

AUGUSTIN FRUCHARD

**Sur l'équation aux différences affine du premier  
ordre unidimensionnelle**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 46, n° 1 (1996), p. 139-181

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1996\\_\\_46\\_1\\_139\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_1_139_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# SUR L'ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES AFFINE DU PREMIER ORDRE UNIDIMENSIONNELLE

par Augustin FRUCHARD

---

## Sommaire.

1. Introduction
  2. Notations
  3. Exemple  $y(x + \varepsilon) = 1 - e^x y(x)$
  4. Le cas général
    - 4.1. Position du problème
    - 4.2. Préliminaires
    - 4.3. Exposition de la méthode
    - 4.4. Théorème
    - 4.5. Application à l'exemple 3
  5. Chasse aux longs canards
    - 5.1. Préliminaires
    - 5.2. Théorème
    - 5.3. Étude géométrique
    - 5.4. Condition nécessaire à long canard
    - 5.5. Existence et vie brève des longs canards
  6. Exemples
    - 6.1.  $y(x + \varepsilon) = 1 - e^{x^2 - \pi} y(x)$
    - 6.2.  $y(x + \varepsilon) = 1 - xy(x)$
  7. Les râteaux
    - 7.1. Introduction
    - 7.2. Théorème
    - 7.3. Application aux séries  $S$ -divergentes
    - 7.4. Remarques
- Bibliographie

## 1. Introduction.

L'analyse mathématique du phénomène de retard à la bifurcation est récente, et le plus souvent consacrée aux champs de vecteurs. Mon propos

---

*Mots-clés* : Perturbation singulière – Équation aux différences analytique – Canard discret – Perturbation de série divergente.

*Classification math.* : 39A – 40A – 58F – 03H.

est de présenter quelques résultats concernant ce phénomène et celui de butée dans le cadre des systèmes dynamiques discrets du plan. Rappelons brièvement la situation du cas continu.

Les premiers résultats, qui portaient à l'époque sur un exemple, sont dus à M.A. Shishkova [S]. Ces résultats ont été généralisés par A.I. Neishtadt [N]; J.-L. Callot [C] en a présenté une preuve très élégante et géométrique. Il s'agit d'une version globale de ces résultats, qui fournit en outre une explication du phénomène de butée. L'étude présentée dans cet article s'inspire en partie de cette dernière approche dont voici un bref exposé.

Considérons un champ de vecteurs lent-rapide de l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni d'une courbe lente attractive puis répulsive. Une trajectoire issue d'un point proche de la portion attractive va de façon naturelle entrer rapidement dans le halo de la courbe lente et longer cette courbe tant qu'elle est attractive. Par contre lorsque la courbe lente devient répulsive la trajectoire n'a aucune raison *a priori* de continuer à la longer. C'est pourtant ce qui se passe sous certaines conditions, par exemple si le champ de vecteurs est analytique. La bifurcation dynamique n'a pas lieu au point d'inversion de stabilité (qui correspond à la bifurcation statique) mais après, d'où l'expression de retard à la bifurcation.

La preuve de [C] repose sur l'idée suivante : on considère le prolongement analytique complexe du champ de vecteurs. La variable temporelle étant complexe il n'y a plus d'orientation naturelle et il est difficile de parler d'attractivité ou de répulsivité de la courbe lente sauf si l'on considère la restriction d'une solution sur un chemin. J.-L. Callot utilise une fonction à variable complexe et à valeurs réelles qui se calcule directement à partir des coefficients du champ de vecteurs. Cette fonction, déjà présente dans les travaux de Poincaré, a aussi été utilisée par A.I. Neishtadt. Les lignes de niveau de cette fonction forment un relief qui a la propriété suivante : le long d'un chemin qui descend ce relief, la restriction de la courbe lente à ce chemin, vue comme courbe lente d'un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , est attractive. Ainsi une solution longe la courbe lente dans toute la région accessible par un chemin qui descend le long du relief. Il suffit alors de choisir convenablement le chemin pour démontrer l'existence de retard à la bifurcation : dans certains cas il peut arriver qu'un segment de l'axe réel descende puis remonte le relief (la courbe lente est d'abord attractive puis répulsive), mais que les extrémités de ce segment puissent être jointes par un chemin descendant le relief, ce qui assure que la trajectoire est infiniment proche de la courbe lente sur tout le segment. Le phénomène de

butée correspond quant à lui à l'impossibilité d'atteindre certains points en aval en descendant le long du relief; cela correspond à la traversée d'une séparatrice de col du relief.

En ce qui concerne le cas discret, la preuve de A.I. Neishtadt s'adapte parfaitement pour donner des résultats de nature locale [F2]. C. Baesens [B] utilise les propriétés Gevrey des solutions formelles pour aboutir aux mêmes résultats. Par contre le phénomène de butée, bien que s'observant à l'expérimentation sur ordinateur, ne trouve pas d'explication à ce jour. L'adaptation de la méthode géométrique de Jean-Louis Callot se heurte à une difficulté : la relation fonctionnelle satisfaite par une solution d'une équation aux différences ne fournit *a priori* des renseignements sur la solution que sur un ensemble discret (que j'appellerai *pointillé*), ce qui empêche de modifier le chemin d'intégration. Il apparaît alors non pas un relief mais plusieurs reliefs. Enfin, certains systèmes dynamiques discrets présentent un comportement qui n'a pas d'équivalent dans le cadre continu, et qui provient en partie de la non inversibilité de ces systèmes.

Les résultats exposés ici portent exclusivement sur des systèmes affines en l'une des variables. Cette étude permet, à défaut de se généraliser au cas non linéaire, d'en prévoir et d'en confirmer les observations expérimentales.

Malgré l'abondante littérature sur les équations aux différences linéaires [Ba], [Bt], [Nö], les résultats que je présente ici sont nouveaux à ma connaissance, mais je n'ai pas grand mérite à cela : je vis à une époque moderne, ce qui m'a permis d'une part d'utiliser l'ordinateur pour faire ces observations, d'autre part d'utiliser une théorie infinitésimale (l'analyse non standard dans sa version axiomatique IST donnée par E. Nelson [Ne]) pour en donner une modélisation puis une explication.

L'article est structuré ainsi.

J'ai rassemblé dans la partie 2 les notations utilisées dans la suite, ainsi que les définitions et conventions classiques d'analyse non standard qu'il est difficile de trouver dans la littérature déjà existante.

La partie 3 décrit un exemple sur lequel sont présentés les phénomènes. Il s'agit d'une succession d'affirmations qui seront démontrées par la suite.

En partie 4 j'aborde le cas général de l'équation affine. Avant de présenter le résultat principal de cette partie, j'expose la méthode de démonstration, ce qui permet d'introduire les principaux ingrédients. Je m'intéresse dans la partie 5 aux longs canards (qui « remontent » le relief après avoir traversé une séparatrice de col). Je donne d'abord une condition

nécessaire sur l'abscisse de départ pour qu'une orbite soit un long canard, puis une preuve de l'existence de ces longs canards, et enfin je démontre qu'ils ont la vie brève.

La partie 6 présente deux exemples. Le premier permet une vérification expérimentale des résultats de la partie 5. Le second conduit en application à un résultat inédit sur le comportement asymptotique de la fonction hypergéométrique confluyente  ${}_1F_1$ .

J'aborde dans la partie 7 l'étude des équations non inversibles et du phénomène de râteau que cela engendre, et j'applique cette étude aux perturbations de séries géométriques divergentes. Le résultat est le suivant : si une telle série perturbée converge, alors sous certaines conditions la convergence est exponentielle.

## 2. Notations.

**2.1.** Le symbole  $\varepsilon$  désigne un nombre infiniment petit strictement positif fixé. Le symbole  $\mathcal{L}$  désigne un nombre complexe limité quelconque. Deux occurrences de ce symbole n'ont pas forcément la même valeur. On note de même :

- $\circ$  un nombre infiniment petit,
- $\textcircled{a}$  un nombre appréciable.

**2.2.** Notations :

- $x \simeq y$  signifie «  $x$  est infiniment proche de  $y$  » ;
- $x \simeq \infty$  signifie «  $x$  est infiniment grand » ;
- $x \lesssim y$  signifie «  $x$  est appréciablement inférieur à  $y$  » ; ainsi  $1 \lesssim 2$ .

**2.3.** Pour  $x$  limité,  ${}^\circ x$  désigne l'*ombre* de  $x$ . C'est l'unique nombre complexe standard infiniment proche de  $x$ .

**2.4.** L'adverbe « exponentiellement » se rapporte à  $\varepsilon$  :

- $x$  est *exponentiellement proche* de  $y$  si  $|x - y|^\varepsilon \ll 1$  (de manière équivalente  $x = y + \mathcal{L} \exp(-|\textcircled{a}|/\varepsilon)$ ) ;
- $x$  est *exponentiellement grand* si  $|x|^\varepsilon \gg 1$ .

**2.5.** Soit  $A$  un sous-ensemble interne ou externe d'un espace métrique quelconque. On dit qu'un point  $x$  est dans le *S-intérieur* de  $A$  si  $x$  est limité et s'il existe une boule centrée en  $x$  et de rayon appréciable incluse dans  $A$ .

On note  $x \in S - \text{int}(A)$ . Lorsque  $A$  est interne ou galactique,  $x$  est dans le  $S$ -intérieur de  $A$  si et seulement si :

- (i)  $x$  est limité;
- (ii) le halo de  $x$  est dans  $A$ .

**2.6.** L'ensemble externe  $]a, b[$  désigne le  $S$ -intérieur de  $]a, b[$ .

**2.7.** On trouvera dans [K] une formalisme autorisant l'intégration de fonctions sur des intervalles externes. Ce formalisme est utilisé dans la partie 5.

**2.8.** Étant donnée une équation aux différences

$$y(x + \varepsilon) = F(x, y(x)),$$

j'appelle *solution pointillé* une suite de points  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \varepsilon, \\ y_{n+1} = F(x_n, y_n). \end{cases}$$

Une *courbe lente* est une courbe du plan  $xy$  sur laquelle  $y - F(x, y)$  est infiniment petit.

Un *canard* est une solution pointillé telle que :

- (i)  $|\partial_y F(x_0, y_0)| \ll 1$ ;
- (ii)  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $(N\varepsilon = @) \wedge (|\partial_y F(x_N, y_N)| \gg 1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, n < N \Rightarrow y_n = e(y_n) + \mathcal{O})$  où  $y = e(x)$  est l'équation d'une courbe lente. En clair, un canard est une orbite qui longe une courbe lente sur une portion attractive, puis répulsive.

J'appelle *équation de quadrature* associée à l'équation linéaire

$$y(x + \varepsilon) = a(x)y(x) + b(x)$$

l'équation

$$(2.1) \quad Z(x - \varepsilon) = Z(x) + \varepsilon \text{Log } a(x).$$

(Noter qu'il est écrit «  $x - \varepsilon$  » et non «  $x + \varepsilon$  »).

**2.9.** Une série numérique  $\sum_{n \geq 0} a_n$  est dite *S-divergente* (lire « elle semble divergente ») si sa standardisée (c'est-à-dire l'unique série standard  $\sum_{n \geq 0} b_n$  telle que pour tout  $n$  standard  $b_n = {}^o a_n$ ) est divergente.

### 3. Exemple.

Soit l'équation

$$y(x + \varepsilon) = 1 - \exp(x)y(x)$$

avec  $x$  réel et  $\varepsilon$  infiniment petit strictement positif. Regardons les solutions pointillées. Soit  $(x_0, y_0)$  un point du plan  $\mathbb{R}^2$ , et  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de points obtenue par la récurrence double

$$(3.1) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \varepsilon, \\ y_{n+1} = 1 - \exp(x_n)y_n. \end{cases}$$

À chaque itération,  $x$  varie de façon infinitésimale alors que la variation en  $y$  est en général appréciable, sauf si le point  $(x_n, y_n)$  est infiniment proche de la courbe lente d'équation  $y = e(x) = \frac{1}{1 + e^x}$ . Le système réduit

$$(3.2) \quad \begin{cases} x \text{ fixé,} \\ y_{n+1} = 1 - e^x y_n \end{cases}$$

conduit à une description macroscopique partielle de la dynamique du système (3.1). En effet, l'unique point fixe  $(x, e(x))$  de (3.2) est attractif lorsque  $\exp(x) < 1$ , c'est-à-dire  $x < 0$ , indifférent pour  $x = 0$  et répulsif pour  $x > 0$ ; par conséquent pour (3.1), l'orbite d'un point limité  $(x_0, y_0)$  avec  $x_0$  appréciablement négatif entre dans le halo de la courbe lente à l'abscisse d'entrée  $x_e = {}^{\circ}x$  et longe cette courbe tant que  $x$  est négatif<sup>(1)</sup>.

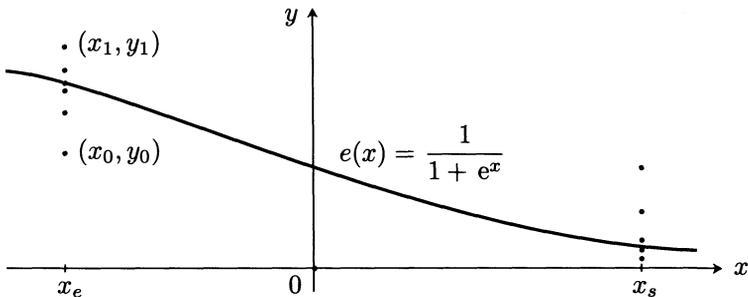


Figure 1.

<sup>(1)</sup> Les expressions en italique doivent s'interpréter dans la langue naturelle, mais elles sont aussi une définition mathématique que l'on peut trouver dans [F2]. Il ne s'agit donc pas d'un commentaire heuristique mais bien d'une description précise.

De même, l'orbite passant par un point limité  $(x, y)$  avec  $x$  appréciablement positif et  $y$  non infiniment proche de  $e(x)$ , a longé la courbe lente au moins de  $0$  à  ${}^o x$  et a quitté le halo de celle-ci à l'abscisse de sortie  $x = {}^o x$ .

Considérons à présent une orbite qui longe la courbe lente tant que  $x_n$  est négatif. Lorsque  $x_n$  traverse la valeur de bifurcation  $0$ , on s'attend *a priori* à ce que cette orbite quitte la courbe lente puisque celle-ci est répulsive.

