ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DENIS SERRE

# Systèmes d'EDO invariants sous l'action de systèmes hyperboliques d'EDP

*Annales de l'institut Fourier*, tome 39, nº 4 (1989), p. 953-968

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_4_953_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**39**, 4 (1989), 953-968.

# SYSTÈMES D'EDO INVARIANTS SOUS L'ACTION DE SYSTÈMES HYPERBOLIQUES D'EDP

**par Denis SERRE**

## 1. Introduction.

**1.** Le meilleur moyen de décrire les résultats de cet article est de donner un exemple. Nous définirons donc un champ de vecteurs $N(w)$ sur $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, par la formule

$$(1.0) \qquad N_i(w) = \prod_{j \neq i} (w_j - w_i)^{-1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Nous fixons un parallélépipède $K = \prod_i [w_i^-, w_i^+]$, où $w_i^+ < w_{i+1}^-$, de sorte que chaque $N_i$ soit de signe constant sur $K$. On considère alors un système d'équations différentielles ordinaires couplées, sous forme implicite

$$(1.1) \qquad f_i(w_i(x), N_i(w(x))^{-1} w_i'(x)) = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

ou sous forme explicite

$$(1.2) \qquad w_i'(x) = N_i(w(x)) g_i(w_i), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

**2.** Dans le cas explicite, nous choisirons des fonctions $g_i$ satisfaisant les hypothèses

$$\text{(H1)} \qquad g_i(w_i^\pm) = 0, \qquad N_i g_i'(w_i^-) > 0, \qquad N_i g_i'(w_i^+) < 0,$$
$$N_i(w) g_i(w_i) > 0 \qquad \text{pour} \qquad w_i^- < w_i < w_i^+.$$

Le domaine $K$ est alors invariant pour le système (1.2). Il n'est pas

*Mots-clés :* Systèmes hyperboliques riches - Champs linéairement dégénérés - Solutions périodiques - Opérateurs de transmission.
*Classification A.M.S. :* 35L60 - 35B10 - 35B15 - 34C25 - 34C30.

attracteur car $\partial K$ est aussi invariant. En fait l'intérieur de $K$ est invariant et correspond à des solutions globales, c'est-à-dire définies pour tout $x$ réel. Toute solution à valeurs dans cet ouvert satisfait

$$\operatorname{Lim} w(x) = w^{\pm} \quad \text{quand} \quad x \to \pm\infty,$$

où $w^+ = (w_1^+, \ldots, w_n^+)$. En fait, le comportement asymptotique peut être décrit de manière plus précise par

$$w_i(x) - w_i^- \sim \exp c_i(x - x_i^-), \qquad x \to -\infty,$$
$$w_i^+ - w_i(x) \sim \exp d_i(x - x_i^+), \qquad x \to +\infty.$$

Dans ces formules, $c_i$ et $d_i$ sont des constantes qui ne dépendent pas de la solution considérée

$$c_i = N_i(w^-)g_i'(w_i^-), \qquad d_i = N_i(w^+)g_i'(w_i^+).$$

Par contre, les vecteurs $x^-$ et $x^+$ dépendent de la solution, et réciproquement $x^-$ (ou $x^+$) détermine cette solution. On dispose donc d'un opérateur de transmission qui à $x^-$ associe $x^+$, via une solution de (1.2) à valeurs dans l'intérieur de $K$. Le résultat, difficilement prévisible, que nous obtenons ici est le suivant :

THÉORÈME 1. — *Pour les fonctions $N_i$ données par* (1.0), *et sous les hypothèses* (H1), *l'opérateur de transmission, défini par les solutions de* (1.2) *à valeurs dans l'intérieur de $K$, est affine.*

Si le système (1.2) est remplacé par une équation différentielle scalaire autonome, ce résultat est trivial car alors $x^+ - x^-$ est constant. La seule remarque immédiate dans le cas d'un système est que si $y^- = x^- + (a, a, \ldots, a)$, alors l'image de $y^-$ se déduit de celle de $x^-$ par $y^+ = x^+ + (a, a, \ldots, a)$, car le système est autonome.

**3.** Dans le cas implicite, nous choisissons les fonctions $f_i(w_i, \zeta_i)$ de classe $C^3$ de la façon suivante. En fait seul le graphe $f_i = 0$ nous concerne, et nous demandons qu'il soit la réunion des graphes des deux fonctions $\zeta_i = g_i^+(w_i)$, $\zeta_i = g_i^-(w_i)$. On supposera

$$\text{(H2)} \quad \begin{aligned} & g_i^+(w_i^{\pm}) = g_i^-(w_i^{\pm}) = 0, \\ & g_i^+(w) > 0, \qquad g_i^-(w) < 0 \qquad \text{pour} \qquad w_i^- < w < w_i^+. \end{aligned}$$

Enfin nous supposerons que le graphe $f_i = 0$ est une courbe de classe $C^2$, dont la courbure aux points $(w_i^{\pm}, 0)$ n'est pas nulle.

