



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Nicolas PERRIN

**Courbes rationnelles sur les variétés homogènes**

Tome 52, n° 1 (2002), p. 105-132.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2002\\_\\_52\\_1\\_105\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_1_105_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

## COURBES RATIONNELLES SUR LES VARIÉTÉS HOMOGÈNES

par Nicolas PERRIN

---

### Introduction.

Dans cet article, nous étudions le schéma de Hilbert des courbes rationnelles lisses, de classe fixée, tracées sur une variété homogène. Nous montrons que ce schéma est irréductible et lisse. En particulier, nous montrons qu'il est non vide c'est-à-dire qu'il existe des courbes rationnelles lisses tracées sur les variétés homogènes.

Soit  $G$  un groupe algébrique connexe sur le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes. Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  et soit  $\alpha \in A_1(G/P)$  une classe d'équivalence rationnelle de 1-cycles. Nous dirons que la classe  $\alpha$  est positive (resp. strictement positive) si elle coupe positivement (resp. strictement positivement) tout diviseur effectif de  $G/P$ .

Si  $X$  est une variété et si  $\alpha \in A_1(X)$  est une classe d'équivalence rationnelle de 1-cycles, nous noterons  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$  le schéma des morphismes  $f$  de  $\mathbb{P}^1$  dans  $X$  tels que  $f_*[\mathbb{P}^1] = \alpha$  (pour plus de détails sur ce schéma, voir [G2]). Nous noterons  $\mathbf{Hilb}_\alpha(X)$  le schéma de Hilbert des courbes rationnelles lisses de classe  $\alpha$  tracées sur  $X$ . Nous montrons dans cet article le résultat suivant :

**THÉORÈME.** — (i) *Si la classe  $\alpha \in A_1(G/P)$  est positive, alors le schéma  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, G/P)$  est irréductible et lisse (et en particulier non vide).*

---

*Mots-clés :* Courbes rationnelles – Variétés homogènes – Décomposition cellulaire – Fibrations affines et projectives.

*Classification math. :* 14L35 – 14C05.

(ii) Si  $\alpha$  est strictement positive et que l'on a  $\dim(G/P) \geq 3$ , alors le schéma  $\mathbf{Hilb}_\alpha(G/P)$  est non vide. Il est alors irréductible et lisse de dimension

$$\int_\alpha c_1(T_{G/P}) + \dim(G/P) - 3.$$

Nous discuterons à la fin de cet article (remarque 8) à quelle condition le schéma de Hilbert des courbes rationnelles lisses de classe  $\alpha$  est non vide pour une classe  $\alpha$  positive non strictement positive.

J.F. Thomsen [T], B. Kim et R. Pandharipande [KP] ont montré par des méthodes différentes de celle présentée ici que le schéma  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, G/P)$  est lisse et connexe. Ils ne mentionnent cependant pas qu'il est non vide ni a fortiori l'existence de courbes lisses. La méthode utilisée ici est plus directe. Elle s'appuie sur un « dévissage » des variétés homogènes grâce aux orbites de  $G/P$  sous un sous-groupe parabolique  $P'$  de  $G$ . Ces orbites que nous appelons  $P'$ -orbites permettent de raisonner par récurrence sur la dimension du groupe. Nous pouvons grâce à cette méthode montrer l'existence de morphismes non constants de  $\mathbb{P}^1$  dans  $G/P$  de classe  $\alpha$  positive et surtout l'existence de courbes lisses ce qui n'était pas le cas des méthodes de [T] et [KP].

Dans le premier paragraphe, nous décrivons le dévissage des variétés homogènes et montrons comment il permet de prouver la première assertion du théorème. Nous montrons l'existence du dévissage annoncé dans le deuxième paragraphe. Nous construisons enfin de manière effective des courbes lisses sur les variétés homogènes dans le dernier paragraphe. Nous montrons en appendice que si  $\alpha$  est une classe positive, alors le schéma  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, G/P)$  est non vide. Il semble que ce résultat puisse se montrer par un point de vue « applications stables ». Nous n'en connaissons cependant pas de référence. Nous en donnons ici une démonstration naturelle en utilisant les orbites des sous-groupes à un paramètre.

*Remerciements.* — Je tiens ici à remercier mon directeur de thèse Laurent Gruson pour toute l'aide qu'il m'a apportée durant la préparation de ce travail.

*Remarque 1.* — Si  $C$  est une courbe irréductible dans  $G/P$  alors sa classe  $[C]$  dans  $A_1(G/P)$  est nécessairement positive. En effet, par action du groupe on peut supposer que la courbe  $C$  coupe transversalement tout diviseur effectif (voir par exemple [Kl]). Ainsi  $[C]$  est toujours positive et

la condition de la première partie du théorème est une condition nécessaire pour que le schéma de Hilbert et celui des morphismes soient non vides.

*Notations :*

- Fixons  $T$  un tore maximal de  $G$ . Si  $P$  est un sous-groupe fermé de  $G$ , nous noterons  $\mathfrak{p}$  son algèbre de Lie. Si de plus  $P$  est un parabolique, nous noterons  $\mathcal{P}$  la partie parabolique correspondante (c'est l'ensemble des racines de  $P$ ).

- Soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$  contenant  $T$ , le groupe de Picard de  $G/H$  est exactement le groupe des caractères de  $H$ .

En effet, soit  $L$  un faisceau inversible sur  $G/H$ . Considérons  $G \xrightarrow{i} G/H$  qui est un recouvrement fpqc (fidèlement plat quasi-compact), le faisceau  $i^*L$  est trivial (car  $\text{Pic}(G)$  est nul) et est muni d'une donnée de descente. Cette donnée de descente (voir par exemple [MFK], ch. 1, § 3) correspond exactement à la donnée d'un caractère de  $H$ . Le faisceau inversible  $L$  sur  $G/H$  est le faisceau associé à ce caractère.

Par exemple si  $B$  est un sous-groupe de Borel de  $G$  contenant  $T$ , le groupe de Picard de  $G/B$  est le réseau des poids de  $\mathfrak{t}^*$ . Remarquons que ce groupe est aussi le groupe de Picard de  $G/T$ . Plus généralement, pour tout sous-groupe fermé  $H$  de  $G$  contenant  $T$ , on a une inclusion  $\text{Pic}(G/H)$  dans  $\text{Pic}(G/T)$ .

Par ailleurs, si  $P$  est un parabolique de  $G$ , nous notons  $\alpha(\mathfrak{p})$  l'ensemble des racines suivant :

$$\{\alpha ; \alpha \in \mathcal{P} \text{ et } -\alpha \in \mathcal{P}\}.$$

Si on note

$$\mathfrak{t}(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{\alpha \in \alpha(\mathfrak{p})} \mathfrak{g}_\alpha$$

et  $\mathfrak{t}(\mathfrak{p})^*$  son orthogonal dans  $\mathfrak{t}^*$  (l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}_\alpha$  est l'espace propre associé à la valeur propre  $\alpha$  pour l'action du tore), alors le groupe  $\text{Pic}(G/P)$  est la trace du réseau des poids dans l'espace vectoriel  $\mathfrak{t}(\mathfrak{p})^*$  (cf. [Ch]).

- Soit  $X$  une variété et  $\alpha$  un élément du dual de  $\text{Pic}(X)$ , dans la suite nous noterons également  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$  et  $\mathbf{Hilb}_\alpha(X)$  le schéma des morphismes et le schéma de Hilbert des courbes rationnelles lisses qui définissent l'élément  $\alpha$  dans  $\text{Pic}(X)^\vee$ . Nous utilisons cette notation essentiellement pour une question technique à la proposition 3. Elle n'a pas d'incidence pour les variétés homogènes car le groupe  $A_1(G/P)$  est le dual du groupe de Picard.

• Soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$  et soit  $N$  un espace affine ou un espace vectoriel. Supposons donnée une représentation de  $H$  dans les automorphismes de  $N$  (représentation affine ou linéaire selon les cas), alors nous pouvons définir une fibration  $G \times^H N \rightarrow G/H$  qui est un fibré affine (cf. définition 1) ou vectoriel.

En effet, nous partons du recouvrement fpqc suivant :  $G \xrightarrow{p} G/H$  et de la fibration triviale  $G \times N \rightarrow G$ . La donnée de la représentation de  $H$  dans les automorphismes de  $N$  est une donnée de descente pour cette fibration et le recouvrement  $p$ . Les résultats de descente fidèlement plate (voir [G1], th. 1) nous permettent de dire que le produit contracté  $G \times^H N$  (i.e. le quotient de  $G \times N$  sous l'action de  $H$ ) existe et est un fibré affine ou vectoriel. De plus si la représentation de  $H$  se prolonge en une représentation de  $G$ , alors la fibration est triviale.

• Enfin, nous noterons  $i$  l'involution de Weyl du diagramme de Dynkin du groupe  $G$ . Si  $P$  est un parabolique contenant un Borel  $B$  fixé, nous noterons  $\Sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{b})$  les sommets du diagramme de Dynkin correspondant à  $P$  relativement à  $B$  (cf. [FH]). Si  $B$  est fixé, le parabolique  $P$  est complètement déterminé par cet ensemble de sommets.

## 1. Réduction du théorème.

### 1.1. Lissité du schéma de Hilbert.

PROPOSITION 1. — Soit  $\alpha \in A_1(G/P)$ ; s'il est non vide, le schéma  $\text{Hilb}_\alpha(G/P)$  est lisse de dimension

$$\int_\alpha c_1(T_{G/P}) + \dim(G/P) - 3.$$

*Démonstration.* — La lissité du schéma de Hilbert découle du fait que,  $G/P$  étant homogène, son fibré tangent est engendré par ses sections. Sa dimension au point  $C$  est alors donnée par

$$\deg(T_{G/P}|_C) + \dim(G/P) - 3.$$

La lissité du schéma des morphismes se démontre de la même façon. Pour une autre démonstration voir [Ko], th. 1.4, p. 241.  $\square$

Remarquons que l'ensemble des plongements de  $\mathbb{P}^1$  dans  $G/P$  de classe  $\alpha$  est un ouvert du schéma  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, G/P)$ . Cet ouvert domine  $\mathbf{Hilb}_\alpha(G/P)$  (c'est une fibration en  $\mathrm{PGL}_2$ ). L'irréductibilité du schéma de Hilbert se déduit donc de celle du schéma des morphismes. La difficulté de la première partie du théorème réside dans l'irréductibilité du schéma des morphismes.