En réalité, et c'est là une surprise, l'orbite continue à longer la courbe lente sur une portion appréciable. En d'autres termes, en notant  $x_e$  l'abscisse d'entrée et  $x_s$  l'abscisse de sortie (ce sont des nombres standard) :

1) si  $x_e < 0$  alors  $x_s > 0$ .

Ainsi toute orbite contenant un point limité d'abscisse appréciable est un canard. La situation est effectivement très instable. Pour observer ce phénomène de retard à la bifurcation numériquement on doit effectuer les calculs avec un nombre de décimales de l'ordre de  $\varepsilon^{-1}$  (voir [F2]).

Une seconde observation est que l'orbite finit par quitter la courbe lente et que l'abscisse de sortie est en relation très simple avec l'abscisse d'entrée. Localement l'orbite sort symétriquement, c'est-à-dire :

2) si  $x_e$  est assez proche de  $0$  alors  $x_s = -x_e$ .

D'un point de vue global, ceci est valable tant que  $x_e$  reste compris entre  $-\pi$  et  $0$ , et on observe un phénomène de butée en  $-\pi$  et  $\pi$ . Précisément :

3) si  $x_e > -\pi$  alors  $x_s = -x_e$ ,

4) presque sûrement si  $x_e < -\pi$  alors  $x_s = \pi$  et réciproquement, si  $x_s > \pi$ , c'est presque sûrement que  $x_e = -\pi$ . Nous verrons au paragraphe 4.5 comment intervient le nombre  $\pi$ . Précisons ce que j'entends par l'expression « presque sûrement ».

5) Il existe des canards dits *longs*, c'est-à-dire pour lesquels  $x_e < -\pi$  et  $x_s > \pi$ .

6) Les longs canards sont exceptionnels : si  $(x_0, y_0)$  est le point de départ d'un long canard et si  $(x_1, y_1)$  est un point limité avec  $x_1 \in [x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon, x_0 + \frac{1}{2}\varepsilon]$ , alors  $(x_1, y_1)$  est le point de départ d'un long canard si et seulement si  $x_1$  est exponentiellement proche de  $x_0$ .

Le but de l'article est de fournir une explication des phénomènes de

retard à la bifurcation et de butée. J'ai choisi de traiter directement le cas général puisque la théorie n'est pas plus difficile.

## 4. Le cas général.

### 4.1. Position du problème.

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , considérons le système

$$(4.1) \quad \begin{cases} x_{k+1} = x_k + \varepsilon, \\ y_{k+1} = a(x_k)y_k + b(x_k), \end{cases}$$

où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions standard continues sur un intervalle standard  $I$ . La courbe d'équation

$$y = e(x) = \frac{b(x)}{1 + a(x)}$$

est une courbe lente. Cette courbe est attractive lorsque  $|a(x)| < 1$  et répulsive si  $|a(x)| > 1$ .

Les solutions pointillés qui nous intéressent sont les canards. Par ailleurs, les canards les plus intéressants apparaissent dans les systèmes oscillants, c'est-à-dire ceux pour lesquels la fonction  $a$  est négative. Je fais donc l'hypothèse

$$\exists c \in \text{int}(I), \forall x \in I, (x < c \Rightarrow -1 < a(x) < 0) \text{ et } (x > c \Rightarrow a(x) < -1).$$

La question est la suivante :

*Soit  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  une solution du système (4.1) avec  $x_0$  appréciablement inférieur à  $c$  et  $y_0$  limité. À quelle condition (externe) sur  $n \in \mathbb{N}$  a-t-on  $y_n \simeq e(x_n)$  ?*

Avant de donner le résultat, commençons par quelques préliminaires qui introduisent de façon naturelle les diverses hypothèses. L'énoncé complet se trouve à la fin de cette partie (théorème 4.4).

### 4.2. Préliminaires.

Voici regroupés quatre énoncés qui résument ce que l'on peut dire de façon simple sans faire d'hypothèse supplémentaire sur les fonctions  $a$

et  $b$ . On vérifie que, tant que  $k$  est limité, le pointillé  $(x_k, y_k)$  est infiniment proche du pointillé  $(x_{0,k}, y_{0,k})$  de même condition initiale et solution du système réduit

$$(4.2) \quad \begin{cases} x_{0,k+1} = x_{0,k}, \\ y_{0,k+1} = a(x_0)y_{0,k} + b(x_0). \end{cases}$$

En particulier, si  $y_0 \neq e(x_0)$  alors pour tout  $n$  limité,  $y_n \neq e(x_n)$ . Pour les  $n$  infiniment grands, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 4.2.1. — Soit  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  une orbite de (4.1) de condition initiale  $(x_0, y_0)$ , où  $x_0$  est dans le  $S$ -intérieur de  $I$ . Si  $x_0 \ll c$  et si  $y_0$  est limité alors pour tout  $n$  infiniment grand tel que  $x_n < c$  on a  $y_n \simeq e(x_n)$ . De même, si  $x_N \gg c$  est dans le  $S$ -intérieur de  $I$  et si  $y_N$  est limité alors pour tout  $n < N$  tel que  $(N - n)$  est infiniment grand et tel que  $x_n > c$  on a  $y_n \simeq e(x_n)$ .

PROPOSITION 4.2.2. — Il existe une orbite longeant la courbe lente sur tout l'intervalle  $I$ .

PROPOSITION 4.2.3. — Soit  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  une orbite de (4.1) qui entre dans le halo de la courbe lente en  $x_e = {}^o x_0$  et en sort en  $x_s$ . S'il existe une orbite  $((x^0, y^0))_{k \in \mathbb{N}}$  ayant les mêmes abscisses que  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  (c'est-à-dire  $\exists p \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}, x_k = x_{k+p}^0$ ) et longeant la courbe lente sur  $I$ , alors  $x_e$  et  $x_s$  vérifient la relation entrée-sortie

$$\int_{x_e}^{x_s} \text{Log } |a(\xi)| \, d\xi = 0.$$

#### 4.2.4. Remarques.

1) Cet énoncé ne décrit le comportement que des solutions ayant même abscisse qu'un canard, mais la même preuve permet de décrire l'écart entre deux solutions de même abscisse, qu'elles soient canards ou non, c'est-à-dire les solutions de l'équation homogène.

2) Dans l'exemple la primitive de  $\text{Log } |a(x)|$  est  $\frac{1}{2}x^2$ , ce qui explique la symétrie de la relation entrée-sortie  $x_s = -x_e$ .

PROPOSITION 4.2.5. — Soit  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  une orbite de (4.1). Pour tout  $n$  tel que  $y_n$  n'est pas exponentiellement grand et tel que  $|a(x_n)| \neq 1$ , il existe  $m$  avec  $y_m \simeq e(x_m)$  et  $x_m \simeq x_n$ .

#### 4.2.6. Démonstrations.

- La preuve de l'énoncé 4.2.1 découle directement de l'attractivité de la courbe lente sur  $[x_0, c[$  et de sa répulsivité sur  $\{x \in I \mid x > c\}$ .

- Concernant l'énoncé 4.2.2, notons  $\alpha, \beta, -\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ , les extrémités de  $I$ , et  $F$  la transformation du plan associée à 4.1

$$F : M(x, y) \longrightarrow F(M)(x + \varepsilon, a(x)y + b(x)).$$

Soit  $x_0$  dans  $I$ ,  $x_0 \simeq \alpha$ ,  $n$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $x_0 + n\varepsilon \simeq \beta$ ,  $x_0 + (n+1)\varepsilon \in I$  et  $M_0 = (x_0, e(x_0))$ . L'image par la  $n$ -ième itérée  $F^n$  de  $F$  du segment  $[M_0, F(M_0)]$  est le graphe d'une fonction continue sur  $[x_n, x_{n+1}]$  dont les extrémités sont, ou bien infiniment proches de la courbe lente, ou bien de part et d'autre de cette courbe. Ainsi il existe un point  $Q$  dans le halo de  $(\beta, e(\beta))$  qui est image par  $F^n$  d'un point  $P$  du halo de  $(\alpha, e(\alpha))$ . La proposition 4.2.1 entraîne que l'itéré  $k$ -ième de  $M_0$  par  $F$  est proche de la courbe lente pour tout  $k$  dans  $\{0, \dots, n\}$ . On trouvera dans [F1] un énoncé similaire, ainsi qu'une figure pouvant aider à la compréhension de cette preuve.

- La proposition 4.2.3 se démontre à l'aide de la loupe de Benoit autour de l'orbite  $(x^0, y^0)$  :

$$Z_k = \varepsilon \operatorname{Log} |z_k| \quad \text{avec} \quad z_k = y_k - y_{k+p}^0.$$

Puisque  $z_k$  est solution de l'équation homogène  $z_{k+1} = a(x_k)z_k$ , on a :

$$Z_n = Z_0 + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Log} |a(x_k)|.$$

La fonction  $\operatorname{Log} |a|$  est standard continue, donc

$$Z_n \simeq Z_0 + \int_{x_0}^{x_n} \operatorname{Log} |a(x)| \, dx$$

et de plus la fonction  $Z(x_n) = Z_n$  est  $S$ -continue, c'est-à-dire  $x_m \simeq x_n$  implique  $Z_m \simeq Z_n$ . On remarque que

$$(Z_n \ll 0 \implies \operatorname{Log} |z_n| \simeq -\infty \implies z_n \simeq 0 \implies y_n \simeq y_{n+p}^0)$$

avec  $y_{n+p}^0 \simeq e(x_{n+p}^0) = e(x_n)$  et de même que

$$(Z_n \gg 0 \implies y_n \simeq \infty).$$

Ainsi, si  $n_1$  et  $n_2$  sont tels que  $x_{n_1} \simeq x_e$  et  $x_{n_2} \simeq x_s$ , alors  $Z_{n_1} \simeq Z_{n_2} \simeq 0$ , donc  $\int_{x_{n_1}}^{x_{n_2}} \text{Log} |a(x)| dx \simeq 0$ . On obtient la proposition 4.2.3 par passage à l'ombre.

• Pour la proposition 4.2.5, fixons  $n$  tel que  $y_n$  n'est pas exponentiellement grand et tel que  $|a(x_n)| \not\approx 1$ . Supposons pour fixer les idées que  $|a(x_n)| \gg 1$ , c'est-à-dire  $x_n \gg c$  (le cas  $|a(x_n)| \ll 1$  est analogue). Il existe  $\delta$  appréciable tel que  $|a(x)| \gg 1$  sur  $[x_n - \delta, x_n + \delta]$ . Soit  $((x_k, y_k^0))_{k \in \mathbb{N}}$  un autre pointillé solution ayant les mêmes abscisses que  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  et tel que  $y_k^0$  est limité pour  $x_k \in [x_n - \delta, x_n + \delta]$ . On pose à nouveau

$$Z_k = \varepsilon \text{Log} |y_k - y^0|.$$

Le fait que  $y_n$  n'est pas exponentiellement grand implique que  $Z_n$  n'est pas appréciablement positif, et le fait que la fonction  $\text{Log} |a|$  est appréciablement positive au voisinage de  $x_n$  entraîne qu'il existe  $m_1$  avec  $x_{m_1} \simeq x_n$  et  $Z_{m_1} < 0$ . Ainsi  $y_{m_1}$  est limité. On applique alors la proposition 4.2.1 en choisissant  $m$  tel que  $(m_1 - m)$  est infiniment grand et  $(m_1 - m)\varepsilon$  infiniment petit.  $\square$

La proposition 4.2.5 simplifie le problème initial : on se contentera de chercher les valeurs de  $x_n$  pour lesquelles  $y_n$  n'est pas exponentiellement grand.

### 4.3. Exposition de la méthode.

Dans toute cette section, l'entier  $n$  est fixé. La première étape consiste à exprimer  $y_n$  en fonction de  $y_0$ . Ceci peut se faire de différentes manières, par exemple en itérant l'équation et en procédant à des substitutions, ou bien en utilisant la classique méthode de la variation de la constante. Quelle que soit la méthode choisie, on aboutit à l'expression :

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} b(x_k) \prod_{m=k+1}^{n-1} a(x_m) + y_0 \prod_{k=0}^{n-1} a(x_k).$$

Vue comme fonction de  $n$ , la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} b(x_k) \prod_{m=k+1}^{n-1} a(x_m)$$

est la solution particulière de (4.1) qui s'annule en  $x_0$ . Le terme  $y_0 \prod_{k=0}^{n-1} a(x_k)$  est quant à lui la solution générale de l'équation homogène. Comme cette dernière a déjà été étudiée (proposition 4.2.3), je me restreindrai à l'étude de la solution particulière

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} b(x_k) \prod_{m=k+1}^{n-1} a(x_m)$$

en supposant  $y_0 = 0$ .

Il s'agit d'une somme de produits. Si ces produits sont suffisamment petits, un argument de convergence dominée [vdB] montre que  $y_n$  est infiniment proche de  $e(x_n)$ . C'est le cas lorsque  $x_n$  est inférieur à  $c$ , mais cela ne nous apprend rien. Par contre, dans la situation qui nous intéresse où  $x_n$  est appréciablement supérieur à  $c$ , cette somme fait intervenir des termes colossaux. Par exemple si  $x_k$  est infiniment proche de  $c$  le produit  $\prod_{m=k+1}^{n-1} a(x_m)$  est constitué d'un nombre de l'ordre de  $\varepsilon^{-1}$  termes, la plupart appréciablement supérieurs à 1; ce produit est donc exponentiellement grand. L'idée est de considérer cette somme comme somme des résidus d'une fonction analytique complexe. Ceci nous fournira une formule intégrale donnant  $y_n$  en fonction de  $y_0$ .

*On suppose désormais que les fonctions  $a$  et  $b$  admettent des prolongements analytiques — désignés par les mêmes lettres — dans un domaine complexe  $\Omega$  contenant l'intervalle  $I$ .*

En utilisant la formule des résidus, on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x_k) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma} \frac{\varphi(x) dx}{\exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)] - 1}$$

où  $\varphi$  est une fonction analytique et  $\gamma$  est un lacet d'indice 1 par rapport aux points  $x_0, \dots, x_{n-1}$  et n'entourant aucune des singularités de  $\varphi$  et aucun autre point  $x_k$ .

