\ N(\nu\mathfrak{a}),N(\mu\mathfrak{b})\leqslant X}}\sum_{\mathfrak{c},c,\varepsilon}\frac{\mathcal{K}\ell(\nu,\mathfrak{a};\mu,\mathfrak{b};c,\mathfrak{c})}{N(c\mathfrak{c})}J_{\boldsymbol{k-1}}\left(4\pi\frac{\sqrt{\varepsilon\mu\nu[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}]}}{|c|}\right)x_{\nu\mathfrak{a}}\overline{x_{\mu\mathfrak{b}}}.$$

Le premier terme est exactement $||x_X||_2^2$. On effectue le calcul du second terme pour chaque valeur de $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ car il n'y en a qu'un nombre fini. D'autre part, les difficultés étant similaires à celles rencontrées lors de l'estimation du deuxième moment, on supposera que $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=\mathfrak{c}=\mathcal{O}_F$ pour simplifier les notations. On traite donc :

$$\begin{aligned}K(X)&=\sum_{\substack{\nu\in\mathcal{O}_F^{\gg0}/\mathcal{O}_F^{\times+}\\ N(\nu)\leqslant X}}\sum_{\substack{\mu\in\mathcal{O}_F^{\gg0}/\mathcal{O}_F^{\times+}\\ N(\mu)\leqslant X}}\sum_{c\in\mathfrak{q}\setminus\{0\}}\frac{\mathcal{K}\ell(\nu;\mu;c)}{N(c)}J_{\boldsymbol{k-1}}\left(4\pi\frac{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon\mu\nu}}}{|\boldsymbol{c}|}\right)x_\nu\overline{x_\mu}\\ &=\sum_{c\in\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times+}}\sum_{\eta\in\mathcal{O}_F^{\times+}}\int_{\Re(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{\sigma}}\frac{(4\pi)^{\boldsymbol{s}}\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k-1-s}}{2}\right)}{|\boldsymbol{c\eta}|^{\boldsymbol{s}}\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k+s+1}}{2}\right)}\\ &\qquad\sum_{\nu,\mu}\frac{\mathcal{K}\ell(\nu;\mu;c\eta)}{N(c)}x_\nu\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{s}/2}\overline{x_\mu}\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{s}/2}d\boldsymbol{s}\end{aligned}$$

en choisissant $\boldsymbol{\sigma}$ comme lors de (8.26), de sorte que la somme en η soit convergente, et on ouvre les sommes de Kloosterman (la démarche est la même que celle qui nous a permis de traiter le terme de Kloosterman du deuxième moment) :

$$\begin{aligned}
|K(X)| =& \Bigg| \sum_{c\in\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times +}} \int_{\Re(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{\sigma}} \frac{(4\pi)^{\boldsymbol{s}}\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k-1-s}}{2}\right)}{N(c)|\boldsymbol{c}|^{\boldsymbol{s}}\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k+s+1}}{2}\right)} \\
& \times \sum_x \sum_{N(\nu),N(\mu)\leqslant X} \psi_\infty\left(\frac{x\nu}{c}\right) x_\nu \boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{s}/2} \psi_\infty\left(\frac{\overline{x}\mu}{c}\right) \overline{x_\mu}\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{s}/2} d\boldsymbol{s}\Bigg| \\
& \leqslant \sum_{c\in\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times +}} \int_{\Re(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{\sigma}} \frac{(4\pi)^{\boldsymbol{\sigma}}|\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k-1-s}}{2}\right)|}{N(c)|\boldsymbol{c}|^{\boldsymbol{\sigma}}|\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k+s+1}}{2}\right)|} \\
& \times \left(\sum_x \Big| \sum_{N(\nu)\leqslant X} \psi_\infty\!\left(\frac{x\nu}{c}\right) x_\nu \boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{s}/2}\Big|^2 \times \sum_x \Big| \sum_{N(\mu)\leqslant X} \psi_\infty\!\left(\frac{\overline{x}\mu}{c}\right) \overline{x_\mu}\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{s}/2}\Big|^2\right)^{\frac{1}{2}} d\boldsymbol{s} \\
& \ll \sum_{c\in\mathfrak{q}\setminus\{0\}/\mathcal{O}_F^{\times +}} \int_{\Re(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{\sigma}} \frac{|\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k-1-s}}{2}\right)|}{N(c)|\boldsymbol{c}|^{\boldsymbol{\sigma}}|\Gamma\left(\frac{\boldsymbol{k+s+1}}{2}\right)|}(N(c)+X)\sum_{N(\nu)\leqslant X}|x_\nu|^2\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{s}}d\boldsymbol{s} \\
& \ll \frac{X^\sigma}{N(\mathfrak{q})^\sigma}\left(1+\frac{X}{N(\mathfrak{q})}\right)||x_X||_2^2.
\end{aligned}$$

Avec le choix de σ précédent, et si $X \leqslant N(\mathfrak{q})$, on trouve bien :

$$\sum_{\varphi}^{h} \Bigg| \sum_{\substack{\nu\in(\overline{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}^\times)^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\nu\mathfrak{a})\leqslant X}} \lambda(\nu,\mathfrak{a},\varphi)x_{\nu\mathfrak{a}}\Bigg|^2 \ll \left(1+\frac{X}{N(\mathfrak{q})}\right)||x_X||_2^2.$$

Pour $X > N(\mathfrak{q})$, on peut adapter une astuce due à Iwaniec : cela consiste en le choix d'un premier $\mathfrak{p}$ tel que $X \leqslant N(\mathfrak{q}\mathfrak{p})$, tout en ayant $N(\mathfrak{p}\mathfrak{q}) \ll X$. On utilise alors l'injection $\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}}^{\boldsymbol{k}}$ (non isométrique !) : par cette injection, on a $||\varphi||^2_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}}} = [K_0(\mathfrak{q}) : K_0(\mathfrak{q}\mathfrak{p})].||\varphi||^2_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}}$ avec

$$[K_0(\mathfrak{q}) : K_0(\mathfrak{q}\mathfrak{p})] \leqslant N(\mathfrak{p})+1$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\varphi}^{h} \Bigg| \sum_{\substack{\nu\in(\overline{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}^\times)^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\nu\mathfrak{a})\leqslant X}} \lambda(\nu,\mathfrak{a},\varphi)x_{\nu\mathfrak{a}}\Bigg|^2 \\
&\leqslant (N(\mathfrak{p})+1) \sum_{\varphi\in \mathrm{BO}(\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}})}^{h} \Bigg| \sum_{\substack{\nu\in(\overline{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}^\times)^{\gg 0}/\mathcal{O}_F^{\times +}\\ N(\nu\mathfrak{a})\leqslant X}} \lambda(\nu,\mathfrak{a},\varphi)x_{\nu\mathfrak{a}}\Bigg|^2 \\
&\ll (N(\mathfrak{p})+1)\left(1+\frac{X}{N(\mathfrak{q}\mathfrak{p})}\right)||x_X||_2^2 \ll \left(1+\frac{X}{N(\mathfrak{q})}\right)||x_X||_2^2.
\end{aligned}$$

Remarque 9.1. — Nous avons en fait démontré une inégalité de grand crible pour une base orthogonale de $\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$. La même méthode fonctionne dans le cas d'un caractère central non trivial (avec la modification qui s'impose à la formule de Petersson). On peut étudier des inégalités de grand crible, pour des familles de représentations plus générales, avec la formule de Kuznetsov. Typiquement, ces inégalités donnent des majorations fines du quatrième moment non amolli (*cf.* [19]). En particulier, la méthode présentée ici nous permet d'obtenir :

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} L(1/2,\pi)^4 \ll (\log(N(\mathfrak{q}))^6$$

ce qui est le bon ordre de grandeur ; pour avoir un équivalent, il faudrait avoir les moyens d'étudier des termes "non-diagonaux" (ce qui est a été fait pour $F=\mathbf{Q}$ par Kowalski, Michel et VanderKam [17], inspirés par des travaux de Duke, Friedlander et Iwaniec dans des problèmes similaires).

