ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Matthieu CARETTE

$\mathcal{D}$-modules micro-localement libres de rang 1 et connexions non-intégrables en dimension 2

Tome 52, n° 1 (2002), p. 179-219.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_1_179_0>

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://aif.cedram.org/), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://aif.cedram.org/legal/). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
52, 1 (2002), 179–219

$\mathcal{D}$-MODULES MICRO-LOCALEMENT LIBRES DE RANG 1 ET CONNEXIONS NON-INTÉGRABLES EN DIMENSION 2

par Matthieu CARETTE

Table des matières.

Mots-clés : $\mathcal{D}$-modules – $\widehat{\mathcal{E}}$-modules – Connexions.
Classification math. : 32C38.

Notations et conventions.

• Tout au long de ce travail X désignera une *variété complexe de dimension* 2 (occasionnellement X désignera un champ de vecteurs, mais le contexte sera suffisamment clair).

• $\mathcal{D}$ et $\widehat{\mathcal{E}}$ seront respectivement le faisceau des opérateurs différentiels sur X et le faisceau des opérateurs micro-différentiels formels sur P^*X. Plus précisément, $\widehat{\mathcal{E}}$ est le complété du faisceau $\mathcal{P}^f$ de [KKS] pour sa filtration naturelle. Le faisceau $\widehat{\mathcal{E}}$ est habituellement défini sur T^*X (voir [MS]), mais la section nulle de T^*X n'entrant pas en considération dans le présent travail, il m'a semblé préférable de se placer sur P^*X.

Notons $\pi : P^*X \to X$ la projection canonique. Résumons les propriétés de $\widehat{\mathcal{E}}$ qui seront utilisées :

- ▷ $\widehat{\mathcal{E}}$ est un faisceau cohérent de $\mathbb{C}$-algèbres,
- ▷ $\widehat{\mathcal{E}}$ est muni d'une filtration sur $\mathbb{Z}$ pour laquelle il est complet,
- ▷ $\mathcal{G}r\,\widehat{\mathcal{E}} = \bigoplus_{\ell\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(\ell)$ en tant que faisceau gradué de $\mathbb{C}$-algèbres,
- ▷ $\pi_*\widehat{\mathcal{E}} = \mathcal{D}$ en tant que faisceau filtré de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathcal{D}$.

• Sauf mention explicite du contraire, par module sur un faisceau d'anneaux, nous entendrons *module à gauche*.

• Un $\widehat{\mathcal{E}}$-module $\mathcal{M}$ sera dit localement libre de rang r s'il existe un recouvrement ouvert $P^*X = \bigcup U_i$ tel que pour tout i, $\mathcal{M}_{|U_i}$ soit libre de rang r.

• Un $\widehat{\mathcal{E}}$-module $\mathcal{M}$ sera dit trivial s'il existe un recouvrement ouvert $X = \bigcup U_i$ tel que pour tout i, $\mathcal{M}_{|P^*U_i}$ soit libre de rang fini.

• Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module nous noterons $\widehat{\mathcal{M}} = \widehat{\mathcal{E}} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}} \pi^{-1}\mathcal{M}$ le $\widehat{\mathcal{E}}$-module micro-localisé formel de $\mathcal{M}$.

• Nous dirons qu'un $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ est micro-localement libre de rang 1 si son micro-localisé formel $\widehat{\mathcal{M}}$ est localement libre de rang 1.

• Nous appellerons souvent fibré vectoriel (ou tout simplement fibré) un $\mathcal{O}$-module localement libre de rang fini sur X.

• Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}$-module, nous noterons respectivement

$$T(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n\geq 0} T^n(\mathcal{F}) \quad \text{et} \quad S(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n\geq 0} S^n(\mathcal{F})$$

les faisceaux algèbre tensorielle et algèbre symétrique associés à $\mathcal{F}$.

• $\mathcal{T}$ désignera le faisceau des germes de champs de vecteurs de la variété X ; on a alors $\mathcal{G}r\,\mathcal{D} = S(\mathcal{T})$.

• Si (x_1, x_2) est un système de coordonnées locales sur X, nous noterons toujours $(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ le système de coordonnées micro-locales homogènes associé sur P^*X.

• Important :

 ▷ Les produits tensoriels de $\mathcal{O}$-modules sur X seront notés $\otimes$ et les produits tensoriels de $\pi^{-1}\mathcal{O}$-modules sur P^*X seront notés également $\otimes$. Tous les produits tensoriels sur des faisceaux d'anneaux autres que $\mathcal{O}$ et $\pi^{-1}\mathcal{O}$ seront indicés explicitement.

 ▷ Le symbole π^{-1} sera souvent omis quant il est clair que nous considérons un faisceau sur le cotangent.

Introduction.

Dans la première partie de [DS], D'Agnolo et Schapira étudient les $\mathcal{D}$-modules micro-localement libres de rang 1 sur une variété X de dimension supérieure ou égale à 3. Ici, micro-localement libre de rang 1 signifie que le micro-localisé formel du module en question est un $\widehat{\mathcal{E}}$-module libre de rang 1 au voisinage de tout point de $T^*X - \{0\}$ ou, ce qui revient au même, de P^*X. Leur résultat est que, modulo les fibrés munis d'une connexion intégrable (c'est-à-dire les $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{O}$-cohérents), ces modules sont exactement les modules de la forme $\mathcal{D} \otimes \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est un module inversible sur X.

Le résultat de [DS] n'étant pas vrai en dimension 2, nous nous proposons dans ce travail, d'étudier les $\mathcal{D}$-modules micro-localement libres de rang 1, et plus généralement les $\widehat{\mathcal{E}}$-modules localement libres de rang 1 sur une variété X de dimension 2.

Donnons un exemple de tels modules : pour $i = 1, 2$, notons

$$\nabla_i = \partial_i + \alpha_i,$$

où ∂_i est la dérivation en la i-ème variable et α_i est une fonction holomorphe. Soit $\mathcal{M}$ le $\mathcal{D}$-module engendré par e_1 et e_2 soumis à la relation

$$\nabla_2 e_1 + \nabla_1 e_2 = 0,$$

c'est-à-dire $\mathcal{M}$ est le conoyau du morphisme $\overline{\overline{\nabla}}$ de $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{D} \to \mathcal{D}^2$ défini par

$$\overline{\overline{\nabla}}(P) = (P\nabla_1, P\nabla_2).$$

Plaçons-nous sur l'ouvert

$$U_1 = \{(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)\,;\ \xi_1 \neq 0\}$$

du cotangent projectif. On a alors la suite exacte de $\widehat{\mathcal{E}}$-modules

$$0 \to \widehat{\mathcal{E}} \xrightarrow{\overline{\overline{\nabla}}} \widehat{\mathcal{E}}^2 \longrightarrow \mathcal{E} \to 0$$

où la dernière flèche est définie par $(P, Q) \mapsto Q - P\nabla_1^{-1}\nabla_2$. Par conséquent, le micro-localisé formel $\widehat{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$ est libre de rang 1 sur l'ouvert U_1. On vérifie facilement qu'il en est de même sur l'ouvert

$$U_2 = \{(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)\,;\ \xi_2 \neq 0\}.$$

Les ouverts U_1 et U_2 formant un recouvrement du projectif cotangent, on en déduit que $\mathcal{M}$ est micro-localement libre de rang 1. Cette construction peut se faire intrinsèquement de la façon suivante. Soit $(\mathcal{L}, \nabla)$ un couple constitué d'un fibré vectoriel de rang 1 sur X (i.e. un $\mathcal{O}$-module localement libre de rang 1), et ∇ une connexion non-intégrable sur $\mathcal{L}$. On associe à ce couple un morphisme $\overline{\overline{\nabla}}$ de $\mathcal{D}$-modules

$$\mathcal{D} \otimes \wedge^2 \mathcal{T} \otimes \mathcal{L} \xrightarrow{\overline{\overline{\nabla}}} \mathcal{D} \otimes \wedge^1 \mathcal{T} \otimes \mathcal{L}$$

défini par la même formule que le morphisme de Spencer dans le cas où la connexion est intégrable. Le conoyau de $\overline{\overline{\nabla}}$ est alors un $\mathcal{D}$-module micro-localement libre de rang 1.

Cette construction, qui décrit la classe la plus simple de $\mathcal{D}$-modules micro-localement libres de rang 1 non-triviaux (i.e. dont le micro-localisé n'est pas trivial), fut en fait le point de départ du présent travail. Le résultat principal en est une généralisation permettant de construire tous les $\mathcal{D}$-modules micro-localement libres de rang 1 sans torsion à partir de triplets $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$, où $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel sur X, $\mathcal{F}_0$ un sous-fibré de rang 1 de $\mathcal{F}$, et ∇ une connexion sur $\mathcal{F}$ vérifiant certaines conditions (définition 8, section II.4.1). Le théorème est alors le suivant (théorème 5, section II.4.3) :

Les catégories suivantes sont équivalentes :

- *la catégorie des $\mathcal{D}$-modules micro-localement libres de rang* 1 *sans torsion ;*
- *la catégorie des triplets.*

La preuve consiste en la construction de deux foncteurs inverses. Notons que les couples de l'exemple sont des cas particuliers de triplets par $(\mathcal{L}, \nabla) \mapsto (\mathcal{L}, \mathcal{L}, \nabla)$ et que le $\mathcal{D}$-module associé au triplet $(\mathcal{L}, \mathcal{L}, \nabla)$ est canoniquement isomorphe à celui associé au couple $(\mathcal{L}, \nabla)$.

Indiquons brièvement les méthodes employées pour obtenir le théorème précédent. La plus grosse partie du travail étant une étude de la structure des $\widehat{\mathcal{E}}$-modules micro-localement libres de rang 1. Dans un premier temps, on montre qu'un tel module $\mathcal{M}$ est muni canoniquement d'une filtration globale dont la structure est très facile à décrire. Ensuite, grâce à l'annulation de certains faisceaux de cohomologie, on munit le $\mathcal{O}_X$-module filtré $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$ d'une connexion non-intégrable. Est alors introduit un faisceau d'algèbres sur X, le faisceau $\mathcal{A}$, qui généralise le faisceau $\mathcal{D}$ des opérateurs différentiels, et permet de traiter dans un cadre commun les $\mathcal{D}$-modules (resp. $\widehat{\mathcal{E}}$-modules) et les $\mathcal{O}$-modules munis d'une connexion non-intégrable. Le faisceau $\mathcal{A}$ est défini comme le faisceau d'algèbres engendré par les fonctions holomorphes f et les symboles ∇_V pour chaque champ de vecteurs tangents V, ces générateurs étant soumis aux relations suivantes :

$$\nabla_{V+W} = \nabla_V + \nabla_W, \quad [\nabla_V; f] = \mathcal{L}_V f, \quad \nabla_{fV} = f\nabla_V.$$

Ce faisceau est naturellement filtré et son gradué est alors canoniquement isomorphe à l'algèbre tensorielle du fibré tangent. De plus, il est clair que les $\mathcal{A}$-modules sont exactement les $\mathcal{O}$-modules munis d'une connexion (non-nécessairement intégrable), les $\mathcal{D}$-modules étant alors les $\mathcal{A}$-modules dont la connexion est intégrable. Le $\mathcal{O}$-module $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$ est donc maintenant un $\mathcal{A}$-module, et un des résultats clefs est la description des $\mathcal{A}$-modules obtenus de cette façon.

Dans la deuxième partie on applique ces résultats aux $\mathcal{D}$-modules micro-localement libres de rang 1. En plus du théorème d'équivalence avec les triplets annoncé plus haut, on obtient qu'un $\mathcal{D}$-module micro-localement libre de rang 1 est localement stablement libre si et seulement si la connexion du triplet qui lui est associé n'a pas de section horizontale non-nulle.

I. $\widehat{\mathcal{E}}$-modules localement libres de rang 1.

1. La filtration canonique d'un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1.

Nous allons montrer dans cette section qu'un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1 peut être muni d'une filtration canonique, unique d'un certain point de vue. C'est l'existence de cette filtration et ses propriétés qui sont à la base de toutes les constructions de ce travail.

DÉFINITION 1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{E}}$-module sur un ouvert U de P^*X. Nous dirons qu'une filtration sur $\mathcal{M}$ est lisse si*

- $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{E}}_k\mathcal{M}_0$ *pour tout entier k,*
- $\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_{-1}$ *est un $\mathcal{O}_U(0)$-module localement libre de rang* 1.

PROPOSITION 1. — *Soient U un ouvert de Stein contractile de X et $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1 au-dessus de U. Alors il existe une unique filtration lisse sur $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_{-1} = \mathcal{O}(0)$ et toute autre filtration lisse en est un décalage.*

Démonstration. — On vérifie facilement que l'opération qui à un ouvert V de P^*U associe l'ensemble des filtrations lisses sur $\mathcal{M}_{|V}$ est un faisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ sur lequel $\mathbb{Z}$ agit par décalage. Soit V un ouvert connexe de P^*U sur lequel $\mathcal{M}$ est libre. Il est clair qu'une filtration lisse sur $\mathcal{M}_{|V}$ est déterminée par un générateur de $\Gamma(V;\mathcal{M})$. Par conséquent, le faisceau $\mathcal{F}$ est localement constant, et $\mathbb{Z}$ y agit de façon simplement transitive. L'espace P^*U étant simplement connexe, $\mathcal{F}$ est constant de fibre $\mathbb{Z}$. Il existe donc une filtration lisse sur $\mathcal{M}$, et pour cette filtration on a $\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_{-1} = \mathcal{O}(d)$ pour un entier d. Il ne reste plus qu'à décaler cette filtration de $-d$ pour obtenir la filtration désirée. □

PROPOSITION 2. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang* 1 *au-dessus de X. Il existe sur $\mathcal{M}$ une unique filtration lisse telle que $\pi_*(\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_{-1}) \neq 0$ et $\pi_*(\mathcal{M}_{-1}/\mathcal{M}_{-2}) = 0$. Le $\mathcal{O}_X$-module $\pi_*(\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_{-1})$ est alors localement libre de rang* 1.