On est ainsi amené à chercher une fonction  $\varphi$  analytique telle que

$$\varphi(x_k) = b(x_k) \prod_{m=k+1}^{n-1} a(x_m).$$

Le changement d'inconnue  $\varphi(x) = b(x)f(x)$  conduit à chercher  $f$  analytique telle que

$$f(x_{n-1}) = 1 \quad \text{et} \quad f(x_{k-1}) = a(x_k)f(x_k).$$

On cherche  $f$  solution de l'équation homogène

$$f(x - \varepsilon) = a(x)f(x)$$

mais il ne s'agit plus de pointillés réels : il faut trouver une solution fonctionnelle analytique complexe. Comme dans le cas des solutions pointillés, l'équation homogène considérée se résoud avec la loupe de Benoit

$$Z(x) = Z(x_{n-1}) + \varepsilon \operatorname{Log} f(x),$$

cette fois complexe, et adaptée pour tenir compte du fait que  $f(x_{n-1}) = 1$ . Cette loupe conduit à l'équation de quadrature associée

$$(2.8) \quad Z(x - \varepsilon) = Z(x) + \varepsilon \operatorname{Log} a(x)$$

où « Log » désigne une détermination fixée quelconque du logarithme.

La résolution de l'équation de quadrature est une étape importante dans l'étude de l'équation affine et justifie une étude séparée. On trouvera dans [F3] tous les détails sur cette résolution en imposant diverses conditions sur la fonction à sommer, ici  $\operatorname{Log} a$ . Ces conditions sont suffisamment peu restrictives pour être satisfaites dans les trois exemples présentés dans cet article.

*On suppose pour la suite qu'il existe une solution  $Z$  de l'équation de quadrature associée, limitée dans le  $S$ -intérieur de  $\Omega$ .*

On obtient ainsi

$$f(x) = \exp(\varepsilon^{-1}[Z(x) - Z(x_{n-1})])$$

et, pour la solution particulière,

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} b(x_k) \exp(\varepsilon^{-1}[Z(x_k) - Z(x_{n-1})]).$$

La formule des résidus donne enfin

$$(4.3) \quad y_n = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma} g(x) dx$$

avec

$$g(x) = \frac{b(x) \exp(\varepsilon^{-1}[Z(x_k) - Z(x_{n-1})])}{\exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)] - 1}$$

et  $\gamma$  un lacet inclus dans le  $S$ -intérieur de  $\Omega$  d'indice 1 par rapport aux points  $x_0, \dots, x_{n-1}$  et d'indice 0 par rapport aux autres points  $x_k$ .

Si la fonction  $g$  est limitée sur tout le contour d'intégration et si ce contour n'a pas une longueur exponentiellement grande, alors  $y_n$  n'est pas exponentiellement grand, ce qui réalisera notre objectif. Il nous reste donc à estimer  $g$ . Pour le numérateur on a :

$$|b(x) \exp(\varepsilon^{-1}[Z(x) - Z(x_{n-1})])| = |b(x)| \exp(\varepsilon^{-1}(\operatorname{Re}[Z(x) - Z(x_{n-1})])).$$

On peut montrer (voir [F3]) que si  $Z$  est une solution de l'équation de quadrature, limitée dans le  $S$ -intérieur de  $\Omega$ , alors

$$Z(x) - Z(x_{n-1}) = \int_x^{x_n} \operatorname{Log} a(\xi) d\xi + \varepsilon \mathcal{L}.$$

En posant

$$R_0(x) = \operatorname{Re} \int_x^{x_n} \operatorname{Log} a(\xi) d\xi,$$

on obtient

$$\operatorname{Re}[Z(x) - Z(x_{n-1})] = R_0(x_n) - R_0(x) + \varepsilon \mathcal{L}.$$

En tenant compte du fait que la fonction  $b$  est limitée dans le  $S$ -intérieur de  $\Omega$ , on aboutit à :

$$|b(x) \exp(\varepsilon^{-1}[Z(x) - Z(x_n)])| = \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(x_n) - R_0(x)]).$$

Examinons à présent le dénominateur de la fonction  $g$ . Si la partie imaginaire de  $(x - x_n)$  est appréciablement positive, la partie réelle de  $2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)$  est infiniment grande négative, de sorte que

$$\exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)] - 1$$

est infiniment proche de  $-1$ . Ainsi pour  $\operatorname{Im}(x - x_n) \gg 0$ , on a :

$$|g(x)| = \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(x_n) - R_0(x)]).$$

Par contre, lorsque la partie imaginaire de  $(x - x_n)$  est appréciablement négative,  $\exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)] - 1$  est infiniment grand et

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(x_n) - R_0(x)]) \times |\exp[-2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)]|(1 + \mathcal{O}) \\ &= \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(x_n) + \operatorname{Re}(2i\pi x_n) - R_0(x) - \operatorname{Re}(2i\pi x)]). \end{aligned}$$

Je ne tiens pas compte pour le moment des points de partie imaginaire infiniment proche de celle de  $x_n$ , réservant ce détail technique pour la démonstration du théorème 4.4.

On peut interpréter la fonction  $R_0$  comme une fonction donnant l'*altitude* sur un relief. Par analogie la partie réelle représente la *longitude* et la partie imaginaire la *latitude*. Choisissons le lacet  $\gamma$  composé de deux chemins, l'un  $\gamma^+$  inclus dans le demi-plan nord  $\{x \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(x - x_n) \geq 0\}$ , l'autre  $\gamma^-$  inclus dans le demi-plan sud  $\{\operatorname{Im}(x - x_n) \leq 0\}$ .

Si l'on peut choisir le chemin  $\gamma^+$  de façon à être toujours au-dessus de  $x_n$  pour le relief  $R_0$  (c'est-à-dire  $\forall x \in \gamma^+, R_0(x) \geq R_0(x_n)$ ), la fonction  $g$  sera limitée sur  $\gamma^+$ . En ce qui concerne  $\gamma^-$ , il apparaît un deuxième relief<sup>(2)</sup> donné par  $R_1(x) = R_0(x) + \operatorname{Re}(2i\pi x)$ , et de même si le chemin  $\gamma^-$  est au-dessus de  $x_n$  pour le relief  $R_1$ , alors  $g$  est limitée sur  $\gamma^-$ .

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour formuler le premier résultat de cet article. L'énoncé ne concerne pas exclusivement les pointillés réels et je n'ai pas supposé la courbe lente d'abord attractive puis répulsive, mais il est clair que l'énoncé prend tout son intérêt dans cette situation.

**4.4. THÉORÈME.** — Soit  $a$  et  $b$  deux fonctions standard analytiques dans un domaine complexe  $\Omega$ . Soit  $x_0$  un point de  $\Omega$ ,  $y_0$  un nombre complexe limité et  $n$  un entier tel que le segment  $[x_0, x_0 + n\varepsilon]$  est de longueur appréciable et inclus dans le  $S$ -intérieur de  $\Omega$ . Soit  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  le pointillé solution du système (4.1) de condition initiale  $(x_0, y_0)$ . On note

$$R_0(x) = \operatorname{Re} \int_{x_0}^x \operatorname{Log} a(\xi) \, d\xi$$

où «Log» désigne une détermination fixée du logarithme, et

$$R_1(x) = \operatorname{Re} \int_{x_0}^x (\operatorname{Log} a(\xi) + 2i\pi) \, d\xi = R_0(x) + \operatorname{Re}(2i\pi(x - x_0)).$$

On suppose :

---

<sup>(2)</sup> Les deux reliefs  $R_0$  et  $R_1$  correspondent à deux déterminations différentes du logarithme de la fonction  $a$ . Ces deux reliefs sont différents, mais leur restrictions aux droites horizontales ne diffèrent que d'une constante :

$$\operatorname{Im}(\alpha - \beta) = 0 \implies R_0(\alpha) - R_0(\beta) = R_1(\alpha) - R_1(\beta).$$

Autrement dit, l'altitude relative de deux points à la même latitude est indépendante du relief choisi. En particulier, sur le pointillé, les deux reliefs coïncident puisqu'ils s'annulent en  $c$ . Comme on s'y attend, le comportement des solutions pointillées est donc bien indépendant de la détermination du logarithme.

(H<sub>1</sub>)  $|a(x_n)| \neq 1$ .

(H<sub>2</sub>) Il existe une fonction analytique  $Z$ , limitée dans le  $S$ -intérieur de  $\Omega$ , solution de l'équation  $Z(x - \varepsilon) = Z(x) + \varepsilon \operatorname{Log} a(x)$ .

(H<sub>3</sub>) Il existe un chemin de longueur limitée  $\gamma_0$  joignant les points  $x_0$  et  $x_n$  inclus dans  $\Omega \cap \{x \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(x - x_n) \geq 0\}$  tel que  $R_0(x) \geq R_0(x_n)$  pour tout  $x$  sur  $\gamma_0$ .

(H<sub>4</sub>) Il existe un chemin de longueur limitée  $\gamma_1$  joignant les points  $x_0$  et  $x_n$  inclus dans  $\Omega \cap \{x \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(x - x_n) \leq 0\}$  tel que  $R_1(x) \geq R_1(x_n)$  pour tout  $x$  sur  $\gamma_1$ .

Alors il existe un entier  $m$  tel que  $x_m \simeq x_n$  et tel que  $y_m \simeq \frac{b(x_m)}{1 - a(x_m)}$ .

4.4.1 *Démonstration.* — D'après l'hypothèse (H<sub>1</sub>) et les préliminaires, il suffit de montrer que  $y_n$  n'est pas exponentiellement grand. Soit

$$\gamma^+ : [0, 1] \longrightarrow \Omega \cap \{x \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(x - x_n) \geq 0\}$$

un chemin de longueur limitée et  $\varepsilon$ -proche de  $\gamma_0$  joignant les points  $x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon$  et  $x_n - \frac{1}{2}\varepsilon$  en évitant les disques centrés en  $x_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) et de rayon  $\frac{1}{2}\varepsilon$ , c'est-à-dire :

$$\gamma^+(0) = x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \gamma^+(1) = x_n - \frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$\forall t \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$|\gamma^+(t) - x_0 - k\varepsilon| \geq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Soit  $\gamma^- : [0, 1] \rightarrow \Omega \cap \{x \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(x - x_n) \geq 0\}$  un chemin de longueur limitée et  $\varepsilon$ -proche de  $\gamma_1$  joignant les points  $x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon$  et  $x_n - \frac{1}{2}\varepsilon$  en évitant les disques centrés en  $x_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) et de rayon  $\frac{1}{2}\varepsilon$ . En posant  $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-$ , on a :

$$y_n = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma} g(x) dx$$

avec

$$g(x) = \frac{b(x) \exp(\varepsilon^{-1}[Z(x) - Z(x_{n-1})])}{\exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)] - 1}.$$

Le lemme suivant, dont la preuve est immédiate, fournit une minoration du dénominateur de la fonction  $g$  et explique pourquoi j'ai choisi des chemins évitant des disques.

LEMME 4.4.2. — Soit  $z$  dans  $\mathbb{C}$ , limité ou non, tel que la distance de  $z$  à  $\mathbb{Z}$  soit supérieure ou égale à  $\frac{1}{2}$ . On a

$$\operatorname{Im}(z) \geq 0 \implies \frac{1}{\exp(2i\pi z) - 1} = @,$$

$$\operatorname{Im}(z) \leq 0 \implies \frac{1}{\exp(2i\pi z) - 1} = @ \exp(-2i\pi z).$$

Ainsi on a :

- sur  $\gamma^+$ ,  $|g(x)| = \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1} \operatorname{Re}[Z(x) - Z(x_{n-1})])$   
 $= \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(x_n) - R_0(x) + \varepsilon \mathcal{L}])$   
 $= \mathcal{L}$
- sur  $\gamma^-$ ,  $|g(x)| = \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1} \operatorname{Re}[Z(x) - Z(x_{n-1})]/\varepsilon)$   
 $\times \exp(-2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n))$   
 $= \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1}[R_1(x_n) - R_1(x)])$   
 $= \mathcal{L}$ .

Le lacet  $\gamma$  étant de longueur limitée, on obtient finalement

$$y_n = \varepsilon^{-1} \mathcal{L} = \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1} \circ),$$

ce qui achève la preuve du théorème 4.4. □

#### 4.5. Application à l'exemple 3.

On a :

$$a(x) = -\exp(x) = \exp(x - i\pi) \quad \text{et} \quad b(x) = 1.$$

On choisit pour  $\Omega$  le plan complexe tout entier. L'équation de quadrature est particulièrement facile à résoudre : une solution polynomiale de l'équation

$$Z(x - \varepsilon) = Z(x) + \varepsilon(x - i\pi)$$

est

$$Z(x) = -\frac{1}{2}(x - i\pi)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon x;$$

cette solution est limitée pour tout  $x$  limité.

Les deux reliefs sont donnés par :

- $R_0(x) = \operatorname{Re}(\frac{1}{2}(x - i\pi)^2)$  pour le nord  $\{x \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(x - x_n) \geq 0\}$  et

- $R_1(x) = \operatorname{Re}(\frac{1}{2}(x - i\pi)^2 + 2i\pi x) = \operatorname{Re}(\frac{1}{2}(x + i\pi)^2)$  pour le sud.

Chacun de ces reliefs présente un col, l'un en  $i\pi$ , l'autre en  $-i\pi$ . Tant que l'on peut joindre  $x_0$  à  $x_n$  par le nord en restant au-dessus de  $x_n$  pour le relief  $R_0$  et par le sud en restant au-dessus de  $x_n$  pour  $R_1$ , le pointillé longe la courbe lente. Le problème est réduit à une simple contemplation de la géométrie de ces reliefs : si  $-\pi \ll x_0 \ll 0$ , ceci est réalisé tant que  $x_n \ll -x_0$ , mais si  $x_0 \ll -\pi$  ceci est réalisé tant que le pointillé ne traverse pas une séparatrice de col de l'un des deux reliefs  $R_0$  ou  $R_1$ , c'est-à-dire tant que  $x_n \ll \pi$ .

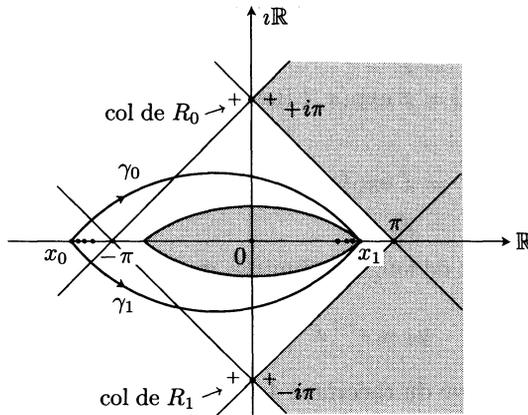


Figure 2.