### 1.2. Réduction du théorème.

Pour démontrer la première partie du théorème, nous allons «dévissier» les variétés homogènes en variétés plus «simples». Nous pourrions alors raisonner par récurrence sur la dimension du groupe. Deux cas se présentent. Si le parabolique  $P$  n'est pas un Borel, nous montrons qu'il existe une  $P'$ -orbite ouverte  $U$  (cf. définition 2) qui vérifie les conditions suivantes :

- Le complémentaire de  $U$  dans  $G/P$  est de codimension au moins 2.
- Il existe un morphisme  $f : U \rightarrow Y$  où  $Y$  est une variété homogène sous un produit de groupes de dimensions strictement inférieures à celle de  $G$  tel que  $f$  est une tour de fibrés affines engendrés par leur sections (cf. définition 1).

Si par contre, le parabolique  $P$  est un Borel, cette construction ne fonctionne plus. Cependant, nous nous ramenons au cas précédent en montrant que si  $\alpha \in A_1(G/P)$  est positive, alors il existe un parabolique  $P'$  contenant  $P$  tel que

- Le morphisme  $G/P \rightarrow G/P'$  est une fibration en droites projectives telle que le degré de  $\alpha$  relativement à cette fibration est positif.

Dans le reste de ce paragraphe, nous montrons que le dévissage proposé ci-dessus permet de démontrer la première partie du théorème. Nous montrerons au troisième paragraphe comment ce dévissage permet de construire des courbes lisses.

**PROPOSITION 2.** — *Soit  $X$  une variété homogène sous un groupe  $G$  et soit  $\alpha \in A_1(X)$ . Soit  $i : U \rightarrow X$  une immersion ouverte telle que le complémentaire  $Z$  de  $i(U)$  soit de codimension au moins 2. Supposons que  $\mathbf{Hom}_{i^*\alpha}(\mathbb{P}^1, U)$  est irréductible, alors  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$  l'est aussi.*

*Démonstration.* — Cette proposition est une conséquence directe d'un résultat de S.L. Kleiman [Kl] : si  $C$  est une courbe de  $X$  et si  $Z$  est un fermé

de codimension au moins 2, alors il existe un ouvert de  $G$  tel que, pour tout point  $g$  de cet ouvert, l'intersection de  $C$  avec les translatés  $g \cdot Z$  du fermé  $Z$  est vide. Ainsi pour  $g \in G$ , les ouverts  $\mathbf{Hom}_{i^*g^*\alpha}(\mathbb{P}^1, g.U)$  recouvrent le schéma  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$ .

Cette proposition est encore vraie si  $\alpha \in \text{Pic}(X)^\vee$ . En effet les groupes  $\text{Pic}(U)$  et  $\text{Pic}(X)$  sont isomorphes, ainsi  $i^*\alpha$  est défini et détermine  $\alpha$ .  $\square$

**DÉFINITION 1.** — Nous dirons qu'un schéma  $X$  est un fibré affine  $\mathcal{F}$  de rang  $n$  au-dessus de  $Y$  s'il est muni d'un morphisme  $f$  de  $X$  dans  $Y$  qui est une fibration localement triviale dont les fibres sont des espaces affines de dimension  $n$  et les changements de cartes sont des éléments du groupe affine linéaire  $\text{GA}_n$ . Le morphisme naturel de  $\text{GA}_n$  dans  $\text{GL}_n$  nous permet de définir de nouveaux changements de cartes (linéaires cette fois-ci) qui définissent le fibré vectoriel  $F$  direction du fibré affine  $\mathcal{F}$ . La donnée de  $\mathcal{F}$  est équivalente à celle de  $F$  et d'un élément  $\eta \in H^1(Y, F)$  (la «section nulle locale»). Nous dirons qu'un fibré affine est engendré par ses sections si son fibré vectoriel direction est engendré par ses sections.

Nous dirons qu'un morphisme  $X \xrightarrow{f} Y$  est une tour de fibrés affines s'il se décompose en une suite de morphismes

$$X \xrightarrow{f_1} X_1 \longrightarrow \dots \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{f_{n+1}} Y$$

où les  $f_i$  sont des fibrés affines.

**PROPOSITION 3.** — Si  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  est une tour de fibrés affines engendrés par leurs sections et si  $\alpha \in \text{Pic}(X)^\vee$ , alors

$$\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbb{P}^1, Y)$$

est une tour de fibrés affines. En particulier, si  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbb{P}^1, Y)$  est irréductible, alors  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$  l'est aussi.

*Démonstration.* — Remarquons que pour une fibration affine  $\varphi$  (non propre), si  $\alpha \in A_1(X)$ , l'élément  $\varphi_*\alpha$  n'est pas *a priori* défini. Ici  $\varphi_*$  désigne le morphisme de  $\text{Pic}(X)^\vee$  dans  $\text{Pic}(Y)^\vee$  défini par la transposée de  $\text{Pic}(Y) \xrightarrow{\varphi^*} \text{Pic}(X)$  qui est un isomorphisme (cf. [G3], cor. 1, p. 34 et rem. p. 35).

Il suffit de prouver le cas d'un fibré affine  $\mathcal{F}$  dont le fibré vectoriel direction  $F$  est engendré par ses sections. Nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbb{P}^1, Y) \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{p} & Y \\ \downarrow q & & \\ \mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbb{P}^1, Y). & & \end{array}$$

Comme le faisceau  $F$  est engendré par ses sections, le faisceau  $R^1q_*p^*F$  est nul. Le faisceau  $q_*p^*F$  est donc localement libre. Nous allons montrer le résultat suivant : le schéma  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$  au-dessus de  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbb{P}^1, Y)$  est le fibré affine de fibré vectoriel direction  $q_*p^*F$  et associé à l'élément de  $H^1q_*p^*F$  image de celui de  $H^1F$  définissant  $\mathcal{F}$ . Ceci a bien un sens : on a un morphisme de  $H^1F$  dans  $H^1p^*F$  et le second groupe de cohomologie est isomorphe à  $H^1q_*p^*F$  car les faisceaux  $R^iq_*p^*F$  sont nuls pour  $i > 0$ .

En effet, si on fait le produit fibré du morphisme universel

$$p : \mathbb{P}^1 \times \mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbb{P}^1, Y) \longrightarrow Y$$

avec  $X$ , on obtient une variété  $Z$  qui est le fibré affine  $p^*\mathcal{F}$  au-dessus de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbb{P}^1, Y)$ . La variété  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$  est alors donnée sur chaque fibre au-dessus de  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbb{P}^1, Y)$  par les sections de ce fibré, c'est-à-dire par le faisceau d'espaces affines  $q_*p^*\mathcal{F}$ . Comme  $q_*p^*F$  est localement libre, le faisceau  $q_*p^*\mathcal{F}$  définit un fibré affine de base  $q_*p^*F$ , il est associé à l'élément de  $H^1q_*p^*F$  image de celui de  $H^1F$  définissant  $\mathcal{F}$ . □

**PROPOSITION 4.** — *Soit  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  une fibration en droites projectives de fibré tangent relatif  $T_{X/Y}$  et soit  $\alpha \in A_1(X)$  tel que  $\alpha \cap T_{X/Y} \geq 0$ , alors  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$  est un ouvert d'un fibré projectif au-dessus de  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbb{P}^1, Y)$ . En particulier, si  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbb{P}^1, Y)$  est irréductible alors  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$  est irréductible dès qu'il est non vide.*

*Démonstration.* — Soit  $E$  un faisceau localement libre de rang 2 sur  $Y$  tel que  $X$  soit isomorphe à  $\text{Proj}_Y(\text{Sym}(E))$ . Nous avons encore un morphisme de  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$  dans  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbb{P}^1, Y)$ . Soit  $f \in \mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbb{P}^1, Y)$  et soit  $S = \text{Proj}_{\mathbb{P}^1}(\text{Sym}(f^*E))$  la surface réglée obtenue comme produit fibré de  $\mathbb{P}^1$  avec  $X$  au-dessus de  $Y$ . Notons  $\mathcal{O}_S(0, 1)$  le quotient tautologique de cette surface réglée et  $\mathcal{O}_S(1, 0)$  le diviseur d'une fibre. Le groupe de Picard de  $S$  est  $\mathbb{Z}^2$  et  $\mathcal{O}_S(1, 0)$  et  $\mathcal{O}_S(0, 1)$  en sont des générateurs. Les relèvements de  $f$  dans  $X$  de classe  $\alpha$  correspondent aux sections de  $f^*E(c) = f^*E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(c)$  qui sont partout injectives (où  $c$  est un entier

dépendant de  $\alpha$ ). Pour calculer la valeur de  $c$ , remarquons que les sections de  $f^*E(c)$  correspondent exactement aux sections de  $\mathcal{O}_S(c, 1)$ . L'entier  $c$  vérifie la condition suivante :

$$(c, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 2 \end{pmatrix} = b$$

où la matrice est celle de la forme d'intersection sur  $S$ , le vecteur de droite est la classe de  $T_{X/Y}$ , où

$$a = (\varphi_*\alpha) \cap c_1(E) \quad \text{et} \quad b = \alpha \cap T_{X/Y}.$$

Ainsi on a  $c = \frac{1}{2}(b - a)$  (on a nécessairement  $b \equiv a \pmod{2}$ ). Nous nous intéressons donc au faisceau  $F = q_*(p^*E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(c))$  sur  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbb{P}^1, Y)$  (avec les notations de la proposition précédente pour les morphismes  $p$  et  $q$ ). Il est localement libre de rang  $b + 2$  au-dessus de l'ouvert  $U$  complémentaire de  $\text{Supp}(R^1q_*((p^*E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(c - 1)))$ . Cet ouvert contient l'image de  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$ . En effet, si  $f \in \text{Supp}(R^1q_*((p^*E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(c - 1)))$ , alors le faisceau  $f^*E(c)$  a un facteur de degré inférieur à  $-1$ , ses sections s'annulent toutes et ne peuvent ainsi donner des courbes sur  $X$ . Au-dessus d'un point de l'ouvert  $U$ , les éléments de la fibre sont donnés par les sections partout injectives qui forment un ouvert des sections. Sur  $\text{Proj}_U(\text{Sym}(\check{F})) \times \mathbb{P}^1$  on a une section tautologique de  $p^*E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(c)$ ; soit  $Z$  la projection dans  $\text{Proj}_U(\text{Sym}(\check{F}))$  du lieu des zéros de cette section. Nous pouvons maintenant affirmer que  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$  s'identifie à l'ouvert de  $\text{Proj}_U(\text{Sym}(\check{F}))$  complémentaire  $Z$ .