Démonstration. — En effet, en recollant par unicité les filtrations locales lisses de la proposition précédente, on obtient qu'il existe sur $\mathcal{M}$ une unique filtration lisse pour laquelle $\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_{-1}$ est de la forme $\mathcal{O}(0) \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_X} \pi^{-1}\mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1. On a alors

$$\pi_*(\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_{-1}) = \mathcal{L} \neq 0 \quad \text{et} \quad \pi_*(\mathcal{M}_{-1}/\mathcal{M}_{-2}) = \pi_*(\mathcal{O}(-1) \otimes \pi^{-1}\mathcal{L}) = 0.$$

Or, $\pi_*\mathcal{O}(k)$ étant un $\mathcal{O}_X$-module de rang $k+1$ pour $k \geq 0$ et nul si $k \leq 0$, il est clair que la filtration lisse considérée est la seule vérifiant la propriété demandée. □

DÉFINITION 2.

- *L'unique filtration lisse obtenue sera appelée la filtration canonique.*
- *Le $\mathcal{O}_X$-module inversible $\pi_*(\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_{-1})$ sera appelé le symbole de $\mathcal{M}$ et noté $\sigma(\mathcal{M})$.*
- *Nous appellerons dorénavant catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}$-modules localement libres de rang* 1 *la classe des $\widehat{\mathcal{E}}$-modules localement libres de rang* 1 *dont les morphismes respectent les filtrations canoniques.*

2. Cohérence de l'image directe.

2.1. Structure de $\mathcal{M}$ déduite de la filtration canonique.

La filtration de $\mathcal{M}$ induit naturellement une filtration sur le $\mathcal{D}$-module $\pi_*(\mathcal{M})$ et on a une injection canonique $\mathcal{G}r\,\pi_*(\mathcal{M}) \hookrightarrow \pi_*(\mathcal{G}r\,\mathcal{M})$.

Rappelons quelques résultats classiques [FL], [Ma], [H] :

PROPOSITION 3. — *Soit X une variété complexe de dimension* 2; *on a :*

$$\pi_*\big(\mathcal{O}_{P^*X}(k)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0, \\ S^k(\mathcal{T}) & \text{si } k \geq 0; \end{cases}$$

$$R^1\pi_*\big(\mathcal{O}_{P^*X}(k)\big) = \begin{cases} \wedge^2\mathcal{T}^* \otimes S^{-k-2}(\mathcal{T}^*) & \text{si } k \leq -2, \\ 0 & \text{si } k \geq -1; \end{cases}$$

$$R^2\pi_*\big(\mathcal{O}_{P^*X}(k)\big) = 0 \quad \text{pour tout } k.$$

COROLLAIRE 1.

- *Le morphisme canonique* $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-2}) \to \pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-1})$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{O}$*-modules localement libres de rang fini.*

- $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_\ell)$ *est* $\mathcal{O}$*-cohérent pour tout* k *et tout* $\ell \leq k$.

- $R^1\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_\ell)$ *est localement libre de rang fini pour tout* $k < 0$ *et tout* $\ell \leq k$.

Démonstration. — Ces résultats s'obtiennent sans difficulté par dévissage à partir de la proposition précédente, en se rappelant que $\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1} = \mathcal{O}_{P^*X}(k) \otimes \sigma(\mathcal{M})$. □

2.2. Cohérence de l'image directe.

THÉORÈME 1. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un* $\widehat{\mathcal{E}}$*-module localement libre de rang* 1. *Alors* $\pi_*(\mathcal{M})$ *est un* $\mathcal{D}$*-module cohérent. Plus précisément, la filtration de* $\pi_*(\mathcal{M})$ *induite par la filtration canonique de* $\mathcal{M}$ *est une bonne filtration.*

Démonstration.

Première partie. — Nous allons montrer la $\mathcal{O}$-cohérence de $\pi_*(\mathcal{M}_k)$ pour k positif ou nul.

- Pour commencer nous allons définir le formalisme qui sera utilisé dans les paragraphes suivants.

Soit $\mathcal{N}$ un sous-module d'un $\mathcal{O}$-module $\mathcal{M}$. Nous appellerons orthogonal de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M};\mathcal{O})$ le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}/\mathcal{N};\mathcal{O})$, c'est-à-dire le sous-module de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M};\mathcal{O})$ formé des morphismes m qui satisfont $m(\mathcal{N}) = 0$.

Nous aurons aussi besoin d'une formule de compatibilité entre les foncteurs limite projective, limite inductive, et «orthogonal». Soit $\mathcal{N}_k$ une famille filtrante de sous-modules de $\mathcal{M}$. On vérifie facilement que l'orthogonal de $\varinjlim \mathcal{N}_k$ (i.e. l'orthogonal de la réunion des $\mathcal{N}_k$) dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M};\mathcal{O})$ est canoniquement isomorphe à la limite projective (i.e. l'intersection) des orthogonaux des $\mathcal{N}_k$ dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M};\mathcal{O})$. C'est une conséquence immédiate de l'exactitude du foncteur limite inductive et du fait que la dualité transforme les limites inductives en limites projectives.

- Comme on a $\pi_*(\mathcal{M}_k) = \varprojlim \pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell})$, pour $\ell \geq 2$, nous allons tout d'abord étudier $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell})$, pour ℓ fixé, en tant que sous-module de $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-2})$. De la suite exacte suivante :

$$0 \to \pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell}) \longrightarrow \pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-2}) \longrightarrow R^1\pi_*(\mathcal{M}_{-2}/\mathcal{M}_{-\ell})$$

et du fait que $R^1\pi_*(\mathcal{M}_{-2}/\mathcal{M}_{-\ell})$ est $\mathcal{O}$-localement libre de rang fini, nous déduisons que $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell})$ est l'orthogonal du sous-$\mathcal{O}$-module $\mathcal{N}_{k\ell}$ de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-2});\mathcal{O})$ défini par

$$\mathcal{N}_{k,\ell} = \mathrm{Im}\big(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(R^1\pi_*(\mathcal{M}_{-2}/\mathcal{M}_{-\ell});\mathcal{O}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}\big(\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-2});\mathcal{O})\big).$$

Par compatibilité entre les foncteurs limites et le foncteur « orthogonal », et grâce au fait que $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-2})$ est $\mathcal{O}$-localement libre de rang fini (par conséquent égal à son bidual), nous obtenons :

$\pi_*(\mathcal{M}_k)$ est l'orthogonal de $\varinjlim \mathcal{N}_{k\ell}$ dans $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-2})$.

- Lemme (voir [GR], p. 110 et [S], section II.1.5 et appendice).
  - ▷ Le faisceau cohérent d'algèbres $\mathcal{O}$ possède la propriété de Noether : la réunion d'une famille croissante de sous-modules cohérents d'un $\mathcal{O}$-module cohérent est un sous-module cohérent.
  - ▷ $\mathcal{G}r\,\mathcal{D}$ vérifie la propriété de Noether.

• Il découle du premier point du lemme que $\varinjlim \mathcal{N}_{k,\ell}$ est un sous-module cohérent de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-2});\mathcal{O})$. L'orthogonal d'un sous-module cohérent d'un module cohérent étant cohérent, il s'ensuit que $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell})$ est $\mathcal{O}$-cohérent, ce qui conclut la première partie de la démonstration.

Deuxième partie. — Pour obtenir la cohérence de $\pi_*(\mathcal{M})$, il reste à montrer que $\mathcal{G}r\,\pi_*(\mathcal{M})$ est $\mathcal{G}r\,\mathcal{D}$-cohérent. Soit $\mathcal{G}_k$ le sous-$\mathcal{G}r\,\mathcal{D}$-module de $\pi_*(\mathcal{G}r\,\mathcal{M})$ engendré par les symboles de $\pi_*(\mathcal{M}_k)$. Il découle de la première partie que $\mathcal{G}_k$ est $\mathcal{G}r\,\mathcal{D}$-cohérent. De plus, on voit facilement que $\mathcal{G}r(\pi_*(\mathcal{M})$ est la réunion des $\mathcal{G}_k$ dans $\pi_*(\mathcal{G}r\,\mathcal{M})$ et le troisième point du lemme précédent permet de conclure, car ainsi qu'il a déjà été dit, $\pi_*(\mathcal{G}r\,\mathcal{M})$ est localement isomorphe à $\mathcal{G}r\,\mathcal{D}$. □

3. $\mathcal{A}$-modules associés à un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1.

3.1. Action des champs de vecteurs sur $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$ et motivations pour l'introduction du faisceau d'algèbres $\mathcal{A}$.

Dans l'introduction, il a été associé à tout $\mathcal{O}$-module inversible (i.e. fibré de rang 1 sur X) muni d'une connexion, un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1 qui est non-trivial si et seulement si la connexion est non-intégrable. La généralisation « exacte » de cette construction sera faite en deuxième partie. Néanmoins, nous allons maintenant voir que cette apparition des connexions non-intégrables n'est pas un hasard, et associer à tout $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1 un $\mathcal{O}$-module (de rang infini) muni d'une connexion non-intégrable. Nous verrons ensuite que l'image de ce foncteur peut être caractérisée de façon satisfaisante, ce qui en fera une équivalence de catégories.

La construction qui suit va utiliser de façon essentielle les résultats suivants.

Proposition 4.

- *Le morphisme canonique* $\Theta : \pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-2}) \to \pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$ *est un isomorphisme.*
- *Le gradué du* $\mathcal{O}$*-module* $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$*, filtré par les* $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-1})$ *pour* $k \geq -1$*, est naturellement isomorphe à* $\sigma(\mathcal{M}) \otimes (\bigoplus_{k\geq 0} S^k(\mathcal{T}))$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 3 et de son corollaire. □

Soit U un champ de vecteur local ; il définit un $\mathbb{C}$-morphisme

$$\partial_U : \pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-2}) \longrightarrow \pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1}).$$

Et l'on voit donc que $\nabla_U = \partial_U \Theta^{-1}$ définit un $\mathbb{C}$-morphisme

$$\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1}) \to \pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$$

dont on vérifie sans difficultés qu'il satisfait les relations suivantes pour toute fonction f :

$$[\nabla_U, f] = \mathcal{L}_U f, \quad \nabla_{fU} = f\nabla_U.$$

C'est-à-dire que l'on a muni $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$ d'une connexion :

Proposition 5. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un* $\widehat{\mathcal{E}}$*-module localement libre de rang* 1 ; *alors* $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$ *est canoniquement muni d'une connexion.*

Considérant $\pi_*(\mathcal{M})$ comme sous-$\mathcal{O}$-module de $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-2})$ et de $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$, on voit que Θ^{-1} induit l'identité sur $\pi_*(\mathcal{M})$. Par conséquent, la connexion que l'on vient de définir sur $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$ induit une connexion sur $\pi_*(\mathcal{M})$ qui coïncide avec la structure de $\mathcal{D}$-module usuelle. $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})/\pi_*(\mathcal{M})$ se trouve donc muni d'une connexion.

Pour pouvoir traiter les $\widehat{\mathcal{E}}$-modules, $\mathcal{D}$-modules et $\mathcal{O}$-modules munis d'une connexion non-intégrable dans un même cadre, nous allons introduire un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathcal{A}$, pour lequel les $\mathcal{A}$-modules sont exactement les $\mathcal{O}$-modules munis d'une connexion. Ce faisceau d'algèbres généralise donc le faisceau $\mathcal{D}$, les $\mathcal{D}$-modules n'étant que des $\mathcal{O}$-modules munis d'une connexion *intégrable.*

3.2. Définition de $\mathcal{A}$ et propriétés.

DÉFINITION 3. — *Soit $\mathcal{A}$ le faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres engendré par les fonctions holomorphes f et les symboles ∇_V pour tout champ de vecteurs V, avec les relations suivantes :*

$$\nabla_{V+W} = \nabla_V + \nabla_W, \quad [\nabla_V; f] = \mathcal{L}_V f, \quad \nabla_{fV} = f\nabla_V.$$

Par construction on a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 6. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}$-module. Alors munir $\mathcal{M}$ d'une structure de $\mathcal{A}$-module est équivalent à le munir d'une connexion.*

PROPOSITION 7. — *Un $\mathcal{A}$-module $\mathcal{O}$-cohérent est $\mathcal{O}$-localement libre*

Démonstration. — Cette proposition se démontre de la même façon que dans le cas des $\mathcal{D}$-modules. □

COROLLAIRE 2. — *Les quotients et les sous-modules d'un $\mathcal{A}$-module localement libre de rang fini sur $\mathcal{O}$ sont localement libres de rang fini sur $\mathcal{O}$.*

Démonstration. — C'est une conséquence de la proposition précédente, de la cohérence de $\mathcal{O}$, et du lemme de cohérence noethérienne du théorème 1. □

La proposition suivante, qui calcule le gradué de $\mathcal{A}$ pour sa filtration naturelle, sera un ingrédient essentiel de la deuxième partie lorsque nous étudierons les $\mathcal{D}$-modules micro-localement libres de rang 1.