La situation est à présent bien expliquée en ce qui concerne les canards dans l'intervalle externe  $]-\pi, \pi[$ . L'existence des longs canards et leur exponentielle proximité nécessitent une analyse un peu plus fine qui fait l'objet de la prochaine partie.

## 5. Chasse aux longs canards.

### 5.1. Préliminaires.

Revenons au cas général. Une situation intéressante est la suivante.

- Chacun des deux reliefs présente un col, l'un  $R_0$  en un point  $c_0$  au nord de  $x_0$ , et l'autre  $R_1$  en  $c_1$  au sud de  $x_0$ , tous les deux en dessous de  $x_0$  pour le relief correspondant (c'est-à-dire  $R_0(c_0)$  et  $R_1(c_1)$  négatifs puisque les fonctions reliefs s'annulent en  $x_0$ ).

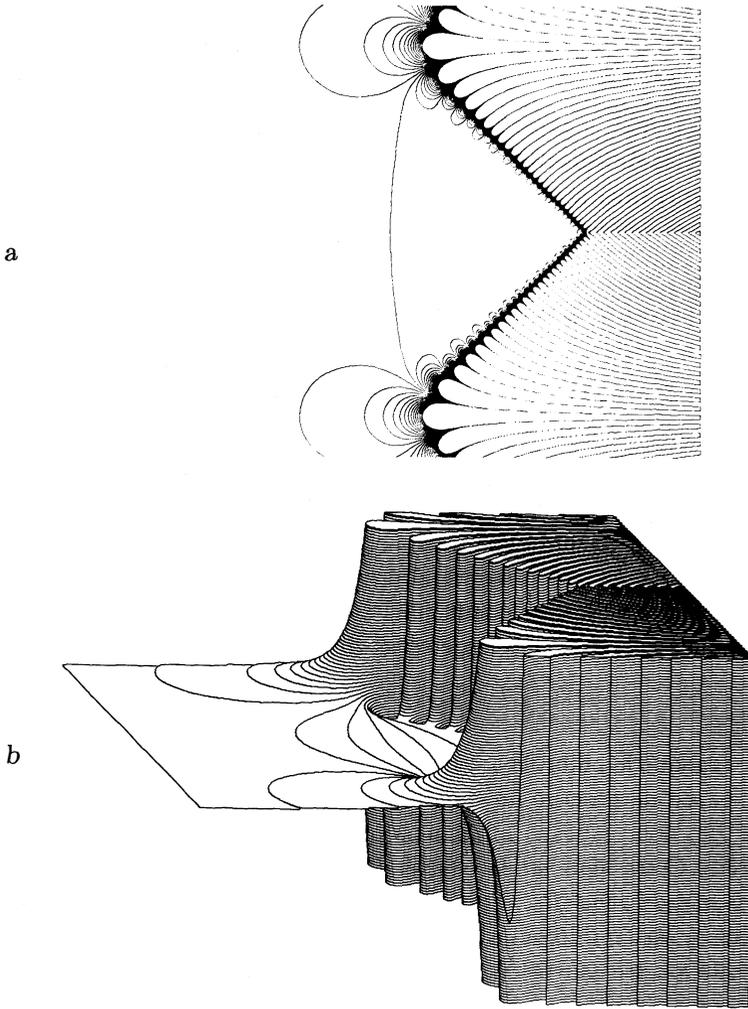


Figure 3. Courbes de niveau de la partie imaginaire d'une solution analytique de l'équation  $y(x+0.15) = 1 - e^x y(x)$  proche de la courbe lente  $y = (1 + e^x)^{-1}$  dans le demi-plan externe  $\{x \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} x \ll 0\}$ . Ici,  $\operatorname{Re} x$  varie de  $-5$  à  $5$ ,  $\operatorname{Im} x$  de  $-3.84$  à  $3.84$  et  $\operatorname{Im} y$  de  $-10$  à  $10$ .

- Le pointillé  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  commence par descendre les deux reliefs, traverse une séparatrice de col, par exemple la séparatrice de  $c_0$  si  $R_1(c_1) \leq R_0(c_0)$ , puis l'autre séparatrice, continue à descendre les reliefs jusqu'en un point  $c$  où les courbes de niveau des deux reliefs sont tangentes et enfin remonte pour retraverser les deux séparatrices.

Tant que ce pointillé n'a pas atteint une des séparatrices des cols, on pourra trouver un chemin satisfaisant les conditions du théorème 4.4, ce qui montre que le pointillé  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  continue à longer la courbe lente.

Par contre, lorsque le pointillé  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  traverse l'une des séparatrices, il n'y a plus de chemin  $\gamma$  descendant les reliefs en partant de  $x_0$  mais on peut donner une estimation précise de l'intégrale (4.3) qui définit  $y_n$ , ce qui fournit une condition nécessaire pour que le pointillé continue à longer la courbe lente.

Auparavant, précisons la détermination de la racine intervenant dans l'énoncé du résultat. Notons :

$$L_0(x) = \int_{x_0}^x \text{Log } a(\xi) \, d\xi, \quad L_1(x) = \int_{x_0}^x (\text{Log } a(\xi) + 2i\pi) \, d\xi.$$

Ainsi  $R_0 = \text{Re } L_0$  et  $R_1 = \text{Re } L_1$ . Le col de  $R_0$  correspond à  $L'(c_0) = 0$  (ce qui implique  $a(c_0) = 1$ ). En tant que partie réelle d'une fonction analytique, la fonction  $R_0$  est harmonique donc n'admet pas d'extremum local. Ainsi  $c_0$  est un col. Ce col présente alternativement  $p + 1$  montagnes et  $p + 1$  vallées, où  $p$  est l'ordre de multiplicité du zéro de  $L'(c_0)$ . Je considère le cas où les deux cols sont simples, c'est-à-dire

$$L''(c_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad L''(c_1) \neq 0.$$

Lorsque le pointillé a retraversé la séparatrice de  $c_0$ , le meilleur choix pour  $\gamma_0$  est de prendre un chemin descendant le moins possible le long du relief  $R_0$ , donc passant infiniment près de  $c_0$  en étant tangent à la ligne de crête. Cette ligne est la courbe de plus grande pente joignant les deux montagnes du relief  $R_0$ . C'est la courbe de niveau de  $\text{Im } L_0$  contenant  $c_0$  et de plus  $c_0$  est un minimum de  $R_0$  relativement à cette courbe. Calculons la tangente à cette courbe en  $c_0$ . Pour  $x$  infiniment proche de  $c_0$ , on a :

$$L_0(x) = L_0(c_0) + (x - c_0)L'(c_0) + \frac{1}{2}(x - c_0)^2(L''(c_0) + \mathcal{O}).$$

On a  $L''(x) = a'(x)/a(x)$  donc  $L''(c_0) = a'(c_0)$ , ce qui donne pour  $x \simeq c_0$ ,

$$L_0(x) = L_0(c_0) + \frac{1}{2}(x - c_0)^2 a'(c_0)(1 + \mathcal{O}).$$

Le chemin  $\gamma^+$  est donc tangent à la droite  $\{x \in \mathbb{C}; (x - c_0)^2 a'(c_0) \in \mathbb{R}\}$  qui est dirigée par les deux déterminations de  $(a'(c_0))^{-1/2}$ . On choisit la détermination de la racine correspondant au sens positif de  $\gamma_0$  (dans l'exemple, il s'agit de la détermination principale). On peut par exemple choisir le chemin  $\gamma_0$  et la détermination de la racine de façon à avoir  $\gamma_0(\frac{1}{2}) = c_0$  et  $\gamma_0'(\frac{1}{2}) = (a'(c_0))^{-1/2}$ .

**5.2. THÉORÈME.** — Soient  $a$  et  $b$  deux fonctions standard analytiques dans un domaine complexe  $\Omega$ . Soient  $x_0, y_0$  limités et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $[x_0, x_0 + n\varepsilon] \subseteq S - \text{int}(\Omega)$  et  $n\varepsilon \neq 0$ . Soit  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  le pointillé solution du système (4.1) partant de  $(x_0, y_0)$ . On note  $\alpha = {}^{\circ}x_0$ ,  $\beta = {}^{\circ}x_n$ ,

$$L_0(x) = \int_{x_0}^x \text{Log } a(\xi) \, d\xi, \quad L_1(x) = \int_{x_0}^x (\text{Log } a(\xi) + 2i\pi) \, d\xi$$

où «Log» est une détermination fixée du logarithme,  $R_0 = \text{Re } L_0$  et  $R_1 = \text{Re } L_1$ . On fait les hypothèses suivantes.

(H<sub>1</sub>) Il existe  $Z$  analytique et limitée dans  $S - \text{int}(\Omega)$  telle que :

$$Z(x - \varepsilon) = Z(x) + \varepsilon \text{Log } a(x).$$

(H<sub>2</sub>) Il existe  $c_0 \in \Omega$  tel que  $\text{Log } a(c_0) = 0$ ,  $\text{Im}(c_0 - \alpha) > 0$ ,  $a'(c_0) \neq 0$  et  $b(c_0) \neq 0$ .

(H<sub>3</sub>) Il existe  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \Omega$  standard de classe  $C^1$  tel que :

- (i)  $\gamma_0(0) = \alpha$ ,  $\gamma_0(1) = \beta$ ,  $\text{Re } \gamma_0'(0) = \text{Re } \gamma_0'(1) = 0$ ;
- (ii)  $\gamma_0(\frac{1}{2}) = c_0$ ,  $\gamma_0'(\frac{1}{2}) = (a'(c_0))^{-1/2}$ ;
- (iii) pour tout  $t \in [0, 1]$  ( $0 < t < 1 \Rightarrow \text{Im}(\gamma_0(t) - \alpha) > 0$ ) et ( $t \neq \frac{1}{2} \Rightarrow R_0(\gamma_0(t)) > R_0(c_0)$ ).

(H<sub>4</sub>) Il existe  $c_1 \in \Omega$  tel que  $\text{Log } a(c_1) = 2i\pi$ ,  $\text{Im}(c_1 - \alpha) < 0$ ,  $a'(c_1) \neq 0$  et  $b(c_1) \neq 0$ .

(H<sub>5</sub>) Il existe  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$  standard de classe  $C^1$  tel que :

- (i)  $\gamma_1(0) = \alpha$ ,  $\gamma_1(1) = \beta$ ,  $\text{Re } \gamma_1'(0) = \text{Re } \gamma_1'(1) = 0$ ;
- (ii)  $\gamma_1(\frac{1}{2}) = c_1$ ,  $\gamma_1'(\frac{1}{2}) = (a'(c_1))^{-1/2}$ ;
- (iii) pour tout  $t \in [0, 1]$  ( $0 < t < 1 \Rightarrow \text{Im}(\gamma_1'(t) - \alpha) < 0$ ) et ( $t \neq \frac{1}{2} \Rightarrow R_1(\gamma_1'(t)) > R_1(c_1)$ ).

Sous ces conditions, on a :

$$y_n = \lambda(x_n)(1 + \circ - \exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x_n - \mu)])(1 + \circ)$$

avec

$$(5.1) \quad \lambda(x_n) = b(c_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon a'(c_0) a(x_n)}} \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n) - L_0(c_0)])$$

et

$$(5.2) \quad \mu = c_1 - \frac{1}{2i\pi} \left[ L_0(c_0) - L_0(c_1) + \varepsilon \operatorname{Log} \left( \frac{b(c_1)}{b(c_0)} \sqrt{\frac{a'(c_0)}{a'(c_1)}} \right) \right].$$

5.2.1. *Démonstration.* — Conformément à (4.3), on a

$$y_n = \varepsilon^{-1} \int_{\gamma} g(x) dx$$

où  $\gamma$  est un lacet inclus dans  $S - \operatorname{int}(\Omega)$  d'indice 1 par rapport aux points  $x_0, \dots, x_{n-1}$ , et d'indice 0 par rapport aux autres points  $x_k$  et

$$g(x) = \frac{b(x) \exp(\varepsilon^{-1}[Z(x) - Z(x_{n-1})])}{\exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)] - 1}.$$

D'après [F3], la solution  $Z$  de l'équation de quadrature vérifie, pour  $x$  et  $x_n$  limités,

$$Z(x) - Z(x_{n-1}) = L_0(x_n - \frac{1}{2}\varepsilon) - L_0(x + \frac{1}{2}\varepsilon) + \varepsilon^2 \mathcal{L}.$$

Soit  $\gamma^+$  un chemin infiniment proche de  $\gamma_0$ , ainsi que les dérivées, joignant les points  $(x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon)$  et  $(x_n - \frac{1}{2}\varepsilon)$  en évitant les disques  $D(x_k, \frac{1}{2}\varepsilon)$  centrés en  $x_k$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ , de rayon  $\frac{1}{2}\varepsilon$ , et passant au point  $(c_0 - \frac{1}{2}\varepsilon)$  à l'instant  $\frac{1}{2}$  avec la dérivée  $(a'(c_0))^{-1/2}$ . Autrement dit :

$$\begin{aligned} \gamma^+ : [0, 1] &\rightarrow \Omega \text{ de classe } C^1, \\ \gamma^+(0) &= x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \gamma^+(1) = x_n - \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \gamma^+(\frac{1}{2}) = c_0 - \frac{1}{2}\varepsilon, \\ \gamma'^+(\frac{1}{2}) &= (a'(c_0))^{-1/2}, \\ \forall t \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{Z}, \gamma^+(t) &\simeq \gamma_0(t), \quad \gamma'^+(t) \simeq \gamma'_0(t), \quad |\gamma^+(t) - x_k| \geq \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

De même soit  $\gamma^-$  tel que :

$$\begin{aligned} \gamma^- : [0, 1] &\rightarrow \Omega \text{ de classe } C^1, \\ \gamma^-(0) &= x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \gamma^-(1) = x_n - \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \gamma^-(\frac{1}{2}) = c_1 - \frac{1}{2}\varepsilon, \\ \gamma'^-(\frac{1}{2}) &= (a'(c_1))^{-1/2}, \\ \forall t \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{Z}, \gamma^-(t) &\simeq \gamma_1(t), \quad \gamma'^-(t) \simeq \gamma'_1(t), \quad |\gamma^-(t) - x_k| \geq \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