10. Non-annulation de la dérivée

L'objet de cette partie est d'expliquer la preuve de l'inégalité (1.5) du théorème 1.3. On a la proposition suivante :

Proposition 10.1. — *Soit $\boldsymbol{k}\in 2\mathbf{N}_{\geqslant 1}^{d}$. Quand $\mathfrak{q}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}_F$, on a :*

$$\liminf_{N(\mathfrak{q})\to\infty} \sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h} \mathbb{1}_{\varepsilon_\pi=-1,L'(1/2,\pi_f)\neq 0} \geqslant \frac{7}{16}. \tag{10.1}$$

On rappelle que $L(s,\pi_f)$ désigne la fonction L finie, série de Dirichlet quand $\Re(s)>1$, $\varepsilon_\pi\in\{1,-1\}$ est le signe de l'équation fonctionnelle. En se souvenant que $\Lambda(s,\pi)=N(\mathrm{q}_\pi)^{s/2}L(s,\pi_\infty)L(s,\pi_f)$ satisfait l'équation fonctionnelle (1.1), on en déduit que

$$\{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}},\varepsilon_\pi=-1 \text{ et } L'(1/2,\pi_f)\neq 0\}=\{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}},\Lambda'(1/2,\pi)\neq 0\}. \tag{10.2}$$

Les valeurs spéciales $\Lambda'(1/2,\pi)$ et $\Lambda'(1/2,\pi)^2$ s'établissent pareillement à (4.6) et (4.8).

Posons pour $y,y_1,y_2>0$:

$$\mathcal{F}(y):=\frac{1}{2i\pi}\int_{(3/2)}\frac{d}{ds}\left(y^{-s}L(s+1/2,\pi_\infty)\right)\frac{ds}{s} \tag{10.3}$$

$$\mathcal{G}(y_1,y_2):=\frac{1}{2i\pi}\int_{(3/2)}\frac{d}{ds}\left(y_1^{-s}L(s+1/2,\pi_\infty)\right)\cdot\frac{d}{ds}\left(y_2^{-s}L(s+1/2,\pi_\infty)\right)\frac{ds}{s}.$$

On trouve :

Lemme 10.2. — *Soit π une forme modulaire de poids $\boldsymbol{k} \in 2\mathbf{N}^d_{\geqslant 1}$, conducteur $\mathfrak{q}$. On a :*

$$\Lambda'(1/2,\pi) = \frac{(1-\varepsilon_\pi)N(\mathfrak{q})^{1/4}}{2i\pi} \times \sum_{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F} \frac{\lambda_\pi(\mathfrak{n})}{\sqrt{N(\mathfrak{n})}} \mathcal{F}(N(\mathfrak{n})/N(\mathfrak{q})^{1/2})$$

$$\Lambda'(1/2,\pi)^2 = \frac{2N(\mathfrak{q})^{1/2}}{2i\pi} \sum_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}\subset\mathcal{O}_F} \frac{\lambda_\pi(\mathfrak{n})\lambda_\pi(\mathfrak{m})}{\sqrt{N(\mathfrak{n}\mathfrak{m})}} \mathcal{G}(N(\mathfrak{n})/N(\mathfrak{q})^{1/2}, N(\mathfrak{m})/N(\mathfrak{q})^{1/2}).$$

On se donne un amollisseur $(\mathrm{M}(\pi))_{\pi\in\Pi^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}}$ de la même forme que lors des dernières sections, et on étudie les moments amollis, pour $\boldsymbol{k} \in \mathbf{N}^d$ pair fixé :

Proposition 10.3. — *Soit $\boldsymbol{k} \in 2\mathbf{N}^d_{\geqslant 1}$. Pour $\mathfrak{q}$ tendant vers l'infini parmi les idéaux premiers, $\Delta \in]0,1[$ fixé tel que $M = N(\mathfrak{q})^{\Delta/2} \notin \mathbf{N}$, on a les asymptotiques :*

$$\mathcal{M}_1(\mathfrak{q}) := \sum_{\pi\in\Pi^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}}^{h} \Lambda'(1/2,\pi)\mathrm{M}(\pi) = C_{\boldsymbol{k}} N(\mathfrak{q})^{1/4} \left(P(1) + \frac{P'(1)}{\Delta} + \mathcal{O}(\log(N(\mathfrak{q})^{-1})\right) \tag{10.4}$$

(10.5)

$$\mathcal{M}_2(\mathfrak{q}) := \sum_{\pi\in\Pi^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}}^{h} \Lambda'(1/2,\pi)^2\mathrm{M}(\pi)^2 = 2C^2_{\boldsymbol{k}} N(\mathfrak{q})^{1/2}$$
$$\times \left(\frac{1}{3\Delta^3}\int_0^1 P''(t)^2 dt + \frac{P'(1)^2}{\Delta^2} + \frac{2}{\Delta} P'(1)P(1) + P(1)^2 + \mathcal{O}(\log(N(\mathfrak{q})^{-1})\right).$$

avec $C_{\boldsymbol{k}} = \frac{\zeta_F(2)\Gamma(\boldsymbol{k}/2)}{(2\pi)^{\boldsymbol{k}/2}\,\mathrm{res}_1\,\zeta_F}$

La preuve est très proche de l'article [18] modulo le passage aux sommes d'idéaux et le traitement des sommes de Kloosterman.

10.1. Le premier moment

Montrons l'estimation concernant $\mathcal{M}_1(\mathfrak{q})$. On écrit donc :

$$\mathcal{M}_1(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{\substack{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F\\ N(\mathfrak{m})\leqslant M}} \frac{\mathcal{F}\left(N(\mathfrak{n})/N(\mathfrak{q})^{1/2}\right)}{\sqrt{N(\mathfrak{n})}} P_{\mathfrak{m}} \times \sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{k}}^{h} (1-\varepsilon_\pi)\lambda_\pi(\mathfrak{n})\lambda_\pi(\mathfrak{m}) \tag{10.6}$$

avec $M = N(\mathfrak{q})^{\frac{\Delta}{2}}$, $\Delta \in]0,1[$. Comme dans la section 7, ce terme se coupe en trois morceaux : un terme diagonal, un terme en sommes de Kloosterman (qui se majore comme alors), et un terme en les formes anciennes (qui se traite comme dans l'appendice).

Étudions donc le terme principal. Il s'écrit :

$$\mathcal{M}_1^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{N(\mathfrak{m})\leqslant M} \frac{\mathcal{F}\left(N(\mathfrak{m})/N(\mathfrak{q})^{1/2}\right) P_{\mathfrak{m}}}{N(\mathfrak{m})^{1/2}}. \tag{10.7}$$

Il est facile de vérifier que de l'expression définissant $\mathcal{F}$ seule contribue au terme principal la partie

$$\int_{(3/2)} \log(y^{-1}) y^{-s} L\left(s+1/2, \pi_\infty\right) \frac{ds}{s}.$$

De plus, on emprunte à [18] l'écriture :

$$\log(y^{-1}) = \int_{\mathscr{C}(\delta)} y^{-z} \frac{dz}{z^2}$$

$\mathscr{C}(\delta)$ étant un cercle de centre l'origine, de rayon $\delta > 0$ (petit). On a donc :

$$\mathcal{M}_1^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) = \frac{N(\mathfrak{q})^{1/4}}{(2i\pi)^3} \iiint_{(3/2)\times(1)\times\mathscr{C}(\delta)} N(\mathfrak{q})^{\frac{s+z}{2}} M^t L(s+1/2,\pi_\infty)\widehat{P_M}(t) \times \mathcal{D}_1(s,t,z)\frac{ds}{s}\frac{dt}{t}\frac{dz}{z^2} + \mathcal{O}\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{1/4}}{\log(N(\mathfrak{q}))}\right).$$

avec :

$$\mathcal{D}_1(s,t,z) = \sum_{\mathfrak{m}\subset\mathcal{O}_F} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{\psi(\mathfrak{m})N(\mathfrak{m})^{1+s+t+z}}. \tag{10.8}$$