Lorsque $w_j$ est fixé, $j \neq i$, la $i$-ème équation différentielle ressemble donc à l'équation bien connue $y^2 + y^2 = 1$. Pour celle-ci, les solutions de classe $C^2$ sont de deux natures : ou bien des constantes $y = \pm 1$, ou bien des solutions globalement définies qui oscillent une infinité de fois entre $\pm 1$.

De même les solutions de classe $C^2$ du système (1.1) se rangent parmi $3^n$ classes selon que chaque $w_i(x)$ est constant et égal à $w_i^{\pm}$, ou bien n'est pas constant et dans ce cas oscille une infinité de fois entre $w_i^{\pm}$. Quitte à diminuer la valeur de $n$, on peut ne retenir que les solutions de (1.1) pour lesquelles aucun $w_i(x)$ n'est constant ; appelons $X$ l'ensemble de ces solutions. Un résultat, à nouveau inattendu, que nous prouvons ci-dessous est le suivant :

Théorème 2. — *Sous les hypothèses précédentes, les solutions de* (1.1) *sont presque-périodiques. Si l'une des solutions appartenant à $X$ est périodique, alors tous les éléments de $X$ sont périodiques et de même période.*

Il est important de noter que les deux résultats énoncés dans ce théorème sont significatifs. En effet, le cas périodique comme le cas non périodique ont lieu tous les deux.

**4.** Le rôle de la formule (1.0) est essentiel en ce sens que les théorèmes 1 et 2 sont faux si on remplace le champ $N(w)$ par un champ arbitraire pour lequel chaque composante $N_i$ garde un signe constant sur $K$. En fait seuls les résultats énoncés dans ces théorèmes dépendent du bon choix de $N$ : l'opérateur de transmission (cas explicite) ou l'ensemble $X$ de solutions (cas implicite) sont des constructions standard qui ne font appel qu'à la théorie élémentaire des équations différentielles.

Il est bon maintenant de préciser quels sont les champs $N(w)$ qui conduisent aux mêmes résultats, à travers la méthode exposée dans cet article. Ce sont les solutions du système surdéterminé d'équations aux dérivées partielles, de nature hyperbolique

$$(1.4) \qquad N_jN_k\partial_j\partial_kN_i = N_j\partial_jN_k\partial_kN_i + N_k\partial_kN_j\partial_jN_i, \quad \forall i,j,k \quad \text{avec} \quad j \neq k.$$

On a noté $\partial_j = \partial/\partial w_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

**5.** Ces champs apparaissent dans la construction des systèmes hyperboliques riches dont tous les champs caractéristiques sont linéairement dégénérés. De tels systèmes sont des problèmes d'évolution en une variable d'espace, une variable de temps, dont les inconnues sont des champs $w(x,t) \in \mathbb{R}^n$ :

$$\partial_t w_i + \lambda_i(w)\partial_x w_i = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{1.5}$$

L'ensemble des équations (1.5) constitue un système hyperbolique riche lorsque l'espace des lois de conservation $\partial_t E + \partial_x F = 0$ qui en découlent est paramétré par $n$ fonctions réelles d'une variable réelle (dont la régularité est celle des lois de conservation considérées), comme dans le cas linéaire à coefficients constants. D'après B. Sévennec (communication personnelle), il suffit pour cela que cet espace soit de dimension $\geqslant n+1$.

Un tel système est construit à partir de $N(w)$ en résolvant le système linéaire à coefficients variables, surdéterminé mais dont (1.4) constitue les conditions de compatibilité pour trouver des solutions non triviales, suivant :

$$\partial_j \lambda_i = (\lambda_j - \lambda_i)\partial_j \operatorname{Log} N_i, \qquad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n. \tag{1.6}$$

Il se trouve (Serre [1]) que l'ensemble des solutions de (1.6), qui satisfait donc $\partial_i \lambda_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est un espace vectoriel de dimension $n$. Utilisant un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}^n$, nous notons $\lambda^\alpha$ les vitesses définies par (1.6) et par la condition

$$\lambda^\alpha(w^-) = \alpha.$$

On dispose alors d'un système (1.5) qu'on note $(E^\alpha)$. Parce que les champs sont linéairement dégénérés, on montre [1] que le problème de Cauchy pour une donnée $w^0$ de classe $C^3$ ($C^1$ est sans doute correct également) possède une et une seule solution $w(x,t) = (S^\alpha(t)w^0)(x)$, également de classe $C^3$. Par linéarité, on a $S^\alpha(t) = S^{t\alpha}(1)$, de sorte qu'on peut ne retenir que les opérateurs $S^\alpha =: S^\alpha(1)$. Cette famille d'opérateurs, paramétrée par $\alpha \in \mathbb{R}^n$ a deux propriétés essentielles. La première, démontrée dans [1] est une propriété de groupe commutatif : $S^\alpha \circ S^\beta = S^\beta \circ S^\alpha = S^{\alpha+\beta}$. La seconde est que $S^\alpha$ opère sur l'ensemble des solutions des systèmes différentiels ordinaires (1.1) ou (1.2), pour le champ $N(w)$ correspondant aux vitesses $\lambda^\alpha(w)$.