On choisit pour  $\gamma$  le lacet composé des deux chemins  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$ , précisément  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  tel que

$$\forall t \in [0, \frac{1}{2}], \gamma(t) = \gamma^-(2t) \quad \text{et} \quad \forall t \in [\frac{1}{2}, 1], \gamma(t) = \gamma^+(1 - 2t).$$

Avec ce choix de chemins on a :

$$y_n = \varepsilon^{-1} \int_{\gamma^-} g(x) dx - \varepsilon^{-1} \int_{\gamma^+} g(x) dx.$$

La fonction  $g$  a un maximum bien exprimé en  $c_0$ , c'est-à-dire que l'on a  $R_0(\gamma_0(t)) > R_0(c_0)$  pour  $t \neq \frac{1}{2}$ ;  $R_0, c_0$  et  $\gamma_0$  étant standard, on en déduit que si  $t \neq \frac{1}{2}$  alors  $R_0(\gamma_0(t)) \gg R_0(c_0)$  et cette propriété persiste avec le chemin  $\gamma^+$ . Ainsi, pour  $x$  sur  $\gamma^+$  non infiniment proche de  $c_0$ ,  $g(x)/g(x_0)$  est exponentiellement petit, donc seule compte dans l'intégrale  $\int_{\gamma^+} g(x) dx$  la contribution des points du halo de  $c_0$ . En d'autres termes,

$$(5.3) \quad \int_{\gamma^+} g(x) dx = \int_{\gamma^+ \cap \text{hal}(c_0)} g(x) dx (1 + \mathcal{O}).$$

Pour  $x$  infiniment proche de  $c_0$ ,

$$\exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)] - 1 = -1 + \mathcal{O}$$

puisque  $c_0$  est au nord de  $x_n$ , et

$$L_0(x + \frac{1}{2}\varepsilon) = L_0(c_0) + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\varepsilon - c_0)^2 a'(c_0)(1 + \mathcal{O}),$$

donc

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{b(x) \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n) - \frac{1}{2}\varepsilon] - L_0(x + \frac{1}{2}\varepsilon) + \varepsilon^2 \mathcal{L})}{\exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)] - 1} \\ &= \frac{b(c_0) + \mathcal{O}}{-1 + \mathcal{O}} \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n - \frac{1}{2}\varepsilon) - L_0(c_0)]) \\ &\quad \times \exp(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}(x + \frac{1}{2}\varepsilon - c_0)^2 a'(c_0)(1 + \mathcal{O})). \end{aligned}$$

On a de plus  $L_0(x_n - \frac{1}{2}\varepsilon) = L_0(x_n) - \frac{1}{2}\varepsilon(L'_0(x_n) + \mathcal{O})$  et  $L'_0(x) = \text{Log } a(x)$ , donc

$$\begin{aligned} &\exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n - \frac{1}{2}\varepsilon) - L_0(c_0)]) \\ &= \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n) - L_0(c_0)] - \frac{1}{2}L'_0(x_n) + \mathcal{O}) \\ &= a(x_n)^{-1/2} \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n) - L_0(c_0)])(1 + \mathcal{O}). \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $x$  infiniment proche de  $c_0$ ,

$$\begin{aligned} g(x) &= -b(c_0)a(x_n)^{-1/2} \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n) - L_0(c_0)]) \\ &\quad \times \exp(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}(x + \frac{1}{2}\varepsilon - c_0)^2 a'(c_0)(1 + \mathcal{O}))(1 + \mathcal{O}). \end{aligned}$$

Posons le changement de variable

$$x = c_0 - \frac{1}{2}\varepsilon + \sqrt{\frac{\varepsilon}{a'(c_0)}} u$$

qui envoie  $\gamma^+ \cap \text{hal}(c_0)$  sur une courbe  $\Gamma \cap \varepsilon^{-1/2} \text{hal}(0)$  infiniment proche de  $\mathbb{R}$  parcourue de  $-\infty$  à  $+\infty$ . On a  $dx = \sqrt{\varepsilon/a'(c_0)} du$  et

$$g(x) = -b(c_0)a(x_n)^{-1/2} \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n) - L_0(c_0)]) \\ \times \exp(-\frac{1}{2}u^2(1 + \circlearrowleft))(1 + \circlearrowleft)$$

donc

$$\varepsilon^{-1} \int_{\gamma^+} g(x) dx = \frac{1 + \circlearrowleft}{\varepsilon} \int_{\gamma^+ \cap \text{hal}(c_0)} g(x) dx \\ = -\frac{1 + \circlearrowleft}{\varepsilon} b(c_0)a(x_n)^{-1/2} \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n) - L_0(c_0)]) \\ \times \sqrt{\varepsilon/a'(c_0)} \int_{\Gamma \cap \varepsilon^{-1/2} \text{hal}(0)} \exp(-\frac{1}{2}u^2(1 + \circlearrowleft)) du$$

et

$$(5.4) \quad \int_{\Gamma \cap \varepsilon^{-1/2} \text{hal}(0)} \exp(-\frac{1}{2}u^2(1 + \circlearrowleft)) du \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}u^2) du (1 + \circlearrowleft) = \sqrt{2\pi}(1 + \circlearrowleft).$$

Finalement on obtient :

$$\varepsilon^{-1} \int_{\gamma^+} g(x) dx = -b(c_0)\sqrt{2\pi/\varepsilon a'(c_0)a(x_n)} \\ \times \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n) - L_0(c_0)])(1 + \circlearrowleft).$$

*Remarque.* — Si l'on veut éviter le recours au formalisme de [K], on peut procéder de la façon suivante. Pour tout intervalle  $I \subset [0, 1]$ , centré en  $\frac{1}{2}$  et de longueur  $|I|$  appréciable, on a :

$$\int_{\gamma^+} g(x) dx = \int_{\gamma^+(I)} g(x) dx (1 + \circlearrowleft).$$

Par permanence, il existe un intervalle  $I_0$  centré en  $\frac{1}{2}$ , de longueur infiniment petite, tel que

$$\int_{\gamma^+} g(x) dx = \int_{\gamma^+(I_0)} g(x) dx (1 + \circlearrowleft),$$

ce qui remplace la formule (5.3). De plus, cet intervalle peut être choisi suffisamment grand pour que  $\varepsilon^{-1}|I_0|$  soit infiniment grand; ainsi, dans la variable  $u$ ,  $\Gamma(I_0)$  contient la galaxie principale, et la formule (5.4) est remplacée par

$$\int_{\Gamma(I)} \exp\left[-\frac{1}{2}u^2(1 + \mathcal{O})\right] du = \sqrt{2\pi}(1 + \mathcal{O}).$$

De même, pour  $x$  infiniment proche de  $c_1$ ,

$$\exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)] - 1 = (1 + \mathcal{O}) \exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)]$$

puisque  $c_1$  est au sud de  $x_n$ , et

$$L_1\left(x + \frac{1}{2}\varepsilon\right) = L_1(c_1) + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\varepsilon - c_1)^2 a'(c_1)(1 + \mathcal{O}).$$

Avec la formule  $L_0(X) = L_1(X) - 2i\pi(X - x_0)$ , on obtient

$$L_0\left(x + \frac{1}{2}\varepsilon\right) = L_0(c_1) - 2i\pi(x - c_1) - i\varepsilon\pi + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\varepsilon - c_1)^2 a'(c_1)(1 + \mathcal{O}).$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{b(x) \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n - \frac{1}{2}\varepsilon) - L_0(x + \frac{1}{2}\varepsilon) + \varepsilon^2 \mathcal{L}])}{\exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)] - 1} \\ &= (b(c_1) + \mathcal{O}) \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n - \frac{1}{2}\varepsilon) - L_0(c_1)]) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}(x + \frac{1}{2}\varepsilon - c_1)^2 a'(c_1)(1 + \mathcal{O})\right) \\ &\quad \times \exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - c_1) + i\pi] \\ &\quad \times \exp[-2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)](1 + \mathcal{O}) \\ &= -b(c_1)a(x_n)^{-1/2} \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n) - L_0(c_1)]) \\ &\quad \times \exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x_n - c_1)] \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}(x + \frac{1}{2}\varepsilon - c_1)^2 a'(c_1)(1 + \mathcal{O})\right)(1 + \mathcal{O}). \end{aligned}$$

Le changement de variable  $x = c_1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \sqrt{\varepsilon/a'(c_1)}u$  donne

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma^- \cap \text{hal}(c_1)} \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}(x + \frac{1}{2}\varepsilon - c_1)^2 a'(c_1)(1 + \mathcal{O})\right) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon a'(c_1)}} (1 + \mathcal{O})$$

donc

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma^-} g(x) dx &= \frac{1 + \mathcal{O}}{\varepsilon} \int_{\gamma^- \cap \text{hal}(c_1)} g(x) dx \\
 &= -b(c_1)a(x_n)^{-1/2} \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n) - L_0(c_1)]) \\
 &\quad \times \exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x_n - c_1)] \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon a'(c_1)}} (1 + \mathcal{O}) \\
 &= -b(c_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon a'(c_0)a(x_n)}} \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(x_n) - L_0(c_0)]) \\
 &\quad \times \exp(\varepsilon^{-1}[L_0(c_0) - L_0(c_1)]) \frac{b(c_1)}{b(c_0)} \sqrt{\frac{a'(c_0)}{a'(c_1)}} \\
 &\quad \times \exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x_n - c_1)] (1 + \mathcal{O}).
 \end{aligned}$$

En résumé, avec les notations  $\lambda$  et  $\mu$  introduites dans l'énoncé en (5.1) et (5.2), on a :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^{-1} \int_{\gamma^+} g(x) dx &= -\lambda(x_n)(1 + \mathcal{O}), \\
 \varepsilon^{-1} \int_{\gamma^-} g(x) dx &= -\lambda(x_n) \exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x_n - \mu)] (1 + \mathcal{O})
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 y_n &= \varepsilon^{-1} \int_{\gamma^-} g(x) dx - \varepsilon^{-1} \int_{\gamma^+} g(x) dx \\
 &= \lambda(x_n)(1 + \mathcal{O} - \exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x_n - \mu)](1 + \mathcal{O})). \quad \square
 \end{aligned}$$

Notons que  $\lambda(x_n)$  est de la forme

$$\lambda(x_n) = \frac{\textcircled{a}}{\sqrt{\varepsilon}} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(x_n) - R_0(c_0)])$$

(avec  $\textcircled{a}$  complexe appréciable) et que  $\mu$  est une constante limitée qui ne dépend que des données  $a$  et  $b$ . Notons aussi que l'énoncé reste vrai si l'on change  $\mu$  en  $\mu + k\varepsilon$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  (le choix de la détermination du logarithme n'influe pas sur le résultat).

### 5.3. Étude géométrique.

Nous nous intéressons dans cette partie aux *longs canards*, c'est-à-dire aux orbites qui continuent à longer la courbe lente après avoir retraversé une séparatrice de col.

Si  $((x_m, y_m))_{m \in \mathbb{N}}$  est une orbite de (4.1) avec  $y_0 = 0$ ,  $y_n$  est la somme de deux termes  $y_+$  et  $y_-$  qui s'expriment à l'aide d'une intégrale de  $g$  sur deux chemins joignant les points  $(x_0 - \frac{1}{2}\varepsilon)$  et  $(x_n - \frac{1}{2}\varepsilon)$ , l'un par le nord et l'autre par le sud, et descendant le moins possible le long des reliefs correspondants :

$$y_n^+ = \varepsilon^{-1} \int_{\gamma^+} g(x) dx \quad \text{et} \quad y_n^- = \varepsilon^{-1} \int_{\gamma^-} g(x) dx.$$

Si l'ombre du pointillé  $(x_m)_{0 < m < n}$  n'a traversé qu'une séparatrice, l'un des termes est exponentiellement grand et l'autre est au plus de l'ordre de  $\varepsilon^{-1}$ ; la somme ne peut donc pas être limitée. Ainsi l'ombre d'un long canard retransverse les deux séparatrices en même temps; ce canard passe donc infiniment près de l'intersection des deux séparatrices.

#### 5.4. Condition nécessaire à long canard.

Pour que le pointillé  $((x_m, y_m))_{m \in \mathbb{N}}$  soit un long canard, il faut qu'il existe  $n$  tel que le pointillé  $(x_m)_{0 < m < n}$  ait retransversé les deux séparatrices et tel que  $y_n$  soit limité. Lorsque  $(x_m)_{0 < m < n}$  a retransversé les deux séparatrices, on a :

$$y_n = \frac{\textcircled{0}}{\sqrt{\varepsilon}} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(x_n) - R_0(c_0)]) (1 + \textcircled{0} - \exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x_n - \mu)]).$$

Le terme  $\exp(\varepsilon^{-1}[R_0(x_n) - R_0(c_0)])$  étant exponentiellement grand,  $y_n$  ne peut être limité que si  $1 - \exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x_n - \mu)]$  est infiniment petit, c'est-à-dire

$$(5.5) \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{x_n - \mu}{\varepsilon} \simeq k.$$

Notons que cette condition à long canard ne dépend en fait que de l'abscisse de départ  $x_0$  puisque  $\frac{x_n - \mu}{\varepsilon} = \frac{x_0 - \mu}{\varepsilon} + n$ .

#### 5.5. Existence et vie brève des longs canards.

5.5.1. Plaçons-nous dans les conditions du théorème 5.2 avec  $\alpha$  et  $\beta$  standard dans  $\Omega$  et fixons  $n$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $n = \frac{\beta - \alpha}{\varepsilon} + \mathcal{L}$ . D'après ce qui précède, les longs canards sont à chercher parmi les orbites de (4.1) dont l'abscisse de départ est telle que  $\frac{x_0 - \mu}{\varepsilon}$  est infiniment proche d'un entier. Posons  $x_0 = \mu + k\varepsilon + \varepsilon X$ , avec  $k$  étant choisi tel que  $X$  soit infiniment petit.