Remarquons qu'il est possible que le schéma  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, X)$  soit vide si l'ouvert  $U$  du schéma  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbb{P}^1, Y)$  est vide.

Cette proposition est encore vraie si  $\alpha \in \text{Pic}(X)^\vee$ , le morphisme  $\varphi^*$  définissant un morphisme  $\varphi_*$  de  $\text{Pic}(X)^\vee$  dans  $\text{Pic}(Y)^\vee$ .  $\square$

## 2. Dévissage de $G/P$ .

### 2.1. Décomposition en $P'$ -orbites.

Nous allons ici introduire une classe de variétés plus générales que les cellules de Schubert classiques. Soient  $P$  et  $P'$  deux paraboliques contenant un tore  $T$  fixé. Nous supposons dans la suite que l'intersection  $P \cap P'$  contient un Borel que nous ne fixons pas *a priori*.

**DÉFINITION 2.** — Nous appelons  $P'$ -orbites de  $G/P$  les orbites de  $G/P$  sous l'action de  $P'$ .

*Remarque 2.* — Les  $P'$ -orbites sont des sous-variétés localement fermées lisses de  $G/P$  dont elles forment une stratification. Toute  $P'$ -orbite de  $G/P$  peut s'écrire sous la forme  $P'wP/P$  où  $w$  est un élément du groupe de Weyl  $W$ . Les  $P'$ -orbites sont paramétrées par les doubles classes  $W(P)\backslash W/W(P')$ . Nous avons ici noté  $W(P)$  le sous-groupe de  $W$  stabilisant  $P$ . L'action de  $W(P) \times W(P')$  est donnée par  $((w, w'), g) \mapsto wgw'^{-1}$ .

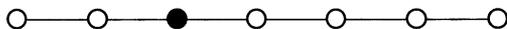
Soit  $B$  un Borel contenu dans  $P \cap P'$ , la  $P'$ -orbite  $P'wP/P$  est  $B$ -stable donc réunion des  $B$ -orbites (i.e. de cellules de Schubert) :  $Bw_1w_2P/P$  pour  $(w_1, w_2) \in W(P) \times W(P')$ .

Remarquons enfin que la  $P'$ -orbite  $P'wP/P$  est isomorphe à  $P'^wP/P$  où  $P'^w = w^{-1}P'w$ . Elle est donc aussi isomorphe à  $P'^w/(P'^w \cap P)$ .

*Exemple 1.* — Si le groupe  $G$  est  $SL_3$ , supposons que le parabolique  $P$  est associé au premier sommet du diagramme de Dynkin de  $G$ , la variété  $G/P$  est alors le plan projectif  $\mathbb{P}^2$ . Si le parabolique  $P'$  est associé au second sommet, alors les  $P'$ -orbites de  $G/P$  sont une droite  $L_0$  du plan et  $\mathbb{P}^2 - L_0$ .

**DÉFINITION 3.** — Les composantes connexes du diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P'$  sont les diagrammes de Dynkin obtenus à partir de celui de  $G$  en enlevant les sommets correspondant à  $P'$ .

*Exemple 2.* — Dans  $SL_8$ , si  $P'$  est le parabolique suivant :



le diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P'$  est le suivant :



les composantes connexes correspondent aux groupes  $SL_3$  et  $SL_5$ .

**Décomposition de Levi.** — Soit  $w \in W$  un élément du groupe de Weyl. Notons  $N'$  la partie unipotente de  $P'^w$  et  $R'$  le quotient réductif correspondant. La décomposition de Levi (voir [B], 11.22 et 14.17–14.19) nous permet de dire que  $P'^w$  est le produit semi-direct de  $R'$  et  $N'$ . Cette situation est rigidifiée par le choix du tore maximal  $T^w$  contenu dans  $P'^w$  : la décomposition de  $\mathfrak{g}$  en sous-espaces propres induit une section  $s$  de  $R'$  dans  $P'^w$ . Notons

$$N = N' \cap P \quad \text{et} \quad R = R' \cap P$$

(c'est l'image de  $P$  dans  $R'$ ).

Le groupe  $R'$  est le produit de groupe de Lie  $G_i$  dont les diagrammes sont donnés par les composantes connexes du diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P'$  et de facteurs isomorphes à  $\mathbb{C}^*$  (il y en a  $\text{rang}(\text{Pic}(G/P'))$ ). De même,  $R$  est produit de groupes  $P_i$  qui sont des paraboliques des  $G_i$  et des mêmes facteurs isomorphes à  $\mathbb{C}^*$ . Les paraboliques  $P_i$  sont la trace de  $P$  dans  $G_i$ .

Le résultat suivant va nous permettre de faire fonctionner la récurrence.

PROPOSITION 5. — *Le morphisme naturel  $f$  de  $P'wP/P$  vers  $R'/R$  est une tour de fibrés affines dont les fibrés vectoriels direction correspondent à la suite centrale ascendante de  $N'$ . Ils sont définis sur  $R'/R$  et sont engendrés par leurs sections.*

*Démonstration.* — Nous regardons ici la  $P'$ -orbite  $P'wP/P$  sous la forme  $P'^w/(P'^w \cap P)$ . Le morphisme de l'énoncé est la composée de la multiplication à gauche par  $w^{-1}$  et de la projection vers  $R'$ . Toutes les fibrations considérées ne sont *a priori* que localement triviales pour la topologie fpqc (voir [SGA] exposé IV par M. Demazure, Topologies et faisceaux). Cependant, dès que ces fibrations sont affines ou vectorielles, le principe de descente fidèlement plate (voir [G2], th. 1) nous permet de dire qu'elles sont localement triviales pour la topologie de Zariski.

Soit  $1 = N'_0 \subset N'_1 \subset \dots \subset N'_n = N'$  la suite centrale ascendante de l'unipotent  $N'$ . Notons  $Z'_i = N'_i/N'_{i-1}$  qui est le centre de  $N'/N'_{i-1}$ . C'est un espace vectoriel sur lequel  $R'$  agit linéairement. Notons  $P'_i$  le quotient  $P'^w/N'_i$ , notons  $P_i$  l'image de  $P \cap P'^w$  dans  $P'_i$  et posons  $Z_i = P_i \cap Z'_i$  qui est un espace vectoriel sur lequel  $R$  agit linéairement. L'écriture de  $f$  comme tour de fibrés affines est

$$P'^w/(P'^w \cap P) = P'_0/P_0 \rightarrow \dots \rightarrow P'_i/P_i \rightarrow \dots \rightarrow P'_n/P_n = R'/R.$$

Les flèches sont des fibrations localement triviales pour la topologie fpqc (cf. lemme 1) et la fibre de  $P'_{i-1}/P_{i-1} \rightarrow P'_i/P_i$  au-dessus du point 1 est  $Z'_i/Z_i$ . Il s'agit de montrer que cette fibration est affine de fibré vectoriel direction l'image réciproque (par la projection  $P'_i/P_i \rightarrow R'/R$ ) du fibré vectoriel sur  $R'/R$  déduit de la représentation  $Z'_i/Z_i$  de  $R$ .

Notons

$$A = P'_{i-1}, \quad B = P_{i-1} \quad \text{et} \quad U = Z'_i$$

(qui est distingué dans  $A$ ). La fibration  $P'_{i-1}/P_{i-1} \rightarrow P'_i/P_i$  est donc  $A/B \rightarrow (A/U)/(B/(U \cap B)) = A/BU$ . Nous allons montrer le lemme suivant :

LEMME 1. — Soient  $A$  un groupe linéaire non discret,  $B$  un sous-groupe fermé de  $A$  et  $U$  un sous-groupe unipotent de  $A$  distingué dans  $A$ . Supposons que  $U$  est commutatif dans  $A$ , alors la projection  $A/B \xrightarrow{p} A/BU$  est un fibré affine dont le fibré direction sur  $A/BU$  est déduit de la représentation (par automorphismes intérieurs) de  $B$  sur  $U/(U \cap B)$ .

Démonstration. — Posons  $C = BU$ . La variété  $A \times (C/B)$  est munie d'une action libre de  $C$  donnée par  $(c, (a, x)) \mapsto (ac^{-1}, cx)$ .

Montrons que  $A/B$  est exactement le quotient de  $A \times (C/B)$  sous l'action de  $C$ . Nous noterons  $\hat{x}$  la classe dans  $A/B$  d'un élément  $x \in A$ . Le morphisme  $\pi : A \times (C/B) \rightarrow A/B$  donné par  $(a, \hat{c}) \mapsto \widehat{ac}$  est équivariant pour l'action de  $C$  sur  $A \times (C/B)$ . Les orbites de  $A \times (C/B)$  sous l'action de  $C$  sont fermées et correspondent exactement aux fibres de  $\pi$ . Nous pouvons ainsi identifier  $A/B$  au produit contracté  $A \times^C (C/B)$ . Nous noterons  $\overline{(a, \hat{c})}$  la classe d'un élément  $(a, \hat{c})$  de  $A \times (C/B)$  dans le produit contracté  $A \times^C (C/B)$ .

Le produit contracté  $A \times^C (C/B)$  est muni d'une projection vers  $A/C$ . Montrons que la fibration  $p' : A \times^C (C/B) \rightarrow A/C$  de fibre  $C/B$  donnée par  $\overline{(a, \hat{c})} \mapsto \tilde{a}$  (où  $\tilde{a}$  est la classe de  $a$  dans  $A/C$ ) est exactement celle de l'énoncé.

Commençons par montrer qu'elle est localement triviale pour la topologie fpqc. Le morphisme  $A/B \rightarrow A/C$  est un recouvrement fpqc qui trivialisait cette fibration. En effet, soit  $X$  le produit fibré de  $A \times^C (C/B)$  et  $A/B$  au-dessus de  $A/C$ . Nous avons la trivialisaiton  $A/B \times A/C \rightarrow X$  donnée par  $(\hat{a}, \hat{c}) \mapsto (\hat{a}, \overline{(a, \hat{c})})$ , la réciproque étant  $(\hat{a}, \overline{(a', \hat{c})}) \mapsto (\hat{a}, \widehat{a^{-1}a'c})$  (l'élément  $a^{-1}a'c$  est bien dans  $C$  car  $a$  et  $a'$  ont la même classe dans  $A/C$ ). Remarquons que l'on a  $X = A \times^B (C/B)$ .

Enfin, la projection  $p'$  est la projection  $p$  de l'énoncé : d'après l'identification de  $A/B$  avec  $A \times^C (C/B)$  donnée par  $\hat{a} \mapsto \overline{(a, \hat{1})}$ , nous pouvons voir que  $p'$  est donnée par  $p'(\hat{a}) = \tilde{a}$  de  $A/B$  dans  $A/C$ .