Dans le cas explicite comme dans le cas implicite, l'ensemble des solutions considérées est une variété différentiable de dimension $n$, difféomorphe soit à $\mathbb{R}^n$, soit au tore $T^n$. Dans le cas implicite, on peut la paramétrer par la donnée de Cauchy $(w(0),\zeta(0))$ en $x = 0$, qui est un point du graphe $f_i(w_i,\zeta_i) = 0$, $\forall i \leqslant n$.

**6.** Dans le cas explicite, l'opérateur $S^\alpha$ induit donc une opération sur les vecteurs $x^-$, $x^+$ qui caractérisent le comportement des solutions $w(x)$ de (1.2). Le vecteur $x^-$ est changé en $x^- + \alpha$ tandis que $x^+$ devient $x^+ + M\alpha$, où $M$ est une matrice. Le théorème 1 en découle alors aisément.

Dans le cas implicite, on doit d'abord remarquer que l'action de $\mathbb{R}^n$ sur le tore $X$ est localement fidèle, de sorte que les trajectoires $t \to S^{t\alpha}w^0$ sont presque-périodiques sur $X$. En utilisant le vecteur $\gamma = (1,\ldots,1)$, l'opérateur $S^{t\gamma}$ est une translation de longueur $t$, ce qui fournit la presque périodicité des solutions de (1.1). Une autre conséquence de l'action localement fidèle de $\mathbb{R}^n$ sur $X$ est la transitivité, de sorte que si l'une des solutions de (1.1) qui sont dans $X$ est périodique, disons $w^0$, alors toute autre de la même classe s'écrit sous la forme $S^\alpha w^0$ et donc est périodique de même période.

**7.** Une conséquence intéressante relative au système hyperbolique a lieu pour $n = 2$. Le seul exemple non trivial, à transformation près, est alors le système :

$$\partial_t w_1 + w_2 \partial_x w_1 = 0, \qquad \partial_t w_2 + w_1 \partial_x w_2 = 0. \tag{1.7}$$

Considérons une donnée initiale $w^0(x)$ qui soit périodique de classe $C^3$ et telle que sur une période, chaque composante $w_i^0(x)$ ait exactement deux points critiques, ceux-ci étant de plus non dégénérés. Alors les valeurs critiques sont les minima et maxima $w_i^\pm$, et on suppose comme précédemment que $w_1^+ < w_2^-$.

THÉORÈME 3. — *Si $n = 2$, et sous l'hypothèse précédente, il existe un temps $T > 0$ et un nombre réel $x_0$ tels que la solution du problème de Cauchy (qui est déjà périodique en espace) satisfasse*

$$w(x,t+T) = w(x-x_0,t).$$

En d'autres termes, $w(x,t)$ possède deux périodes $\mathbb{R}$-indépendantes dans le plan $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$.

Il serait intéressant de savoir si cette propriété dépend vraiment de la nature des points critiques de $w^0$. Les exemples explicites construits dans Serre [2] ne sont d'aucune aide ici puisqu'ils satisfont les hypothèses du théorème. On peut cependant essayer de modifier la construction pour introduire des extrema locaux qui ne soient pas globaux.

*Remarque.* – L'hypothèse $w_1^+ < w_2^-$ permet d'éviter, via le principe du maximum, l'explosion en temps fini du gradient de la solution. Ce phénomène a lieu par exemple pour l'équation de Burgers $\partial_t u + u\partial_x u = 0$, qui correspond au cas $w_1 \equiv w_2$.

**8.** Le plan de cet article est relativement clair. La section 2 traite le cas explicite, qui est le plus simple, tandis que la section 3 est consacrée au cas implicite. Dans chaque section, une description de l'ensemble des solutions considérées est faite, sans faire appel à la forme spéciale de $N(w)$ ni aux opérateurs $S^\alpha$. Nous renvoyons à [1] pour une étude des systèmes riches linéairement dégénérés et à Serre [3] pour une théorie générale des systèmes riches ; voir aussi Tsarev [4] dans un cadre plus restrictif.

**9.** Lorsqu'on a compris les liens entre (1.5) et (1.1) ou (1.2), on peut faire l'économie de l'analyse du système d'équations aux dérivées partielles. Il suffit de remarquer, par exemple dans le cas explicite, que le champ de vecteurs ci-dessous opère sur les solutions de (1.2), avec $u_i = \lambda_i N_i$ :

$$\partial_t \zeta_i = -\, u_i(z) g_i'(z_i)\zeta_i, \qquad \partial_t z_i = -\, u_i(z)\zeta_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

On est donc dans le cas, bien supérieur aux systèmes hamiltoniens complètement intégrables habituels, où un système différentiel sur $\mathbb{R}^n$ possède un groupe abélien de transformations qui est lui-même de dimension $n$.

Cette approche est reliée à un ensemble de travaux de Kodama, Gibbons, Olver et coll. [5], [6], [7].

**10.** Je tiens à remercier Étienne Ghys pour ses éclaircissements relatifs à l'action de $\mathbb{R}^n$ sur une variété de dimension $n$. Je remercie également l'arbitre des *Annales de l'IHP* pour ses remarques qui m'ont permis d'améliorer ce texte.