PROPOSITION 8. — *Munissons $\mathcal{A}$ de la filtration pour laquelle les fonctions sont de degré* 0 *et les champs de vecteurs de degré* 1. *L'algèbre graduée $\mathcal{G}r\,\mathcal{A}$ est alors $T(\mathcal{T})$, l'algèbre tensorielle du $\mathcal{O}$-module des champs de vecteurs.*

Démonstration. — On vérifie qu'associer à $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ la classe de $\nabla_{U_1} \cdots \nabla_{U_n}$ modulo $\mathcal{A}_{n-1}$ définit un morphisme canonique de $\mathcal{O}$-algèbres $T(\mathcal{T}) \to \mathcal{G}r\,\mathcal{A}$. Pour montrer que c'est un isomorphisme, on met une connexion locale ∇ sur $\mathcal{T}$; la formule

$$\overline{\nabla}_U(T) := U \otimes T + \nabla_U(T),$$

où T est un champ de tenseurs, étend la connexion ∇ à $T(\mathcal{T})$ et donc y définit une structure de $\mathcal{A}$-module. Il est clair que le $\mathcal{G}r\,\mathcal{A}$-module gradué associé est $T(\mathcal{T})$ d'une façon compatible avec le morphisme gradué $T(\mathcal{T}) \to \mathcal{G}r\,\mathcal{A}$, montrant que c'est un isomorphisme. □

Courbure, intégrabilité et $\mathcal{D}$. — Le faisceau d'algèbres $\mathcal{D}$ des opérateurs différentiels étant engendré par les fonctions et les symboles ∂_U, pour tout champ de vecteur U, soumis aux relations

$$\begin{aligned} \partial_{U+V} &= \partial_U + \partial_V, & [\partial_U; f] &= \mathcal{L}_U(f), \\ \partial_{fU} &= f\partial_U, & [\partial_U; \partial_V] - \partial_{[U;V]} &= 0. \end{aligned}$$

Il est clair que $\mathcal{D}$ est naturellement un $\mathcal{A}$-bi-module; plus précisément $\mathcal{D} = \mathcal{A}/I$, où I est l'idéal bilatère de $\mathcal{A}$ engendré par les $[\nabla_U; \nabla_V] - \nabla_{[U;V]}$. On reconnaît ici le tenseur de courbure, qui dans le cadre du faisceau $\mathcal{A}$ est défini comme suit :

DÉFINITION 4. — *Le morphisme de courbure R est le morphisme de $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-bimodules* :

$$R := \begin{cases} \wedge^2\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}, \\ U \wedge V \longmapsto [\nabla_U; \nabla_V] - \nabla_{[U;V]}. \end{cases}$$

On a par conséquent la présentation suivante de $\mathcal{D}$ en tant que $\mathcal{A}$-bi-module :

$$\begin{cases} \mathcal{A} \otimes \wedge^2\mathcal{T} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D} \to 0, \\ P \otimes U \otimes Q \longmapsto PR(U)Q. \end{cases}$$

Notation. — Par la suite, pour toute section locale P de $\mathcal{A}$, nous noterons $\overline{P}$ sa classe dans $\mathcal{D}$.

3.3. $\mathcal{A}$-module spécial associé à un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1.

La connexion définie plus haut sur le $\mathcal{O}$-module $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$ induit donc une structure de $\mathcal{A}$-module sur ce dernier. Ce $\mathcal{A}$-module est naturellement filtré par les $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-1})$ pour $k \geq -1$, et nous avons déjà vu que son gradué est le $T(\mathcal{T})$-module

$$S(\mathcal{T}) \otimes \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{G}r\,\mathcal{D} \otimes \sigma(\mathcal{M}).$$

De plus il vérifie la propriété suivante :

$R(U)(\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})) \subset \pi_*(\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_{-1})$ pour tout bi-vecteur U.

L'objectif de ce qui va suivre étant d'établir une correspondance bi-univoque entre les $\widehat{\mathcal{E}}$-modules localement libres de rang 1 et certains $\mathcal{A}$-modules, il est naturel de se concentrer sur les $\mathcal{A}$-modules qui satisfont les propriétés venant d'être formulées pour $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$; c'est-à-dire :

Définition 5. — *Nous appellerons catégorie des $\mathcal{A}$-modules spéciaux la sous-catégorie pleine de la catégorie des $\mathcal{A}$-modules filtrés dont les objets sont les $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{M}$ vérifiant les conditions suivantes :*

- *$\mathcal{M}_0$ est un $\mathcal{O}$-module inversible,*
- *$\mathcal{G}r\,\mathcal{M} = \mathcal{G}r\,\mathcal{D} \otimes \mathcal{M}_0$,*
- *$R(U)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_0$ pour tout bi-vecteur U.*

Et donc, pour résumer ce qui vient d'être dit :

Proposition 9. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1. Le $\mathcal{O}$-module $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$ est canoniquement muni d'une structure de $\mathcal{A}$-module, et c'est alors un $\mathcal{A}$-module spécial. Cette construction est un foncteur Π de la catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}$-modules localement libres de rang 1 dans celle des $\mathcal{A}$-modules spéciaux.*

3.4. Théorème d'équivalence entre $\widehat{\mathcal{E}}$-modules localement libres de rang 1 et $\mathcal{A}$-modules spéciaux.

Dans cette section, nous allons montrer que le foncteur Π de la catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}$-modules localement libres de rang 1 dans la catégorie des $\mathcal{A}$-modules spéciaux qui à $\mathcal{M}$ associe $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$ est une équivalence, et ceci en construisant explicitement un foncteur inverse. La construction du foncteur Π s'effectuant en deux étapes :

- à un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1 $\mathcal{M}$ on associe le $\widehat{\mathcal{E}}_0$-module $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1}$;
- au $\widehat{\mathcal{E}}_0$-module $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1}$ on associe le $\mathcal{A}$-module $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$.

Nous allons construire une catégorie intermédiaire, la catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules spéciaux, de façon à ce que ces deux étapes deviennent des foncteurs, et qui plus est, des équivalences.

3.4.1. *$\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules spéciaux.*

Définition 6. — *La catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules spéciaux est la sous-catégorie pleine de la catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules positivement filtrés dont les objets $\mathcal{N}$ sont localement isomorphes à $\widehat{\mathcal{E}}/\widehat{\mathcal{E}}_{-1}$ et tels que $\mathcal{N}_0$ est un $\mathcal{O}(0)$-module de la forme $\mathcal{O}(0) \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_X} \pi^{-1}\mathcal{L}$, où $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible .*

Comme il est clair que pour un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang $\mathcal{M}$, le $\widehat{\mathcal{E}}_0$-module $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1}$ est spécial, nous avons un foncteur Π_1.

Construisons maintenant un foncteur réciproque. Rappelons que si A est un anneau, B un sous-anneau de A et N un B-module à gauche, alors pour tout $h \in N$, $P \in A$ et $Q \in A$, la formule

$$(P \cdot h)(Q) := h(QP)$$

définit une structure de A-module à gauche sur $Hom_B(A; N)$. Donc si $\mathcal{N}$ est un $\widehat{\mathcal{E}}_0$-module spécial,

$$F(\mathcal{N}) := \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}(\widehat{\mathcal{E}}; \mathcal{N})$$

est un $\widehat{\mathcal{E}}$-module à gauche, et le fait que $\mathcal{N}$ soit spécial entraîne que la famille des sous-$\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules

$$F(\mathcal{N})_k := \left\{m \in F(\mathcal{N})\,;\; m(\widehat{\mathcal{E}}_{-k-1}) = 0\right\} = \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}(\widehat{\mathcal{E}}/\widehat{\mathcal{E}}_{-k-1}; \mathcal{N})$$

est une filtration de $F(\mathcal{N})$. Nous avons donc un foncteur F de la catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules spéciaux dans la catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}$-modules filtrés. Pour montrer que F est un inverse de Π_1 nous devons vérifier les trois points suivants :

Premier point. — Montrons que si $\mathcal{M}$ est un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1, le morphisme

$$\Phi := \begin{cases} \mathcal{M} \to \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}(\widehat{\mathcal{E}}; \mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1}) = F(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1}), \\ m \mapsto (P \mapsto \text{classe de } Pm \text{ modulo } \mathcal{M}_{-1}), \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{E}}$-modules filtrés. Il est clair que Φ respecte les filtrations. De plus, au vu des relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_k &= \varprojlim \, (\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell-1}), \\
F(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})_k &= \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}\big(\varinjlim \, (\widehat{\mathcal{E}}_\ell/\widehat{\mathcal{E}}_{-k-1}); (\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})\big) \\
&= \varprojlim \, \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}\big((\widehat{\mathcal{E}}_\ell/\widehat{\mathcal{E}}_{-k-1}); (\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})\big),
\end{aligned}$$

il suffit de montrer que les morphismes suivants (induits par Φ) :

$$\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell-1} \longrightarrow \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}\big((\widehat{\mathcal{E}}_\ell/\widehat{\mathcal{E}}_{-k-1}); (\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})\big)$$

sont des isomorphismes ; mais ceci découle du fait que $\widehat{\mathcal{E}}_\ell/\widehat{\mathcal{E}}_{-k-1}$ est localement monogène.

Deuxième point. — Montrons que si $\mathcal{N}$ est un $\widehat{\mathcal{E}}_0$-module spécial, le morphisme de $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules :

$$\Psi := \begin{cases} F(\mathcal{N}) \to \mathcal{N}, \\ h \mapsto h(1), \end{cases}$$

se factorise en un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules filtrés

$$\Pi_1 F(\mathcal{N}) = F(\mathcal{N})/F(\mathcal{N})_{-1} \longrightarrow \mathcal{N}.$$

On choisit des coordonnées locales et on se place sur l'ouvert $\{\xi_i \neq 0\}$. Les $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules et $\mathcal{N}_k$ sont alors monogènes, ce qui permet de voir que Ψ induit des épimorphismes $F(\mathcal{N})_k \to \mathcal{N}_k$ dont le noyau est $F(\mathcal{N})_{-1}$. Ce qui montre l'assertion.

Troisième point. — Il nous reste à vérifier que si $\mathcal{N}$ est un $\widehat{\mathcal{E}}_0$-module spécial, $F(\mathcal{N})$ est un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1 canoniquement filtré. Le fait que $F(\mathcal{N})$ est localement libre de rang 1 se vérifie localement et découle de l'isomorphisme $\widehat{\mathcal{E}} \to F(\widehat{\mathcal{E}}/\widehat{\mathcal{E}}_{-1})$ du premier point. Le fait que la filtration de $F(\mathcal{N})$ coïncide avec la filtration canonique de $F(\mathcal{N})$ en tant que $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1 découle du deuxième point.

Nous avons par conséquent obtenu :

Proposition 10. — *Les foncteurs Π_1 et F sont inverses l'un de l'autre et induisent donc une équivalence entre la catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}$-modules localement libres de rang 1 et la catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules spéciaux.*

Passons maintenant à l'étude de la deuxième étape de la construction du foncteur Π. Si $\mathcal{M}$ est un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1, on remarque que la raison pour laquelle $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$ est un $\mathcal{A}$-module spécial est que $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1}$ est un $\widehat{\mathcal{E}}_0$-module spécial. La deuxième étape est donc en fait le foncteur π_* de la catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules spéciaux dans celle des $\mathcal{A}$-modules spéciaux. Construisons maintenant un inverse à ce foncteur.

3.4.2. *Le foncteur $\widehat{\mathcal{E}}_0(.)$.* — Dans cette partie, nous allons définir et étudier le foncteur principal de ce travail : le foncteur $\widehat{\mathcal{E}}_0(.)$ de la catégorie des $\mathcal{A}$-modules filtrés dans celle des $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules positivement filtrés (et donc de torsion). Signalons que ce foncteur resservira dans la deuxième partie.

Construction du foncteur $\widehat{\mathcal{E}}_0(.)$. — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module filtré. À partir de maintenant (dans le cadre de cette construction), tous les faisceaux étant sur P^*X, nous omettrons d'écrire le symbole π^{-1} et les produits tensoriels considérés seront sur le faisceau d'anneaux $\pi^{-1}\mathcal{O}$.

Notons $\overline{\nabla}$ le morphisme de $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules défini comme suit :

$$\overline{\nabla} := \begin{cases} \widehat{\mathcal{E}}_{-1} \otimes \wedge^1 \mathcal{T} \otimes \mathcal{M} = \mathcal{M}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{M}^{(0)} = \widehat{\mathcal{E}}_0 \otimes \mathcal{M}, \\ P \otimes X \otimes m \longmapsto P \otimes \nabla_X m - PX \otimes m. \end{cases}$$

Munissons les $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules $\mathcal{M}^{(i)}$ des filtrations produit tensoriel, où $\wedge^i \mathcal{T}$ est défini de degré i. Il est clair que $\overline{\nabla}$ respecte ces filtrations, et par conséquent, nous obtenons un morphisme

$$\mathcal{M}^{(1)}/\mathcal{M}^{(1)}_{-1} \longrightarrow \mathcal{M}^{(0)}/\mathcal{M}^{(0)}_{-1}.$$

Définition 7. — *Notons $\widehat{\mathcal{E}}_0(.)$ le foncteur de la catégorie des $\mathcal{A}$-modules filtrés dans la catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules positivement filtrés défini par*

$$\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M}) = \operatorname{coker}\big(\mathcal{M}^{(1)}/\mathcal{M}^{(1)}_{-1} \longrightarrow \mathcal{M}^{(0)}/\mathcal{M}^{(0)}_{-1}\big).$$

Remarque. — Il est aussi possible de voir $\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M})$ comme le quotient de $\widehat{\mathcal{E}}_0 \otimes \mathcal{M}$ par le sous-$\widehat{\mathcal{E}}_0$-module engendré par les sections de la forme

- $P \otimes m$ avec $\deg(P) + \deg(m) \leq -1$,
- $P\overline{Q} \otimes m - P \otimes Qm$ avec $\deg(P) + \deg(Q) \leq 0$, où Q est une section de $\mathcal{A}$.

3.4.3. *Équivalence entre $\widehat{\mathcal{E}}$-modules spéciaux et $\mathcal{A}$-modules spéciaux.*

Proposition 11. — *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$-module spécial, alors $\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M})$ est un $\widehat{\mathcal{E}}_0$-module spécial.*

Démonstration. — Pour simplifier les notations, nous supposerons que le $\mathcal{O}$-module inversible $\mathcal{M}_0$ est libre ; ce qui ne pose aucun problème, puisque le fait qu'un $\mathcal{A}$-module filtré soit spécial se vérifie localement.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module spécial. Nous allons montrer que le gradué de $\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M})$ est $\mathcal{G}r(\widehat{\mathcal{E}}/\widehat{\mathcal{E}}_{-1})$, les autres points se vérifiant facilement.

Pour $i = 0, 1, 2$, soit $\mathcal{M}^{(i)}$ le $\widehat{\mathcal{E}}_0$-module $\widehat{\mathcal{E}}_{-i} \otimes \wedge^i \mathcal{T} \otimes \mathcal{M}$, muni de la filtration produit tensoriel (où les sections de $\wedge^i \mathcal{T}$ sont définies de degré i).