D'après (5.2), la constante  $\mu$  s'écrit  $\mu = \mu_0 + \varepsilon\mu_1$  avec  $\mu_0$  et  $\mu_1$  standard. Pour avoir des longs canards, il faut donc que  $\text{Im}(\alpha - \mu) = 0$ . On peut ainsi se restreindre à l'examen des orbites dont l'abscisse de départ vérifie  $x_0 = \alpha + \varepsilon\mathcal{L}$ , donc  $x_n = \beta + \varepsilon\mathcal{L}$ . Il existe deux fonctions analytiques  $\varphi$  et  $\psi$  telles que

$$y_n = \varphi(x_0)\psi(x_0)$$

avec

$$\varphi(x) = \lambda(x + n\varepsilon)(1 + \mathcal{O}) = \frac{\textcircled{\text{O}}}{\sqrt{\varepsilon}} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(x + n\varepsilon) - R_0(c_0)]),$$

$$\psi(x) = 1 - \exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - \mu) + \mathcal{O}].$$

LEMME 5.5.2 (valeurs intermédiaires complexes). — Soit  $F$  une fonction analytique complexe telle que  $F(X) = 1 - \exp(2i\pi X + \mathcal{O})$  pour tout  $X$  limité et soit  $a$  un nombre complexe infiniment petit. Alors :

- (i) Il existe un unique  $X^*$  infiniment petit tel que  $F(X^*) = 0$ .
- (ii) On a  $(X \simeq 0 \text{ et } F(X) = a\mathcal{L} \Rightarrow X = X^* + a\mathcal{L})$ .

5.5.3. Preuve. — Le symbole  $\mathcal{O}$  désigne une fonction analytique de  $X$  qui prend une valeur infiniment petite en tout point limité. D'après le théorème de Robinson (voir [C], [R]), sa dérivée est infiniment petite, donc la fonction  $F$  a une dérivée infiniment proche de  $-2i\pi$  dans le halo de 0.  $\square$

5.5.4. En appliquant le lemme à  $F(X) = \psi(\mu + k\varepsilon + \varepsilon X)$ , on a ainsi :

- d'une part l'existence d'un long canard pour  $x_0 = x^* = \mu + k\varepsilon + \varepsilon X^*$ ,  $y_n = 0$ ;
- d'autre part la « vie brève » des longs canards :

$$y_n = \mathcal{L} \iff \varphi(x_0)\psi(x_0) = \mathcal{L},$$

$$\varphi(x_0) = \frac{\textcircled{\text{O}}}{\sqrt{\varepsilon}} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(x_n) - R_0(c_0)]) = \frac{\textcircled{\text{O}}}{\sqrt{\varepsilon}} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(\beta) - R_0(c_0)])$$

puisque  $x_n = \beta + \varepsilon\mathcal{L}$ , donc

$$\begin{aligned} y_n = \mathcal{L} &\iff \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(\beta) - R_0(c_0)])\psi(x_0) = \mathcal{L} \\ &\iff X = X^* + \sqrt{\varepsilon} \exp(\varepsilon^{-1} - [R_0(c_0) - R_0(\beta)])\mathcal{L} \\ &\iff x_0 = x^* + \varepsilon^{3/2} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(c_0) - R_0(\beta)])\mathcal{L}. \end{aligned}$$

Ainsi les abscisses à long canard  $\varepsilon$ -proches de  $\mu + k\varepsilon$  sont exactement les valeurs  $x_0$  qui sont exponentiellement proches de  $x^*$ .

## 6. Exemples.

6.1. Considérons le système :

$$(6.1) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \varepsilon, \\ y_{n+1} = 1 - \exp(x_n^2 - \pi)y_n. \end{cases}$$

Nous examinerons en particulier l'orbite qui part du point origine, c'est-à-dire  $x_0 = y_0 = 0$ . La courbe lente est donnée par

$$y = e(x) = \frac{1}{1 + \exp(x^2 - \pi)},$$

attractive sur  $] -\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}[$  et répulsive sur  $] -\infty, -\sqrt{\pi}[$  et  $]\sqrt{\pi}, +\infty[$ . L'orbite partant de  $(0, 0)$  entre dans le halo de la courbe lente à l'abscisse  $x_e = 0$  et longe cette courbe au moins tant que  $x_n$  est inférieur à  $\sqrt{\pi}$ . La question qui se pose est : *quelle est l'abscisse de sortie de cette orbite ?*

On a  $a(x) = -\exp(x^2 - \pi) = \exp[x^2 - (1+i)\pi]$  et  $b(x) = 1$ . On choisit pour  $\Omega$  le plan complexe tout entier. Ici encore, l'équation de quadrature

$$Z(x - \varepsilon) = Z(x) + \varepsilon(x^2 - (1+i)\pi)$$

se résoud facilement. Elle admet une solution polynomiale de degré 3, limitée pour tout  $x$  limité, qu'il n'est pas besoin d'explicitier puisque seule son existence joue un rôle.

Les fonctions relief sont

- $R_0(x) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{3}x^3 - (1+i)\pi x\right)$  pour le nord,
- $R_1(x) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{3}x^3 - (1-i)\pi x\right)$  pour le sud,

et le point de  $\mathbb{R}^+$  qui est à la même altitude que 0 est  $\sqrt{3\pi}$ .

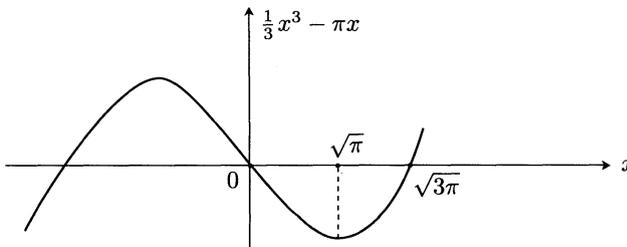


Figure 4. Restriction des reliefs à l'axe réel.

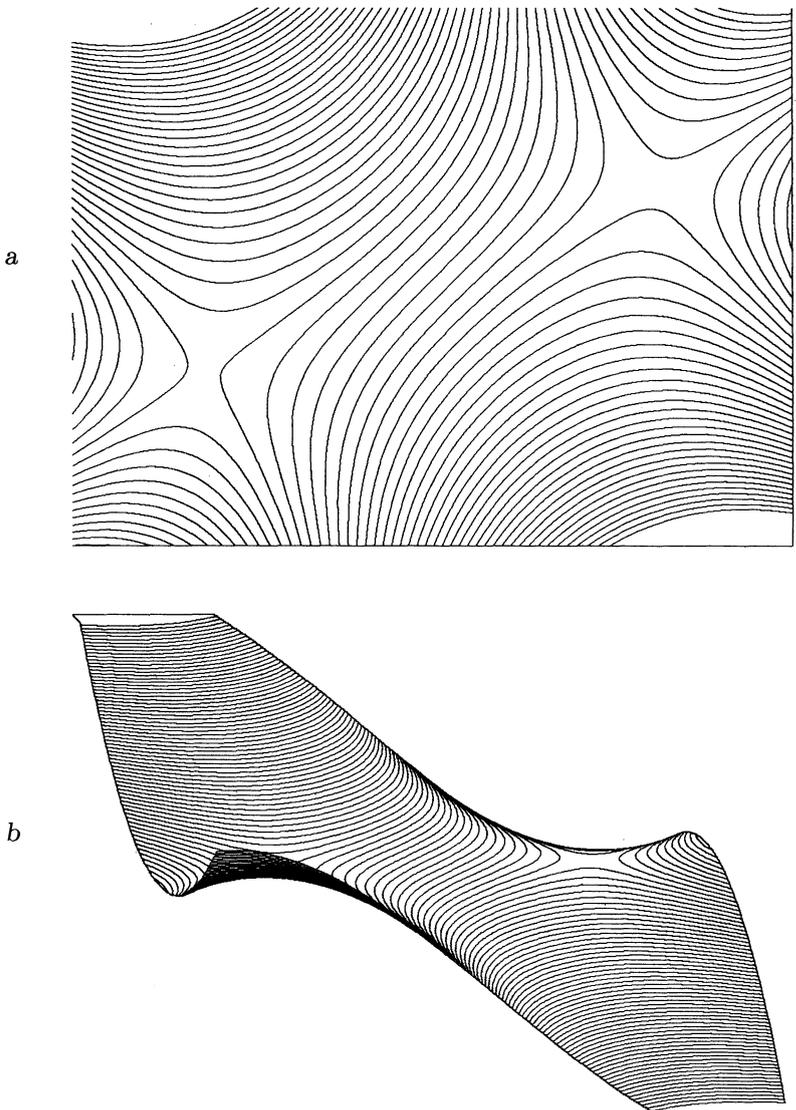


Figure 5. Courbes de niveau du relief  $R_0$ .

Ainsi, deux pointillés solutions de l'équation affine (6.1) démarrant en  $x_0 = 0$  à une distance appréciable l'un de l'autre seront infiniment proches pour  $0 \ll x_n \ll \sqrt{3\pi}$  et s'écarteront l'un de l'autre en  $\sqrt{3\pi}$ .

Ces reliefs présentent deux cols,  $c_0 = \sqrt{(1+i)\pi}$  au nord et  $c_1 = \sqrt{(1-i)\pi}$  au sud (il s'agit de la détermination principale de la racine). Les séparatrices des deux cols sont à l'altitude

$$R_0(c_0) = R_1(c_1) = \operatorname{Re}\left(-\frac{2}{3}[(1+i)\pi]^{3/2}\right) = -\frac{2}{3}\pi^{3/2}\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

donc en dessous du point origine. Ces séparatrices s'intersectent sur l'axe réel en des points solutions de l'équation

$$(6.2) \quad \frac{1}{3}x^3 - \pi x + \frac{2}{3}\pi^{3/2}\sqrt{\sqrt{2}-1} = 0.$$

Le pointillé issu de l'origine longe ainsi la courbe lente jusqu'au point  $\alpha \sim 2.57762$  qui est la plus grande racine de l'équation (6.2).

Cette valeur  $\alpha$  est supérieure à  $\sqrt{\pi} \sim 1.77$ , mais est inférieure à la valeur  $\sqrt{3\pi} \sim 3.07$  qui intervient dans l'équation homogène. Le point  $\sqrt{3\pi}$  est à la même altitude que l'origine sur le relief, donc au-dessus du col. Le point  $\sqrt{\pi}$  correspond lui à l'endroit où les lignes de niveau ont une tangente horizontale : c'est le point le plus bas du pointillé sur le relief.

Ainsi le retard à la bifurcation s'interprète comme le fait que l'orbite arrive à remonter le relief après le point  $\sqrt{\pi}$ . La butée correspond au fait que cette orbite n'arrive pas en général à remonter au-dessus du col jusqu'au point  $\sqrt{3\pi}$  et doit donc quitter la courbe de points fixes à la traversée d'une séparatrice de col.

Donnons à présent une condition nécessaire pour que l'orbite issue de l'origine soit un long canard. Puisque l'abscisse de départ est fixée, cette condition portera sur  $\varepsilon$ . On a :

$$L_0(x) = \frac{1}{3}x^3 - (1+i)\pi x, \quad L_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - (1-i)\pi x$$

donc

$$L_0(c_0) = -\frac{2}{3}[(1+i)\pi]^{3/2}, \quad L_1(c_1) = -\frac{2}{3}[(1-i)\pi]^{3/2}.$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} c_1 - \frac{1}{2i\pi} [L_0(c_0) - L_0(c_1)] &= \frac{1}{2i\pi} [L_1(c_1) - L_0(c_0)] \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\pi} \operatorname{Im}[(1+i)^{3/2}] \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\pi}\sqrt{1+\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

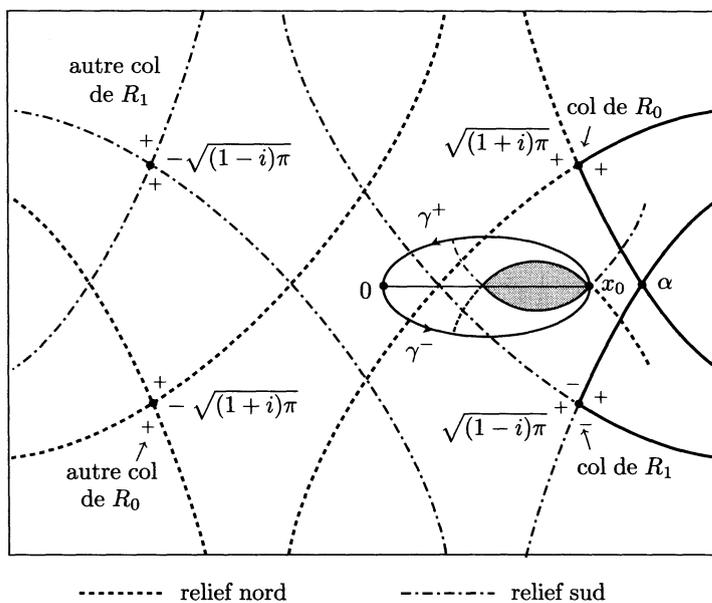


Figure 6. Les signes + aux cols symbolisent les montagnes.

Par ailleurs,  $a'(x) = 2x \exp[x^2 - (1+i)\pi]$ , donc

$$\frac{a'(c_0)}{a'(c_1)} = \sqrt{\frac{1+i}{1-i}} = \sqrt{i} = \exp\left(\frac{1}{4}i\pi\right),$$

ce qui donne

$$\text{Log}\left(\frac{b(c_1)}{b(c_0)} \sqrt{\frac{a'(c_0)}{a'(c_1)}}\right) = \frac{i\pi}{8}.$$

La formule (5.2) donne alors

$$\mu = \frac{2}{3} \sqrt{\pi} \sqrt{1 + \sqrt{2}} - \frac{1}{16} \varepsilon.$$

Compte tenu du fait que  $x_n = n\varepsilon$ , la condition nécessaire (5.5) pour que l'orbite partant de l'origine soit un long canard est donc :

$$(6.3) \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \frac{C}{\varepsilon} = \frac{1}{16} + k + \mathcal{O}, \quad \text{avec} \quad C = \frac{2}{3} \sqrt{\pi} \sqrt{1 + \sqrt{2}} \sim 1.836$$

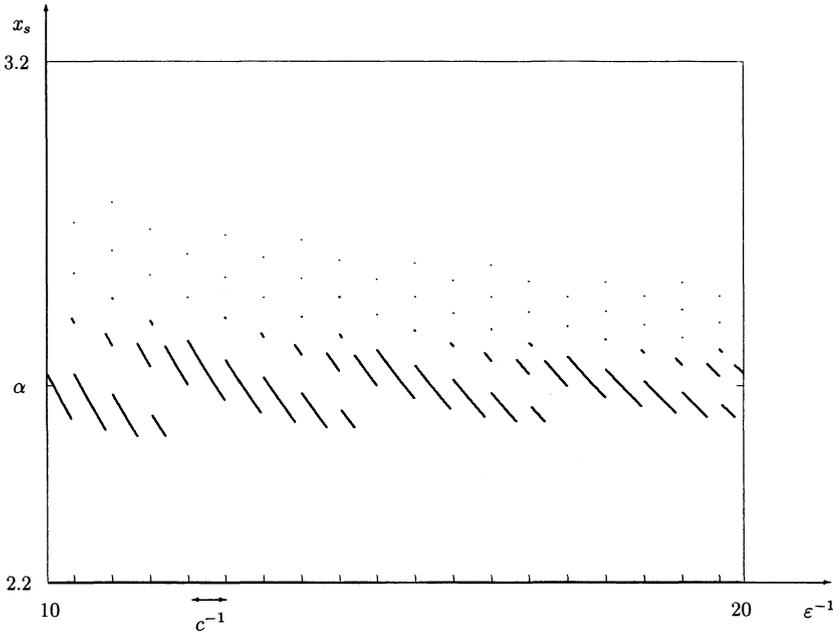


Figure 7.