## 2. Le cas explicite.

**1.** On considère donc le système différentiel ordinaire

$$\frac{dz_i}{dx} = N_i(z) g_i(z_i), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{2.1}$$

où le champ $N(z)$ satisfait les égalités (1.4) et est assez régulier sur $K = \prod_i (w_i^-, w_i^+)$. On supposera en outre (changer le signe de $N_i$ n'a aucune importance) que $N_i(z) > 0$ pour $z \in K$. Enfin les fonctions régulières $g_i$ d'une variable satisfont les hypothèses

$$(2.2) \qquad g_i(w_i^\pm) = 0, \qquad g_i'(w_i^-) > 0, \qquad g_i'(w_i^+) < 0,$$
$$g_i(a) > 0 \qquad \text{pour tout } a, \qquad w_i^- < a < w_i^+.$$

Lorsque $z_i(x) = w_i^\pm$, on a $dz_i/dx = 0$ et donc $z_i \equiv w_i^\pm$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. L'intérieur $U$ de $K$ est donc invariant pour (2.1). La solution maximale du problème de Cauchy pour laquelle $z_i(0)$ appartient à $K$ reste donc bornée ainsi que sa dérivée, de sorte qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Remarquant ensuite qu'une telle solution satisfait $dz_i/dx > 0$ et $w_i^- < z_i < w_i^+$, on en déduit que $z(x)$ approche des limites $z^-$ et $z^+$ lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$.

Ces limites satisfont $w_i^- \leqslant z_i^- \leqslant z_i^+ \leqslant w_i^+$ et $N_i(z^\pm)g_i(z_i^\pm) = 0$, c'est-à-dire que $z_i^\pm = w_i^\pm$. Finalement, toute solution de (2.1) telle que $z(0) \in U$ vérifie pour tout $x$ :

$$w_i^- < z_i(x) < w_i^+,$$

et a pour limites en $\pm\infty$ les points critiques $w^-$ et $x^+$.

Nous noterons $Y$ l'ensemble de ces solutions de (2.1), qui prennent leurs valeurs dans $U$.

**2.** On peut décrire de manière plus précise le comportement asymptotique des éléments de $Y$ en étudiant les points critiques du système (2.1), qu'on condense sous la forme $dz/dx = F(z)$. On déduit des hypothèses (2.2) les égalités :

$$\partial F/\partial z(w^-) = \operatorname{diag}(c_i), \qquad \partial F/\partial z(w^+) = \operatorname{diag}(d_i),$$
où $$c_i = N_i(w^-)g_i'(w_i^-) > 0, \qquad d_i = N_i(w^+)g_i'(w_i^+) < 0.$$

Le point critique $w^-$ est donc instable tandis que $w^+$ est stable. Un élément de $Y$ satisfait donc, lorsque $x \to -\infty$ :

$$(2.3) \qquad z_i(x) - w_i^- \sim K_i \exp c_i x, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

où $K_i \geqslant 0$. Mais comme l'hyperplan d'équation $w_i = w_i^-$ est invariant, on a en fait $K_i > 0$ et on peut écrire $K_i = \exp(-c_i x_i^-)$ pour un vecteur $x^-$ convenable dans $\mathbb{R}^n$.

Réciproquement, étant donné un vecteur $x^-$ et $K_i = \exp(-c_i x_i^-)$, le comportement asymptotique (2.3) définit une unique solution locale de (2.1). Celle-ci entre dans $U$ à cause de l'invariance de l'hyperplan $w_i = w_i^-$. C'est donc un élément de $Y$. Ceci définit une bijection

$$(2.4) \qquad \begin{aligned} Y &\to \mathbb{R}^n, \\ z &\to x^-. \end{aligned}$$

La même étude lorsque $x \to +\infty$ fournit une bijection

$$\begin{aligned} Y &\to \mathbb{R}^n, \\ z &\to x^+, \end{aligned}$$

via la formule asymptotique.

$$(2.5) \qquad w_i^+ - z_i(x) \sim \exp d_i(x - x_i^+), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

La composition de cette bijection par l'inverse de la précédente fournit ce qu'on appelle un opérateur de transmission

$$x^- \to L(x^-) = x^+.$$

Le système (2.1) étant autonome, la comparaison d'un élément de $Y$ et d'un translaté fournit la propriété

$$L(x^- + (a, \ldots, a)) = L(x^-) + (a, \ldots, a), \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

**3.** Le résultat essentiel de cette section est le suivant :

THÉORÈME 1. — *L'opérateur $L$ de transmission est affine.*

*Démonstration.* — Nous montrons d'abord que les opérateurs $S^\alpha$ définis dans l'introduction et étudiés dans [1] opèrent sur $Y$. Cette étape de la démonstration est identique pour la section 3.