On peut écrire

$$\mathcal{D}_1(s,t,z) = \zeta_F(1+s+t+z)^{-1}\eta(s,t,z)$$

avec η définie sur $\Re(s+t+z) \geqslant -1$ et $\eta(0,0,0) = \zeta_F(2)$. En changeant de droite en s de $(3/2)$ à $(-1/2)$, on a :

$$\mathcal{M}_1^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) = \frac{N(\mathfrak{q})^{1/4} L(1/2, \pi_\infty)}{(2i\pi)^2} \iint_{(1)\times\mathscr{C}(\delta)} N(\mathfrak{q})^{\frac{z}{2}} M^t \widehat{P_M}(t)$$
$$\times\, \zeta_F(1+t+z)^{-1} \eta(0,t,z) \frac{dt}{t} \frac{dz}{z^2} + \mathcal{O}\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{1/4}}{\log(N(\mathfrak{q}))}\right) + \mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/4-\eta})$$

pour $\eta > 0$ dépendant de Δ et δ. Si δ est choisi suffisamment petit, l'intégrale en z est le résidu en zéro :

$$\mathcal{M}_1^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) = \frac{N(\mathfrak{q})^{1/4} L(1/2, \pi_\infty)}{(2i\pi)} \int_{(1)} M^t \widehat{P_M}(t)$$
$$\times\, \mathrm{res}_{z=0}\left(N(\mathfrak{q})^{\frac{z}{2}} \frac{\eta(0,t,z)}{\zeta_F(1+t+z)}\right) \frac{dt}{t} + \mathcal{O}\left(N(\mathfrak{q})^{1/4} \log(N(\mathfrak{q}))^{-1}\right).$$

Le résidu vaut :

$$\log(N(\mathfrak{q})) \frac{\eta(0,t,0)}{\zeta_F(1+t)} + \frac{\eta'(0,t,0)}{\zeta_F(1+t)} - \frac{\zeta_F'(1+t)}{\zeta_F(1+t)^2} \eta(0,t,0)$$

et il est donc clair que le second terme est dominé par le premier. Soit :

$$\mathcal{M}_1^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) = \frac{N(\mathfrak{q})^{1/4} \log(N(\mathfrak{q})) L(1/2, \pi_\infty)}{(2i\pi)} \int_{(1)} M^t \widehat{P_M}(t) \frac{\eta(0,t,0)}{\zeta_F(1+t)} \frac{dt}{t}$$
$$- \frac{N(\mathfrak{q})^{1/4} L(1/2, \pi_\infty)}{(2i\pi)} \int_{(1)} M^t \widehat{P_M}(t) \frac{\zeta_F'(1+t)}{\zeta_F(1+t)^2} \eta(0,t,0) \frac{dt}{t} + \mathcal{O}\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{1/4}}{\log(N(\mathfrak{q}))}\right)$$
$$= \frac{N(\mathfrak{q})^{1/4} \zeta_F(2) L(1/2, \pi_\infty)}{\mathrm{res}_1 \zeta_F} \left(\frac{\log(N(\mathfrak{q}))}{\log(M)} P'(1) + P(1)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{1/4}}{\log(N(\mathfrak{q}))}\right).$$

10.2. Le deuxième moment

Montrons ici l'asymptotique de $\mathcal{M}_2(\mathfrak{q})$. On a pour $\pi \in \Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}$:

$$\Lambda'(1/2, \pi)^2 = \frac{2N(\mathfrak{q})^{1/2}}{2i\pi} \sum_{\mathfrak{d},\mathfrak{n}} \frac{\chi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{d})}{N(\mathfrak{d})} \frac{\lambda_\pi(\mathfrak{n})}{\sqrt{N(\mathfrak{n})}}$$
$$\times \sum_{\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2=\mathfrak{n}} \mathcal{G}\left(N(\mathfrak{n}_1\mathfrak{d})/N(\mathfrak{q})^{1/2}, N(\mathfrak{n}_2\mathfrak{d})/N(\mathfrak{q})^{1/2}\right).$$

Ici $\chi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{d})$ désigne le caractère principal en $\mathfrak{q}$, qui vaut 1 si $(\mathfrak{q},\mathfrak{d})=1$ et 0 si $\mathfrak{q}|\mathfrak{d}$. En s'inspirant de l'expression de $\mathrm{M}_2(\pi)$ déjà vue en section 8, on a :

$$\mathcal{M}_2(\mathfrak{q}) = 2N(\mathfrak{q})^{1/2}\sum_{\mathfrak{d},\mathfrak{n}}\sum_{\substack{N(\mathfrak{e})\leqslant M\\ N(\mathfrak{m}_1)\leqslant M/N(\mathfrak{e})\\ N(\mathfrak{m}_2)\leqslant M/N(\mathfrak{e})}}\frac{\chi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{d})}{N(\mathfrak{d})N(\mathfrak{n})^{1/2}}$$

$$\times\sum_{\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2=\mathfrak{n}}\mathcal{G}\Big(N(\mathfrak{n}_1\mathfrak{d})/N(\mathfrak{q})^{1/2},N(\mathfrak{n}_2\mathfrak{d})/N(\mathfrak{q})^{1/2}\Big)P_{\mathfrak{e}\mathfrak{m}_1}P_{\mathfrak{e}\mathfrak{m}_2}\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}}^{h}\lambda_\pi(\mathfrak{n})\lambda_\pi(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2).$$

On pose $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ pour appliquer la formule de Petersson, dont il sort un terme diagonal que nous allons traiter, et les termes en sommes de Kloosterman et en les formes anciennes que nous laisserons de côté pour les mêmes raisons que ci-dessus.

De l'intégrale intervenant dans l'écriture de $\mathcal{G}$, nous ne gardons que la partie qui contribue au terme principal, soit :

$$\mathcal{M}_2^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q})=2N(\mathfrak{q})^{1/2}\sum_{\mathfrak{d},\mathfrak{e},\mathfrak{m}}\frac{\chi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{d})}{N(\mathfrak{d})N(\mathfrak{e})N(\mathfrak{m})}\int_{(3/2)}\frac{N(\mathfrak{q})^s}{N(\mathfrak{d}^2\mathfrak{m})^s}L(s+1/2,\pi_\infty)^2\frac{ds}{s}$$

$$\sum_{\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2=\mathfrak{m}}\log\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{1/2}}{N(\mathfrak{m}_1\mathfrak{d})}\right)\log\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{1/2}}{N(\mathfrak{m}_2\mathfrak{d})}\right)$$

$$\times\sum_{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2=\mathfrak{m}}\frac{\mu(\mathfrak{e}\mathfrak{m}_1)\mu(\mathfrak{e}\mathfrak{m}_2)P\left(\frac{\log(M/N(\mathfrak{e}\mathfrak{m}_1))}{\log(M)}\right)P\left(\frac{\log(M/N(\mathfrak{e}\mathfrak{m}_2))}{\log(M)}\right)}{\psi(\mathfrak{e}\mathfrak{m}_1)\psi(\mathfrak{e}\mathfrak{m}_2)}$$

et donc, avec les écritures intégrales idoines :

$$\frac{2N(\mathfrak{q})^{1/2}}{(2i\pi)^5}\int_{(\frac{3}{2})\times(\frac{1}{2})\times(\frac{1}{2})\times\mathscr{C}(\delta)\times\mathscr{C}(\delta)}N(\mathfrak{q})^{s+\frac{z_1+z_2}{2}}M^{t_1+t_2}L(s+1/2,\pi_\infty)^2\widehat{P_M}(t_1)$$
$$\times\widehat{P_M}(t_2)\mathcal{D}(s,t_1,t_2,z_1,z_2)\frac{ds dt_1 dt_2 dz_1 dz_2}{st_1t_2z_1^2z_2^2}.$$

avec :

(10.9)

$$\mathcal{D}_2(s,t_1,t_2,z_1,z_2)=\sum_{\mathfrak{d},\mathfrak{e},\mathfrak{m}}\left\{\frac{\chi_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{d})}{N(\mathfrak{d})^{1+2s+z_1+z_2}}\frac{1}{N(\mathfrak{e})^{1+t_1+t_2}N(\mathfrak{m})^{1+s}}\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2=\mathfrak{m}}\frac{1}{N(\mathfrak{n}_1)^{z_1}N(\mathfrak{n}_2)^{z_2}}\right)\left(\sum_{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2=\mathfrak{m}}\frac{\mu(\mathfrak{m}_1\mathfrak{e})}{\psi(\mathfrak{e}\mathfrak{m}_1)N(\mathfrak{m}_1)^{t_1}}\frac{\mu(\mathfrak{m}_2\mathfrak{e})}{\psi(\mathfrak{e}\mathfrak{m}_2)N(\mathfrak{m}_2)^{t_2}}\right)\right\}.$$