Ainsi  $p$  est une fibration de groupe structural  $C$  agissant sur  $C/B = U/(B \cap U)$ . L'action de  $C$  est l'action naturelle de  $C$  sur  $C/B$ . Si  $b \in B$  et  $u \in U$  alors la classe de  $bu$  dans  $C$  correspond à celle de

$bub^{-1}$  dans  $U/(B \cap U)$ , l'action de  $C$  sur  $U/(B \cap U)$  est donc donnée par  $(bu, \bar{u}') \mapsto \overline{bub^{-1} \cdot bu'b^{-1}}$ . Cette action est affine : la partie  $bu'b^{-1}$  est linéaire et est translatée par  $bub^{-1}$ . La fibration  $p$  est donc affine. Sa direction est donnée par la partie linéaire de l'action c'est-à-dire par l'action de  $C$  sur  $U/(B \cap U)$  donnée par  $(bu, \bar{u}') \mapsto \overline{bu'b^{-1}}$ . C'est l'action restreinte de  $B \subset C$  sur  $U/(B \cap U)$  par automorphisme intérieur.  $\square$

Il nous reste à voir que tous les fibrés vectoriels associés à ces fibrés affines sont définis sur  $R'/R$  et qu'ils sont engendrés par leurs sections.

Pour montrer qu'ils sont définis sur  $R'/R$ , il suffit de montrer que dans le cas de la fibration  $P'_{i-1}/P_{i-1} \rightarrow P'_i/P_i$ , l'action de  $P_i$  sur  $Z'_i/Z_i$  est en fait donnée par une action de  $P_{i+1}$ . L'action de  $P_i$  est donnée par  $(p, \bar{z}') \mapsto \overline{pz'p^{-1}}$ . Si on remplace  $p$  par  $pz$  avec  $z \in Z_{i+1}$  on a alors  $\overline{pzz'z^{-1}p^{-1}} = \overline{pz'p^{-1}}$  car  $Z'_i$  est central dans  $N'/N'_i$ . Ainsi, si on prend un élément  $p \in P_i$  et que l'on considère son image  $\tilde{p}$  dans  $P_{i+1}$ , on peut définir l'action de  $\tilde{p}$  sur  $Z'_i/Z_i$  par celle de  $p$ . Nous montrons ainsi par récurrence que tous les fibrés direction sont définis sur la base  $R'/R$ .

Enfin, comme l'action de  $R$  sur  $Z'_i$  se prolonge à  $R'$ , le fibré associé à la représentation de  $R$  dans  $Z'_i$  est trivial. Ainsi, les fibrés associés à la représentation  $Z'_i/Z_i$  de  $R$  sont quotients d'un fibré trivial. Ils sont donc engendrés par leurs sections.

Si  $N'$  est abélien, le morphisme  $P'wP/P \rightarrow R'/R$  est un fibré vectoriel. En effet, la tour se réduit à un fibré affine et de plus la section de  $R'$  dans  $P'$  nous définit une section de  $R'/R$  dans  $P'wP/P$  ce qui nous dit que ce fibré affine est vectoriel.  $\square$

*Remarque 3.* — De façon plus générale, si  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$  et  $N$  un groupe unipotent tels que l'on a une représentation de  $H$  dans les automorphismes de  $N$ , alors nous pouvons définir une fibration en unipotents  $G \times^H N \rightarrow G/H$ .

En effet, la suite centrale ascendante de l'unipotent permet de se ramener au cas d'un espace affine ou vectoriel pour lequel la descente fidèlement plate permet de conclure.

## 2.2. Codimension du bord de la $P'$ -orbite maximale.

Nous appelons  $P'$ -orbite maximale de  $G/P$  la  $P'$ -orbite  $P'wP/P$  qui est dense dans  $G/P$ . Cette orbite est unique. Nous cherchons à quelle condition elle a un complémentaire de codimension au moins 2. Nous

commençons par donner une condition pour que  $P'wP/P$  soit la  $P'$ -orbite maximale de  $G/P$ . Fixons un Borel  $B$  dans  $P \cap P'$ .

LEMME 2. — *La  $P'$ -orbite  $P'wP/P$  est dense dans  $G/P$  si et seulement si  $\mathfrak{p} \cap (-\mathfrak{p}'^w)$  contient l'algèbre de Lie d'un Borel, c'est-à-dire, si et seulement si  $w$  est dans l'orbite de  $w_0$  (l'élément de longueur maximale) sous  $W(P) \times W(P')$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer que cette condition implique que l'orbite est maximale pour l'inclusion, par unicité de cette orbite toutes les orbites ainsi obtenues seront isomorphes. Les  $P'$ -orbites sont décrites par  $P'^w/(P'^w \cap P)$  pour  $w \in W$ . Cette  $P'$ -orbite est isomorphe à  $P'/(P' \cap P^{w^{-1}})$ . Pour maximiser cette orbite on cherche à minimiser l'intersection  $P' \cap P^{w^{-1}}$ . Pour que cette intersection soit minimale, il faut et il suffit que  $\mathfrak{p}^{w^{-1}}$  contienne le moins de racines de  $\mathfrak{p}'$  possible. C'est le cas si et seulement si  $\mathfrak{p}'^w$  contient toutes les racines qui ne sont pas dans  $\mathfrak{p}$ , donc si  $\mathfrak{p}$  et  $-\mathfrak{p}'^w$  contiennent l'algèbre de Lie d'un Borel l'orbite est maximale pour l'inclusion et réciproquement.  $\square$

L'involution de Weyl du diagramme de Dynkin est définie de la façon suivante : soit  $\mathfrak{b}$  l'algèbre de Lie du Borel  $B$  et soit  $w_0 \in W$  le seul élément du groupe de Weyl qui envoie  $\mathfrak{b}$  sur  $-\mathfrak{b}$  (c'est l'élément de longueur maximale). Soit  $\alpha$  une racine simple de  $\mathfrak{b}$  (ou de façon équivalente un sommet du diagramme de Dynkin), l'élément  $i(\alpha)$  est la racine simple de  $\mathfrak{b}$  égale à  $-w_0(\alpha)$ . L'involution  $i$  correspond à l'involution non triviale naturelle des diagrammes de Dynkin de  $A_n, D_{2n+1}$  et  $E_6$  et à l'identité sur les autres diagrammes.

PROPOSITION 6. — *La  $P'$ -orbite maximale  $P'w_0P/P$  a un complémentaire de codimension au moins 2 dans  $G/P$  si et seulement si dans le diagramme de Dynkin, les ensembles de sommets  $\Sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{b})$  et  $i(\Sigma(\mathfrak{p}', \mathfrak{b}))$  sont disjoints.*

*Démonstration.* — Nous allons raisonner sur les groupes de Picard. Notons  $j$  l'immersion ouverte de  $P'w_0P/P$  dans  $G/P$ . Il nous suffit de donner une condition pour que le morphisme  $j^*$  de  $\text{Pic}(G/P)$  dans  $\text{Pic}(P'w_0P/P)$  soit injectif.

Considérons la flèche  $k : P'^{w_0}/(P'^{w_0} \cap P) \rightarrow G/(P'^{w_0} \cap P)$ . Montrons que le noyau du morphisme  $k^*$  entre groupes de Picard est  $\text{Pic}(G/P'^{w_0})$ .

En effet, le groupe de Picard de  $G/(P'^{w_0} \cap P)$  correspond aux caractères de  $P'^{w_0} \cap P$ . Soit  $\chi$  un tel caractère et  $L_\chi$  le faisceau inversible associé. Si  $k^*L_\chi$  est trivial, alors ceci signifie que le caractère  $\chi$  se prolonge à  $P'^{w_0}$  en un caractère  $\chi'$ . Ceci revient à dire que l'on a  $L_\chi = p^*L_{\chi'}$  où  $p$  est la projection de  $G/(P'^{w_0} \cap P)$  vers  $G/P'^{w_0}$ .

Par ailleurs, le morphisme  $q : G/(P'^{w_0} \cap P) \rightarrow G/P$  nous donne une injection  $q^*$  du groupe  $\text{Pic}(G/P)$  dans le groupe  $\text{Pic}(G/(P'^{w_0} \cap P))$  (dont le conoyau est  $\text{Pic}(P/(P'^{w_0} \cap P))$ ). Le morphisme  $j^*$  est donné par  $k^*q^*$ . Son noyau est exactement l'intersection  $\text{Pic}(G/P) \cap \text{Pic}(G/P'^{w_0})$  dans  $\text{Pic}(G/(P'^{w_0} \cap P))$ .

Il s'agit maintenant de donner une condition pour que cette intersection soit nulle. Or on a vu en introduction que cette intersection est la trace du réseau des poids dans l'espace vectoriel  $\mathfrak{t}(\mathfrak{p})^* \cap \mathfrak{t}(\mathfrak{p}'^{w_0})^*$ . Il est donc nul si et seulement si l'espace vectoriel engendré par  $\mathfrak{t}(\mathfrak{p})$  et  $\mathfrak{t}(\mathfrak{p}'^{w_0})$  est  $\mathfrak{t}$  tout entier, c'est-à-dire si et seulement si  $\alpha(\mathfrak{p}) \cup \alpha(\mathfrak{p}'^{w_0})$  engendre tout  $\mathfrak{t}$ . Si on note  $R_s$  les racines simples de  $\mathfrak{b}$ , ceci revient à dire que  $R_s \subset \alpha(\mathfrak{p}) \cup \alpha(\mathfrak{p}'^{w_0})$ . Mais par définition, on a

$$\Sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{b}) = R_s - (\alpha(\mathfrak{p}) \cap R_s) \quad \text{et} \quad \Sigma(-(\mathfrak{p}')^{w_0}, \mathfrak{b}) = R_s - (\alpha(\mathfrak{p}'^{w_0}) \cap R_s).$$

La condition précédente est équivalente à dire que  $\Sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{b})$  et  $\Sigma(-(\mathfrak{p}')^{w_0}, \mathfrak{b}) = i(\Sigma(\mathfrak{p}', \mathfrak{b}))$  sont disjoints. □

*Exemple 3.* — Reprenons l'exemple 1. Le groupe  $G$  est  $SL_3$  et le parabolique  $P$  est associé au premier sommet du diagramme de Dynkin. Ainsi la variété  $G/P$  est le plan projectif  $\mathbb{P}^2$ . Si on choisit pour le parabolique  $P'$  l'un des trois paraboliqes suivants :



alors d'après la proposition 6, seul le premier parabolique doit donner une cellule maximale dont le complémentaire est de codimension au moins 2. C'est en effet le cas, les  $P'$ -orbites sont respectivement :

- un point  $P_0$  et  $\mathbb{P}^2 - P_0$ ,
- une droite  $L_0$  et  $\mathbb{P}^2 - L_0$ ,
- un point  $P_0$ , une droite  $L_0$  privée du point :  $L_0 - P_0$  et  $\mathbb{P}^2 - L_0$ .