Pour $z \in Y$, la fonction $S^\alpha z$ est la valeur à l'instant $t = 1$ de la solution $w(x,t)$ du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} &\partial_t w_i + \lambda_i^\alpha(w) \partial_x w_i = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ &w(x,0) = z(x). \end{aligned}$$

On peut omettre $\alpha$ dans le calcul ci-dessous et introduire le vecteur $y(x,t)$ par $y_i = N_i^{-1}\partial_x w_i$. Dérivons par rapport à $x$ les équations aux dérivées partielles :

$$(\partial_t+\lambda_i\partial_x)\partial_x w_i + \partial_x(\lambda_i(w))\partial_x w_i = 0. \tag{2.6}$$

Le calcul de $\partial_x(\lambda_i(w))$ utilise les formules (1.6) :

$$\partial_x\lambda_i = \sum_j (\lambda_j-\lambda_i)\partial_x w_j\partial_j \operatorname{Log} N_i .$$

On réutilise alors la $j$-ième équation de transport pour remplacer $\lambda_j\partial_x w_j$ par $-\partial_t w_j$ :

$$\partial_x\lambda_i = -\sum_j (\partial_t+\lambda_i\partial_x)w_j\partial_j \operatorname{Log} N_i = -(\partial_t+\lambda_i\partial_x)\operatorname{Log} N_i .$$

Finalement, (2.6) s'écrit

$$(\partial_t+\lambda_i\partial_x)y_i = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{2.7}$$

La quantité $y_i - g_i(w_i)$ satisfait donc l'équation de transport le long de la $i$-ième caractéristique

$$(\partial_t+\lambda_i\partial_x)(y_i-g_i(w_i)) = 0 .$$

Par ailleurs, $y_i - g_i(w_i)$ est identiquement nul pour $t = 0$. Comme $\lambda_i(w)$ est borné, régulier, on en conclut que $y_i - g_i(w_i)$ est nul pour tout $t$ et tout $x$. Pour $t = 1$, cela signifie que $S^\alpha z$ est solution du système (2.1). On remarque enfin que les valeurs de $w_i$ sont simplement transportées le long de la $i$-ième caractéristique, de sorte que $w_i^- < w_i(x,t) < w_i^+$ partout. Ainsi $S^\alpha z \in Y$.

**4.** On étudie maintenant comment $S^\alpha$ transforme $x^-(z)$. Pour cela, on remarque que

$$\lambda_i^\alpha(w(x,t)) - \lambda_i^\alpha(w^-) = O(\exp c_i x),$$

lorsque $x \to -\infty$, uniformément par rapport à $t \in [0,1]$. Si on désigne par $(X_i(x),0)$ le pied de la $i$-ième caractéristique qui passe par le point $(x,1)$ du plan $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$, on a donc

$$X_i(x) = x - \lambda_i^\alpha(w^-) + O(\exp c_i x).$$

Cependant, $w_i$ étant constant sur cette caractéristique, on a

$$(S^\alpha z)_i(x) - w_i^- = z_i(X_i(x)) - w_i^- \sim \exp c_i(X_i(x) - x_i^-) \\ \sim \exp c_i(x - x_i^- - \lambda_i^\alpha(w^-)).$$

La formule qui décrit l'action de $S^\alpha$ sur $x^-$ est donc :

$$x_i^-(S^\alpha z) = x_i^- + \lambda_i^\alpha(w^-), \tag{2.8}$$

et de même on a

$$x_i^+(S^\alpha z) = x_i^+ + \lambda_i^\alpha(w^+). \tag{2.9}$$

On a défini $\alpha$ dans l'introduction par l'égalité $\alpha = \lambda^\alpha(w^-)$, de sorte que l'application $\alpha \to x^-(S^\alpha z)$ est linéaire bijective, donc $\mathbb{R}^n$ opère transitivement sur $Y$.

Fixons maintenant $z^0 \in Y$. Pour tout $z \in Y$, la transitivité fournit un (et un seul) vecteur $\alpha$ tel que $z$ soit égal à $S^\alpha z^0$. Alors

$$x_i^+(z) = x_i^+(S^\alpha z^0) = x_i^+(z^0) + \lambda_i^\alpha(w^+),$$
$$\alpha_i = x_i^-(z) - x_i^-(z^0).$$

Comme par ailleurs, l'application $\alpha \to \lambda^\alpha(w^+)$ est linéaire, on en déduit que l'opérateur de transmission est affine. C.Q.F.D.

## 3. Le cas implicite.

Le pavé $K$ et le champ $N(w)$ défini sur $K$ sont identiques à ceux de la section 2.

**1.** On considère maintenant un système d'équations différentielles ordinaires implicites

$$f^i(z_i, \zeta_i) = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{3.1}$$

où $\zeta_i = N_i(z)^{-1}\, dz_i/dx$. On notera parfois $\Gamma_i$ le graphe de $f^i$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\Gamma$ le produit des $\Gamma_i$. On suppose que $f^i$ est de classe $C^3$, et que 0 n'est pas valeur critique. Le graphe $\Gamma_i$ est donc une courbe, à laquelle on impose d'avoir exactement deux tangentes verticales, ces droites verticales étant tangentes aux points $P_i^\pm = (w_i^\pm, 0)$. Cette courbe est donc connexe et on a

$$f_z^i(P_i^\pm) \neq 0, \qquad f_\zeta^i(P_i^\pm) = 0. \tag{3.2}$$

Notre dernière hypothèse sera que $\Gamma_i$ ne contienne pas d'autre point de la forme $(a,0)$ que $P_i^{\pm}$, et que

$$f^i_{\zeta\zeta}(P_i^{\pm}) \neq 0. \tag{3.3}$$

La courbure de $\Gamma_i$ en $P_i^{\pm}$ est donc non nulle, et un argument de type valeurs intermédiaires sur $f^i_\zeta$ donne aisément

$$\pm\, f^i_z f^i_{\zeta\zeta} > 0 \qquad \text{en } P_i^{\pm}. \tag{3.4}$$

**2.** Le système (3.1) possède $2^n$ solutions constantes pour lesquelles $z_i(x)$ vaut $w_i^-$ ou $w_i^+$. Il possède aussi des solutions non constantes, définies localement par la résolution d'un problème de Cauchy avec pour donnée initiale

$$(z_i, \zeta_i)(x_0) = M_i \in \Gamma_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{3.5}$$