On définit les morphismes $\overline{\nabla} : \mathcal{M}^{(i+1)} \to \mathcal{M}^{(i)}$ par

- pour $i = 1$,

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}(P \otimes X \wedge Y \otimes s) := \big(PX \otimes Y - PY \otimes X - P \otimes [X;Y]\big) \otimes s \\ + P \otimes X \otimes \nabla_Y s - P \otimes Y \otimes \nabla_X s\,;\end{aligned}$$

- pour $i = 0$,

$$\overline{\nabla}(P \otimes X \otimes s) := P \otimes \nabla_X s - PX \otimes s.$$

On vérifie alors facilement les points suivants :

- $\overline{\nabla}$ respecte les filtrations,
- $\overline{\nabla}^2(P \otimes X \wedge Y \otimes s) = P \otimes R(X \wedge Y)s$ et donc $\overline{\nabla}^2(\mathcal{M}^{(1)}) \subset \mathcal{M}^{(0)}_{-1}$.

Ceci permet de construire le complexe $A^\bullet$ de $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules filtrés :

$$A^\bullet : 0 \to \mathcal{M}^{(2)}/\mathcal{M}^{(2)}_{-1} \longrightarrow \mathcal{M}^{(1)}/\mathcal{M}^{(1)}_{-1} \longrightarrow \mathcal{M}^{(0)}/\mathcal{M}^{(1)}_{-1} \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M}) \to 0.$$

Par définition de $\widehat{\mathcal{E}}_0(.)$, ce complexe est exact en $\mathcal{M}^{(0)}/\mathcal{M}^{(0)}_{-1}$ et en $\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M})$.

Notons $\mathcal{N}^{(i)}$ le $\widehat{\mathcal{E}}_0$-module filtré $\mathcal{M}^{(i)}/\mathcal{M}^{(i)}_{-1}$. Pour montrer que $\mathcal{G}r\,\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M}) = \mathcal{G}r(\widehat{\mathcal{E}}/\widehat{\mathcal{E}}_{-1})$ il suffit de montrer que le complexe $B^\bullet$ de $\mathcal{G}r\,\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules

$$B^\bullet : 0 \to \mathcal{G}r\mathcal{N}^{(2)} \longrightarrow \mathcal{G}r\mathcal{N}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{G}r\mathcal{N}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{G}r(\widehat{\mathcal{E}}/\widehat{\mathcal{E}}_{-1}) \to 0$$

est acyclique, où les premières flèches sont induites par les $\overline{\nabla}$, et la dernière est définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{G}r_n\mathcal{N}^{(0)} = \bigoplus_{\ell \geq n}\big(\mathcal{O}(n-\ell) \otimes S^\ell(\mathcal{T})\big) &\longrightarrow \mathcal{O}(n) = \mathcal{G}r_n(\widehat{\mathcal{E}}/\widehat{\mathcal{E}}_{-1}), \\ P \otimes Q &\longmapsto PQ.\end{aligned}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, notons $B^\bullet_n$ le complexe de $\mathcal{O}(0)$-modules composante de degré n du complexe $B^\bullet$. La démonstration de son exactitude se fera grâce à l'étude de deux complexes auxiliaires $C^\bullet_n$ et $D^\bullet_n$.

Définition et exactitude de $C_n^\bullet$. — Pour $i = 0,1,2$, soit $\mathcal{K}^{(i)}$ le $\mathcal{G}r\,\widehat{\mathcal{E}}$-module $\mathcal{G}r\,\widehat{\mathcal{E}} \otimes \wedge^i\mathcal{T} \otimes \mathcal{G}r\,\mathcal{M}$ muni de la filtration produit tensoriel avec la même convention que précédemment. On a alors le complexe suivant :

$$0 \to \mathcal{K}^{(2)}/\mathcal{K}^{(2)}_{-1} \longrightarrow \mathcal{K}^{(1)}/\mathcal{K}^{(1)}_{-1} \longrightarrow \mathcal{K}^{(0)}/\mathcal{K}^{(0)}_{-1} \longrightarrow \mathcal{G}r(\widehat{\mathcal{E}}/\widehat{\mathcal{E}}_{-1}) \to 0,$$

où les flèches sont définies successivement par

$$\begin{aligned} P \otimes X \wedge Y \otimes s &\longmapsto (PX \otimes Y - PY \otimes X) \otimes s + P \otimes (X \otimes Ys - Y \otimes Xs), \\ P \otimes X \otimes s &\longmapsto P \otimes Xs - PX \otimes s, \\ P \otimes Q &\longmapsto PQ. \end{aligned}$$

Notons $C_n^\bullet$ le complexe de $\mathcal{O}(0)$-modules composante de degré n du complexe précédent.

Munissons $C_n^\bullet$ de la filtration induite par celle de $\wedge^i\mathcal{T} \otimes \mathcal{G}r\,\mathcal{M}$ sur les $\mathcal{G}r_n(\mathcal{K}^{(i)}/\mathcal{K}^{(i)}_{-1})$ et de la filtration positive triviale sur $\mathcal{G}r_n(\widehat{\mathcal{E}}/\widehat{\mathcal{E}}_{-1})$.

Le complexe gradué associé s'écrit alors en degré p :

- pour $p = 0$,

$$0 \to 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{O}(n) \otimes S^0(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{O}(n) \to 0,$$

- pour $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{O}(n-p) \otimes \wedge^2\mathcal{T} \otimes S^{p-2}(\mathcal{T}) &\longrightarrow \mathcal{O}(n-p) \otimes \wedge^1\mathcal{T} \otimes S^{p-1}(\mathcal{T}) \\ &\longrightarrow \mathcal{O}(n-p) \otimes S^p(\mathcal{T}) \to 0. \end{aligned}$$

Ces complexes sont classiquement exacts (les facteurs $\mathcal{O}(i)$ étant simplifiables). La filtration de $C_n^\bullet$ étant positive, on en déduit son exactitude.

Définition et exactitude de $D_n^\bullet$. — $B_n^\bullet$ est naturellement un sous-complexe de $C_n^\bullet$. Soit $D_n^\bullet$ le quotient $C_n^\bullet/B_n^\bullet$. Munissons $D_n^\bullet$ de la filtration induite par celle de $\mathcal{G}r\,\widehat{\mathcal{E}} \otimes \wedge^i\mathcal{T}$. Le complexe gradué associé en degré p $(1 \leq p \leq n)$, est, après simplification,

$$0 \to \mathcal{O}(p-2) \otimes \wedge^2(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{O}(p-1) \otimes \wedge^1(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{O}(p) \to 0.$$

Ces complexes sont classiquement exacts. La filtration de $D_n^\bullet$ étant finie, $D_n^\bullet$ est donc exact.

En appliquant la suite exacte longue de cohomologie à la suite exacte de complexes de $\mathcal{G}r\,\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules

$$0 \to B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow D^\bullet \to 0,$$

on obtient l'acyclicité du complexe $B^\bullet$.

Il s'ensuit que le complexe $A^\bullet$ est acyclique aussi (la filtration étant positive), et que $\mathcal{G}r\,\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M})$ est $\mathcal{G}r\,\widehat{\mathcal{E}}_0$-isomorphe à $\mathcal{G}r(\widehat{\mathcal{E}}/\widehat{\mathcal{E}}_{-1})$. On en déduit facilement que $\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M})$ est un $\widehat{\mathcal{E}}_0$-module spécial.

PROPOSITION 12. — *Les foncteurs π_* et $\widehat{\mathcal{E}}_0(.)$ restreint aux $\mathcal{A}$-modules spéciaux, sont inverses l'un de l'autre et induisent donc une équivalence entre la catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules spéciaux et celle des $\mathcal{A}$-modules spéciaux.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module spécial et $\mathcal{N}$ un $\widehat{\mathcal{E}}_0$-module spécial. On construit sans difficulté les morphismes naturels :

$$\widehat{\mathcal{E}}_0(\pi_*(\mathcal{N})) \longrightarrow \mathcal{N}, \quad \mathcal{M} \longrightarrow \pi_*\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M}).$$

En considérant les morphismes des gradués associés, on vérifie que ce sont des isomorphismes. □

3.4.4. *Le théorème d'équivalence.* — En regroupant les deux propositions précédentes, on obtient immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Les foncteurs $\Pi = \pi_* \circ \Pi_1$ et $\widehat{\mathcal{E}}(.) := F \circ \widehat{\mathcal{E}}_0(.)$ sont inverses l'un de l'autre et induisent donc une équivalence entre la catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}$-modules localement libres de rang 1 et la catégorie des $\mathcal{A}$-modules spéciaux.*

3.5. Un calcul algébrique de l'image directe d'un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1.

Au vu du théorème d'équivalence précédent, le foncteur de la catégorie des $\widehat{\mathcal{E}}$-modules localement libres de rang 1 dans celle des $\mathcal{D}$-modules qui à $\mathcal{M}$ associe $\pi_*\mathcal{M}$ correspond à un foncteur de la catégorie des $\mathcal{A}$-modules spéciaux dans celle des $\mathcal{D}$-modules. Or, le faisceau d'algèbres $\mathcal{D}$ étant un quotient de $\mathcal{A}$, il y a deux foncteurs naturels de la catégorie des $\mathcal{A}$-modules dans celle des $\mathcal{D}$-modules :

$$\mathcal{H} := \mathcal{M} \longmapsto H(\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}; \mathcal{M}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \longmapsto \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}.$$

Ces deux foncteurs sont utilisés dans la preuve du résultat homologique de la section 5.3. Il est clair que $H(\mathcal{M})$ s'identifie à l'ensemble des sections m de $\mathcal{M}$ qui vérifient $R(W)Pm = 0$ pour tout champ de bi-vecteurs W et toute section P de $\mathcal{A}$. C'est donc le plus grand sous-$\mathcal{D}$-module de $\mathcal{M}$. Par exemple, si $\mathcal{F}$ est un fibré muni d'une connexion, $H(\mathcal{F}) = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hor}(\mathcal{F})$ où $\mathrm{Hor}(\mathcal{F})$ est le système local des sections horizontales de $\mathcal{F}$.

Si $\mathcal{M}$ est un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1, l'injection canonique $\pi_*\mathcal{M} \to \pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$ identifiant $\pi_*\mathcal{M}$ à un sous-$\mathcal{D}$-module du $\mathcal{A}$-module $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$, le théorème suivant est assez naturel :

Théorème 3. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang* 1. *On a*

$$\pi_*(\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}; \pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})) = \mathcal{H}(\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})).$$

Démonstration. — Pour simplifier, nous allons travailler avec $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-2})$ à la place de $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-1})$, ce qui ne change rien. Fixons un entier k non négatif. Pour tout entier ℓ non négatif, les $\mathcal{O}$-modules $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell-3})$ forment une famille décroissante de sous-modules de $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-2})$. On a de plus

$$\pi_*(\mathcal{M}_k) = \varprojlim \pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell-3}).$$

On vérifie facilement que les sections m de $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-2})$ qui satisfont $R(U)Pm = 0$ pour tout bivecteur U et toute section P de $\mathcal{A}$ de degré ℓ, forment un sous-$\mathcal{O}$-module $\mathcal{M}_{k,\ell}$. Remarquons que si ∇ est la connexion définie sur $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-2})$, et ∇^2 la courbure associée, $\mathcal{M}_{k,\ell}$ est le sous-$\mathcal{O}$-module de $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-2})$ des sections m qui vérifient : pour toute section P de $\mathcal{A}$ de degré ℓ, $\nabla^2(Pm) = 0$. Les $\mathcal{M}_{k,\ell}$ sont décroissants et on a

$$\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-2}) \cap \mathcal{H}(\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-2})) = \varprojlim \mathcal{M}_{k,\ell}.$$

Nous allons montrer que

$$\mathcal{M}_{k,\ell} = \pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell-3}),$$

ce qui est un peu plus fort que l'énoncé.

Notons $\Theta_{m,\ell}$ le morphisme de réduction $\pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-\ell}) \to \pi_*(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{-m})$, avec les compatibilités evidentes. Ainsi ∇_X s'écrit ${\Theta_{12}}^{-1} \circ \partial_X$.

Première étape : mise en place. — Considérons la suite de $\mathbb{C}$-morphismes :

$$\begin{aligned}0 \to \mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell-3} \longrightarrow (\mathcal{M}_{k+1}/\mathcal{M}_{-\ell-2}) \otimes (\wedge^1\mathcal{T}^*)&\\ \longrightarrow (\mathcal{M}_{k+2}/\mathcal{M}_{-\ell-1}) \otimes (\wedge^2\mathcal{T}^*) \to 0&\end{aligned}$$

où la première flèche, notée ∂ s'écrit en coordonnées locales :

$$\partial(m) = \partial_1 m \otimes dx_1 + \partial_2 m \otimes dx_2$$

et la deuxième, toujours notée ∂ :

$$\partial(m_1 \otimes dx_1 + m_2 \otimes dx_2) = (\partial_2 m_1 - \partial_1 m_2) \otimes (dx_1 \wedge dx_2).$$

On a alors $\partial^2 = 0$ et on trouve facilement un scindage de cette suite sur les ouverts $\{\xi_1 \neq 0\}$ et $\{\xi_2 \neq 0\}$, ce qui entraîne son exactitude.