Cette somme de Dirichlet multiple portant sur les idéaux entiers de $\mathcal{O}_F$ peut se factoriser simplement, et un calcul donne :
(10.10)

$$\mathcal{D}_2(s,t_1,t_2,z_1,z_2) = \frac{\zeta_F^{(\mathfrak{q})}(1+2s+z_1+z_2)\zeta_F(1+t_1+t_2)}{\prod_{i,j}\zeta_F(1+s+z_i+t_j)}\eta(s,t_1,t_2,z_1,z_2)$$

les valeurs de i,j étant toutes les combinaisons possibles de $1,2$, et η se prolongeant analytiquement sur un voisinage de zéro avec

$$\eta(0,0,0,0,0) = \zeta_F(2)^2.$$

On change d'abord la droite d'intégration de s de $\Re(s) = 3/2$ en $\Re(s) = -1/2$ ce qui donne :

$$\mathcal{M}_2^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) = \frac{2L(1/2,\pi_\infty)^2 N(\mathfrak{q})^{1/2}}{(2i\pi)^4}\int_{(\frac{1}{2})\times(\frac{1}{2})\times\mathscr{C}(\delta)\times\mathscr{C}(\delta)} N(\mathfrak{q})^{\frac{z_1+z_2}{2}} M^{t_1+t_2}$$
$$\times PM(t_1)\widehat{P_M}(t_2)\frac{\zeta_F(1+t_1+t_2)\zeta_F^{(\mathfrak{q})}(1+z_1+z_2)}{\prod_{i,j}\zeta_F(1+z_i+t_j)}\eta(0,t_1,t_2,z_1,z_2)$$
$$\frac{dt_1dt_2dz_1dz_2}{t_1t_2z_1^2z_2^2} + \mathcal{O}(N(\mathfrak{q})^{1/2-\delta}).$$

Ici comme précédemment $\mathscr{C}(\delta)$ est un cercle de petit rayon $\delta > 0$: on peut alors calculer les intégrales en z_1, z_2, car il n'y a que des résidus en 0. On doit donc calculer :

$$F(t_1,t_2) := \mathrm{res}_{(z_1,z_2)=(0,0)}\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{\frac{z_1+z_2}{2}}}{z_1^2z_2^2} \times \frac{\zeta_F(1+z_1+z_2)}{\prod_{i,j}\zeta_F(1+z_i+t_j)}\right).$$

D'abord, le résidu en $z_1 = 0$ vaut :

$$(10.11)\quad \frac{\log(N(\mathfrak{q}))}{2}\frac{\zeta_F(1+z_2)}{\prod_j\zeta_F(1+t_j)} + \frac{\zeta_F'(1+z_2)}{\prod_j\zeta_F(1+t_j)}$$
$$-\zeta_F(1+z_2)\frac{\zeta_F'(1+t_1)\zeta_F(1+t_2)+\zeta_F'(1+t_2)\zeta_F(1+t_1)}{\prod_j\zeta_F(1+t_j)^2}.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}F(t_1,t_2) =&\frac{\log(N(\mathfrak{q}))}{2\prod_j \zeta_F(1+t_j)} \times \mathrm{res}_{z_2=0}\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{\frac{z_2}{2}}\zeta_F(1+z_2)}{z_2^2\prod_j \zeta_F(1+z_2+t_j)}\right)\\ &+\frac{1}{\prod_j \zeta_F(1+t_j)} \times \mathrm{res}_{z_2=0}\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{\frac{z_2}{2}}\zeta_F'(1+z_2)}{z_2^2\prod_j \zeta_F(1+z_2+t_j)}\right)\\ &-\frac{\zeta_F'(1+t_1)\zeta_F(1+t_2)+\zeta_F'(1+t_2)\zeta_F(1+t_1)}{\prod_j \zeta_F(1+t_j)^2}\\ &\times \mathrm{res}_{z_2=0}\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{\frac{z_2}{2}}\zeta_F(1+z_2)}{z_2^2\prod_j \zeta_F(1+z_2+t_j)}\right).\end{aligned}$$

Les résidus en z_2 sont pénibles à calculer ; cependant une observation simple permet d'évacuer un bon nombre de termes ne participant pas au terme principal. Écrivons les développements en série entière $N(\mathfrak{q})^{z/2} = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$, $\prod_j \zeta_F(1+t_j+z)^{-1} = \sum_{\ell\geqslant 0} b_\ell(t_1,t_2)z^\ell$, et $\zeta_F(1+z) = \sum_{m\geqslant -1} c_m z^m$ et regardons par exemple :

$$\mathrm{res}_{z=0}\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{\frac{z}{2}}\zeta_F(1+z)}{z^2\prod_j \zeta_F(1+t_j+z)}\right) = c_{-1}(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)+c_0(a_1b_0+a_0b_1) + c_1a_0b_0.$$

Le terme a_k vaut $2^{-k}\log(N(\mathfrak{q}))^k$, en arrangeant les termes en : $b_0(c_{-1}a_2 + c_0a_1 + c_1a_0) + b_1 \times \ldots$, on voit que seul le terme produit par c_{-1} contribue. Ainsi, on peut remplacer $\zeta_F(1+z)$ (resp. $\zeta_F'(1+z)$) par $\mathrm{res}_1(\zeta_F)z^{-1}$ (resp. $-\mathrm{res}_1(\zeta_F)z^{-2}$). À cause de l'estimation

$$\int_{(1)} M^t\widehat{P_M}(t)t^n\frac{dt}{t} \sim (\log(M))^{-n}$$

on peut aussi remplacer $\zeta_F(1+t_1+t_2)$ par $\mathrm{res}_1(\zeta_F)(t_1+t_2)^{-1}$ (resp. $\zeta_F(1+t_j+z_2)$ par $\mathrm{res}_1(\zeta_F)(t_j+z_2)^{-1}$ et $\zeta_F(1+t_j)$ par $\mathrm{res}_1(\zeta_F)t_j^{-1}$). Cela se résume par la relation :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) =&\frac{2L(1/2,\pi_\infty)^2N(\mathfrak{q})^{1/2}}{(2i\pi)^2\,\mathrm{res}_1(\zeta_F)^2}\int_{(\frac12)\times(\frac12)}\frac{M^{t_1+t_2}\widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2)}{t_1+t_2}\\ &\times\eta(0,t_1,t_2,0,0)\left\{\frac{\log(N(\mathfrak{q}))t_1t_2}{2}\,\mathrm{res}_{z=0}\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{\frac{z}{2}}(z+t_1)(z+t_2)}{z^3}\right)\right.\\ &-t_1t_2\,\mathrm{res}_{z=0}\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{\frac{z}{2}}(z+t_1)(z+t_2)}{z^4}\right)\\ &\left.+(t_1+t_2)\,\mathrm{res}_{z=0}\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{\frac{z}{2}}(z+t_1)(z+t_2)}{z^3}\right)\right\}\frac{dt_1dt_2}{t_1t_2}.\end{aligned}$$

Tous calculs faits, cela donne (en réunissant les premier et troisième termes) :

$$\mathcal{M}_2^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) = \frac{2L(1/2,\pi_\infty)^2 N(\mathfrak{q})^{1/2}}{(2i\pi)^2 \operatorname{res}_1(\zeta_F)^2} \int_{(\frac{1}{2})\times(\frac{1}{2})} \frac{M^{t_1+t_2}\widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2)}{t_1+t_2}\eta(0,t_1,t_2,0,0)$$
$$\Bigg\{ \left(\frac{\log(N(\mathfrak{q}))^2}{8}t_1t_2 + \frac{\log(N(\mathfrak{q}))}{2}(t_1+t_2)+1\right)\left(\frac{\log(N(\mathfrak{q}))}{2}t_1t_2+t_1+t_2\right)$$
$$-\left(\frac{\log(N(\mathfrak{q}))^3}{8.3!}t_1t_2 + \frac{\log(N(\mathfrak{q}))^2}{2^2.2}(t_1+t_2)+\frac{\log(N(\mathfrak{q}))}{2}\right)t_1t_2\Bigg\}\frac{dt_1dt_2}{t_1t_2}$$
$$+\,\mathcal{O}\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{1/2}}{\log(N(\mathfrak{q}))}\right).$$