La figure 7 représente en fonction de  $\varepsilon^{-1}$  la première abscisse  $x_n$  telle que  $y_n$  est supérieur à 1. Plus précisément,  $u = \varepsilon^{-1}$  est en abscisse et varie de 10 à 20 (c'est-à-dire  $0.05 \leq \varepsilon \leq 0.1$ ),  $v = \varphi(u) = \inf\{x_n; y_n \geq 1\}$  est en ordonnée ( $2.2 \leq v \leq 3.2$ ). L'unique graduation sur l'axe  $v$  correspond à  $\alpha \sim 2.57762$ . Les graduations sur l'axe  $u$  correspondent aux valeurs  $(\frac{1}{16} + k)/C$ .

Le graphe de  $\varphi$  est bien entendu inclus dans le réseau d'hyperboles  $v = n/u$  puisque  $x_n = n\varepsilon$ . On vérifie que  $\varphi(u)$  est en général de l'ordre de  $\alpha$ , sauf pour des abscisses bien précises qui coïncident approximativement avec les graduations du bas, pour lesquelles on distingue quelques points nettement au-dessus de  $\alpha$ . Les valeurs à long canard correspondent en général à une transition d'une hyperbole du réseau à une autre mais ce n'est pas systématique.

**6.2.** Soit le système

$$(6.4) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \varepsilon, \\ y_{n+1} = 1 - x_n y_n. \end{cases}$$

La courbe lente est

$$y = e(x) = \frac{1}{1+x},$$

attractive sur  $] -1, 1[$  et répulsive sur  $] -\infty, -1[$  et sur  $]1, +\infty[$ . On choisit

$$a(x) = \exp(\operatorname{Log} x - i\pi), \quad b(x) = 1,$$

et les deux fonctions relief sont :

- $R_0(x) = \operatorname{Re} \int_0^x (\operatorname{Log} \xi - i\pi) d\xi = \operatorname{Re}[x(\operatorname{Log} x - 1 - i\pi)]$  pour le nord,
- $R_1(x) = \operatorname{Re}[x(\operatorname{Log} x - 1 + i\pi)]$  pour le sud.

Sur l'axe réel, ces deux fonctions coïncident avec

$$R(x) = x(\operatorname{Log} |x| - 1).$$

L'équation de quadrature associée est

$$Z(x - \varepsilon) = Z(x) + \varepsilon(\operatorname{Log} x - i\pi)$$

dont une solution est

$$Z(x) = -\varepsilon \operatorname{Log} \Gamma(x/\varepsilon + 1) - x(\operatorname{Log} \varepsilon - i\pi)$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma d'Euler. On a  $Z(x) \simeq R_0(x)$  sur  $\mathbb{C} \setminus \operatorname{hal}(\mathbb{R}^-)$ , ce qui permet de choisir  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ .

Les deux reliefs n'ont de col qu'en  $-1$  donc il n'y a pas de butée. Par conséquent, l'orbite  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  issue d'un point limité  $(x_0, y_0)$  avec  $0 \ll x_0 \ll 1$  entre dans le halo de la courbe lente à l'abscisse  $x_e = {}^o x_0$  et longe cette courbe au moins jusqu'à l'abscisse  $\bar{x} > 1$  telle que  $R(\bar{x}) = R(x_e)$ .

Si en revanche  $x_0$  est dans  $] -1, 0]$ , le théorème 4.4 ne s'applique pas directement. En utilisant ce qui précède, on sait déjà que les abscisses d'entrée  $x_e$  et de sortie  $x_s$  vérifient  $x_e = {}^o x_0$  et  $x_s \geq e$  (en ne considérant que la partie du pointillé d'abscisse positive). Nous allons voir que l'abscisse de sortie vérifie encore  $x_s \geq \bar{x}$  où  $\bar{x}$  est tel que  $\bar{x} > 1$  et  $R(\bar{x}) = R(x_e)$ .

**6.1. PROPOSITION.** — Soient  $x_0$  dans  $] -1, 0]$  et  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $R(x_n) \ll R(x_0)$ . Alors  $y_n \simeq e(x_n)$ .

*Preuve.* — Le calcul exposé dans la section 4.3 donne

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{m=k+1}^{n-1} (-x_m) = \varepsilon^{-1} \int_{\gamma} g(x) dx$$

avec :

$$\bullet g(x) = \frac{f(x)}{\exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)] - 1},$$

•  $f$  une solution analytique de l'équation  $f(x - \varepsilon) = -xf(x)$  vérifiant  $f(x_{n-1}) = 1$ , et

•  $\gamma$  un lacet d'indice 1 par rapport aux points  $x_0, \dots, x_{n-1}$  et n'entourant aucune des singularités de  $f$  et aucun autre point  $x_k$ .

Si  $x_n$  n'est pas congru à 0 (*i.e.* pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \neq 0$ ), on peut choisir :

$$f(x) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Gamma(x_n/\varepsilon)}{\Gamma(x/\varepsilon + 1)} \exp[\varepsilon^{-1}(x_n - x)(\text{Log } \varepsilon - i\pi)].$$

Bien que la solution de l'équation de quadrature associée ait forcément des singularités sur l'axe réel, la fonction  $f$  est quant à elle entière. De plus, les propriétés asymptotiques de la fonction Gamma montrent que

$$f(x) = \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(x_n) - R_0(x)])$$

pour tout  $x$  limité. Ainsi :

•  $g(x) = \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(x_n) - R_0(x)])$  pour  $x$  de partie imaginaire positive, et

•  $g(x) = \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1}[R_1(x_n) - R_1(x)])$  pour  $x$  de partie imaginaire négative.

Étant donnée la configuration des reliefs (absence de col), le résultat s'ensuit. □

**6.2. COROLLAIRE.** — Soit  $x^* \sim 3.65$  la solution strictement positive de l'équation  $x \text{Log } x - x = 1$  et  $x_s$  l'abscisse de sortie d'un point limité  $(x_0, y_0)$ . Si  $x_0 \simeq -1$  alors  $x_s \geq x^*$ .

*Preuve.* — Soit  $p$  dans  $\mathbb{N}$  avec  $p\varepsilon$  appréciable. D'après la proposition 6.1 appliquée au pointillé  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k) = (x_{p+k}, y_{p+k})$ , on obtient  $y_n \simeq e(x_n)$  pour tout  $n$  tel que  $R(x_n) \ll R(x_p)$ . Puisque  $p$  est arbitraire, on en déduit que  $y_n \simeq e(x_n)$  pour tout  $n$  tel que  $R(x_n) \ll R(-1) = 1$ , ce qui est vérifié pour tout  $n$  tel que  $0 \leq x_n \ll x^*$ . □

Il s'ensuit qu'il existe forcément des canards « trop longs », c'est-à-dire ne respectant pas la relation entrée-sortie  $R(x_e) = R(x_s)$ . En effet, si par

exemple  $x_0 = -m\varepsilon$  avec  $m \in \mathbb{N}$ , alors  $x_m = 0$ , donc  $y_{m+1} = 1$ . Toutes les orbites partant à une abscisse de la forme  $-m\varepsilon$  passent par le point  $(\varepsilon, 1)$ . Comme une orbite partant d'un point limité à une abscisse  $-m\varepsilon$  infiniment proche de  $-1$  longe la courbe lente au moins jusqu'à l'abscisse  $x^*$ , l'orbite du point origine longe, elle aussi, la courbe lente au moins jusqu'en  $x^*$ . Ceci contredit la relation entrée-sortie qui prévoit la sortie en  $e$ .

L'étude précédente permet de décrire entièrement le comportement macroscopique des orbites sur  $]]-1, x^*[[$ . On construit une courbe invariante  $(x, \varphi(x))$  en itérant un segment  $[(\alpha, e(\alpha)), (\alpha + \varepsilon, e(\alpha))]$  par la transformée de graphe  $F(x, y) = (x + \varepsilon, 1 - xy)$ . On a  $\varphi(x) \simeq e(x)$  pour tout  $x$  dans  $]]-1, x^*[[$ . En étudiant l'écart  $z_n = y_n - \varphi(x_n)$  qui est solution de l'équation homogène, on obtient le résultat suivant (cf. section 4.2 de [F2]).

**6.3. COROLLAIRE.** — Une orbite  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  partant d'un point limité  $(x_0, y_0)$  tel que  $x_0$  est dans  $]]-1, 1[[$  entre dans le halo de la courbe lente en  $x_e = {}^o x$  et en sort en  $x_s$  tel que  $R(x_s) = R(x_e) - {}^o(\varepsilon \text{ Log } d)$  où  $d = \inf_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$ .

On déduit aussi une propriété sur le comportement asymptotique de la fonction hypergéométrique confluyente

$${}_1F_1(1, c; z) = 1 - \frac{z}{c} + \frac{z^2}{c(c+1)} + \dots + \frac{(-1)^n z^n}{(c)_n} + \dots$$

En effet, la fonction

$$\varphi(x) = 1 - {}_1F_1(1, x/\varepsilon, -1/\varepsilon) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+\varepsilon)} + \dots$$

est une solution de l'équation

$$\varphi(x + \varepsilon) = 1 - x\varphi(x).$$

On vérifie, par un argument de convergence dominée, que pour  $x$  limité tel que la demi-droite  $\{x + t; t \geq 0\}$  ne rencontre pas le cercle unité,  $\varphi(x) \simeq \frac{1}{1+x}$ . L'étude précédente permet d'en déduire que  $\varphi(x) \simeq \frac{1}{1+x}$  en tout point  $x$  limité qui n'est pas exponentiellement proche d'un point  $-n\varepsilon$  avec  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

En conséquence, on obtient le comportement asymptotique suivant pour  ${}_1F_1$ .

**6.4. COROLLAIRE.** — *Pour  $\xi$  fixé non nul et  $c$  tendant vers l'infini de telle façon que  $c\xi$  soit réel négatif, si  $d(c, \mathbb{Z}^-) \geq \exp(-o(1)|c|)$ , alors*

$${}_1F_1(1, c; c\xi) = \frac{1}{1-\xi} (1 + o(1)).$$

La condition  $d(c, \mathbb{Z}^-) \geq \exp(-o(1)|c|)$  exprime le fait que  $c$  n'est pas exponentiellement proche d'un entier négatif (où « exponentiellement » est relatif au module de  $c$ ). C'est le cas si  $c$  évite des disques centrés aux entiers négatifs et de rayon constant ou au moins de l'ordre de  $c^{-n}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .

Concernant la littérature, l'étude du comportement asymptotique de  ${}_1F_1$  lorsque variable et paramètre tendent vers l'infini est loin d'être exhaustive. Si on se restreint au cas particulier qui nous intéresse (c'est-à-dire avec le premier paramètre égal à 1) avec les notations  ${}_1F_1(1, c; z)$ , on trouve dans [AS] traité le cas où  $c$  et  $z$  sont réels positifs avec  $z > 2c - 1 > 1$ . Dans [E] et [L], on ne trouve une description que pour  $|z| < |c|$ ; le cas intéressant  $|z| > |c|$  n'est pas abordé.

J'ai présenté un résultat pour une valeur particulière d'un paramètre et lorsque la variable  $z$  est réelle négative. On peut généraliser à  $z$  complexe en considérant le système (4.1) avec  $a(x) = \lambda x$ , avec  $\lambda$  complexe de module 1 (auquel cas il faut tenir compte du col en  $\lambda$ ). Cette étude est trop longue pour être présentée ici. Loin de vouloir présenter un résultat optimal sur le comportement asymptotique de  ${}_1F_1$ , je me suis borné à montrer comment de simples considérations de dynamique discrète fournissent des résultats inédits sur le sujet.

Le paragraphe suivant présente une généralisation de l'étude faite sur l'exemple 6.2.

## 7. Les râteaux.

### 7.1. Introduction.

On s'intéresse au comportement des orbites du système (4.1) lorsque la variable  $x$  traverse une valeur superstable (c'est-à-dire un zéro de la fonction  $a$ ). Dans ce cas, le système n'est plus inversible et on observe un curieux phénomène d'entonnoir. Le terme « râteau » provient du fait que, sous certaines conditions qui seront explicitées, on peut distinguer une fonction invariante, c'est-à-dire une solution de  $y(x + \varepsilon) = a(x)y(x) + b(x)$ , et que le graphe de cette fonction a l'allure d'un râteau à foin aux dents

infiniment longues. Je démontre ici des énoncés qui étaient conjecturés dans [F2].

On se place dans la situation où  $a$  est une fonction standard méromorphe ayant un nombre fini de pôles et de zéros et où  $b$  est standard holomorphe dans un domaine complexe  $\Omega$ . Soit  $D$  le domaine simplement connexe obtenu en ôtant à  $\Omega$  une demi-droite horizontale issue de chacun des pôles et des zéros de  $a$ . On considère deux points standard de même partie imaginaire  $\alpha$  et  $\beta$  tels que le segment  $[\alpha, \beta]$  est inclus dans  $\Omega$  et ne contient aucun pôle de  $a$ . On note

$$R_0(x) = \operatorname{Re} \left( \int_{\beta}^x \operatorname{Log} a(\xi) d\xi \right)$$

où «Log» désigne une détermination fixée du logarithme, et

$$R_1(x) = R_0(x) + \operatorname{Re}(2i\pi(x - \beta)),$$

le chemin d'intégration restant dans  $D$ .