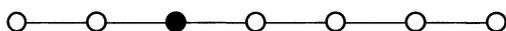
*Remarques 4.*

(i) La condition de la proposition 6 nous permet de construire pour tout parabolique  $P$  qui n'est pas un Borel un parabolique  $P'$  tel que

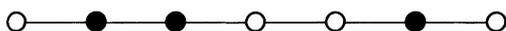
la  $P'$ -orbite  $P'w_0P/P$  soit maximale et que son complémentaire soit de codimension au moins 2. En effet, soit  $P$  un parabolique contenant strictement un Borel  $B$ , alors l'ensemble  $\Sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{b})$  ne contient pas tous les sommets. Il suffit de prendre pour  $P'$  un parabolique maximal dont le sommet  $s_{P'}$  dans le diagramme de Dynkin n'est pas dans  $i(\Sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{b}))$ . Par contre cette proposition nous montre que ceci ne sera jamais possible avec les sous-groupes de Borels de  $G$ .

(ii) Dans le cas où la  $P'$ -orbite est maximale, les paraboliques  $P_i$  de la décomposition de  $R$  la partie réductive de  $P'^{w_0} \cap P$  (cf. décomposition de Levi) sont donnés par les sommets de  $i(\Sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{b}))$  regardés dans le diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P'$ .

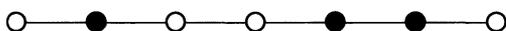
*Exemple 4.* — Reprenons l'exemple 2 : le groupe  $G$  est  $SL_8$  et le parabolique  $P'$  est



Si le parabolique  $P$  est



alors  $i(P)$  est



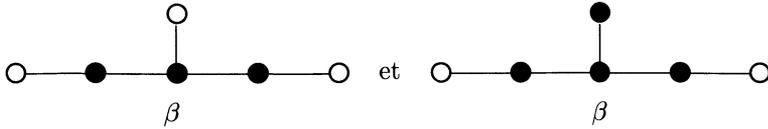
Les paraboliques  $P_i$  sont alors donnés par



La variété  $R'/R$  est donc  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{F}(2, 3; 5)$  où  $\mathbb{F}(2, 3; 5)$  est la variété des drapeaux partiels de sous-espaces vectoriels de dimensions 2 et 3 d'un espace vectoriel de dimension 5.

**DÉFINITION 4.** — Soit  $P$  un parabolique contenant un Borel  $B$ . Soit  $\beta \in \Sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{b})$  un sommet du diagramme de Dynkin. Nous dirons que  $\beta$  est admissible si, en notant  $P_\beta$  le parabolique correspondant à  $\Sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{b}) - \{\beta\}$ , le singleton  $\{\beta\}$  est une composante connexe du diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P_\beta$ .

*Exemple 5.* — Considérons le groupe  $G = E_6$  et les paraboliques  $P_1$  et  $P_2$  correspondant respectivement aux diagrammes suivants :



Dans le premier cas la racine  $\beta$  n'est pas admissible, alors qu'elle l'est dans le second cas.

La proposition suivante permet de résoudre le cas des Borels :

**PROPOSITION 7.** — *Soit  $B$  un Borel et  $P$  un parabolique contenant  $B$ . Soit  $\beta$  une racine admissible pour  $P$ , alors le morphisme  $G/P \rightarrow G/P_\beta$  est une fibration en droites projectives.*

*Démonstration.* — Soient  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{p}_\beta$  les algèbres de Lie de  $P$  et  $P_\beta$ , on voit que  $\mathfrak{p}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{p}_\beta$  et que  $\mathfrak{p}_\beta$  est l'algèbre de Lie engendrée par  $\mathfrak{p}$  et  $-\beta$ . Mais comme le sommet correspondant à  $\beta$  forme une composante connexe du diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P_\beta$ , alors on voit que  $\beta$  est orthogonale à toutes les racines simples négatives de  $\mathfrak{p}$ , ce qui impose  $\mathfrak{p}_\beta = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{g}_\beta$  (voir aussi [Ti]).  $\square$

*Remarque 5.* — Soient  $P$  un parabolique et  $\beta$  une racine admissible pour  $P$ . Si  $C$  est une courbe tracée sur  $G/P$  dont la classe est  $\alpha \in A_1(G/P)$ , alors son degré par rapport à la fibration est donné par  $(\alpha, \beta)$ . En d'autres termes, le fibré tangent relatif  $T_{G/P/G/P_\beta}$  est de première classe de Chern  $\beta$  (voir par exemple [D]).

**FAIT 1.** — *Soit  $B$  un Borel de  $G$  et soit  $\alpha \in A_1(G/P)$  une classe positive, alors il existe un sommet  $\beta$  du diagramme de Dynkin (nécessairement admissible pour  $B$ ) tel que  $(\alpha, \beta) \geq 0$ .*

*Démonstration.* — Une classe est positive si et seulement si, pour toute racine simple  $\beta$  de  $B$  on a  $(\alpha, \check{\beta}) \geq 0$  (où  $\check{\beta}$  est la coracine de  $\beta$ ). Ceci vient du fait que le cône des diviseurs effectifs est engendré par les coracines  $\check{\beta}$ .

Par ailleurs, les coracines  $\check{\beta}$  sont combinaison linéaire à coefficients positifs des racines simples. Ainsi, si pour toute racine simple  $\beta$  on a  $(\alpha, \beta) < 0$  alors  $\alpha$  ne peut pas être positive.

Ce fait permet de trouver pour toute classe  $\alpha$  positive (resp. strictement positive) une racine simple admissible  $\beta$  telle que  $\alpha$  est positive (resp. strictement positive) par rapport à la fibration en droites projectives  $G/B \rightarrow G/B_\beta$ .  $\square$

*Application : irréductibilité du schéma des morphismes.* — Nous supposons pour le moment que si  $\alpha$  est une classe positive, alors le schéma  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, G/P)$  est non vide. Nous montrerons ce résultat dans l'appendice en fin d'article.

Nous raisonnons par récurrence sur la dimension du groupe. Le cas de  $SL_2$  est évident. Soit  $P$  un parabolique de  $G$  et soit  $\alpha \in A_1(G/P)$  une classe positive. Si  $P$  est un Borel, le fait 1 nous permet de trouver une racine simple  $\beta$  telle que  $(\alpha, \beta) \geq 0$ . Dans ce cas  $G/B$  est une fibration en droites projectives au-dessus de  $G/B_\beta$  tel que le degré de  $\alpha$  par rapport à cette fibration est positif. La proposition 4 nous permet donc de nous ramener au cas où  $P$  n'est pas un Borel. Remarquons que c'est à cette étape qu'intervient le problème de vacuité (cf. proposition 4).

D'après la remarque 4, la proposition 6 nous permet alors de construire un parabolique  $P'$  tel que la  $P'$ -orbite  $P'w_0P/P$  est maximale et que son complémentaire est de codimension au moins 2. La proposition 2 nous permet de nous ramener au problème d'irréductibilité du schéma des morphismes pour cette  $P'$ -orbite.

Enfin, la proposition 5 nous dit que  $P'w_0P/P$  est une tour de fibrés affines associés à des fibrés vectoriels engendrés par leurs sections au-dessus d'un produit de variétés homogènes sous des groupes de dimension strictement inférieure à celle de  $G$ . Nous concluons par hypothèse de récurrence en utilisant la proposition 3.  $\square$

*Remarque 6.* — De la même façon, les schémas  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, U)$  où  $U$  est une  $P'$ -orbite de  $G/P$  sont irréductibles.

### 3. Existence de courbes lisses.

Nous allons dans ce paragraphe montrer l'existence de courbes lisses sur les variétés homogènes. Nous nous restreindrons au cas où la classe de la courbe est strictement positive et nous déterminerons (remarque 8) à quelle condition il existe des courbes lisses de classe positive non

strictement positive. Nous commençons par montrer quelques résultats qui nous permettent, grâce au dévissage, de construire des courbes lisses.

### 3.1. Préliminaires.

Nous appelons courbe nodale une courbe irréductible et génériquement réduite qui est lisse ou qui a pour seules singularités des points doubles ordinaires. Si  $F$  est un fibré vectoriel sur un schéma projectif  $X$ , nous dirons que  $F$  sépare les points si pour tout couple de points  $(P, Q)$  de  $X$ , on a

$$h^0(F \otimes \mathcal{I}_P) > h^0(F \otimes \mathcal{I}_{P \cup Q}).$$

Si  $X$  est une variété et  $\alpha \in A_1(X)$ , nous noterons  $\mathfrak{H}_\alpha(X)$  le schéma de Hilbert des courbes rationnelles nodales de classe  $\alpha$ . Nous dirons enfin que  $X$  vérifie la condition (\*) si la variété d'incidence

$$\{(x, C) \in X \times \mathfrak{H}_\alpha(X); x \in \text{Sing}(C)\}$$

est irréductible.

LEMME 3. — Soit  $X$  une variété munie d'un fibré affine  $\mathcal{F}$  de fibré vectoriel direction  $F$  et défini par  $\eta \in H^1(X, F)$ . Soit  $C$  une courbe rationnelle irréductible et génériquement réduite sur  $X$  et  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow C$  une désingularisation de  $C$ . Notons  $\bar{\eta}$  la restriction de  $\eta$  à  $H^1(C, F|_C)$ .

Si on suppose que  $F$  est engendré par ses sections, alors il existe un relèvement de  $f$  dans  $\text{Aff}(\mathcal{F}|_C)$  le fibré affine associé à  $\mathcal{F}$  au-dessus de  $C$ . Si on suppose de plus que  $C$  est nodale et que l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (i)  $\bar{\eta} \neq 0$  et  $X$  vérifie (\*),
- (ii)  $f^*F|_C$  sépare les points,

alors il existe un relèvement lisse de  $f$  dans  $\text{Aff}(\mathcal{F})|_C$ .

