

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ERIC TOUBIANA

## Un théorème d'unicité de l'hélicoïde

*Annales de l'institut Fourier*, tome 38, n° 4 (1988), p. 121-132

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1988\\_\\_38\\_4\\_121\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_4_121_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# UN THÉORÈME D'UNICITÉ DE L'HÉLICOÏDE

par **Éric TOUBIANA**

---

## 1. Introduction.

Dans [2] R. Langevin, G. Levitt et H. Rosenberg montrent des résultats concernant les surfaces minimales bordées par des droites, demi-droites ou segments. Ici nous allons montrer un résultat analogue d'unicité concernant l'hélicoïde.

**THÉORÈME 1.** — *Soit  $M$  une surface minimale complète de  $\mathbf{R}^3$  non plane périodique de vecteur  $v$  (i.e.  $M+v=M$ ) telle que sa projection sur  $\mathbf{R}^3/v\mathbf{Z}$  soit :*

- de courbure totale finie,
- modelée sur  $\mathbf{S}^2 - \{z_1, z_2\}$  où  $z_1, z_2$  sont dans  $\mathbf{S}^2$ .

*Si de plus  $M$  est plongée dans  $\mathbf{R}^3$  alors  $M$  est précisément l'hélicoïde.*

Remarquons qu'à la fin du théorème nous supposons  $M$  plongée dans  $\mathbf{R}^3$ , l'hypothèse  $\Pi(M)$  plongée dans  $\mathbf{R}^3/v\mathbf{Z}$  étant en effet équivalente (où  $\Pi$  est la projection de  $\mathbf{R}^3$  sur  $\mathbf{R}^3/v\mathbf{Z}$ ) car  $\Pi$  est un homéomorphisme local.

Ce théorème a, comme l'a remarqué H. Rosenberg, la conséquence géométrique suivante démontrée indépendamment dans [2]. Soient  $D_1, D_2$  deux droites distinctes parallèles à l'axe  $x_3$  dans le plan  $x_1 = 0$ . Soit  $\Gamma$  la portion ouverte du plan  $x_3 = 0$  orthogonale à  $D_1, D_2$  délimitée par  $D_1$  et  $D_2$ , c'est-à-dire comprise strictement entre les deux plans parallèles à  $x_2 = 0$  comprenant respectivement  $D_1$  et  $D_2$ . Soit  $M$  une surface minimale bordée par ces deux droites qui est un graphe sur  $\Gamma$ , alors  $M$  est une portion d'hélicoïde. En effet, en prenant la symétrie orthogonale de  $M$  par rapport à  $D_2$ , la nouvelle surface obtenue,  $M$

*Mots-clés :* Surfaces minimales périodiques. Représentation de Weierstrass - Hélicoïde.

plus son symétrique, est encore une surface minimale (le principe de réflexion, voir [3], p. 82). Soit  $N$  cette surface,  $N$  est le domaine fondamental d'une surface minimale périodique de  $\mathbf{R}^3$ , de période  $2a$  où  $a$  est le vecteur parallèle à l'axe  $x_2$ , translatant  $D_1$  sur  $D_2$ .  $N/2a\mathbf{Z}$  est donc une c.m.s. de type anneau plongée dans  $\mathbf{R}^2/2a\mathbf{Z}$ . Si nous montrons que  $N/2a\mathbf{Z}$  est de courbure totale finie, le théorème entraîne alors que  $N$ , et donc  $M$ , est une portion d'hélicoïde.

Maintenant un théorème d'Osserman [5] qui est valide dans  $\mathbf{R}^3/G$  où  $G$  est un groupe de translation de  $\mathbf{R}^3$ , dit que l'application de Gauss d'une surface minimale complète hyperbolique ou infiniment connexe (c'est-à-dire homéomorphe à une surface compacte moins un nombre infini de points) prend toutes les valeurs de  $\mathbf{S}^2$  une infinité de fois à l'exception peut-être d'un ensemble de capacité zéro. Or sur  $N$ , domaine fondamental de  $N/2a\mathbf{Z}$ , les vecteurs de  $\mathbf{S}^2$  appartenant au plan  $x_3 = 0$  ne sont pris que sur les droites  $D_1$  et  $D_2$  à cause de l'hypothèse de graphe. De plus cette même hypothèse entraîne que l'application de Gauss est injective sur ces droites. Donc les points du grand cercle de  $\mathbf{S}^2$  appartenant au plan  $x_3 = 0$  sont pris un nombre fini de fois. De plus ce grand cercle, comme tous les autres, a une capacité non nulle. Ceci montre que  $N/2a\mathbf{Z}$  est parabolique et donc conformément équivalente à la sphère  $\mathbf{S}^2$  moins deux points. D'après ce qui précède et par le théorème de Picard l'application de Gauss de  $N/2a\mathbf{Z}$  n'a pas de singularités essentielles sur ces deux points, elle se prolonge alors en une application méromorphe sur la sphère  $\mathbf{S}^2$ ;  $N/2a\mathbf{Z}$  est donc de courbure totale finie.