Avec les valeurs des intégrales ci-dessous déjà rencontrées lors de la section 8 (n est un entier positif) :

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\iint_{(1),(1)} M^{t_1+t_2}\widehat{P_M}(t_1)\widehat{P_M}(t_2)\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}dt_1dt_2 = \frac{1}{\log(M)^3}\int_0^1 P''(u)^2du$$
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(1)} M^t\widehat{P_M}(t)t^n\frac{dt}{t} = (\log(M))^{-n}P^{(n)}(1)$$

on trouve, après des calculs élémentaires, l'expression

$$\mathcal{M}_2^{\mathrm{diag}}(\mathfrak{q}) = \frac{2L(1/2,\pi_\infty)^2\ zeta_F(2)^2 N(\mathfrak{q})^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{res}_1(\zeta_F)^2}$$
$$\times\left(\frac{1}{3\Delta^3}\int_0^1 P''(u)^2du + \frac{1}{\Delta^2}P'(1)^2+\frac{2}{\Delta}P'(1)P(1)+P(1)^2\right)$$
$$+\,\mathcal{O}\left(\frac{N(\mathfrak{q})^{1/2}}{\log(N(\mathfrak{q}))}\right).$$

10.3. Optimisation

En faisant tendre Δ vers 1, on trouve donc que

$$\liminf_{N(\mathfrak{q})\to\infty}\sum_{\pi\in\Pi_{\mathfrak{q}}^{k}}^{h}\mathbb{1}_{\Lambda'(1/2,\pi)\neq 0} \geqslant \frac{\big(P(1)+P'(1)\big)^2}{2\Big(\frac{1}{3}\int_0^1 P''(t)^2dt+P'(1)^2+2P'(1)P(1)+P(1)^2\Big)}.$$

Il s'agit d'optimiser cette fonction sur tous les polynômes P satisfaisant à $P(0)=P'(0)=0$, ce qui est un exercice facile d'analyse fonctionnelle. D'abord, l'existence d'une fonction maximisante est garantie par le

Lemme 10.4. — *Soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert, $\mathscr{L}$ une forme linéaire continue et $\mathscr{Q}$ une forme quadratique continue et définie-positive. Alors la fonction*

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathfrak{H} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R} \\ h \longmapsto \frac{\mathscr{L}(h)^2}{\mathscr{Q}(h)+\mathscr{L}(h)^2} \end{array}$$

est bornée et atteint ses bornes.

Preuve. — Visiblement, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. On a $\varphi(\lambda h) = \varphi(h)$ pour tout λ non nul : ainsi $\sup\limits_{\mathfrak{H}\setminus\{0\}} \varphi = \sup\limits_{\mathbb{S}} \varphi$ avec $\mathbb{S} = \{h \in \mathfrak{H}, ||h|| = 1\}$. Soit $h_n \in \mathbb{S}$ une suite maximisante (telle que $\varphi(h_n) \to \sup \varphi$). À extraction près, on peut supposer que h_n tend faiblement vers h, avec $||h|| \leqslant 1$. Par convexité $\mathscr{Q}(h) \leqslant \liminf \mathscr{Q}(h_n)$, et donc puisque $\mathscr{L}(h_n) \to \mathscr{L}(h)$, $\varphi(h) \geqslant \lim \varphi(h_n)$. □

On se place donc dans l'espace de Sobolev

$$H^2(0,1) = \{f \in L^2(0,1), f', f'' \in L^2(0,1)\}$$

muni de sa norme hilbertienne

$$\|f\|^2 = \|f\|^2 + \|f'\|^2 + \|f''\|^2$$

et soit

$$\mathfrak{H} = \{f \in H^2(0,1), f(0) = f'(0) = 0\} \subset H^2(0,1)$$

muni de la topologie induite. Le lemme précédent s'applique avec $\mathscr{L}(f) = f(1) + f'(1)$ et $\mathscr{Q}(f) = \int_0^1 f''(t)^2 dt$: il existe donc une $f \in \mathfrak{H}$ maximisant notre fonctionnelle. Calculons maintenant f : on va voir que c'est en fait un polynôme.

Remarquons d'abord l'équivalence :

$$f \text{ maximise } \frac{\mathscr{L}(.)^2}{\mathscr{Q}(.) + \mathscr{L}(.)^2} \Longleftrightarrow f \text{ minimise } \frac{\mathscr{Q}(.)}{\mathscr{L}(.)^2}.$$

Puis, f doit annuler la diffŕentielle de $\frac{\mathscr{Q}(.)}{\mathscr{L}(.)^2}$, soit :

$$\forall h \in \mathfrak{H}, (f(1) + f'(1))^2 \int_0^1 f''h'' - (f(1) + f'(1))(h(1) + h'(1)) \int_0^1 f''^2 = 0$$

on doit avoir $f(1) + f'(1) \neq 0$, sans quoi $\mathscr{L}(f) = 0$, soit :

$$\forall h \in \mathfrak{H}, (f(1) + f'(1)) \int_0^1 f''h'' - (h(1) + h'(1)) \int_0^1 f''^2 = 0$$

une intégration par parties donne :

$$\forall h \in \mathfrak{H}, \left((f(1) + f'(1)) f''(1) - \int_0^1 f''^2 \right) h'(1)$$
$$= \int_0^1 \left((f(1) + f'(1)) f^{(3)}(t) + \int_0^1 f''^2 \right) h'(t) dt.$$

Il est bien connu qu'une telle égalité ne peut qu'être triviale, *i.e.*, qu'elle implique les deux équations :

$$\begin{cases} (f(1) + f'(1)) f^{(3)}(t) + \int_0^1 f''^2 = 0 \\ (f(1) + f'(1)) f''(1) - \int_0^1 f''^2 = 0. \end{cases}$$

La première dit que f est un polynôme de degré 3, donc de la forme $aX^3 + X^2$ (par homogénéité de la fonctionnelle) et en ajoutant les deux égalités, retirant le cas $f'(1) + f(1) = 0$ encore une fois, on trouve que $a = -1/6$ convient. Le polynôme $X^2 - X^3/6$ est donc le polynôme optimal recherché, pour lequel

$$\frac{\big(P(1) + P'(1)\big)^2}{2\left(\frac{1}{3}\int_0^1 P''(t)^2 dt + P'(1)^2 + 2P'(1)P(1) + P(1)^2\right)} = \frac{7}{16}$$

ce qui était annoncé.

11. Appendice

Nous allons ici expliquer le traitement des termes issus des formes anciennes, laissés de côté lors des sections 7, 8 et 10. Cet appendice s'appuie essentiellement sur l'article [12], qui construit dans un contexte plus général, sur $\mathbf{Q}$, une base orthogonale des formes anciennes. Avec la famille d'amollisseurs utilisée ici, cette base particulière permet de majorer la contribution des formes anciennes aux deux premiers moments amollis, et d'assurer qu'elles n'affectent pas l'équivalent trouvé.

On suppose ici que $\mathfrak{q}$ est premier (non nul) et $\boldsymbol{k} \in 2\mathbf{Z}^d_{\geqslant 1}$.