Si $\mathrm{M}_i \neq P_i^+$ pour tout $i$, on peut inverser localement le système sous la forme

$$\frac{dz}{dx} = F(z),$$

de sorte que le problème de Cauchy possède une solution locale unique.

Si par contre $\mathrm{M}_i = P_i^{\pm}$ pour un indice au moins, la situation est diffférente puisque nous allons montrer l'existence d'une solution pour laquelle $z_j(x)$ n'est constant pour aucune valeur de $j$, tandis qu'il en existe trivialement une, telle que $z_i \equiv w_i^{\pm}$.

Pour trouver la solution non triviale, on dérive l'équation (3.1) pour obtenir

$$(N_j f^j_z - N_j^{-1}(dN_j . z') f^i_\zeta) z'_j + f^i_\zeta z''_j = 0.$$

Lorsque $z'_j \neq 0$, on peut diviser $f^i_\zeta$ pour obtenir une équation explicite du second ordre

$$z''_j = g^j(z, z'). \tag{3.6}$$

Grâce à l'hypothèse (3.3), la fonction $g^j$ se prolonge par continuité pour $z'_j = 0$ en

$$g^j(z, y_1, \ldots, y_{j-1}, 0, y_{j+1}, \ldots, y_n) = -N_j(z)^2 f^j_z (f^j_{\zeta\zeta})^{-1} > 0. \tag{3.7}$$

Enfin, $f$ étant de classe $C^3$, $g$ sera de classe $C^1$. En couplant les équations $z'_j = F_j(z)$ pour les indices $j$ tels que $M_j \neq P_i^{\pm}$ et les équations (3.6) pour les autres indices, on constate que le problème de Cauchy (3.1) + (3.5) possède une et une seule solution locale de classe $C^2$ pour laquelle aucun $z_j(x)$ ne soit constant. En remarquant que les solutions sont bornées ainsi que leurs dérivées ($\Gamma_i$ est borné), on obtient par recollement l'existence et l'unicité d'une solution globale pour le problème de Cauchy, telle qu'aucun des $z_j(x)$ ne soit constant.

On note $X$ l'ensemble des solutions globales de classe $C^2$ ainsi construites. Fixant le point de base $x_0$, l'application $M \to z$ définit une bijection de $\Gamma$ sur $X$, de sorte que $X$ peut être vu comme un tore $T^n$ inclus dans $\mathbb{R}^{2n}$.

**3.** *Remarques.* — i) Le système (3.1) possède bien d'autres solutions. Tout d'abord on peut fixer $z_j(x)$ à l'une des deux valeurs $w_j^{\pm}$ pour un certain ensemble d'indices $J$. Cela permet de réduire le système à $n - |J|$ équations couplées pour lesquelles la construction d'un ensemble analogue à $X$ est identique à ce qui précède. On en conclut que l'ensemble des solutions de classe $C^2$ de (3.1) possède $3^n$ composantes connexes. Pour comprendre cela lorsque $n = 1$, il suffit de penser à l'équation $y'^2 + y^2 - 1 = 0$ pour laquelle les composantes connexes sont deux singletons ($y=1$ et $y=-1$) et l'ensemble des solutions sinusoïdales, qui joue le rôle de $X$.

ii) A côté de ces solutions régulières, on trouve aussi des solutions qui ne sont $C^2$ que par morceaux, en recollant une solution pour laquelle $z_j(x)$ n'est pas constante, et une solution $y$ pour laquelle $y_j(x)$ est constante. Sur l'ensemble $y'^2 + y^2 - 1 = 0$, voici une solution qui n'est pas de classe $C^2$ :

$$y(x) = \cos x \quad \text{si} \quad x \leqslant 0, \qquad = 1 \quad \text{si} \quad x \geqslant 0.$$

iii) On peut montrer aisément que pour tout $z \in X$, la composante $z_j$ prend alternativement les valeurs $w_j^{\pm}$ une infinité de fois et que la distance entre deux extrema successifs de $z_j$ est comprise entre deux nombres $0 < d < D < +\infty$ qui ne dépendent que du système et pas de la solution choisie.

**4.** La bijection de $\Gamma$ dans $X$ définie en 2 induit sur $X$ une structure de variété différentiable de dimension $n$, qui ne dépend pas du point de base $x_0$ choisi dans la construction, car les solutions de (3.1) qui appartiennent à $X$ dépendent de manière régulière de la condition initiale. La topologie de la convergence uniforme sur tout compact et celle de la convergence simple induisent sur $X$ la même topologie, pour laquelle $X$ est un tore.