En faisant l'image directe on obtient la suite exacte suivante :

$$\begin{aligned}0 \to \pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell-3}) \longrightarrow \pi_*(\mathcal{M}_{k+1}/\mathcal{M}_{-\ell-2}) \otimes \wedge^1\mathcal{T}^*&\\ \longrightarrow \pi_*(\mathcal{M}_{k+2}/\mathcal{M}_{-\ell-1}) \otimes \wedge^2\mathcal{T}^*.&\end{aligned}$$

On vérifie de plus facilement que pour $\ell = 0$, cette suite s'intègre dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_*\left(\dfrac{\mathcal{M}_k}{\mathcal{M}_{-3}}\right) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dr, "\Theta_{23}"'] & \pi_*\left(\dfrac{\mathcal{M}_{k+1}}{\mathcal{M}_{-2}}\right) \otimes \wedge^1\mathcal{T}^* \arrow[r, "\partial"] & \pi_*\left(\dfrac{\mathcal{M}_{k+2}}{\mathcal{M}_{-1}}\right) \otimes \wedge^2\mathcal{T}^* \\
& & \pi_*\left(\dfrac{\mathcal{M}_k}{\mathcal{M}_{-2}}\right) \arrow[u, "\nabla"'] \arrow[ur, "\Theta_{12}\circ\nabla^2"'] &
\end{tikzcd}$$

Deuxième étape. — Vérifions que l'on a bien $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell-3}) \subset \mathcal{M}_{k,\ell}$.

Dans un premier temps, montrons que $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-3}) \subset \mathcal{M}_{k,0}$.

Soit m une section de $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-3})$; dans ce cas, $\nabla m = \partial m$ et donc $\nabla^2 m = \nabla\partial m = 0$. Par conséquent, $m \in \mathcal{M}_{k,0}$.

Soit maintenant m une section de $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell-3})$; pour toute section P de $\mathcal{A}$ de degré $d \leq \ell$, on a $Pm = \bar{P}m \in \pi_*(\mathcal{M}_{k+d}/\mathcal{M}_{-\ell-3+d})$.

Si $d \leq \ell - 1$, on a $-\ell - 3 + d \leq -4$ et donc $\nabla^2 Pm = 0$. Si $d = \ell$, on a $Pm \in \pi_*(\mathcal{M}_{k+d}/\mathcal{M}_{-3})$, et donc $\nabla^2 Pm = 0$ comme nous l'avons vu dans un premier temps.

Dans tous les cas, on a bien $m \in \mathcal{M}_{k,\ell}$.

Troisième étape. — Montrons maintenant que $\mathcal{M}_{k\ell} \subset \pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell-3})$.

Récurrence (nous traiterons en même temps la recurrence et le cas initial). Supposons l'assertion vérifiée pour ℓ.

Soit m une section de $\mathcal{M}_{k,\ell+1} \subset \pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-2})$; nous devons montrer que m est dans $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell-4})$. On a

$$\nabla m \in \mathcal{M}_{k+1,\ell} \otimes \wedge^1\mathcal{T}^* \subset \pi_*(\mathcal{M}_{k+1}/\mathcal{M}_{-2}) \otimes \wedge^1\mathcal{T}^*$$

Par hypothèse de récurrence, il existe une unique section n de $\pi_*(\mathcal{M}_{k+1}/\mathcal{M}_{-\ell-3}) \otimes \wedge^1\mathcal{T}^*$ telle que $(\Theta_{2,\ell+3} \otimes \mathrm{Id})(n) = \nabla m$ (dans le cas où $\ell = -1$, $n = \nabla m$).

Mais comme $m \in \mathcal{M}_{k,\ell+1}$, on a $\partial \circ \nabla m = \Theta_{12} \circ \nabla^2 m = 0$ et donc

$$0 = \partial\nabla m = \partial \circ (\Theta_{2,\ell+3} \otimes \mathrm{Id})(n) = (\Theta_{2,\ell+2} \otimes \mathrm{Id}) \circ \partial(n).$$

Par injectivité de $\Theta_{2,\ell+2}$, on obtient $\partial n = 0$. Par exactitude, il existe donc une unique section s de $\pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell-4})$ telle $n = \partial s$. Par conséquent,

$$\nabla m = (\Theta_{2,\ell+3} \otimes \mathrm{Id})\partial s = \partial\Theta_{3,\ell+4}s = \nabla\Theta_{23}\Theta_{3,\ell+4}s = \nabla\Theta_{2,\ell+4}s$$

et $m = \Theta_{2,\ell+4}s$ par injectivité de ∇. Donc $m \in \pi_*(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{-\ell-4})$ et le théorème est démontré. □

II. $\mathcal{D}$-modules micro-localement libres.

4. $\mathcal{D}$-modules micro-localement libres de rang 1 et connexions non-intégrables.

4.1. Triplets $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$.

Pour commencer donnons un critère utile.

PROPOSITION 13. — *Un $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ est micro-localement libre de rang* 1 *sans torsion si et seulement s'il peut être muni d'une filtration telle que localement $\mathcal{G}r\,\mathcal{M} \subset \mathcal{G}r\,\mathcal{D}$ avec égalité en degré assez grand.*

Démonstration. — Si $\mathcal{M}$ est localement libre de rang 1 sans torsion, il peut être muni de la filtration induite par l'injection naturelle $\mathcal{M} \to \pi_*(\widehat{\mathcal{M}})$ (on rappelle que le $\widehat{\mathcal{E}}$-module $\widehat{\mathcal{M}}$ étant par définition localement libre de rang 1, il est canoniquement filtré). Il est alors clair que cette filtration satisfait les conditions de l'énoncé.

Supposons que $\mathcal{M}$ satisfait les hypothèses de la proposition. Plaçons-nous en coordonnées locales. Soit s une section de $\mathcal{M}$ dont le symbole en tant que section de $\mathcal{G}r\,\mathcal{D}$ ne s'annule pas sur l'ouvert $\{\xi_1 \neq 0\}$. On remarque alors que s engendre $\widehat{\mathcal{E}} \otimes \pi^{-1}\mathcal{M}$ sur $\{\xi_1 \neq 0\}$. Comme $\widehat{\mathcal{E}} \otimes \pi^{-1}\mathcal{M}$ est sans torsion, s en est donc une base sur $\{\xi_1 \neq 0\}$. En faisant la même chose sur l'ouvert $\{\xi_2 \neq 0\}$, on en déduit que $\mathcal{M}$ est micro-localement libre de rang 1. □

Nous allons maintenant voir comment les constructions effectuées dans la partie précédente se simplifient, ou plutôt donnent des résultats plus précis, dans le cas des $\mathcal{D}$-modules micro-localement libres de rang 1 sans torsion. Comme la proposition 13 nous le dit, ces modules sont les sous-modules $\mathcal{N}$ des $\pi_*(\mathcal{M})$ tels que $\pi_*(\mathcal{M})/\mathcal{N}$ est $\mathcal{O}$-cohérent, où $\mathcal{M}$ est un $\widehat{\mathcal{E}}$-module localement libre de rang 1.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module micro-localement libre de rang 1 sans torsion vu comme sous-$\mathcal{A}$-module de $\pi_*(\widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1})$. On a donc une injection canonique de $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{M} \to \pi_*(\widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1})$ et le quotient $\pi_*(\widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1})/\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$-module $\mathcal{O}$-cohérent ; c'est-à-dire, d'après la proposition 9, un fibré muni d'une connexion. Notons-le $\mathcal{F}$. La filtration de $\pi_*(\widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1})$ induit une filtration finie sur $\mathcal{F}$; notons $\mathcal{F}_0$ la composante de degré 0. Deux cas peuvent alors se présenter :

- $\mathcal{F} = 0$; alors $\mathcal{M} = \pi_*(\widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1})$ est un $\mathcal{D}$-module localement libre de rang 1 : $\mathcal{M} = \mathcal{D} \otimes \mathcal{F}_0$;

- $\mathcal{F} \neq 0$; alors la projection $\pi_*(\widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1}) \to \mathcal{F}$ induit une injection $\sigma(\widehat{\mathcal{M}}) = \pi_*(\widehat{\mathcal{M}}_0/\widehat{\mathcal{M}}_{-1}) \longrightarrow \mathcal{F}$ et donc $\mathcal{F}_0 = \sigma(\widehat{\mathcal{M}})$.

En effet, $\mathcal{M}$ ne peut pas avoir de section de degré 0 non-nulle sans être localement libre.

Remarque. — À partir de maintenant, nous nous occuperons uniquement du deuxième cas, le seul intéressant de notre point de vue.

De plus, par construction, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_0$ vérifient les propriétés suivantes :

PROPOSITION 14.

- *$\mathcal{A}\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est engendré par $\mathcal{F}_0$ par dérivations covariantes composées.*

- *$R(U)(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}_0$ pour tout bi-vecteur U.*

Grâce au théorème 3, nous voyons que $\mathcal{F}$ est sans sections horizontales non-nulles si et seulement si $\mathcal{M} = \pi_*(\widehat{\mathcal{M}})$. Tout ceci motive la définition suivante :

DÉFINITION 8. — *Appelons triplet* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ *la donnée d'un fibré* $\mathcal{F}$ *muni d'une connexion* ∇ *et d'un sous-fibré* $\mathcal{F}_0$ *de rang* 1, *vérifiant les propriétés suivantes :*

- $\mathcal{F}$ *est engendré par* $\mathcal{F}_0$ *par dérivations covariantes composées;*
- $R(U)(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}_0$ *pour tout bi-vecteur* U.

Pour résumer ce qui vient d'être dit :

DÉFINITION 9. — *À tout* $\mathcal{D}$*-module* $\mathcal{M}$ *micro-localement libre de rang* 1 *sans torsion qui n'est pas localement libre est associé le triplet* $T(\mathcal{M}) = (\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ *où :*

- $\mathcal{F} = \operatorname{coker}(\mathcal{M} \to \pi_*(\widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1}))$;
- $\mathcal{F}_0 = \sigma(\widehat{\mathcal{M}}) = \pi_*(\widehat{\mathcal{M}}_0/\widehat{\mathcal{M}}_{-1})$;
- ∇ *est la connexion induite sur* $\mathcal{F}$ *par les structures de* $\mathcal{A}$*-modules de* $\pi_*(\widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1})$ *et* $\mathcal{M}$.

L'objectif va maintenant être de montrer qu'il y a en fait une correspondance bi-univoque entre ces deux classes d'objets (c'est-à-dire les triplets et les $\mathcal{D}$-modules micro-localement libres de rang 1 sans torsion qui ne sont pas localement libres). Pour cela, nous allons interpréter les $\mathcal{A}$-modules spéciaux et les triplets $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ dans le cadre des $\mathcal{B}$-modules.

4.2. $\mathcal{A}$-modules spéciaux et $\mathcal{B}$-modules.

DÉFINITION 10. — *Appelons* $\mathcal{B}$ *la sous-algèbre de* $\mathcal{A}$ *des sections de la forme* $R(U)P + f$, *où* U *est un bivecteur,* P *une section de* $\mathcal{A}$ *et* f *une fonction.*

Il est alors clair que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$-module spécial, le $\mathcal{O}$-module localement libre de rang 1 $\mathcal{M}_0$ hérite d'une structure de $\mathcal{B}$-module. D'autre part, si $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ est un triplet, $\mathcal{F}_0$ est un sous-$\mathcal{B}$-module du $\mathcal{A}$-module $\mathcal{F}$. On peut alors se demander s'il est possible de retrouver $\mathcal{M}$ à partir de $\mathcal{M}_0$ (considéré comme $\mathcal{B}$-module $\mathcal{O}$-localement libre de rang 1). L'objectif de cette sous-section va être de montrer qu'il en est bien ainsi.

Remarque. — Munir un $\mathcal{O}$-module inversible $\mathcal{L}$ d'une structure de $\mathcal{B}$-module est équivalent à se donner un morphisme d'algèbres $\mathcal{B} \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{L}^{-1}$.

PROPOSITION 15. — *Si $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{B}$-module qui en tant que $\mathcal{O}$-module est localement libre de rang* 1, *alors $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{L}$ est un $\mathcal{A}$-module spécial et cette construction est fonctorielle.*

Démonstration. — Le seul point non-trivial à montrer est que le gradué de $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{L}$ pour la filtration induite par celle de $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathcal{G}r\,\mathcal{D} \otimes \mathcal{L} = S(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{L}$. C'est donc ce que nous allons faire. Mentionnons de plus que tous les produits tensoriels considérés sont sur $\mathcal{O}$, excepté ceux qui sont indicés par $\mathcal{B}$. Soit F et G les morphismes de $\mathcal{A}$-modules définis par

$$F := \begin{cases} \mathcal{A} \otimes \wedge^2\mathcal{T} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}, \\ P \otimes U \otimes Q \otimes m \mapsto PR(U)Q \otimes m - P \otimes R(U)Qm\,; \end{cases}$$

$$G := \begin{cases} \mathcal{A} \otimes \wedge^2\mathcal{T} \otimes \mathcal{A} \otimes \wedge^2\mathcal{T} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{A} \otimes \wedge^2\mathcal{T} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}, \\ P \otimes U \otimes Q \otimes V \otimes S \otimes m \mapsto P \otimes U \otimes Q \otimes R(V)Sm \\ \qquad + PR(U)Q \otimes V \otimes S \otimes m - P \otimes U \otimes QR(V)S \otimes m. \end{cases}$$

Ces morphismes permettent de construire le complexe de $\mathcal{A}$-modules

$$C^\bullet : \mathcal{M}^{(2)} \longrightarrow \mathcal{M}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{M}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{L} \to 0$$

qui est par définition exact en $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ et en $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{L}$, et où l'on a posé

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(0)} &:= \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}, \\ \mathcal{M}^{(1)} &:= \mathcal{A} \otimes \wedge^2\mathcal{T} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}, \\ \mathcal{M}^{(2)} &:= \mathcal{A} \otimes \wedge^2\mathcal{T} \otimes \mathcal{A} \otimes \wedge^2\mathcal{T} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Ce complexe est naturellement filtré par la filtration produit tensoriel (où $\mathcal{L}$ est défini de degré 0 et $\wedge^2\mathcal{T}$ de degré 2). Pour montrer que le gradué de $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{L}$ est $S(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{L}$, il suffit de montrer que le complexe de $\mathcal{G}r\,\mathcal{A}$-modules gradués

$$D^\bullet : \mathcal{G}r\,\mathcal{M}^{(2)} \longrightarrow \mathcal{G}r\,\mathcal{M}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{G}r\,\mathcal{M}^{(0)} \longrightarrow S(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{L} \to 0$$

est acyclique, où les premières flèches sont induites par F et G, et où la dernière est la symétrisation.