*Démonstration.* — Comme  $F$  est engendré par ses sections, le groupe  $H^1 f^*F|_C$  est nul donc le fibré affine  $f^*\mathcal{F}|_C$  est le fibré vectoriel  $f^*F|_C$  et est engendré par ses sections. Une telle section nous donne un relèvement de  $f$  dans  $\text{Aff}(\mathcal{F}|_C)$ . Si  $C$  est lisse, alors un relèvement quelconque de  $C$  est lisse.

Si on a  $\bar{\eta} \neq 0$ , le fibré affine au-dessus de  $C$  n'est pas vectoriel et n'a donc pas de section. Prenons un relèvement  $f'$  de  $f$  donné par une section

de  $f^*F|_C$ . Ce relèvement est nécessairement non bijectif sur  $C$  (sinon ce serait une section de  $\mathcal{F}|_C$ ). C'est donc une désingularisation partielle de  $C$ . Ainsi, il existe un relèvement  $f'$  de  $f$  qui désingularise au moins un point de  $C$ . Mais par monodromie (le groupe de monodromie agit transitivement sur les points singuliers grâce à la condition (\*), cf. [H]) nous savons que pour chaque point double il existe une section de  $f^*F|_C$  qui désingularise ce point. En prenant une section générale nous obtenons une désingularisation en tout point.

Supposons que  $f^*F|_C$  sépare les points. Soit  $P$  un point double de  $C$  et  $x$  et  $y$  ses antécédents par  $f$ . Il existe une section de  $f^*F|_C$  qui sépare  $x$  et  $y$ . Mais alors cette section nous donne un relèvement  $f'$  de  $f$  qui désingularise  $P$ . Ainsi, il existe un relèvement désingularisant chaque point double et une section générale de  $f^*F|_C$  nous donne un relèvement lisse.  $\square$

Si  $\bar{\eta}$  est nul et qu'on ne suppose plus que  $f^*F|_C$  sépare les points alors il n'existe pas toujours de relèvement lisse de  $f$ . C'est le cas si  $F$  est trivial sur une courbe nodale.

#### Remarques 7.

(i) Avec les notations du lemme, supposons que  $C$  est contenue dans une variété homogène  $X$  et que sa classe dans  $A_1(X)$  est strictement positive. Supposons de plus que  $c_1(F)$  est non nul dans le cône ample de  $\text{Pic}(X)$ , alors il existe un relèvement lisse de  $f$  dans  $\text{Aff}(\mathcal{F})$ . En effet, il suffit de vérifier que  $f^*F$  sépare les points. Mais le degré de  $f^*F$  sur  $\mathbb{P}^1$  est  $(c_1(F), \alpha)$  et est strictement positif donc  $f^*F$  sépare les points.

(ii) Notons que le plan projectif  $\mathbb{P}^2$  vérifie la condition (\*). Nous en aurons besoin dans la suite.

LEMME 4. — Soit  $C$  une courbe rationnelle irréductible et génériquement réduite. Soit  $E$  un fibré vectoriel de rang 2 sur  $C$  et  $\mathbb{P}_C(E) \xrightarrow{\varphi} C$  la fibration en droites projectives associée. Notons  $T$  son espace tangent relatif. Soit  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow C$  une désingularisation de  $C$ .

Soit  $d$  un entier tel que  $h^1 f^*(E \otimes \check{E})(d-1) = 0$ ; alors il existe un relèvement  $f'$  de  $f$  tel que  $f'_*[\mathbb{P}^1] \cap T = d$ . Supposons de plus que  $C$  est nodale et  $d > 0$ , alors on peut choisir  $f'$  d'image lisse.

Démonstration. — Nous pouvons supposer que le faisceau  $f^*E$  admet la décomposition suivante :  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(x)$  avec  $x \geq 0$ . La condition

$h^1 f^*(E \otimes \tilde{E})(d-1) = 0$  est alors équivalente à  $d \geq x$ . De plus, les relèvements de degré relatif  $d$  de  $f$  sont donnés par les quotients isomorphes à  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\frac{1}{2}(x+d))$  de  $f^*E$ . Un tel quotient existe si et seulement si  $x \equiv d[2]$  et  $\frac{1}{2}(x+d) \geq x$  c'est-à-dire  $d \geq x$ . En effet, si les conditions sont vérifiées, un tel quotient existe : il suffit de prendre des morphismes de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$  et  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(x)$  vers  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\frac{1}{2}(x+d))$  qui ne s'annulent pas aux mêmes points. Si  $d < x$  alors pour avoir un tel quotient il faut que  $\frac{1}{2}(x+d) = 0$  c'est-à-dire  $d = x = 0$ . C'est absurde.

Dans le cas où la courbe  $C$  est nodale, il suffit de vérifier que l'on peut séparer les points. La donnée d'un quotient de  $f^*E$  isomorphe à  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\frac{1}{2}(x+d))$  étant équivalente à la donnée d'une section partout non nulle de  $f^*E(\frac{1}{2}(d-x))$ , on est ramené à montrer que pour tout couple de points  $(P, Q)$  de  $\mathbb{P}^1$  il existe une telle section  $s$  telle que  $s(P)$  et  $s(Q)$  sont linéairement indépendants. Mais on a  $f^*E(\frac{1}{2}(d-x)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\frac{1}{2}(x+d)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\frac{1}{2}(d-x))$  donc ceci est possible dès que  $\frac{1}{2}(d-x) \geq 0$  et  $\frac{1}{2}(x+d) > 0$ , ce qui est vérifié sous nos hypothèses.

Si on ne suppose plus  $d > 0$ , il n'existe pas nécessairement de relèvement lisse de  $f$ . En effet, si  $E$  est trivial et  $C$  nodale alors  $\mathbb{P}_C(E) = C \times \mathbb{P}^1$  n'a pas de relèvement lisse de  $C$  de degré 0.

Si le fibré  $E$  est défini sur une variété  $X$  et que  $C$  décrit la variété des courbes rationnelles de  $X$  de classe  $\alpha$ , la condition  $h^1 f^*(E \otimes \tilde{E})(d-1) = 0$  est une condition ouverte sur la courbe  $C$ .  $\square$

### 3.2. Construction de courbes lisses.

Nous supposons que pour une classe  $\alpha$  positive, le schéma  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, G/P)$  est non vide. Nous montrons ce résultat en appendice. Nous ramenons tout d'abord le cas d'un Borel à celui d'un parabolique qui n'est pas un Borel. Nous montrons ensuite le résultat par récurrence sur la dimension du groupe. Une difficulté apparaît ici pour l'initialisation de la récurrence : sur une surface homogène, une classe positive donnée n'est en général représentée que par des courbes rationnelles nodales. Nous devons donc traiter un certain nombre de cas de variétés homogènes de petite dimension. La quadrique  $Q_3$  de dimension 3 demande une attention particulière. Nous traitons le cas des variétés homogènes sous le groupe  $G_2$  par une méthode différente.

Nous supposons connus les résultats suivants : il existe des courbes rationnelles lisses de tout degré strictement positif sur  $\mathbb{P}^n$  dès que  $n \geq 3$ . Sur  $\mathbb{P}^2$  et  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  il existe des courbes rationnelles nodales de toute classe

strictement positive. Pour ces cas on plonge  $\mathbb{P}^1$  dans un espace projectif de grande dimension en on reprojette la courbe, cf [Ha] ch. IV. Nous pouvons déduire de ces résultats qu'il existe des courbes rationnelles lisses de toute classe strictement positive :

- sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$  dès que  $n \geq 2$  (lemme 4),
- sur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  (lemme 4).

Plus généralement, si on a deux variétés homogènes  $X$  et  $Y$  telles qu'il existe des courbes rationnelles lisses de toute classe strictement positive  $\alpha$  sur  $X$  et qu'il existe des morphismes de  $\mathbb{P}^1$  dans  $Y$  de toute classe strictement positive  $\beta$ , alors il existe des courbes rationnelles lisses de toute classe strictement positive  $\alpha + \beta$ . En effet, il suffit de considérer le morphisme  $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{(f_1, f_2)} X \times Y$  où  $f_1$  est un morphisme d'image lisse de classe  $\alpha$  dans  $X$  et  $f_2$  est un morphisme de classe  $\beta$  dans  $Y$ .

Soit  $\alpha \in A_1(G/P)$  une classe strictement positive.

*Le cas des Borels.* — Si  $P$  est un Borel  $B$ , le fait 1 nous permet de trouver une racine simple  $\beta$  telle que  $G/B \xrightarrow{p_\beta} G/B_\beta$  est une fibration en droites projectives et telle que  $\alpha$  est de degré strictement positif par rapport à cette fibration. Nous avons supposé que  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, G/B)$  est non vide, soit donc  $f$  un élément de ce schéma. La courbe  $p_\beta(f(\mathbb{P}^1))$  et la fibration  $p_\beta$  vérifient les conditions du lemme 4 : nous avons vu dans la démonstration de ce lemme que l'existence d'un relèvement de degré positif est équivalente à la condition d'annulation. Ces conditions sont ouvertes, la courbe générale les vérifie donc. Nous sommes ainsi ramenés à prouver l'existence de courbes lisses (et même seulement nodales) sur  $G/B_\beta$ . Ceci nous permet notamment de dire que sur  $SL_3/B$  il existe des courbes lisses de classe strictement positive quelconque.

*La récurrence.* — Soit  $P$  un parabolique qui n'est pas un Borel. Nous procédons par récurrence sur la dimension du groupe  $G$ . Nous commençons par le « pas » de la récurrence ce qui déterminera les cas à étudier pour initialiser le raisonnement.

Nous allons encore utiliser le dévissage construit précédemment. Il nous suffit de montrer qu'il existe des courbes lisses dans une  $P'$ -orbite maximale  $P'w_0P/P$  dont le complémentaire est de codimension au moins 2. Le choix de la  $P'$ -orbite sera important. En effet, nous avons vu à la proposition 5 que le morphisme  $\varphi : P'w_0P/P \rightarrow R'/R$  est une tour de fibrés affines. Il s'agit donc de choisir  $P'$  judicieusement, l'idéal étant qu'il existe sur le produit de variétés homogènes  $R'/R$  une courbe lisse de

classe  $\alpha$  (le lemme 3 nous permet alors de conclure). La difficulté réside ici dans le fait qu'il n'existe pas de courbes lisses de toute classe strictement positive sur  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{P}^2$  et  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Sur les autres produits de variétés homogènes sous des groupes de dimension strictement inférieure à celle de  $G$ , il existe par hypothèse de récurrence des courbes lisses de toute classe strictement positive.