Enfin si $\alpha \in \mathbb{R}^n$, on voit grâce à (2.7) (avec les notations de la section 2) que $(\partial_t + \lambda_i \partial_x)(f(w_i, y_i)) = 0$, de sorte que pour une solution $z$ de (3.1), $S^\alpha(z)$ est aussi solution de (3.1). L'opérateur $S^\alpha$ opère donc sur l'ensemble des solutions de (3.1) et en particulier sur $X$ car si $w_i(x,1)$ est constant, alors $w_i(x,t)$ est constant également, et d'autre part une condition initiale de classe $C^3$ conduit à une solution de classe $C^3$ du système hyperbolique.

On dispose donc d'une opération (régulière) de $\mathbb{R}^n$ sur le tore $X$ de dimension $n$. Nous allons montrer que cette opération est *localement fidèle* c'est-à-dire que si $z \in X$, alors l'application $\alpha \to S^\alpha z$ est une immersion. Par translation, il suffit de vérifier que c'est une immersion en $\alpha = 0$.

On travaille donc dans l'espace tangent à $X$ en $z$. Pour $\alpha$ petit,

$$(S^\alpha z)_i = z_i - \lambda_i^\alpha(z) z_i' + O(\alpha^2),$$

où le reste est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Il s'agit donc de montrer que l'application linéaire

$$\alpha \to (\lambda_i^\alpha(z) z_i'), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

est injective. Nous considérons donc un $\alpha \in \mathbb{R}^n$ pour lequel

$$\lambda_i^\alpha(z) z_i' = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{3.8}$$

Comme les zéros des $z_i'$ sont isolés, on peut se placer en un point $x_0$ où tous les $z_i'(x_0)$ sont non nuls. En notant $w = z(x_0)$, on a donc

$$\lambda^\alpha(w) = 0. \tag{3.9}$$

Or

$$\lambda^\alpha(w) = \sum_k \alpha_k \gamma^k(w), \qquad \text{où} \qquad \gamma_i^k(w^-) = \delta_i^k.$$

L'équation (3.9) est donc un système linéaire de matrice $M(w)$, qui a pour coefficients les $\gamma_i^k(w)$. On a $M(w^-) = \mathrm{Id}_n$ et l'égalité vectorielle

$$\partial_j \gamma_i = (\gamma_j - \gamma_i) \partial_j \operatorname{Log} N_i, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{3.10}$$

Nous examinons maintenant les dérivées premières du déterminant de $M$ :

$$\partial_j \det M = \sum_l \det(\gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}, \partial_j\gamma_l, \gamma_{l+1}, \ldots, \gamma_n)$$
$$= -\det M . \sum_l \partial_j(\mathrm{Log}\, N_l) + \partial_j(\mathrm{Log}\, N_j) \det M .$$

Ainsi $\partial_j(\det M) = m_j \det M$, où $m_j$ est une fonction bornée, de sorte que $\det M$ ne s'annule en un point que s'il s'annule partout sur $K$. Comme $\det M(w^-) = 1$, $\det M$ ne s'annule pas. On a donc $\alpha = 0$ et l'action de $\mathbb{R}^n$ sur $X$ est localement fidèle.

**5.** On dispose donc d'une action différentiable du groupe $\mathbb{R}^n$ sur la variété compacte $X$ de dimension $n$, et cette action est localement fidèle. Classiquement, on en déduit que $X$ est difféomorphe à un tore (ce qu'on savait déjà), que l'action est transitive, que les trajectoires sont presque-périodiques et que les trajectoires périodiques forment une partie dense de l'ensemble des trajectoires. Plus simplement, cette action est conjuguée à l'action canonique de $\mathbb{R}^n$ sur $T = \mathbb{R}^n/Z^n$ (V. I. Arnold [8]).

Choisissons tout d'abord $\alpha = t\gamma$, où $\gamma = (1, \ldots, 1)$ ; de sorte que $\lambda_i^\alpha = t, \forall i$. D'après ce qui précède, l'application $t \mapsto S^\alpha w = w(. - t)$ est presque périodique pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, ce qui n'est rien d'autre que la presque-périodicité de $z(.) = w(.,0)$ par rapport à $x$. Ceci prouve la première assertion du théorème 2.

La seconde assertion découle de la transitivité. Si $z^0 \in X$ est périodique, alors tout $z \in X$ est la forme $S^\alpha z^0$. C'est donc la valeur à $t = 1$ de la solution $w(x,t)$ du problème de Cauchy

$$\partial_t w_i + \lambda_i^\alpha(w)\partial_x w_i = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$
$$w(x,0) = z^0(x).$$

Mais la solution de ce problème est périodique par rapport à $x$, de même période que $z^0$, simplement parce que le problème de Cauchy possède une seule solution et que le système est invariant par translation. Donc $z$ est périodique de même période que $z^0$, ce qui achève la preuve du théorème 2. Q.E.D.