**7.2. THÉORÈME.** — *On suppose :*

$$(H_1) \exists c \in [\alpha, \beta], \forall x \in [\alpha, c[, |a(x)| < 1, \forall x \in ]c, \beta], |a(x)| > 1.$$

$$(H_2) \exists \gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \Omega \cap \operatorname{Im}(x - \alpha) \geq 0, \text{ continu, tel que } \gamma_0(0) = \alpha, \gamma_0(1) = \beta, \forall t \in [0, 1], R_0(\gamma_0(t)) \geq 0.$$

$$(H_3) \exists \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega \cap \operatorname{Im}(x - \alpha) \leq 0, \text{ continu, tel que } \gamma_1(0) = \alpha, \gamma_1(1) = \beta, \forall t \in [0, 1], R_1(\gamma_1(t)) \geq 0.$$

Soient  $x_0 \simeq \alpha$ ,  $y_0$  limité et  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  le pointillé solution du système (4.1) de condition initiale  $(x_0, y_0)$ . Alors ce pointillé entre dans le halo de la courbe lente

$$y = e(x) = \frac{b(x)}{1 - a(x)}$$

à l'abscisse  $x_e = \alpha$  et longe cette courbe au moins jusqu'à  $\beta$ .

**7.2.1. Preuve.** — Soient  $x_0 \simeq \alpha$ ,  $y_0$  limité et  $n$  tel que  $x_n \simeq \beta$ . D'après les préliminaires 4.2, il suffit de montrer que  $y_n$  n'est pas exponentiellement grand. D'après les hypothèses faites sur  $a$  et le théorème 11 de [F3], il existe une fonction entière  $f$  avec  $f(x_{n-1}) = 1$  solution de l'équation  $f(x - \varepsilon) = a(x)f(x)$  et telle que pour tout  $x$  limité dans  $\Omega$  non exponentiellement proche d'un pôle de  $a$ ,

$$f(x) = \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(x_n) - R_0(x)]).$$

D'après le calcul exposé en section 4.3, on a

$$y_n = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma} g(x) dx + y_0 \prod_{k=0}^{n-1} a(x_k)$$

où

$$g(x) = \frac{b(x)f(x)}{\exp[2i\pi\varepsilon^{-1}(x - x_n)] - 1}$$

et où  $\gamma$  est un lacet d'indice 1 par rapport aux points  $x_0, \dots, x_{n-1}$  et d'indice 0 par rapport aux autres points  $x_k$ .

En choisissant un lacet  $\gamma$  limité infiniment proche du lacet composé des deux chemins  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  et ne passant pas exponentiellement près d'un pôle de  $a$ , on a  $g(x) = \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1}\mathcal{O})$  pour tout  $x$  sur  $\gamma$  et par ailleurs

$$\prod_{k=0}^{n-1} a(x_k) = \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(\beta) - R_0(\alpha) + \mathcal{O}]) = \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1}\mathcal{O}).$$

Ainsi  $y_n$  n'est pas exponentiellement grand, ce qui achève la preuve du théorème.  $\square$

### 7.3. Application aux séries $S$ -divergentes.

7.3.1. Une situation intéressante est lorsque le pointillé traverse une valeur superstable. Par une translation sur  $x$ , on se ramène au cas où ceci se passe pour  $x = 0$ . On considère donc deux nombres réels standard  $\alpha < 0 < c$  tels que ( $\alpha < x < 0 \Rightarrow 0 < a(x) < 1$ ), ( $0 < x < c \Rightarrow -1 < a(x) < 0$ ) et ( $c < x \Rightarrow a(x) < -1$ ). Pour  $x$  dans  $[\alpha, +\infty[$ , on vérifie que la série de fonctions

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-b(x+n\varepsilon)}{\prod_{k=0}^n a(x+k\varepsilon)}$$

est formellement solution de l'équation aux différences

$$\varphi(x + \varepsilon) = a(x)\varphi(x) + b(x).$$

Si la fonction  $b$  est bornée sur  $[\alpha, +\infty[$  et si  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} |a(x)| > 1$ , alors cette série converge et un argument de convergence dominée montre que pour  $x$  appréciablement supérieur à  $c$ , on a  $\varphi(x) \simeq \frac{b(x)}{1 - a(x)}$ . Nous allons voir que, sous certaines conditions, ceci reste encore vrai lorsque  $x$  est dans l'intervalle externe  $]]\alpha, c]]$ .

THÉOREME 7.3.2. — Soient  $a$  une fonction standard méromorphe ayant un nombre fini de pôles et de zéros et  $b$  une fonction standard holomorphe dans un domaine complexe  $\Omega$ . Soient  $\alpha < 0 < c$  deux nombres réels standard tels que :

$$(H_1) \quad [\alpha, +\infty[ \subseteq \Omega,$$

$$(H_2) \quad \text{la fonction } a \text{ n'a pas de pôle sur } [\alpha, +\infty[,$$

$$(H_3) \quad \alpha < x < 0 \Rightarrow 0 < a(x) < 1,$$

$$(H_4) \quad 0 < x < c \Rightarrow -1 < a(x) < 0,$$

$$(H_5) \quad c < x \Rightarrow a(x) < -1,$$

$$(H_6) \quad \liminf_{x \rightarrow +\infty} |a(x)| > 1,$$

$$(H_7) \quad \text{la fonction } b \text{ est définie et bornée sur } [\alpha, +\infty[.$$

On suppose qu'il existe  $\beta$  dans  $]c, +\infty[$  et deux chemins continus  $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \Omega \cap \{\text{Im}(x - x_0) \geq 0\}$  et  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega \cap \{\text{Im}(x - x_0) \leq 0\}$  d'extrémités  $\gamma_{0,1}(0) = \alpha$  et  $\gamma_{0,1}(1) = \beta$  tels que pour tout  $t$  dans  $[0, 1]$ , on ait  $R_0(\gamma_0(t)) \geq 0$ ,  $R_1(\gamma_1(t)) \geq 0$ , et  $R_0(\alpha) = R_1(\alpha) = 0$ , où

$$R_0(x) = \text{Re} \int_{\beta}^x \text{Log } a(\xi) \, d\xi, \quad R_1(x) = R_0(x) + \text{Re}(2i\pi(x - \beta)),$$

et où «Log» désigne une détermination fixée du logarithme. On note

$$C = -R_0(0) = \int_{\alpha}^0 -\text{Log}|a(\xi)| \, d\xi > 0.$$

Alors, pour tout  $x$  dans  $[\alpha, +\infty[ \setminus \{-k\varepsilon; k \in \mathbb{N}\}$ , la série

$$(7.1) \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-b(x + n\varepsilon)}{\prod_{k=0}^n a(k\varepsilon)}$$

converge et pour tout  $x$  dans  $]]\alpha, +\infty[$  :

$$(\forall k \in \mathbb{N}, |x + k\varepsilon|^\varepsilon \not\approx 1) \implies \left( \varphi(x) \simeq \frac{b(x)}{1 - a(x)} \right).$$

De plus, la quantité  $(b(0) - \varphi(\varepsilon))$  est exponentiellement petite. De manière précise :

$$b(0) - \varphi(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b(n\varepsilon)}{\prod_{k=1}^n a(k\varepsilon)} = \mathcal{L} \exp[-\varepsilon^{-1}(C + \mathcal{O})].$$

**7.3.3. Démonstration.** — Faisons tout d'abord les deux observations suivantes.

Pour  $x_0 \simeq \alpha$ ,  $x_0 > \alpha$  et  $y_0$  limité, soit  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  le pointillé solution de (4.1) issu de  $(x_0, y_0)$ . D'après les hypothèses et le théorème 7.2 précédent, ce pointillé longe la courbe lente  $y = e(x) = \frac{b(x)}{1 - a(x)}$  au moins jusqu'à l'abscisse  $\beta$ .

Par ailleurs, étant donné un pointillé solution  $((x_k, y_k))_{k \in 0, \dots, n}$  avec  $x_0 < c$  et  $y_0$  limité,  $y_0 \neq \varphi(x_0)$ , l'écart  $z_k = y_k - \varphi(x_k)$  entre le pointillé et la fonction invariante  $\varphi$  est solution de l'équation homogène  $z_{k+1} = a(x_k)z_k$ . En utilisant la loupe de Benoit  $Z = \varepsilon \text{Log } z$ , on montre que si, pour tout  $k$  dans  $\{0, \dots, n\}$ ,  $x_k$  n'est pas exponentiellement petit, alors  $|z_n/z_0| = \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(x_n) - R_0(x_0) + \mathcal{O}])$  (cf. section 4.2 de [F2]).

Concernant la première assertion, d'après les hypothèses (H<sub>6</sub>) et (H<sub>7</sub>), la série (7.1) est majorée en valeur absolue par une série convergente, donc converge. Étant donné  $x$  dans  $] ]\alpha, c]$ , en utilisant ce qui précède avec  $x_0 \simeq \alpha$ ,  $x_0 \geq \alpha$  tel que  $(x - x_0)/\varepsilon$  est un entier  $n$ , on obtient d'une part  $y_n \simeq e(x_n)$  et d'autre part  $z_n \simeq 0$ , d'où  $\varphi(x) \simeq e(x)$ .

Pour prouver la deuxième assertion, on utilise le fait que le pointillé solution partant du point  $(\varepsilon, b(0))$  longe la courbe lente au moins jusqu'en  $\beta$ . En effet, un pointillé  $((\tilde{x}_k, \tilde{y}_k))_{k \in \mathbb{N}}$  tel que  $\tilde{x}_0 \simeq \alpha$  et  $-\tilde{x}_0/\varepsilon = p \in \mathbb{N}$  et  $\tilde{y}_0$  limité, longe la courbe lente au moins jusqu'en  $\beta$  et, pour ce pointillé, on a  $\tilde{x}_p = 0$  donc  $\tilde{y}_{p+1} = b(0)$ . On utilise alors la deuxième observation ci-dessus. Si  $x_0 = \varepsilon$  et  $y_0 = b(0)$ , alors il existe  $n$  tel que  $x_n \simeq \beta$  et  $z_n \simeq 0$  et, pour  $k$  dans  $\{0, \dots, n\}$ ,  $x_k$  n'est pas exponentiellement petit. On a donc

$$b(0) - \varphi(\varepsilon) = z_0 = \mathcal{L} \exp(\varepsilon^{-1}[R_0(0) + \mathcal{O}]). \quad \square$$

#### 7.4. Remarques.

1) La quantité  $(b(0) - \varphi(\varepsilon))$  est liée au résidu du pôle éventuel de la fonction  $\varphi$  en 0. En effet, si la dérivée de  $a$  ne s'annule pas en 0, ce résidu vaut

$$\text{Res}(\varphi; 0) = \lim_{x \rightarrow 0} x\varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a(x)} a(x)\varphi(x) = \frac{\varphi(\varepsilon) - b(0)}{a'(0)}.$$

Sous les conditions du théorème 7.3.2, ce résidu est exponentiellement petit, ce qui donne au graphe de  $\varphi$  l'allure d'un râteau à foin aux dents infiniment longues.

2) La formule (7.1) s'interprète ainsi. La série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b(n\varepsilon)}{\prod_{k=1}^n a(k\varepsilon)}$$

est un exemple typique de série qui semble diverger mais dont la somme est limitée. En outre, bien que cette série comporte des termes exponentiellement grands, sa somme est exponentiellement petite. De manière imagée on peut dire que plus une série alternée convergente semble diverger, mieux elle converge.

Le prototype (pour lequel le résultat est évident) est issu de l'exemple 6.2. Il s'agit de la série

$$1 - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon^2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n! \varepsilon^n} + \cdots$$

dont certains termes sont exponentiellement grands, mais dont la somme  $\exp(-\varepsilon^{-1})$  est exponentiellement petite.

## BIBLIOGRAPHIE

- [AS] M. ABRAMOVITZ and I.A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Appl. Math. Ser. 55, U.S. Govt. Printing Office, Washington D.C. (1964).
- [B] C. BAESENS, Courbes invariantes d'une application lente-rapide analytique et retard à la bifurcation, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317, Série I (1993), 1109–1114 ou bien Gevrey series and dynamic bifurcations for analytic slow-fast mappings, *Nonlinearity* 8 (1995), 179–201.
- [Ba] R.W. BARNES, The linear difference equation of the first order, *Proc. London Math. Soc.* 2<sup>e</sup> série, t. II (1904), 438–469.
- [Bt] P.M. BATCHELDER, *An introduction to linear difference equations*, Dover Publication, New York, 1967.
- [vdB] I.P. VAN DEN BERG, *Nonstandard Asymptotic Analysis*, Lecture Note in Mathematics 1249, Springer Verlag (1987).
- [C] J.-L. CALLOT, Champs lents-rapides complexes à une dimension lente, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, (4) 26–2 (1993), 149–173.
- [E] A. ERDELYI et al., *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [F1] A. FRUCHARD, Canards discrets, C. R. Acad. Sci. Paris 307, I (1988), 41–46.

- [F2] A. FRUCHARD, Canards discrets, thèse de Doctorat de l'Université de Paris 7 (1991) ou bien Canards et râteaux, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 42, 4 (1992), 825–855.
- [F3] A. FRUCHARD, The sum of a function, à paraître dans Analysis (1996).
- [K] F. KOUDJETI, Elements of External Calculus, Thèse de Doctorat de l'Université de Groningue, P.O. Box 800, NL-9700 AV Groningen, Pays-Bas, Labyrinth Publication, 1995.
- [L] Y.L. LUKE, The Special Functions and Their Approximations, Academic Press, New York, 1969.
- [N] A.I. NEISHTADT, Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, Diff. Equations, 23 (1987), 1385–1390 et 24 (1988), 171–176.
- [Ne] E. NELSON, A new approach to non standard analysis, Bull. Amer. Math. Soc., 83–6 (1977), 1165–1198.
- [Nö] M. NOERLUND, Les équations aux différences, Bull. Sci. Math. 2<sup>e</sup> série, n<sup>o</sup> 44 (1920), 174–192 et 200–220.
- [R] A. ROBINSON, Non Standard Analysis, North-Holland, 1966.
- [S] M.A. SHISHKOVA, Examination of system of differential equations with a small parameter in the highest derivatives, Soviet. Math. Dokl., 14 n<sup>o</sup> 2 (1973), 483–486.

Manuscrit reçu le 4 juillet 1994,  
accepté le 6 septembre 1995.

Augustin FRUCHARD,  
Institut de Recherche Mathématique Avancée  
Université Louis Pasteur et CNRS  
7, rue René-Descartes  
67084 Strasbourg Cedex (France).  
fruchard@math.u-strasbg.fr