Ce complexe est clairement exact en $\mathcal{G}r\,\mathcal{M}^{(0)}$ et en $S(\mathcal{T})\otimes\mathcal{L}$. Nous pouvons par conséquent nous restreindre à l'étude de l'exactitude en $\mathcal{G}r\,\mathcal{M}^{(1)}$, ce qui en degré $f\geq 0$, et après simplification s'écrit

$$E^\bullet : \quad \bigoplus_{a+b+c+4=f} T^a\otimes\wedge^2\otimes T^b\otimes\wedge^2\otimes T^c \longrightarrow \bigoplus_{d+e+2=f} T^d\otimes\wedge^2\otimes T^e \longrightarrow T^f$$

où pour alléger, nous avons écrit T^a pour $T^{\otimes a}(\mathcal{T})$ et $\wedge^2$ pour $\wedge^2\mathcal{T}$.

Filtrons ce complexe de la manière suivante pour $2\leq p\leq f-2$:

$$F_p\Big(\bigoplus_{a+b+c+4=f} T^a\otimes\wedge^2\otimes T^b\otimes\wedge^2\otimes T^c\Big) = \bigoplus_{\substack{a+b+c+4=f\\ a+b+2\leq p}} T^a\otimes\wedge^2\otimes T^b\otimes\wedge^2\otimes T^c,$$

$$F_p\Big(\bigoplus_{d+e+2=f} T^d\otimes\wedge^2\otimes T^e\Big) = \bigoplus_{\substack{d+e+2=f\\ d\leq p}} T^d\otimes\wedge^2\otimes T^e,$$

$$F_p(T^f) = \ker(T^f\to S^{p+2}\otimes T^{f-p-2}),$$

où la flèche est la symétrisation des $p+2$ premiers facteurs du produit tensoriel.

Cette filtration est clairement compatible avec les differentielles du complexe $E^\bullet$.

Lemme 1. — *On a $\mathcal{G}r_p(T^f) = S^p\otimes\wedge^2\otimes T^{f-p-2}$.*

Démonstration du lemme. — Considérons le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes par définition :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & F_p(T^f) & \longrightarrow & T^f & \longrightarrow & S^{p+2}\otimes T^{f-p-2} & \longrightarrow & 0\\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0\to & F_{p-1}(T^f) & \longrightarrow & T^f & \longrightarrow & S^{p+1}\otimes T^{f-p-1} & \to & 0
\end{array}$$

où l'on voit facilement, après simplification du facteur T^{f-p-2}, que la dernière flèche verticale est en fait la dernière flèche du complexe de Koszul

$$\cdots\longrightarrow S^{p-1}\otimes\wedge^3\longrightarrow S^p\otimes\wedge^2\longrightarrow S^{p+1}\otimes\wedge^1\longrightarrow S^{p+2}\to 0.$$

En dimension 2, on a $\wedge^3\mathcal{T}=0$. Le lemme du serpent entraîne donc

$$\mathcal{G}r_p(T^f) = \ker(S^{p+1}\otimes\wedge^1\to S^{p+2})\otimes T^{f-p-2} = S^p\otimes\wedge^2\otimes T^{f-p-2}.$$

Le lemme 1 est démontré. Par conséquent, en degré p, le gradué du complexe $E^\bullet$ s'écrit, après simplification du facteur $\wedge^2 \otimes T^{f-p-2}$,

$$\bigoplus_{a+b+2=p} T^a \otimes \wedge^2 \otimes T^b \longrightarrow T^p \longrightarrow S^p \to 0$$

qui est évidemment exact. La filtration du complexe $E^\bullet$ étant finie, il s'ensuit que $E^\bullet$ est exact. Donc $D^\bullet$ est aussi exact, et par conséquent $\mathcal{G}r(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{L}) = S(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{L}$, ce qui comme nous l'avons déjà dit, entraîne que $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{L}$ est un $\mathcal{A}$-module spécial. □

Remarque. — En dimensions supérieures à 3, le résultat précédent n'est plus vrai. En effet, dans ce cas $\wedge^3 \mathcal{T} \neq 0$, et par conséquent le lemme n'est plus valable. C'est-à-dire qu'il existe dans $T(\mathcal{T})$ des relations de Jacobi non-triviales, ce qui permet de construire des sections de $\operatorname{Im} F$ dont le degré est strictement inférieur au degré attendu et dont le symbole n'est pas dans $\operatorname{Im} \mathcal{G}r\, F$.

THÉORÈME 4. — *Les foncteurs suivants sont inverses l'un de l'autre :*

- *à un $\mathcal{A}$-module spécial $\mathcal{M}$, on associe le $\mathcal{B}$-module $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{O}$-localement libre de rang* 1 ;
- *à un $\mathcal{B}$-module $\mathcal{L}$, $\mathcal{O}$-localement libre de rang* 1, *on associe le $\mathcal{A}$-module $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{L}$ muni de la filtration induite par celle de $\mathcal{A}$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module spécial. Par hypothèse, on a un morphisme surjectif de $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}$. On vérifie qu'il se factorise en $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}$ et en considérant le morphisme des gradués, on voit que c'est un isomorphisme.

Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{B}$-module $\mathcal{O}$-localement libre de rang 1. Alors il est évident que le morphisme naturel de $\mathcal{O}$-modules $\mathcal{L} \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{L}$ se factorise en un isomorphisme de $\mathcal{B}$-modules $\mathcal{L} \to F_0(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{L})$ où comme nous l'avons déjà dit, la filtration sur $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{L}$ est celle induite par la filtration de $\mathcal{A}$. □

4.3. Les $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$.

Précédemment, nous avons associé à tout $\mathcal{D}$-module micro-localement libre de rang 1 sans torsion qui n'est pas localement libre un triplet $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ satisfaisant certaines propriétés. Grâce au résultat de la section précédente, nous pouvons maintenant effectuer la construction inverse.

Soit donc $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ un triplet comme nous l'avons défini. Les hypothèses entraînent que $\mathcal{F}_0$ est un sous-$\mathcal{B}$-module de $\mathcal{F}$, engendrant ce dernier en tant que $\mathcal{A}$-module. On a par conséquent un épimorphisme de $\mathcal{A}$-modules :

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F}.$$

PROPOSITION 16. — *Soit $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ le noyau de l'épimorphisme précédent. C'est un $\mathcal{D}$-module naturellement filtré micro-localement libre de rang* 1 *sans torsion.*

Démonstration. — En effet, d'après la proposition 15, $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F}_0$ est un $\mathcal{A}$-module spécial. De plus, on vérifie sans difficulté que $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ est en fait un $\mathcal{D}$-module. En munissant $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ et $\mathcal{F}$ des filtrations induites par la filtration de $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F}_0$, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{G}r\,\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla) \longrightarrow \mathcal{G}r(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F}_0) \longrightarrow \mathcal{G}r\,\mathcal{F} \to 0.$$

Le gradué de $\mathcal{F}$ étant $\mathcal{O}$-cohérent, nous sommes dans les hypothèses de la proposition 13, et par conséquent $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ est un $\mathcal{D}$-module micro-localement libre de rang 1 sans torsion.

THÉORÈME 5. — *Les foncteurs suivants sont inverses l'un de l'autre :*

- *à un $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ micro-localement libre de rang* 1 *sans torsion qui n'est pas localement libre, on associe le triplet $T(\mathcal{M})$;*
- *à un triplet $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$, on associe le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ micro-localement libre de rang* 1 *sans torsion.*

De plus, par cette correspondance, $\mathcal{F}$ est sans section horizontale non-nulle si et seulement si $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ est isomorphe à l'image directe de son localisé.

Démonstration. — Tout d'abord, on voit facilement que le composé de ces deux foncteurs est l'identité sur la catégorie des $\mathcal{D}$-modules micro-localement libres de rang 1 sans torsion.

Le reste de la démonstration sera donc désormais consacré à montrer que le composé des foncteurs est aussi l'identité sur la catégorie des triplets.

LEMME 2. — *Soit $\mathcal{N}$ un $\widehat{\mathcal{E}}_0$-module muni d'une filtration bornée supérieurement telle que l'intersection des $\mathcal{N}_k$ est nulle. Alors $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}(\widehat{\mathcal{E}}; \mathcal{N}) = 0$.*

Démonstration du lemme. — Par hypothèse, il existe un entier K tel que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_K$. Choisissons des coordonnées locales et plaçons-nous sur l'ouvert $\{\xi_1 \neq 0\}$.

Soit h une section de $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}(\widehat{\mathcal{E}};\mathcal{N})$ et s une section de $\widehat{\mathcal{E}}$. Pour tout $k \geq 0$ on a $h(s) = {\partial_1}^{-k} h({\partial_1}^k s)$. Donc pour tout $k \geq 0$, $h(s)$ est dans $\mathcal{N}_{K-k}$, et comme l'intersection des $\mathcal{N}_k$ est nulle $h(s) = 0$. □

LEMME 3. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module micro-localement libre de rang 1 sans torsion. Grâce à l'injection canonique $\mathcal{M} \to \pi_* \widehat{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M}$ est filtré, et peut être considéré comme un $\mathcal{A}$-module filtré. On peut donc lui appliquer le foncteur $\widehat{\mathcal{E}}_0$. Alors, on a un isomorphisme canonique de $\widehat{\mathcal{E}}$-modules filtrés :*

$$\widehat{\mathcal{E}}(\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}(\widehat{\mathcal{E}};\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M})) \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}.$$

Démonstration du lemme. — Considérons le complexe de $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules

$$\widehat{\mathcal{E}}_{-1} \otimes \wedge^1 \mathcal{T} \otimes \mathcal{M} \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}}_0 \otimes \mathcal{M} \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M} \to 0,$$

où la deuxième flèche est évidente; la première étant définie par $P \otimes X \otimes m \mapsto P\partial_X \otimes m - P \otimes \partial_X m$. Il est clair que les flèches respectent les filtrations et que la deuxième est surjective. Par conséquent, on peut définir le complexe suivant (notations précédentes) :

$$\mathcal{M}^{(1)}/\mathcal{M}^{(1)}_{-1} \longrightarrow \mathcal{M}^{(0)}/\mathcal{M}^{(0)}_{-1} \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1} \to 0$$

dont la dernière flèche est surjective.

On a donc, par définition, un épimorphisme H de $\widehat{\mathcal{E}}_0$-modules filtrés :

$$H : \widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M}) \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1} \to 0.$$

$\mathcal{M}$ étant micro-localement libre de rang 1, sans torsion et muni de sa filtration canonique, on a $\mathcal{G}r_k\mathcal{M} = \mathcal{G}r_k\mathcal{D}$ pour k assez grand. On en déduit facilement que la suite

$$\mathcal{G}r_k(\mathcal{M}^{(1)}/\mathcal{M}^{(1)}_{-1}) \longrightarrow \mathcal{G}r_k(\mathcal{M}^{(0)}/\mathcal{M}^{(0)}_{-1}) \longrightarrow \mathcal{G}r_k(\widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1}) \to 0$$

est exacte pour k assez grand. Donc

• d'une part le noyau $\mathcal{K}$ de H est $\widehat{\mathcal{E}}_0$-cohérent, et par conséquent, pour tout ouvert U assez petit de P^*X, on a la surjectivité de la flèche suivante :

$$H(U) : \Gamma(U;\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M})) \longrightarrow \Gamma(U;\widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1})\,;$$

• d'autre part, la filtration induite sur $\mathcal{K}$ satisfait les hypothèses du lemme 2, et donc $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}(\widehat{\mathcal{E}};\mathcal{K}) = 0$.

L'exactitude à gauche du foncteur $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}(\widehat{\mathcal{E}};.)$ nous fournit alors le monomorphisme de $\widehat{\mathcal{E}}$-modules filtrés :

$$0 \to \widehat{\mathcal{E}}(\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}\big(\widehat{\mathcal{E}};\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M})\big) \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}.$$

Il reste donc à montrer que ce dernier est un épimorphisme de $\widehat{\mathcal{E}}$-modules filtrés (c'est-à-dire surjectif et respectant strictement les filtrations). Il suffit de montrer que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}\big(\widehat{\mathcal{E}}/\widehat{\mathcal{E}}_{-1};\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M})\big) = \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}&\big(\widehat{\mathcal{E}};\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M})\big)_0 \\ &\longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_0 = \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{E}}_0}(\widehat{\mathcal{E}}/\widehat{\mathcal{E}}_{-1};\widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1})\end{aligned}$$

est surjectif.

Soit z un point de P^*X ; choisissons des coordonnées locales telles que $\xi_1(z) \neq 0$, un générateur local e de $\widehat{\mathcal{M}}$ de degré 0 et plaçons-nous au voisinage de z.

Il faut donc montrer qu'il existe une famille $(g_n)_{n\geq 0}$ de sections de $\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M})$ vérifiant les conditions suivantes :

$$H(g_n) = {\partial_1}^n e, \quad {\partial_1}^{-1} g_{n+1} - g_n = 0 \text{ pour tout } n \geq 0, \quad {\partial_1}^{-1} g_0 = 0.$$

Comme $H(U)$ est surjectif pour U assez petit, pour tout $n \geq 0$ il existe une section s_n de $\widehat{\mathcal{E}}_0(\mathcal{M})$ telle que $H(s_n) = {\partial_1}^n e$.

Par conséquent, ${\partial_1}^{-1} s_{n+1} - s_n$ est une section de $\mathcal{K}$. Comme la filtration de $\mathcal{K}$ est bornée, il existe un $N \geq 0$ tel que ${\partial_1}^{-N}\mathcal{K} = 0$.

Pour tout $n \geq 0$, posons $g_n = {\partial_1}^{-N} s_{n+N}$. On vérifie alors que la famille (g_n) convient, et donc le lemme est démontré. □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 5. Soit $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla)$ un triplet. Par définition de $\mathcal{D}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla)$, on a la suite exacte suivante (morphismes filtrés) :

$$0 \to \mathcal{D}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla) \longrightarrow \mathcal{A}\otimes_{\mathcal{B}}\mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \to 0.$$

On en déduit un morphisme filtré de $\widehat{\mathcal{E}}$-modules :

$$\widehat{\mathcal{E}}\big(\mathcal{D}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla)\big) \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}}(\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{B}}\mathcal{F}_0).$$

Pour le reste de la démonstration, nous noterons $\widehat{\mathcal{M}}$ le micro-localisé de $\mathcal{D}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla)$, c'est-à-dire $\widehat{\mathcal{E}}\otimes_{\mathcal{D}}\mathcal{D}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla)$.