**6.** *Solutions doublement périodiques* $(n=2)$. Lorsque $n = 2$, le problème de Cauchy pour (1.7) possède une propriété remarquable lorsque la condition initiale $z^0$ est périodique : dans nombre de cas, la solution $w(x,t)$ possède alors une deuxième période indépendante de la première dans le plan $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$ (théorème 3). Cette propriété a lieu par exemple si on choisit une condition initiale périodique dont chaque composante $z_i(x)$ possède exactement deux points critiques par période, ces points critiques n'étant pas dégénérés, car alors on définit $\Gamma_i$ comme l'image de l'application $x \mapsto (z_i, N_i^{-1} z_i')$, où $N_i(w) = (w_2 - w_1)^{-1}$, et $f_i$ en conséquence.

La preuve consiste à remarquer que $t \mapsto w(.,t)$ décrit une trajectoire sur $X$ et que cette trajectoire, issue de $z^0$, recoupe nécessairement la trajectoire $t \mapsto S^{t\gamma}(z^0) = z^0(.-t)$, car ces trajectoires sont des groupes à un paramètre fermés sur un tore de dimension 2. Il existe donc un temps $T > 0$ et un nombre réel $y$ tel que $w(x,T) = z^0(x-y) = w(x-y,0)$. Le système étant invariant par translation en temps, cela prouve le théorème 3. Q.E.D.

7. *Approximation de X par des fonctions périodiques.* Lorsque $X$ est un ensemble de fonctions qui sont seulement presque-périodiques, on peut approcher celles-ci par les éléments d'une suite $X_m$ d'ensembles de solutions périodiques de systèmes analogues à (3.1). Pour cela, on choisit $z^0 \in X$ et on remarque qu'il existe des orbites périodiques $S^{t\alpha} z^0$, avec $\alpha = \alpha_m$, $\|\alpha_m\| = 1$, et $\alpha_m \mapsto -\gamma$ lorsque $m \mapsto +\infty$. Considérons alors la fonction $z_m(x) = (S^{x\alpha} z^0)(0) = w^\alpha(0,x)$, où $w^\alpha$ est solution d'un système (1.5) et $\alpha = \alpha_m$.

Tout d'abord,

$$\frac{dz_i^m}{dx} = (\partial_t w_i^\alpha)(0,x) = -\lambda_i^\alpha(z^m)\partial_x w_i^\alpha(0,x),$$

et d'autre part nous savons que pour tout $x$ et $t$ :

$$f^i(w_i^\alpha, N_i^{-1}(w_i^\alpha)\partial_x w_i^\alpha) = 0.$$

On en déduit l'équation analogue à (3.1) :

$$f^i\left(z_i^m, (U_i^m(z^m))^{-1}\frac{dz_i^m}{dx}\right) = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

où

$$U_i^m = -\lambda_i^\alpha N_i.$$

Ce système différentiel a réellement les mêmes propriétés que (3.1) car le champ $U^m$ est encore une solution de (1.4). Enfin $U_i^m$ est strictement positif sur $K$ pour $m$ assez grand, car $\lambda_i^\alpha$ tend uniformément vers $-1$ à cause de $\alpha_m \mapsto -\gamma$. On peut donc appliquer le théorème 2 à ce système et en conclure que toutes ces solutions sont périodiques de même période $x_m$.

On remarque enfin que pout tout $z \in X$, la suite $S^\alpha z$, avec $\alpha = \alpha_m$, tend vers $z$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$, lorsque $m$ tend vers l'infini.

Une conséquence probable du raisonnement qui précède me paraît être la conjecture suivante : dans le cas presque-périodique, le spectre des périodes de $z \in X$ ne dépend que de $X$ mais pas de la solution $z$ choisie dans $X$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Serre, Rich hyperbolic systems and the classification of hyperbolic systems of conservation laws, Preprint IMA, Minneapolis (1989), to appear in an issue of the Springer series « the IMA volumes in Mathematics and its Applications ».

[2] D. Serre, La compacité par compensation pour les systèmes hyperboliques non linéaires de deux équations à une dimension d'espace, J. Maths Pures et Appl., 65 (1986), 423-468.

[3] D. Serre, Systèmes hyperboliques riches de lois de conservation, à paraître dans : Collège de France, Seminar, nonlinear PDEs and their applications, H. Brézis & J.-L. Lions eds. Vol. X, Longman.

[4] S. P. Tsarev, On Poisson brackets and one-dimensional hamiltonian systems of hydrodynamic type, Soviet Math. Dokl., 31 (1985), 488-491.

[5] Y. Kodama and J. Gibbons, A method for solving the dispersionless KP hierarchy and its exact solutions II, IMA preprint n° 477 (1988).

[6] Y. Kodama, Exact solutions of hydrodynamic type equations having infinitely many conserved densities, IMA preprint n° 478 (1988).

[7] M. Arik, F. Neyzi, Y. Nutku, P. J. Olver, J. M. Verosky, Multi-Hamiltonian structure of the Born-Infeld equation, IMA preprint n° 497 (1989).

[8] V. I. Arnold, Méthodes mathématiques de la mécanique classique, MIR, Moscou.

Manuscrit reçu le 22 juin 1989.

Denis Serre,
École Normale Supérieure de Lyon
Laboratoire de Mathématiques
46, allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07.