Rappelons que l'on a la décomposition suivante (*cf.* (4.3)) :

$$\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}} = \underbrace{\bigoplus_{\pi \in \Pi^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}} \pi^{K_\infty K_0(\mathfrak{q})}}_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}(new)} \oplus \underbrace{\bigoplus_{\pi \in \Pi^{\boldsymbol{k}}_{\mathcal{O}_F}} \pi^{K_\infty K_0(\mathfrak{q})}}_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}(\mathrm{old})}$$

et on supposera dorénavant que $\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}(\mathrm{old})$ est non vide (*i.e.*, qu'il existe des formes non ramifiées). Le théorème de Casselman assure que pour toute π

non ramifiée, $\dim_{\mathbf{C}} \pi^{K_\infty K_0(\mathfrak{q})} = 2$. Si φ_π désigne un vecteur nouveau, il fait évidemment partie de cet espace . Soit $\varpi_{\mathfrak{q}}$ une uniformisante de la place $\mathfrak{q}$, et notons aussi $\varpi_{\mathfrak{q}} = \mathrm{id}(\mathfrak{q})$ l'idèle valant $\varpi_{\mathfrak{q}}$ à la place $\mathfrak{q}$, 1 ailleurs : alors $\varphi_\pi\left(g\begin{pmatrix} \varpi_{\mathfrak{q}}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est aussi $K_0(\mathfrak{q})$-invariant. Comme ces deux fonctions sont linéairement indépendantes, elles forment une base de $\mathcal{H}_{\mathfrak{q}}^{\boldsymbol{k}}(\mathrm{old})$. Pour en déduire une base orthogonale, on a besoin du

Lemme 11.1. — *Soit $X(\mathfrak{q}) = Z(\mathbb{A}_F)\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{q})$. Soit $\pi \in \Pi_{\mathcal{O}_F}^{\boldsymbol{k}}$ et φ_π un élément spécial de π. On a :*

$$\int_{X(\mathfrak{q})} |\varphi_\pi(g)|^2 dg = \int_{X(\mathfrak{q})} \left|\varphi_\pi\left(g\begin{pmatrix} \varpi_{\mathfrak{q}}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right|^2 dg$$

$$\int_{X(\mathfrak{q})} \varphi_\pi(g)\overline{\varphi_\pi\left(g\begin{pmatrix} \varpi_{\mathfrak{q}}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)} dg = \frac{N(\mathfrak{q})^{1/2}\lambda_\pi(\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{q})+1}\int_{X(\mathfrak{q})} |\varphi_\pi(g)|^2 dg.$$

Preuve. — Montrons la deuxième égalité, la première étant conséquence évidente du fait que dg est issue d'une mesure de Haar. On a d'une part, avec $K_f = \prod_{v<\infty} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$:

$$\int_{Z(\mathbb{A}_F)\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_f} \varphi_\pi(g)\overline{\varphi_\pi\left(g\begin{pmatrix} \varpi_{\mathfrak{q}}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)} dg$$
$$= \int_{Z(\mathbb{A}_F)\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{q})} [K : K_0(\mathfrak{q})]^{-1}\varphi_\pi(g)\overline{\varphi_\pi\left(g\begin{pmatrix} \varpi_{\mathfrak{q}}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)} dg$$

d'autre part :

$$\int_{Z(\mathbb{A}_F)\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_f} \varphi_\pi(g)\overline{\varphi_\pi\left(g\begin{pmatrix} \varpi_{\mathfrak{q}}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)} dg$$
$$= \int_{Z(\mathbb{A}_F)\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_f} \int_{K_f} \varphi_\pi(gk^{-1})\overline{\varphi_\pi\left(g\begin{pmatrix} \varpi_{\mathfrak{q}}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)} dk dg$$
$$= \int_{Z(\mathbb{A}_F)\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_f} \varphi_\pi(g) \int_{K_f} \overline{\varphi_\pi\left(gk\begin{pmatrix} \varpi_{\mathfrak{q}}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)} dk dg$$
$$= \int_{Z(\mathbb{A}_F)\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_f} \varphi_\pi(g) \times \frac{1}{N(\mathfrak{q})+1}\overline{\mathrm{T}_{\mathfrak{q}}(\varphi_\pi)(g)} dg$$

$\mathrm{T}_{\mathfrak{q}}$ désignant l'opérateur de Hecke en $\mathfrak{q}$ (tel que défini dans [9], (3.15) page 48) ; on sait de plus (même référence, (4.16) page 72) que

$$\mathrm{T}_{\mathfrak{q}}(\varphi) = N(\mathfrak{q})^{1/2}\lambda_\pi(\mathfrak{q})$$

et ceci donne le résultat. □

Remarque 11.2. — Ce lemme correspond au lemme 2.4 de [12], et en donne une preuve adélique (dans un cas plus simple, auquel le lemme 2.4 pourrait se ramener).

Maintenant que l'on a généralisé ce dont on avait besoin, on peut, en suivant [12], poser :

$$\psi_\pi(g) := \left(\frac{N(\mathfrak{q})}{\rho_\pi(\mathfrak{q})}\right)^{1/2} \sum_{\mathfrak{c}\mathfrak{d}=\mathfrak{q}} \frac{\mu(\mathfrak{c})\lambda_\pi(\mathfrak{c})}{N(\mathfrak{c})\psi(\mathfrak{c})} N(\mathfrak{d})^{-1/2}\varphi_\pi\left(g\begin{pmatrix} \mathrm{id}(\mathfrak{d})^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) \tag{11.1}$$

avec

$$\rho_\pi(\mathfrak{c}) = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}}\left(1 - N(\mathfrak{p})\left(\frac{\lambda_\pi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})+1}\right)^2\right).$$

Grâce au lemme précédent, $\{\varphi_\pi, \psi_\pi\}_{\pi\in\Pi^{\boldsymbol{k}}_{\mathcal{O}_F}}$ forme une base orthogonale de $\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}(\mathrm{old})$, telle que $||\varphi_\pi||_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}} = ||\psi_\pi||_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}}$.

Soit $L(s, \mathrm{sym}^2\pi)$ le carré symétrique de π. On a un développement eulérien $L(s,\mathrm{sym}^2\pi) = \prod_v L(s,\mathrm{sym}^2\pi_v)$ indexé par les places finies et infinies, et on déduit de l'expression des facteurs locaux que

$$(1+N(\mathfrak{q})^{-1})\rho_\pi(\mathfrak{q}) = (1-N(\mathfrak{q})^{-2})^{-1}L(1,\mathrm{sym}^2\pi_{\mathfrak{q}})^{-1}$$

(*cf.* [12] : (2.50) et section 3).

Les coefficients de Fourier de ψ_π sont donc donnés par :

$$\begin{aligned}\lambda(1,\mathfrak{n}\mathfrak{D}_F^{-1},\psi_\pi) = \Big(N(\mathfrak{q})(1-N(\mathfrak{q})^{-2})(1+N(\mathfrak{q})^{-1})L(1,\mathrm{sym}^2\pi_{\mathfrak{q}})\Big)^{1/2} \\ \times\left(\frac{-1}{N(\mathfrak{q})+1}\lambda_\pi(\mathfrak{q})\lambda_\pi(\mathfrak{n}) + \lambda_\pi(\mathfrak{n}\mathfrak{q}^{-1})\mathbb{1}_{\mathfrak{q}|\mathfrak{n}}\right).\end{aligned} \tag{11.2}$$

La contribution des formes anciennes au premier moment s'écrit (en suivant les mêmes notations, *cf.* section 7) :

$$\begin{aligned}M_1(\mathfrak{q},\mathrm{old}) = N(\mathfrak{q})^{1/4}\sum_{\substack{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F\\ N(\mathfrak{m})\leqslant M}} F_{\mathfrak{n}}\cdot P_{\mathfrak{m}} \times \sum_f^h \lambda(1,\mathfrak{n}\mathfrak{D}_F^{-1},f)\lambda(1,\mathfrak{m}\mathfrak{D}_F^{-1},f) \\ - N(\mathfrak{q})^{3/4}\sum_{\substack{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F\\ N(\mathfrak{m})\leqslant M}} F_{\mathfrak{n}}\cdot P_{\mathfrak{m}} \times \sum_f^h \lambda(1,\mathfrak{n}\mathfrak{q}\mathfrak{D}_F^{-1},f)\lambda(1,\mathfrak{m}\mathfrak{D}_F^{-1},f)\end{aligned} \tag{11.3}$$

$\{f\}$ désignant la base orthogonale formée par $\{\varphi_\pi,\psi_\pi\}_{\pi\in\Pi^{\boldsymbol{k}}_{\mathcal{O}_F}}$, et $\sum^h$ désignant la somme normalisée pour le produit scalaire de $\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}$.

La partie de cette somme formée en ne gardant que les termes en φ_π est facile à traiter. En effet, on a

$$||\varphi_\pi||^2_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}} = [K_f : K_0(\mathfrak{q})]||\varphi_\pi||^2_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathcal{O}_F}} = (N(\mathfrak{q})+1)||\varphi_\pi||^2_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathcal{O}_F}} \tag{11.4}$$

on peut par exemple alors utiliser la formule de Petersson pour $\Pi^{\boldsymbol{k}}_{\mathcal{O}_F}$, puisqu'on a la bonne normalisation harmonique, et on peut majorer la contribution des termes en φ_π $M_1(\mathfrak{q}, \varphi_\pi)$ par :

$$M_1(\mathfrak{q}, \varphi_\pi) \ll \frac{N(\mathfrak{q})^{3/4} N(\mathfrak{q})^{1/4} M^{1/2}}{N(\mathfrak{q})} \ll N(\mathfrak{q})^{1/4-\eta}$$

avec $\eta > 0$.