Dans un premier temps, nous supposons que le rang du groupe de Picard de  $G/P$  est supérieur à 3. Dans ce cas, pour tout parabolique  $P'$  tel que  $\Sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{b})$  et  $i(\Sigma(\mathfrak{p}', \mathfrak{b}))$  sont disjoints, le groupe de Picard de  $R'/R$  (qui est celui de  $G/P$ ) est également de rang supérieur à 3. Ceci impose qu'il existe une courbe lisse de classe  $\alpha$  sur  $R'/R$  (car  $R'/R$  ne peut être  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{P}^2$  ou  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ). Le lemme 3 nous permet de la relever dans  $P'w_0P/P$ .

Supposons maintenant que le rang du groupe de Picard de  $G/P$  est inférieur à 2. Nous choisissons alors pour  $P'$  le parabolique maximal associé à l'un des sommets extrémaux du diagramme de Dynkin (ceci n'est pas toujours possible, nous traiterons les cas problématiques par la suite). La  $P'$ -orbite  $P'w_0P/P$  est alors une tour de fibrés affines au-dessus d'une variété homogène sous le groupe :

- $SL_{n-1}$  dans le cas de  $SL_n$ ,
- $SL_n$  ou  $Sp_{2n-2}$  dans le cas de  $Sp_{2n}$ ,
- $SL_n$  ou  $SO_{2n-1}$  dans le cas de  $SO_{2n+1}$ ,
- $SL_n$  ou  $SO_{2n-2}$  dans le cas de  $SO_{2n}$ ,
- $Sp_6$  ou  $SO_7$  dans le cas de  $F_4$ ,
- $SL_6$  ou  $SO_{10}$  dans le cas de  $E_6$ ,
- $SL_7$ ,  $SO_{12}$  ou  $E_6$  dans le cas de  $E_7$ ,
- $SL_8$ ,  $SO_{14}$  ou  $E_7$  dans le cas de  $E_8$ .

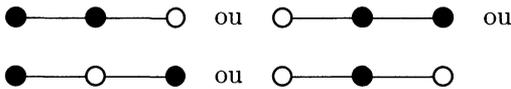
Nous concluons alors par récurrence grâce au lemme 3.

Ce choix de  $P'$  n'est pas toujours possible pour  $SL_{n+1}$ ,  $Sp_{2n}$ ,  $SO_{2n+1}$  et  $F_4$  qui n'ont que deux points extrêmes. Ceci ne se produit que si  $P$  est donné par les deux points extrêmes. Dans ce cas, on choisit pour  $P'$  le parabolique associé à la racine  $\alpha_{n-1}$  dans les trois premiers cas et  $\alpha_3$  dans le dernier (les notations étant celles de [Bo]). La variété  $R'/R$  est alors  $\mathbb{P}^{n-2} \times \mathbb{P}^1$  pour les trois premiers groupes et  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$  pour  $F_4$ . Il existe donc des courbes lisses sur  $R'/R$  dès que  $n \geq 4$ .

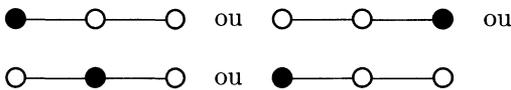
*Initialisation.* — La description précédente montre qu'il suffit de

traiter les cas de  $SL_4 = SO_6$ ,  $Sp_4 = SO_5$ ,  $Sp_6$  et  $SO_7$  pour initialiser la récurrence. Nous n'avons pas à traiter le cas de Borels. Nous cherchons des  $P'$ -orbites maximales dont le complémentaire est de codimension au moins 2 sur lesquelles nous pourrions tracer des courbes lisses. Pour cela, nous considérons, pour un parabolique choisi le morphisme  $\varphi : P'w_0P/P \rightarrow R'/R$ .

Le groupe  $SL_4$  : les paraboliqes  $P$  qui posent problème sont les suivants :



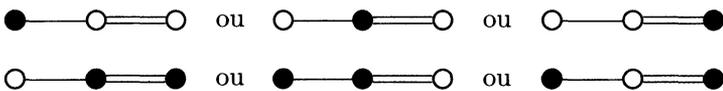
Nous pouvons alors choisir dans chacun des cas le parabolique  $P'$



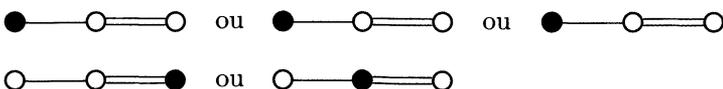
Dans les deux premiers cas, la variété  $R'/R$  est  $SL_3/B$  sur laquelle il existe des courbes lisses. Nous obtenons dans les deux derniers cas des morphismes  $\varphi$  qui sont respectivement un fibré vectoriel de degré  $(1, 1)$  au-dessus de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  et un fibré vectoriel de degré 1 au-dessus de  $\mathbb{P}^2$ . Nous concluons grâce à la remarque 7.

Le groupe  $Sp_4$  : les variétés homogènes associées à des paraboliqes maximaux sont  $\mathbb{P}^3$  et  $Q_3$  la quadrique de  $\mathbb{P}^4$ . Nous allons traiter le cas de  $Q_3$  en fin de démonstration, sur  $\mathbb{P}^3$  il existe des courbes lisses en tout degré strictement positif.

Le groupe  $Sp_6$  : le parabolique  $P$  est alors

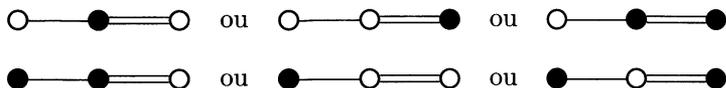


Dans le premier cas, la variété homogène  $G/P$  est  $\mathbb{P}^5$  sur laquelle il existe des courbes lisses. Dans les cas suivants, nous prenons pour  $P'$  le parabolique

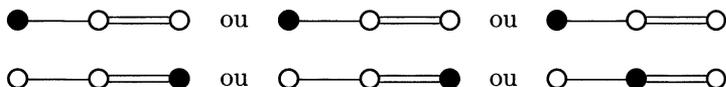


Dans les quatre premiers cas il existe sur la variété  $R'/R$  des courbes rationnelles lisses de classe  $\alpha$ . Dans le dernier cas, le morphisme  $\varphi$  est alors la composée d'un fibré affine et d'un fibré vectoriel de degré  $(1, 1)$  au-dessus de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Nous concluons grâce à la remarque 7.

Le groupe  $SO_7$  : le parabolique  $P$  est alors



Nous choisissons alors pour  $P'$  le parabolique



Dans les quatre premiers cas, il existe sur la variété  $R'/R$  des courbes rationnelles lisses de classe  $\alpha$ . Dans le cinquième cas, le morphisme  $\varphi$  est alors la composée d'un fibré affine et d'un fibré vectoriel de degré 2 au-dessus de  $\mathbb{P}^2$ . Nous concluons grâce à la remarque 7. Dans le dernier cas, le morphisme  $\varphi$  est alors la composée d'un fibré affine et d'un fibré vectoriel de degré  $(1, 2)$  au-dessus de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Nous concluons grâce à la remarque 7.

*Le cas de  $Q_3$ .* — Il nous reste à montrer qu'il existe des courbes rationnelles lisses de tous les degrés sur  $Q_3$ . Nous considérons cette variété comme celle des droites isotropes pour une forme symplectique dans un espace projectif de dimension 3 (c'est-à-dire comme une variété homogène sous  $Sp_4$ ). La variété d'incidence avec  $\mathbb{P}^3$  est donnée par le fibré projectif associé au faisceau de nulle corrélation  $E$  défini par la forme symplectique :

$$E = \text{Coker}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow \Omega^1(1)).$$

Nous allons utiliser la construction de la proposition 5 en détaillant la fibration. Fixons un point  $P_0$  de  $\mathbb{P}^3$ . Soit  $H_0$  l'orthogonal de ce point et  $L_0$  la droite de  $Q_3$  formée par les droites isotropes de  $H_0$ . La restriction de  $E$  à  $H_0$  est donnée par l'extension non triviale  $0 \rightarrow \mathcal{O}_{H_0} \rightarrow E \rightarrow \mathcal{I}_{P_0} \rightarrow 0$ . Au-dessus de  $H_0 - P_0$ , le fibré  $E$  est une extension non triviale de  $\mathcal{O}_{H_0 - P_0}$  par lui-même. Le fibré projectif associé a une section canonique  $s_0$  donnée par  $P \mapsto (P, (PP_0))$ . Soit  $Z$  l'image de cette section.

Nous nous intéressons maintenant à  $Q_3 - L_0$  et à la variété d'incidence  $X$  (qui est au-dessus de  $\mathbb{P}^3 - P_0$ ). Nous avons une section

de  $Q_3 - L_0$  vers  $X$  donnée par  $L \mapsto (L \cap H_0, L)$ . Soit  $Y$  l'image de cette section, si on reprojette  $Y$  vers  $\mathbb{P}^3$ , son image est  $H_0 - P_0$ . Plus précisément  $Y$  est le fibré  $\mathbb{P}_{H_0 - P_0}(E)$  privé de la section  $Z$ . La variété  $Y$  est donc un fibré affine non vectoriel au-dessus de  $H_0 - P_0$ , de fibré vectoriel direction  $\mathcal{O}_{H_0 - P_0}$ , donné par  $\eta \in H^1\mathcal{O}_{H_0 - P_0}$ . Nous cherchons à tracer des courbes lisses grâce au lemme 3. Soit  $C$  une courbe rationnelle nodale de degré  $d$  sur  $H_0 - P_0$ , nous cherchons à la relever en une courbe lisse dans  $Y$  qui est isomorphe à  $Q_3 - L_0$ . Le lemme 3 nous dit (qu'il faut et) qu'il suffit que l'image  $\bar{\eta}$  de  $\eta$  dans  $H^1\mathcal{O}_C$  soit non nulle (ou que  $C$  soit lisse) et que  $\mathbb{P}^2$  vérifie (\*). Ceci est vrai dès que  $d \geq 3$  (si  $d \leq 2$  la courbe  $C$  est lisse).

*Le cas de  $G_2$ .* — Le cas de  $G_2$  pose un problème et nous ne pouvons montrer l'existence de courbes lisses par cette méthode. Nous allons utiliser une seconde méthode. L'une des variétés homogènes de  $G_2$  est  $Q_5$  la quadrique de  $\mathbb{P}^6$  pour laquelle le problème est déjà résolu. Il faut donc le vérifier pour l'autre variété homogène associée à un parabolique maximal, le cas de l'incidence en découle car  $G_2/B$  est un fibré en droites projectives au-dessus de chacune des deux autres.