Le lemme 3 nous fournit donc un morphisme filtré de $\widehat{\mathcal{E}}$-modules

$$\widehat{\mathcal{M}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F}_0)$$

et, utilisant le fait que ce morphisme est filtré, nous en déduisons un morphisme filtré pour les $\mathcal{A}$-modules associés, qui s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to \mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla) & \longrightarrow & \pi_*(\widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1}) & \longrightarrow & \mathcal{G} \to 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to \mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla) & \longrightarrow & \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F}_0 & \longrightarrow & \mathcal{F} \to 0
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes, et où $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{A}$-module localement libre de rang fini sur $\mathcal{O}$.

Le lemme du serpent entraîne alors, par le corollaire de la proposition 7, que le noyau et le conoyau du morphisme filtré

$$\pi_*(\widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1}) \longrightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F}_0$$

sont des $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{O}$-localement libres de rang fini. On en déduit alors facilement ($\pi_*(\widehat{\mathcal{M}}/\widehat{\mathcal{M}}_{-1})$ et $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F}_0$ étant des $\mathcal{A}$-modules spéciaux) que le morphisme en question est un isomorphisme. Il en est par conséquent de même pour le morphisme $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ et le théorème est démontré. □

5. Étude des modules $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$.

Dans la suite de cette section nous aurons besoin de quelques résultats généraux sur les $\mathcal{A}$-modules.

5.1. Quelques préliminaires sur les $\mathcal{A}$-modules.

Les $\mathcal{A}$-modules à gauche correspondant aux $\mathcal{O}$-modules munis d'une connexion et les $\mathcal{A}$-modules à droite aux $\mathcal{O}$-modules munis d'une connexion à droite, les opérations sur les $\mathcal{O}$-modules munis d'une connexion (à gauche ou à droite) sont aussi définies sur les $\mathcal{A}$-modules (à gauche ou à droite). Rappelons-en quelques unes.

5.1.1. *Le $\mathcal{A}$-module $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M};\mathcal{N})$.* — Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des $\mathcal{A}$-modules à gauche. Il est possible de munir $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M};\mathcal{N})$ d'une structure de $\mathcal{A}$-module à gauche canonique.

L'action des fonctions holomorphes étant evidente, il suffit de définir celle des champs de vecteurs. Soit X un champ de vecteur et h une section de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M};\mathcal{N})$. Pour toute section m de $\mathcal{M}$, posons

$$(\nabla_X h)(m) = \nabla_X\big(h(m)\big) - h(\nabla_X m).$$

On vérifie sans difficulté que $\nabla_X h$ est $\mathcal{O}$-linéaire et que cette action des champs de vecteurs définit une connexion sur $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M};\mathcal{N})$, ce qui d'après la proposition 6 le munit d'une structure de $\mathcal{A}$-module.

En particulier, $\mathcal{O}$ étant canoniquement un $\mathcal{A}$-module à gauche, et plus précisément un $\mathcal{D}$-module à gauche, pour tout $\mathcal{A}$-module à gauche $\mathcal{M}$, le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{M}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M};\mathcal{O})$ est un $\mathcal{A}$-module à gauche.

5.1.2. *Les $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$.* — Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module à gauche et $\mathcal{N}$ un $\mathcal{A}$-module à droite. Nous allons munir le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ d'une structure canonique de $\mathcal{A}$-module à droite. La formule

$$(n \otimes m) \cdot \nabla_X = n.\nabla_X \otimes m - n \otimes \nabla_X.m$$

définit bien une action des champs de vecteurs sur $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$. On vérifie que c'est en fait une connexion à droite, et par une adaptation à droite de la proposition 6, $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ devient un $\mathcal{A}$-module à droite.

En particulier, $\wedge^2\mathcal{T}^*$ étant canoniquement un $\mathcal{A}$-module à droite, et plus précisement un $\mathcal{D}$-module à droite, (on rappelle que $\omega \cdot \nabla_X = -\mathcal{L}_X\omega$), pour tout $\mathcal{A}$-module à gauche $\mathcal{M}$, le $\mathcal{O}$-module $\wedge^2\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$-module à droite.

Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{A}$-modules à gauche, on vérifie que la formule

$$\nabla_X(n \otimes m) = \nabla_X n \otimes m + n \otimes \nabla_X m$$

permet de munir le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ d'une structure de $\mathcal{A}$-module à gauche.

On a de plus la compatibilité suivante entre les deux constructions précédentes :

Proposition 17. — *Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{A}$-modules à gauche. L'isomorphisme canonique de $\mathcal{O}$-modules*

$$(\wedge^2\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{N}) \otimes \mathcal{M} = \wedge^2\mathcal{T}^* \otimes (\mathcal{N} \otimes \mathcal{M})$$

est un morphisme de $\mathcal{A}$-modules à droite pour les structures définies précédemment.

5.1.3. *Quelques morphismes standard.* — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module à gauche. Il lui est associé deux $\mathbb{C}$-morphismes

$$\begin{aligned} &\nabla : \mathcal{M} \to \wedge^1\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{M}, && m \mapsto C \cdot m = \sum dx_i \otimes \nabla_i m, \\ &\nabla : \wedge^1\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{M} \to \wedge^2\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{M}, && \alpha \otimes m \mapsto \alpha \wedge C \cdot m - d\alpha \otimes m, \end{aligned}$$

où C est la section canonique de $\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{T}$ vue comme section de $\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{A}$. On rappelle que ∇^2 est un morphisme de $\mathcal{O}$-modules appelé la courbure de $\mathcal{M}$.

Soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{A}$-module à droite. Il lui est associé deux $\mathbb{C}$-morphismes

$$\begin{cases} \overline{\nabla} : \mathcal{N} \otimes \wedge^2\mathcal{T} \to \mathcal{N} \otimes \wedge^1\mathcal{T}, \\ n \otimes X \wedge Y \mapsto n \cdot \nabla_X \otimes Y - n \cdot \nabla_Y \otimes X - n \otimes [X, Y]\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{\nabla} : \mathcal{N} \otimes \wedge^1\mathcal{T} \to \mathcal{N}, \\ n \otimes X \mapsto n \cdot \nabla_X \end{cases}$$

et alors $\overline{\nabla}^2$ est un morphisme de $\mathcal{O}$-modules.

On remarque que ces quatre morphismes sont compatibles avec le passage gauche-droite. Plus précisément :

Proposition 18. — *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$-module à gauche, et si $\mathcal{N} = \wedge^2\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{M}$ est le $\mathcal{A}$-module à droite associé, on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\quad\nabla\quad} & \wedge^1\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{M} & \xrightarrow{\quad\nabla\quad} & \wedge^2\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{M} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (\wedge^2\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{M}) \otimes \wedge^2\mathcal{T} & \xrightarrow{\overline{\nabla}} & (\wedge^2\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{M}) \otimes \wedge^1\mathcal{T} & \xrightarrow{\overline{\nabla}} & \wedge^2\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{M} \end{array}$$

où les flèches verticales sont des $\mathcal{O}$-isomorphismes évidents.

En particulier, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$-module à gauche, $\mathcal{D} \otimes \mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$-module à droite ou un $\mathcal{A}$-module à gauche, et on a donc les morphismes $\overline{\nabla}$ et ∇ associés.

Si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{A}$-module à droite, $\mathcal{N} \otimes \mathcal{D}$ est un $\mathcal{A}$-module à droite, et on a donc les morphismes $\overline{\nabla}$ associés.

PROPOSITION 19.

• *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module à gauche. Alors $\overline{\nabla}$ est un morphisme de $\mathcal{D}$-modules à gauche et on a la suite exacte :*

$$(\mathcal{D}\otimes\mathcal{M})\otimes\wedge^1\mathcal{T}\xrightarrow{\overline{\nabla}}\mathcal{D}\otimes\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}\to 0.$$

• *Soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{A}$-module à droite. Alors $\overline{\nabla}$ est un morphisme de $\mathcal{D}$-modules à droite et on a la suite exacte :*

$$(\mathcal{M}\otimes\mathcal{D})\otimes\wedge^1\mathcal{T}\xrightarrow{\overline{\nabla}}\mathcal{M}\otimes\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{D}\to 0.$$

Démonstration. — C'est une simple récurrence, utilisant le fait que les champs de vecteurs engendrent le faisceau d'algèbres $\mathcal{A}$. □

PROPOSITION 20. — *Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module à gauche et $\mathcal{N}$ un $\mathcal{A}$-module à droite qui est un $\mathcal{D}$-module. On a alors un isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules à droite*

$$\mathcal{N}\otimes(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M})=(\mathcal{N}\otimes\mathcal{M})\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{D}.$$

Démonstration. — Soit $\mathcal{I}$ l'idéal bilatère de $\mathcal{A}$ engendré par l'image de $R:\wedge^2\mathcal{T}\to\mathcal{A}$. Alors

• $\mathcal{N}\otimes(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M})$ est le quotient de $\mathcal{N}\otimes\mathcal{M}$ par le sous-$\mathcal{A}$-module à droite $\mathcal{N}\otimes\mathcal{I}\mathcal{M}$, qui est le sous-module engendré par les sections de la forme $n\otimes PR(U)m$ où P est une section de $\mathcal{A}$ et U un bi-vecteur ;

• $(\mathcal{N}\otimes\mathcal{M})\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{D}$ est le quotient de $\mathcal{N}\otimes\mathcal{M}$ par le sous-$\mathcal{A}$-module à droite $(\mathcal{N}\otimes\mathcal{M})\mathcal{I}$, qui est le sous-module engendré par les sections de la forme $(n\otimes m)R(U)P$. Mais comme $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}$-module, $(n\otimes m)R(U)P=(n\otimes R(U)m)P$.

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{N}\otimes\mathcal{I}\mathcal{M}=(\mathcal{N}\otimes\mathcal{M})\mathcal{I}$.

Comme $n\otimes R(U)m$ est une section de $\mathcal{N}\otimes\mathcal{I}\mathcal{M}$ qui est un sous-module à droite, $(n\otimes R(U)m)P$ est une section de $\mathcal{N}\otimes\mathcal{I}\mathcal{M}$, et par conséquent $(\mathcal{N}\otimes\mathcal{M})\mathcal{I}\subset\mathcal{N}\otimes\mathcal{I}\mathcal{M}$.

Soit P une section de $\mathcal{A}$. Montrons par récurrence sur le degré de P que pour toutes sections n de $\mathcal{N}$, U de $\wedge^2\mathcal{T}$ et m de $\mathcal{M}$, la section $n\otimes PR(U)m$ est dans $(\mathcal{N}\otimes\mathcal{M})\mathcal{I}$. Si P est de degré 0, c'est évident.

Supposons que l'assertion est vérifiée pour $\deg(P) \leq k$. Alors pour tout champ de vecteurs X, on a

$$n \otimes \nabla_X PR(U)m = n \cdot \nabla_X \otimes PR(U)m - \big(n \otimes PR(U)m\big) \cdot \nabla_X,$$

et donc $n \otimes \nabla_X PR(U)m$ est dans $(\mathcal{N} \otimes \mathcal{M})\mathcal{I}$. L'assertion est donc vérifiée pour $\deg(P) \leq k+1$. Par conséquent $\mathcal{N} \otimes \mathcal{I}\mathcal{M} \subset (\mathcal{N} \otimes \mathcal{M})\mathcal{I}$, et la proposition est démontrée. □

5.2. Calcul des $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$.

Dans le chapitre précédent, nous avons travaillé avec des triplets satisfaisant certaines propriétés. Si, à la place de supposer le $\mathcal{O}$-module localement libre de rang 1, nous l'avions supposé de rang r, nous aurions pu, par la même construction, lui associer un $\mathcal{D}$-module $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$, qui cette fois aurait été micro-localement libre de rang r sans torsion. Dans la suite, nous allons utiliser cette extension de la construction dans le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$. Nous abrègerons alors $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}, \nabla) = \mathcal{D}(\mathcal{F})$. Par définition, pour tout fibré $\mathcal{F}$ de rang r, on a

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \ker(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \to \mathcal{F}).$$

C'est un $\mathcal{D}$-module micro-localement libre de rang r sans torsion naturellement filtré et le gradué de son micro-localisé est $\mathcal{G}r\,\widehat{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{F}$.

Le corollaire 3 permet de calculer par dévissage les $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$; c'est-à-dire d'en obtenir une présentation par générateurs et relations ; ce qui permet aussi de calculer un cocycle standard du micro-localisé.

Proposition 21. — *Soit $\mathcal{F}$ un fibré muni d'une connexion. On a la suite exacte suivante :*

$$0 \to \mathcal{D} \otimes \mathcal{F} \otimes \wedge^2 \mathcal{T} \xrightarrow{\overline{\nabla}} \mathcal{D} \otimes \mathcal{F} \otimes \wedge^1 \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{F}) \to 0.$$

Démonstration. — La deuxième flèche est induite par le morphisme :

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}, \\ &P \otimes s \otimes X \longmapsto (P \otimes s).\nabla_X = PX \otimes s - P \otimes \nabla_X s, \end{aligned}$$

qui se factorise en $\mathcal{D} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{T} \to \mathcal{D}(\mathcal{F}) \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F}$ comme on le vérifie facilement.

Il suffit de vérifier que le complexe suivant, dont toutes les flèches ont déjà été définies, est acyclique :

$$0 \to \mathcal{D} \otimes \mathcal{F} \otimes \wedge^2 \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{D} \otimes \mathcal{F} \otimes \wedge^1 \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \to 0.$$

En fixant, uniquement dans le cadre de cette démonstration, $\mathcal{F}$ de degré 0, $\wedge^i \mathcal{T}$ de degré i, et en munissant chaque terme de ce complexe de la filtration produit tensoriel, on obtient un complexe positivement filtré, et il suffit de montrer que le complexe gradué associé est exact.