Reste à traiter la contribution des ψ_π, notée $M_1(\mathfrak{q}, \{\psi_\pi\})$. On écrit :

(11.5)

$$\begin{aligned} M_1(\mathfrak{q}, \{\psi_\pi\}) =& N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{\substack{\mathfrak{n} \subset \mathcal{O}_F \\ N(\mathfrak{m}) \leqslant M}} F_{\mathfrak{n}} P_{\mathfrak{m}} \times \sum_{\pi}^{h} \lambda(1, \mathfrak{n}\mathfrak{D}_F^{-1}, \psi_\pi) \lambda(1, \mathfrak{m}\mathfrak{D}_F^{-1}, \psi_\pi) \\ & - N(\mathfrak{q})^{3/4} \sum_{\substack{\mathfrak{n} \subset \mathcal{O}_F \\ N(\mathfrak{m}) \leqslant M}} F_{\mathfrak{n}} P_{\mathfrak{m}} \times \sum_{\pi}^{h} \lambda(1, \mathfrak{n}\mathfrak{q}\mathfrak{D}_F^{-1}, \psi_\pi) \lambda(1, \mathfrak{m}\mathfrak{D}_F^{-1}, \psi_\pi) \end{aligned}$$

la somme en π portant bien entendu sur $\Pi^{\boldsymbol{k}}_{\mathcal{O}_F}$. On va traiter les deux termes apparaissant dans cette expression séparément, en notant :

$$M_1(\mathfrak{q}, \{\psi_\pi\}) = A(\mathfrak{q}) - B(\mathfrak{q})$$

dans l'expression précédente. Notons pour commencer que, puisque $N(\mathfrak{m}) \leqslant M < N(\mathfrak{q})$, on a

(11.6)

$$\begin{aligned} \lambda(1, \mathfrak{m}\mathfrak{D}_F^{-1}, \psi_\pi) = \Big(N(\mathfrak{q})(1-N(\mathfrak{q})^{-2})(1+N(\mathfrak{q})^{-1}) L(1, \mathrm{sym}^2 \pi_{\mathfrak{q}})\Big)^{1/2} \\ \times \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{q})+1} \lambda_\pi(\mathfrak{q}) \lambda_\pi(\mathfrak{m})\right) \end{aligned}$$

en outre les termes $(1-N(\mathfrak{q})^{-2})(1+N(\mathfrak{q})^{-1})$ n'influencent pas les expressions en question, asymptotiquement en $N(\mathfrak{q})$, de sorte qu'on note toujours

$A(\mathfrak{q}), B(\mathfrak{q})$ les expressions simplifiées suivantes :

$$(11.7)\quad A(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{\substack{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F\\ N(\mathfrak{m})\leqslant M}} F_{\mathfrak{n}} P_{\mathfrak{m}} \times \sum_{\pi}^{h} \Big(N(\mathfrak{q}) L(1, \mathrm{sym}^2 \pi_{\mathfrak{q}})\Big) \\ \times \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{q})+1} \lambda_\pi(\mathfrak{q})\lambda_\pi(\mathfrak{n}) + \lambda_\pi(\mathfrak{n}\mathfrak{q}^{-1}) \mathbb{1}_{\mathfrak{q}|\mathfrak{n}}\right) \times \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{q})+1}\lambda_\pi(\mathfrak{q})\lambda_\pi(\mathfrak{m})\right)$$

$$(11.8)\quad B(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{q})^{3/4} \sum_{\substack{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F\\ N(\mathfrak{m})\leqslant M}} F_{\mathfrak{n}} P_{\mathfrak{m}} \times \sum_{\pi}^{h} \Big(N(\mathfrak{q}) L(1, \mathrm{sym}^2 \pi_{\mathfrak{q}})\Big) \\ \times \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{q})+1} \lambda_\pi(\mathfrak{q})\lambda_\pi(\mathfrak{n}\mathfrak{q}) + \lambda_\pi(\mathfrak{n})\right) \times \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{q})+1}\lambda_\pi(\mathfrak{q})\lambda_\pi(\mathfrak{m})\right).$$

Pour majorer ces expressions, on note d'abord que $||\psi_\pi||^2_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}} = ||\varphi_\pi||^2_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathfrak{q}}} = (N(\mathfrak{q})+1)||\psi_\pi||^2_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathcal{O}_F}}$; en outre, on a la factorisation suivante du facteur local du carré symétrique, en termes des paramètres de Langlands de π :

$$L(1, \mathrm{sym}^2\pi_{\mathfrak{q}}) = (1-\alpha_{\pi,1}(\mathfrak{q})^2 N(\mathfrak{q})^{-1})^{-1}(1-\alpha_{\pi,1}(\mathfrak{q})\alpha_{\pi,2}(\mathfrak{q})N(\mathfrak{q})^{-1})^{-1} \\ \times (1-\alpha_{\pi,2}(\mathfrak{q})^2 N(\mathfrak{q})^{-1})^{-1}$$

et ceci implique que

$$L(1, \mathrm{sym}^2 \pi_{\mathfrak{q}}) \ll 1.$$

Traitons d'abord le terme $A(\mathfrak{q})$:

$$(11.9)\quad A(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{\substack{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F\\ N(\mathfrak{m})\leqslant M}} F_{\mathfrak{n}} P_{\mathfrak{m}} \times \sum_{\pi} \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1}) N(\mathfrak{q}) L(1, \mathrm{sym}^2 \pi_{\mathfrak{q}})}{|\mathfrak{d}_F|^{1/2}(4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}(N(\mathfrak{q})+1)||\varphi_\pi||^2_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathcal{O}_F}}} \\ \times \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{q})+1} \lambda_\pi(\mathfrak{q})\lambda_\pi(\mathfrak{n}) + \lambda_\pi(\mathfrak{n}\mathfrak{q}^{-1}) \mathbb{1}_{\mathfrak{q}|\mathfrak{n}}\right)\left(\frac{-1}{N(\mathfrak{q})+1}\lambda_\pi(\mathfrak{q})\lambda_\pi(\mathfrak{m})\right)$$

soit, avec les estimations ci-dessus :

$$\begin{aligned}A(\mathfrak{q}) \ll_F N(\mathfrak{q})^{1/4} &\sum_{\substack{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F\\ N(\mathfrak{m})\leqslant M}} |F_\mathfrak{n} P_\mathfrak{m}| \\ &\times \sum_\pi \frac{1}{||\varphi_\pi||^2_{\mathcal{H}^k_{\mathcal{O}_F}}} \left(\frac{1}{(N(\mathfrak{q})+1)^2}\lambda_\pi(\mathfrak{q})^2|\lambda_\pi(\mathfrak{n})\lambda_\pi(\mathfrak{m})|\right) \\ &+ N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{\substack{\mathfrak{q}|\mathfrak{n}\\ N(\mathfrak{m})\leqslant M}} |F_\mathfrak{n} P_\mathfrak{m}| \times \sum_\pi \frac{1}{||\varphi_\pi||^2_{\mathcal{H}^k_{\mathcal{O}_F}}} \left(\frac{1}{N(\mathfrak{q})+1}|\lambda_\pi(\mathfrak{q})\lambda_\pi(\mathfrak{n}\mathfrak{q}^{-1})\lambda_\pi(\mathfrak{m})|\right).\end{aligned}$$