Nous avons la situation suivante : soient  $P_1$  et  $P_2$  les paraboliques maximaux de  $G_2$  contenant le Borel  $B$ . Considérons l'incidence donnée par les flèches  $f : G_2/B \rightarrow G_2/P_1$  et  $g : G_2/B \rightarrow G_2/P_2$ , le morphisme  $f$  est une fibration en droites projectives. Nous considérons  $G_2/P_2$  plongé dans son plongement minimal, c'est alors une quadrique de dimension 5. Nous regardons une section hyperplane générale  $H$  de cette variété (sur laquelle il y a aussi des courbes lisses). Nous obtenons ainsi des morphismes  $f'$  et  $g'$  par restriction. Les conditions suivantes sont réalisées :

- Le morphisme  $f'$  est birationnel de  $g^{-1}((G_2/P_2) \cap H)$  vers  $G_2/P_1$  et c'est un isomorphisme en dehors d'un fermé  $E$  de codimension au moins 1 de  $g^{-1}((G_2/P_2) \cap H)$ . Donc  $f'(E)$  est de codimension au moins 2.

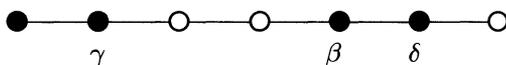
- Le morphisme  $g$  permet de réaliser  $g^{-1}((G_2/P_2) \cap H) - E$  comme un fibré vectoriel engendré par ses sections au-dessus de  $(G_2/P_2) \cap H - Z$  où  $Z$  est un fermé de codimension au moins 2 contenu dans  $g(E)$ .

Ainsi, comme il existe des courbes lisses sur  $(G_2/P_2) \cap H$  et que  $g'$  est un fibré vectoriel engendré par ses sections, il existe des courbes lisses sur  $g^{-1}((G_2/P_2) \cap H) - E$  et par  $f'$  des courbes lisses sur  $G_2/P_1$ .

*Remarque 8.* — Soit  $C$  une courbe dont la classe dans  $A_1(G/P)$  est positive non strictement positive. Nous distinguons deux types de points parmi les points définissant  $P$  dans le diagramme de Dynkin, ceux par

rappart auxquels le degré de  $C$  est strictement positif et ceux par rapport auxquels le degré de  $C$  est nul. Notons  $P'$  le parabolique obtenu en prenant les points du deuxième type. On a  $P \subset P'$  et un morphisme  $G/P \rightarrow G/P'$ . La courbe  $C$  est tracée dans une fibre de ce morphisme. La fibre est  $P'/P = (N' \rtimes R')/(N \rtimes R)$  mais comme  $P$  et  $P'$  contiennent un même Borel, on a  $N = N'$  donc  $P'/P = R'/R$ . Ainsi, si on regarde les sommets du diagramme de Dynkin de  $P$  dans les composantes connexes du diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P'$ , le produit de variétés homogènes ainsi défini est isomorphe à la fibre (cf. [Ti]). Pour savoir si il existe des courbes lisses, on est ainsi ramené aux cônes strictement positifs de ce produit de variétés homogènes.

*Exemple 6.* — Soit  $G = \mathrm{SL}_8$  et  $P$  le parabolique



Si la classe  $\alpha$  de la courbe est non nulle et que l'on a  $(\alpha, \check{\gamma}) = (\alpha, \check{\beta}) = 0$  et  $(\alpha, \check{\delta}) > 0$  alors la fibre est  $\mathbb{P}^2$  et il n'existe pas toujours de courbe lisse de classe  $\alpha$ . Dans tous les autres cas, il existe des courbes lisses de classe  $\alpha$ .

#### 4. Appendice : Existence de courbes rationnelles paramétrées.

Pour terminer la démonstration du théorème, il nous reste à prouver la non vacuité de  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbb{P}^1, G/P)$  pour  $\alpha$  dans le cône positif. Il semble que l'existence de courbes irréductibles de degré fixé puisse se démontrer par un point de vue « applications stables » : la codimension des courbes réductibles devrait être strictement positive. Nous ne connaissons cependant pas de référence pour ce résultat. Nous considérons l'adhérence des orbites des sous-groupes à un paramètre. Nous montrons à la proposition 8 que tous les degrés sont atteints de cette manière. Ce résultat peut également se démontrer grâce à la construction proposée précédemment.

**PROPOSITION 8.** — *Dans la variété homogène  $G/B$ , le cône positif est recouvert par les degrés obtenus en considérant l'adhérence des orbites des sous-groupes à un paramètre de  $G$ .*

*Démonstration.* — Un sous-groupe à un paramètre de  $G$  est une forme linéaire  $\ell$  sur les poids de  $G$ . Considérons  $V$  une représentation

de  $G$  et  $\bigoplus_{\chi} V_{\chi}$  sa décomposition selon les poids. Le degré dans  $\mathbb{P}(V)$  de l'adhérence de l'orbite d'un élément  $x = (x_{\chi})$  par le sous-groupe  $\ell$  est

$$\max\{(\ell, \chi) ; x_{\chi} \neq 0\} - \min\{(\ell, \chi) ; x_{\chi} \neq 0\}.$$

Les points  $x_{\infty}$  (resp.  $x_0$ ) dont les coordonnées sont nulles si  $(\ell, \chi)$  n'est pas maximal (resp. minimal) et  $x_{\chi}$  sinon sont les points du bord de l'orbite. Si on note  $\chi_0$  (resp.  $\chi_{\infty}$ ) un des poids qui apparaissent dans  $x_0$  (resp.  $x_{\infty}$ ), le degré est alors donné par

$$(\ell, \chi_{\infty}) - (\ell, \chi_0) = (\ell, \chi_{\infty} - \chi_0).$$

Considérons maintenant un sous-groupe à un paramètre  $\ell$  de  $G$  contenu dans l'intérieur de la chambre de Weyl associée à  $B$ . Soit  $x \in G/B$ , notons  $O$  l'orbite de  $x$  sous l'action de  $\ell$  et  $\bar{O}$  son adhérence. Les points du bord de  $O$  sont des points fixes pour l'action du tore et donc de la forme  $w_1 \in W$  et  $w_2 \in W$  (où  $W$  est le groupe de Weyl). Nous pouvons choisir  $x$  de telle sorte que  $w_1 = \text{Id}$  est la limite en l'infini et  $w_2 = w$  est la limite en 0 ( $w$  est un élément quelconque de  $W$ ). Calculons le degré de  $\bar{O}$  selon le poids fondamental  $\chi$ . Les seuls poids qui apparaissent à la limite sont  $w(\chi)$  pour  $x_0$  et  $\chi$  pour  $x_{\infty}$ . Le degré est donc

$$(\ell, (\text{Id} - w)(\chi)).$$

Si  $w$  est un élément quelconque du groupe de Weyl, alors  $\text{Id} - w$  envoie le réseau des poids  $P(G)$  dans le réseau radiciel  $Q(G)$  (cf. [Bo], ch. VI, §1.10, prop. 27). De plus, si on choisit pour  $w$  une transformation de Coxeter  $c$  (cf. [Bo], p. 116), alors  $\text{Id} - c$  envoie exactement  $P(G)$  sur  $Q(G)$  (cf. [Bo], exercice 22 du ch. VI. §1).

Par ailleurs, les sous-groupes à un paramètre de  $G$  forment un sous-réseau de  $P(G)$ , c'est exactement  $P(G)$  si le groupe  $G$  est simplement connexe. Ainsi les degrés des sous-groupes à un paramètre sur les poids fondamentaux sont les valeurs prises par les éléments de  $P(G)$  sur une  $\mathbb{Z}$ -base de  $Q(G)$ . Tous les degrés sont donc possibles. □

Remarquons que le cas des Borels suffit, en effet pour tracer une courbe irréductible dans  $G/P$ , il suffit de considérer l'image d'une courbe de  $G/B$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [B] A. BOREL, Linear algebraic groups, Second edition, Graduate Texts in Math., 126, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Bo] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4,5 et 6, Masson, 1981.
- [Ch] C. CHEVALLEY, Classification des groupes de Lie algébriques, séminaire 1956–58, exposés 15 et 16, multigraphié.
- [D] M. DEMAZURE, Désingularisation des variétés de Schubert généralisées, Ann. Sci. École Normale Sup., 4-7 (1974).
- [FH] W. FULTON, J. HARRIS, Representation theory, Graduate Text in Math., 129 Springer Verlag, New York, 1991.
- [G1] A. GROTHENDIECK, Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. I. Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats, Séminaire Bourbaki, vol. 5, exp. n° 190, Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [G2] A. GROTHENDIECK, Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert, Séminaire Bourbaki, vol. 6, exp. n° 221, Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [G3] A. GROTHENDIECK, Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections, Séminaire C. Chevalley : Anneau de Chow et applications, exp. n° 4, 1958.
- [H] J. HARRIS, The genus of space curves, Math. Ann., 249–3 (1980).
- [Ha] R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry, Graduate Text in Math., 52, 1977.
- [Kl] S.L. KLEIMAN, The transversality of a general translate, Compositio Math., 28 (1974).
- [Ko] J. KOLLÁR, Rational curves on algebraic varieties, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 32, Springer Verlag, Berlin, 1996.
- [KP] B. KIM, R. PANDHARIPANDE, The connectedness of the moduli space of maps to homogeneous spaces, preprint AG 0003168.
- [MFK] D. MUMFORD, J. FOGARTY, F. KIRWAN, Geometric invariant theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [SGA] M. ARTIN, J.E. BERTIN, M. DEMAZURE, P. GABRIEL, A. GROTHENDIECK, M. RAYNAUD, J.-P. SERRE, Schémas en groupes, fasc. 1, exposé 4, Séminaire de Géométrie Algébrique de l'IHES (1963); deuxième édition IHES, Paris (1963/1964).
- [T] J.F. THOMSEN, Irreducibility of  $\overline{M}_{0,n}(G/P, \beta)$ , Internat. J. Math., 9-3 (1998).
- [Ti] J. TITS, Groupes semi-simples complexes et géométrie projective, Séminaire Bourbaki, vol. 3, exp. n° 112, Soc. Math. France, Paris, 1995.

Manuscrit reçu le 19 avril 2001,  
révisé le 3 septembre 2001,  
accepté le 20 septembre 2001.

Nicolas PERRIN,  
Université de Versailles St-Quentin  
Département de Mathématiques  
45 avenue des États Unis  
78035 Versailles cedex (France).  
perrin@math.uvsq.fr