En degré $n \geq 1$, ce dernier s'écrit

$$0 \to S^{n-2} \otimes \mathcal{F} \otimes \wedge^2 \longrightarrow S^{n-1} \otimes \mathcal{F} \otimes \wedge^1 \longrightarrow S^n \otimes \mathcal{F} \longrightarrow 0 \to 0$$

et en degré 0,

$$0 \to 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow S^0 \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \to 0.$$

Ces complexes sont classiquement exacts et par conséquent la proposition est démontrée. □

Proposition 22. — *Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ un triplet. On a la suite exacte suivante :*

$$0 \to \mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{D} \otimes (\mathcal{F}/\mathcal{F}_0) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — La première flèche est une inclusion naturelle, et la deuxième est induite par le morphisme

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{D} \otimes \mathcal{F}, \quad P \otimes s \longmapsto \overline{P} \otimes \bar{s},$$

où $\overline{P}$ désigne l'image de P dans $\mathcal{D}$ par le morphisme canonique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{D}$, et $\bar{s}$, la classe de s modulo $\mathcal{F}_0$.

Considérons le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont par définition exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{D}(\mathcal{F}) \arrow[r] & \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F}_0 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[u] & 0.
\end{tikzcd}$$

Grâce au lemme du serpent, il suffit de montrer que la suite suivante, pour les morphismes définis précédemment, est exacte :

$$0 \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{D} \otimes (\mathcal{F}/\mathcal{F}_0) \to 0.$$

Munissant ce complexe de la filtration induite par celles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$, le complexe gradué associé est

$$0 \to S(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{F}_0 \longrightarrow S(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{F} \longrightarrow S(\mathcal{T}) \otimes (\mathcal{F}/\mathcal{F}_0) \to 0,$$

qui est clairement acyclique.

Corollaire 3. — *Le complexe, où l'on a indexé le premier* 0 *en degré* -1,

$$0 \to \mathcal{D} \otimes \mathcal{F} \otimes \wedge^2 \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{D} \otimes \mathcal{F} \otimes \wedge^1 \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{D} \otimes (\mathcal{F}/\mathcal{F}_0) \to 0$$

n'a de cohomologie qu'en degré 1, *et dans ce cas elle vaut* $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente ; la première flèche a déjà été définie et la deuxième est

$$P \otimes s \otimes X \mapsto PX \otimes \bar{s} - P \otimes \overline{\nabla_X s},$$

où $\bar{s}$ signifie encore classe de s modulo $\mathcal{F}_0$. □

5.3. Quelques résultats homologiques sur les $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$.

L'objectif de cette section est de montrer que les $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ sont localement stablement libres si $\mathcal{F}$ n'a pas de section horizontale non-nulle.

5.3.1. *Calcul de* $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(\mathcal{F}); \mathcal{D})$ *et conséquences.*

Proposition 23. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un fibré muni d'une connexion. On a*

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{D}(\mathcal{F}); \mathcal{D}\big) = \wedge^2 \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{H}(\mathcal{F})^*.$$

Démonstration. — En appliquant le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\,;\mathcal{D})$ à la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{D} \otimes \mathcal{F} \otimes \wedge^2 \mathcal{T} \xrightarrow{\overline{\nabla}} \mathcal{D} \otimes \mathcal{F} \otimes \wedge^1 \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{F}) \to 0,$$

on obtient la suite exacte

$$\wedge^1 \mathcal{T}^* \otimes (\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{D}) \xrightarrow{\overline{\nabla}} \wedge^2 \mathcal{T}^* \otimes (\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{D}(\mathcal{F}); \mathcal{D}\big) \to 0$$

où l'on a munit $\mathcal{F}^*$ de sa structure de $\mathcal{A}$-module à gauche canonique et $\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{D}$ de la structure de $\mathcal{A}$-module définie dans la section 5.1.

Lemme 4. — *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{D}(\mathcal{F}); \mathcal{D}\big) = (\wedge^2 \mathcal{T}^* \otimes \mathcal{F}^*) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{D} = \wedge^2 \mathcal{T}^* \otimes (\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}).$$

Démonstration du lemme. — Par les propositions 17 et 18, on peut écrire la suite exacte précédente :

$$\big((\wedge^2\mathcal{T}^*\otimes\mathcal{F}^*)\otimes\mathcal{D}\big)\otimes\wedge^1\mathcal{T}\xrightarrow{\overline{\nabla}}(\wedge^2\mathcal{T}^*\otimes\mathcal{F}^*)\otimes\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(\mathcal{F});\mathcal{D})\to 0.$$

Par la proposition 19, on a donc

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(\mathcal{F});\mathcal{D})=(\wedge^2\mathcal{T}^*\otimes\mathcal{F}^*)\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{D}$$

et la proposition 20 permet de conclure. □

Reste à calculer plus précisément ce $\mathcal{D}$-module en fonction de $\mathcal{H}(\mathcal{F})=\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{H}or(\mathcal{F})$ où $\mathcal{H}or(\mathcal{F})$ est le système local des sections horizontales de $\mathcal{F}$.

Lemme 5. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-module à gauche qui est un $\mathcal{O}$-module localement libre de rang fini. On a alors un isomorphisme canonique*

$$(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}^*)^*\longrightarrow\mathcal{H}(\mathcal{M}).$$

Démonstration du lemme.

• Définissons tout d'abord le morphisme : à une section h de $(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}^*)^*$, on associe l'unique section m de $\mathcal{M}$ telle que $(m^*\mid m)=h(1\otimes m^*)$ pour toute section m^* de $\mathcal{M}^*$.

L'existence de m est assurée par le fait que, $\mathcal{M}$ étant $\mathcal{O}$-localement libre de rang fini, il est égal à son bidual.

On vérifie alors facilement que m est dans $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ et ceci définit bien un morphisme de $\mathcal{D}$-modules à gauche.

• Construisons maintenant le morphisme réciproque : à une section m de $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, on associe la section h de $(\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}^*)^*$ définie par : pour toute section $P\otimes m^*$: $h(P\otimes m^*)=(Qm^*\mid m)$ où Q est une section de $\mathcal{A}$ telle que $\overline{Q}=P$.

On vérifie alors que cette définition ne dépend pas du choix de Q : il faut montrer que pour toute section m de $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, m^* de $\mathcal{M}^*$, U de $\wedge^2\mathcal{T}$, et P de $\mathcal{A}$, on a $(PR(U)m^*\mid m)=0$.

Ceci se voit facilement par récurrence sur le degré de P (on rappelle que par définition de ∇^*_X on a $(\nabla^*_X m^*\mid m)=\mathcal{L}_X(m^*\mid m)-(m^*\mid\nabla_X m))$; le cas initial se démontrant grâce à l'identité

$$\big(R(U)m^*\mid m\big)+\big(m^*\mid R(U)m\big)=0.$$

• Il ne reste plus qu'à vérifier que les morphismes que l'on vient de définir sont réciproques l'un de l'autre ; ce qui ne pose pas de difficulté.

Reprenons la démonstration de la proposition 23.

Le fibré $\mathcal{F}$ étant $\mathcal{O}$-localement libre de rang fini, le lemme s'applique ; de plus les $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{F}^*$ et $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ (qui sont aussi des $\mathcal{D}$-modules) étant aussi $\mathcal{O}$-localement libres de rang fini par le corollaire 2 de la proposition 7, on obtient

$$\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{F}^* = \mathcal{H}(\mathcal{F})^*.$$

Et par conséquent

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(\mathcal{F});\mathcal{D}) = \wedge^2\mathcal{T}^* \otimes (\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{F}^*) = \wedge^2\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{H}(\mathcal{F})^*.$$

Corollaire 4. — *Soit $\mathcal{F}$ un fibré muni d'une connexion ∇. On a équivalence des propriétés suivantes :*

- *$\mathcal{F}$ n'a pas de section horizontale non-nulle,*
- *$\mathcal{H}(\mathcal{F}) = 0$,*
- *$\mathcal{D}(\mathcal{F})$ est un $\mathcal{D}$-module localement stablement libre.*

Démonstration. — Seule l'équivalence avec le dernier point est nouvelle. Si $\mathcal{F}$ n'a pas de section horizontale non-nulle, la proposition précédente entraîne que $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(\mathcal{F});\mathcal{D}) = 0$. Mais ceci entraîne que la suite exacte de la proposition 21 se scinde localement. Par conséquent $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ est localement stablement libre.

Réciproquement, si $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ est localement stablement libre, on a $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(\mathcal{F});\mathcal{D}) = 0$ et donc $\mathcal{F}$ n'a pas de section horizontale non-nulle par la proposition 23. □

5.3.2. *Calcul de $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla);\mathcal{D})$ et conséquences.*

Proposition 24. — *Soit $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla)$ un triplet. On a :*

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla);\mathcal{D}) = \wedge^2\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{H}(\mathcal{F})^*.$$

Démonstration. — Appliquons le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(.;\mathcal{D})$ à la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{D}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{D}\otimes(\mathcal{F}/\mathcal{F}_0) \to 0.$$

On obtient la suite exacte :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{D}\otimes(\mathcal{F}/\mathcal{F}_0);\mathcal{D}\big) &\longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{D}(\mathcal{F});\mathcal{D}\big)\\ &\longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{D}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0);\mathcal{D}\big) \longrightarrow \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{D}\otimes(\mathcal{F}/\mathcal{F}_0);\mathcal{D}\big).\end{aligned}$$

D'une part, on a $\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}\otimes(\mathcal{F}/\mathcal{F}_0);\mathcal{D})=0$.

D'autre part, $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}\otimes(\mathcal{F}/\mathcal{F}_0);\mathcal{D}) = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}/\mathcal{F}_0;\mathcal{O})\otimes\mathcal{D}$ est de torsion en tant que $\mathcal{O}$-module. Le module $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(\mathcal{F});\mathcal{D})$ étant $\mathcal{O}$-localement libre, il s'ensuit que le morphisme

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}\otimes(\mathcal{F}/\mathcal{F}_0);\mathcal{D}) \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(\mathcal{F});\mathcal{D})$$

est nul. On a donc l'isomorphisme de $\mathcal{D}$-modules à droite

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(\mathcal{F});\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla);\mathcal{D})$$

et la proposition 23 permet de conclure. □

Théorème 6. — *Soit* $(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla)$ *un triplet. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

- $\mathcal{F}$ *n'a pas de section horizontale non-nulle*,
- $\mathcal{H}(\mathcal{F})=0$,
- $\mathcal{D}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla)$ *est l'image directe d'un* $\widehat{\mathcal{E}}$*-module localement libre de rang* 1,
- $\mathcal{D}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla)$ *est un* $\mathcal{D}$*-module localement stablement libre.*

Démonstration. — Seules deux équivalences méritent d'être démontrées. Le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{D}\otimes(\mathcal{F}/\mathcal{F}_0)$ a en effet deux résolutions (la première provient de la proposition 22) :

$$0\to\mathcal{D}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla)\longrightarrow\mathcal{D}(\mathcal{F})\longrightarrow\mathcal{D}\otimes(\mathcal{F}/\mathcal{F}_0)\to 0,$$

$$0\to\mathcal{D}\otimes\mathcal{F}_0\longrightarrow\mathcal{D}\otimes\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{D}\otimes(\mathcal{F}/\mathcal{F}_0)\to 0.$$

Le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{D}\otimes\mathcal{F}$ est évidemment localement projectif, et le corollaire 4 entraîne qu'il en est de même pour $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ si $\mathcal{F}$ n'a pas de section horizontale non-nulle. Un lemme d'algèbre homologique, [B1], ch. 2, prop. 1.1, entraîne alors que l'on a localement un isomorphisme canonique

$$\mathcal{D}(\mathcal{F},\mathcal{F}_0,\nabla)\oplus(\mathcal{D}\otimes\mathcal{F}) = (\mathcal{D}\otimes\mathcal{F}_0)\oplus\mathcal{D}(\mathcal{F}).$$

Par conséquent $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0, \nabla)$ est localement stablement libre. La réciproque est immédiate.

Quant à l'équivalence entre les points 2 et 3, c'est une conséquence immédiate du théorème 3. □

BIBLIOGRAPHIE

[B1] E. BJÖRK, Rings of differentials operators, North-Holland, 1979.

[B2] E. BJÖRK, Analytic $\mathcal{D}$-modules and applications, Kluwer Academic Publication, 1993.

[C] M. CARETTE, $\widehat{\mathcal{E}}$–modules localement libres et connexions non-intégrables en dimension 2, Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6, soutenue le 25-11-1999.

[DS] A. D'AGNOLO, P. SCHAPIRA, The Radon-Penrose correspondance II. Line bundles and simple $\mathcal{D}$-modules, J. Funct Anal., 153-2 (1998), 343–356.

[FL] W. FULTON, S. LANG, Riemann-Roch algebra, Springer, 1985.

[GR] H. GRAUERT, R. REMMERT, Coherent analytic sheaves, Springer, 1984.

[H] R. HARTSHORNE, Algebraic geometry, Springer, 1977.

[KKS] M. KASHIWARA, T. KAWAI, M. SATO, Hyperfunctions and pseudodifferential equations, Lecture Notes in Maths. vol. 287, Springer, 1971.

[M] M.-P. MALLIAVIN, Algèbre commutative, Masson, 1985.

[Ma] Y. MANIN, Complex geometry and gauge theory, Springer, 1988.

[MS] P. MAISONOBE, C. SABBAH, $\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes (éléements de la théorie des systèmes différentiels), Travaux en cours 45, Hermann, Paris, 1993.

[S] P. SCHAPIRA, Micro-differentials systems in the complex domain, Springer, 1985.

Manuscrit reçu le 21 décembre 2000,
accepté le 23 avril 2001.

Matthieu CARETTE,
Université Paris 6
Institut de Mathématiques de Jussieu
Équipe d'Analyse Algébrique – case 82
175 rue du Chevaleret
75013 Paris (France).
carette@math.jussieu.fr