On réindexe d'abord la deuxième somme en $\mathfrak{n}$ en posant $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}\mathfrak{q}^{-1}$: il apparaît alors un facteur $F((2\pi)^d N(\mathfrak{n}')N(\mathfrak{q}))$ et en dénominateur un facteur $N(\mathfrak{q})^{1/2}$. On majore brutalement les coefficients $\lambda_\pi(\cdot)$ par Ramanujan, soit :

$$\lambda_\pi(\mathfrak{n}) \ll_\varepsilon N(\mathfrak{n})^\varepsilon$$

(les bornes de Kim-Shahidi prouvées dans [14], $\lambda_\pi(\mathfrak{n}) \ll_\varepsilon N(\mathfrak{n})^{1/9+\varepsilon}$, suffisent ici), en se rappelant qu'il n'y a qu'un nombre fini, *indépendant* de $\mathfrak{q}$, de formes non ramifiées :

$$\begin{aligned}A(\mathfrak{q}) \ll_F N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F} |F_\mathfrak{n}| \times \sum_{N(\mathfrak{m})\leqslant M} |P_\mathfrak{m}| \times \frac{N(\mathfrak{q})^{2\varepsilon}}{(N(\mathfrak{q})+1)^2} \\ + N(\mathfrak{q})^{1/4} \sum_{\mathfrak{n}'\subset\mathcal{O}_F} \left|\frac{F((2\pi)^d N(\mathfrak{n}')N(\mathfrak{q})^{1/2})N(\mathfrak{n}')^\varepsilon}{N(\mathfrak{n}'\mathfrak{q})^{1/2}}\right| \\ \times \sum_{\mathbf{N}(\mathfrak{m})\leqslant M} |P_\mathfrak{m} N(\mathfrak{m})^\varepsilon| \times \frac{N(\mathfrak{q})^\varepsilon}{N(\mathfrak{q})+1}.\end{aligned}$$

On utilise alors que $F(y) \ll_A y^{-A}$ pour tout $A > 0$, quand $y \to \infty$, et que $F(y) \ll 1$ pour $0 < y < 1$:

$$\begin{aligned}A(\mathfrak{q}) \ll_A N(\mathfrak{q})^{1/4} N(\mathfrak{q})^{1/4+\varepsilon} M^{1/2+\varepsilon}(N(\mathfrak{q})+1)^{-2} \\ + N(\mathfrak{q})^{1/4} \times \frac{N(\mathfrak{q})^{-A}}{N(\mathfrak{q})^{1/2}} \times M^{1/2+\varepsilon}(1+N(\mathfrak{q}))^{-1} \ll_{A,F} N(\mathfrak{q})^{-1}\end{aligned} \tag{11.10}$$

alors qu'on avait seulement besoin d'un majorant en $N(\mathfrak{q})^{1/4-\eta}$.

Pour $B(\mathfrak{q})$ on fait la même chose (sauf que les bornes de Kim-Shahidi sont ici insuffisantes) :

(11.11)

$$B(\mathfrak{q}) = N(\mathfrak{q})^{3/4} \sum_{\substack{\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_F \\ N(\mathfrak{m})\leqslant M}} F_{\mathfrak{n}} P_{\mathfrak{m}} \times \sum_{\pi} \left\{ \frac{\Gamma(\boldsymbol{k}-\mathbf{1}) N(\mathfrak{q}) L(1, \mathrm{sym}^2 \pi_{\mathfrak{q}})}{|\mathfrak{d}_F|^{1/2} (4\pi)^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}} (N(\mathfrak{q})+1) ||\varphi_\pi||^2_{\mathcal{H}^{\boldsymbol{k}}_{\mathcal{O}_F}}} \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{q})+1} \lambda_\pi(\mathfrak{q}) \lambda_\pi(\mathfrak{n}\mathfrak{q}) + \lambda_\pi(\mathfrak{n}) \right) \times \left(\frac{-1}{N(\mathfrak{q})+1} \lambda_\pi(\mathfrak{q}) \lambda_\pi(\mathfrak{m}) \right) \right\}$$

la même procédure donne :

$$(11.12) \quad B(\mathfrak{q}) \ll_F N(\mathfrak{q})^{3/4} N(\mathfrak{q})^{1/4+4\varepsilon} M^{1/2+\varepsilon} (N(\mathfrak{q})+1)^{-2}$$
$$+ N(\mathfrak{q})^{3/4} N(\mathfrak{q})^{1/4+2\varepsilon} M^{1/2+\varepsilon} (N(\mathfrak{q})+1)^{-1} \ll_F N(\mathfrak{q})^{\Delta/4}$$

ce qui est bien une majoration en $N(\mathfrak{q})^{1/4-\eta}$, comme voulu.

L'étude de la contribution des formes anciennes au second moment se fait selon les mêmes lignes, et ne présente pas de difficulté de nouvel ordre : nous ne l'incluons donc pas au présent travail. Il en va de même pour la contribution des formes anciennes dans les premier et second moments de la dérivée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Bruggeman & R. J. Miatello, « Sum formula for SL(2) over a number field and a Selberg type estimate for exceptional eigenvalues », *Geom. Funt. Anal.* **8** (1998), p. 627-655.

[2] R. Bruggeman, R. J. Miatello & I. Pacharoni, « Estimates for Kloosterman sums for totally real number fields », *J. Reine Angew. Math.* **535** (2001), p. 103-164.

[3] D. Bump, *Automorphic Forms and Representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 55, 1997.

[4] C. Bushnell & G. Henniart, *The local Langlands conjecture for* GL(2), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 335. Springer-Verlag, 2006.

[5] J. W. S. Cassels & A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967.

[6] J. Cogdell & I. Piatetski-Shapiro, *The arithmetic and spectral analysis of Poincaré series*, Academic Press, 1990.

[7] P. X. Gallagher, « The large sieve and probabilistic Galois theory », in *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, Amer. Math. Soc.*, 1973.

[8] P. B. Garrett, *Holomorphic Hilbert Modular Forms*, Wadsworth Inc., 1990.

[9] S. Gelbart, *Automorphic forms on adele groups*, Annals of Math. studies, 83, Princeton University Press, 1975.

[10] R. Godement, *Notes on Jacquet-Langlands' Theory*, IAS Lecture Notes, Princeton, 1970.

[11] H. Iwaniec & E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53, 2004.

[12] H. Iwaniec, W. Luo & P. Sarnak, « Low lying zeros of families of automorphic L-functions », *Publ. Math. IHES* **91** (2000), p. 55-131.

[13] H. Iwaniec & P. Sarnak, « The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Siegel-Landau zeros », *Israel J. Math.* **120** (2000), p. 155-177.

[14] H. Kim & F. Shahidi, « Cuspidality of symmetric powers with applications », *Duke Math. J* **112** (2002), p. 177-197.

[15] E. Kowalski & P. Michel, « The analytic rank of $J_0(q)$ and zeros of automorphic L-functions », *Duke Math. Journal* **100** (1999), p. 503-542.

[16] ———, « A lower bound for the rank of $J_0(q)$ », *Acta Arith.* **94** (2000), p. 303-343.

[17] E. Kowalski, P. Michel & J. VanderKam, « Mollification of the fourth moment of automorphic L-functions and arithmetic applications », *Invent. math.* **142** (2000), p. 95-151.

[18] ———, « Non-vanishing of higher derivatives of automorphic L-functions », *J. reine angew. Math.* **526** (2000), p. 1-34.

[19] W. Luo, « Poincaré series and Hilbert modular forms », *The Ramanujan Journal* **7** (2003), p. 129-143.

[20] A. Popa, « Central values of Rankin L-series over real quadratic fields », *Compos. Math.* **142** (2006), p. 811-866.

[21] R. Rankin, *Modular forms and functions*, Cambridge University Press, 1977.

[22] D. Soudry, « The L and γ factors for generic representations of $\mathrm{GSp}(4, k) \times \mathrm{GL}(2, k)$ over a local non-Archimedean field k », *Duke Math. Journal* **51** (1984), p. 355-394.

[23] D. Trotabas, « Non-annulation des fonctions L des formes modulaires de Hilbert en le point central (preprint) », `http ://arxiv.org/abs/0809.5031`.

[24] J. VanderKam, « The rank of quotients of $J_0(N)$ », *Duke Math. Journal* **97** (1999), p. 545-577.

[25] ———, « Linear independence in the homology of $X_0(N)$ », *Journal London Math. Soc.* **61** (2000), p. 349-358.

[26] A. Venkatesh, « Beyond endoscopy and special forms on GL(2) », *Journal reine angew. Math.* **577** (2004), p. 23-80.

Manuscrit reçu le 20 avril 2009,
révisé le 26 avril 2010,
accepté le 18 mai 2010.

Denis TROTABAS
Stanford University
Department of Mathematics
Building 380, Stanford, California 94305 (USA)
trotabas@math.stanford.edu