Dans [6] Riemann montre des exemples de surfaces minimales bordées par des segments finis ou infinis. En particulier il décrit une surface minimale  $M$  de  $\mathbf{R}^3$ , bordée par deux droites distinctes,  $D_1$  et  $D_2$ , où  $D_2$  est la translatée de  $D_1$  d'un certain vecteur  $a$ , les deux droites appartenant chacune à un plan  $P_i$   $i = 1, 2$  parallèle à  $x_3 = 0$ . De plus  $M$  est transverse à chaque plan parallèle à  $x_3 = 0$  compris entre  $P_1$  et  $P_2$ , et l'intersection de  $M$  avec un tel plan est un cercle excepté aux cas où le plan est  $P_1$  ou  $P_2$ , en ce cas l'intersection est la droite  $D_i$ . En prenant la symétrie orthogonale de  $M$  par rapport à  $D_1$ , nous obtenons une surface minimale  $N$  qui est le domaine fondamental d'une c.m.s. de  $\mathbf{R}^3$  périodique de période  $2a$ ;  $N/2a\mathbf{Z}$  est alors une c.m.s. de  $\mathbf{R}^3/2a\mathbf{Z}$  plongée de courbure totale finie et homéomorphe à un tore moins deux points. Ceci montre que l'hypothèse topologique du théorème ne peut être enlevée. Dans [7] on pourra trouver plus de détails sur

cette surface en particulier sa représentation de Weierstrass en terme de fonctions elliptiques.

Je voudrais remercier H. Rosenberg dont l'aide et les suggestions m'ont été grandement utiles.

## 2. Démonstration du théorème.

LEMME 1. — Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann,  $\omega$  une 1-forme holomorphe sur  $\Sigma$  et  $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  une fonction méromorphe. Appelons  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  les formes :

$$\Phi_1 = \omega(1-g^2)/2, \quad \Phi_2 = i\omega(1+g^2)/2, \quad \Phi_3 = g\omega.$$

Alors  $X = (x_1, x_2, x_3): \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ , où  $x_i = \operatorname{Re} \int \Phi_i$ , définit une surface minimale régulière pourvu que les pôles de  $g$  coïncident avec les zéros de  $\omega$  et que l'ordre des zéros de  $\omega$  soit le double de l'ordre des pôles de  $g$ .

De plus si  $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \Phi_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2$  ou  $3$  et où  $\gamma$  est une courbe fermée de  $\Sigma$  alors  $X$  définit une surface minimale périodique de  $\mathbb{R}^3$  dont les périodes sont :  $\operatorname{Re} \left( \int_{\gamma} \Phi_1, \int_{\gamma} \Phi_2, \int_{\gamma} \Phi_3 \right)$ , où  $\gamma \in \Pi_1(\Sigma)$ .

Remarquons que  $g$  représente l'application de Gauss de  $\Sigma$ . On peut trouver une démonstration de ceci dans Osserman [4].

Examinons le cas où  $X(\Sigma)$  est invariant par un groupe de translations  $G$ , c'est-à-dire  $X(\Sigma)$  est une surface périodique. Alors pour chaque  $v \in G$  il existe un difféomorphisme conforme de  $\Sigma$ ,  $T_v$ , tel que :

$$\forall z \in \Sigma, \quad X(T_v(z)) = X(z) + v.$$

En appelant  $\tilde{G}$  le groupe de transformations de  $\Sigma$  ainsi engendré nous déduisons donc que, par construction, la représentation de Weierstrass de  $X(\Sigma)$  est invariante par  $\tilde{G}$ , c'est-à-dire :

$$\forall z \in \Sigma, \forall f \in \tilde{G}, \quad g(f(z)) = g(z) \quad f^*\omega = \omega.$$

Ainsi  $(g, \omega)$  passe à l'espace quotient  $\Sigma/\tilde{G}$ . Autrement dit il existe une application méromorphe  $g_1$  et une forme holomorphe  $\omega_1$  sur  $\Sigma/\tilde{G}$  telles que, en appelant  $\tilde{\Pi}$  la projection sur  $\Sigma/\tilde{G}$ , nous ayons :

$$\forall z \in \Sigma, \quad g(z) = g_1(\tilde{\Pi}(z)) \quad \text{et} \quad \omega = \tilde{\Pi}^*\omega_1.$$

Ainsi nous pouvons donc considérer  $(g_1, \omega_1)$  comme la représentation de Weierstrass du quotient  $\Sigma/\tilde{G}$ .

Revenons au théorème. Appelons  $\Pi$  la projection :  $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3/v\mathbf{Z}$ ,  $(g, \omega)$  la représentation de Weierstrass de  $\Pi(M)$ ,  $X$  l'immersion dans  $\mathbf{R}^3/v\mathbf{Z}$ , induite par  $(g, \omega)$  et  $\tilde{X}$  la multifonction dans  $\mathbf{R}^3$  induite par  $(g, \omega)$ . Nous avons donc  $\Pi \circ \tilde{X} = X$  de  $\mathbf{S}^2 - \{z_2, z_2\}$  dans  $\mathbf{R}^3/v\mathbf{Z}$ .

Soit  $z_i$  un bout de  $\Pi(M)$ . Paramétrons un voisinage de  $z_i$  par un disque  $D$  autour de 0, 0 représentant  $z_i$ . A l'aide d'une rotation on peut supposer  $g(0) = 0$ . La démonstration du théorème va nécessiter le lemme suivant :

LEMME 2. — Soit  $p$  l'ordre du zéro de  $g$  en 0 et  $q$  l'ordre du pôle de  $\omega$  en 0 ( $q \geq 1$  par complétude). Alors si  $q \geq p + 2$ ,  $\tilde{X}(D) = \Pi^{-1}(X(D))$  n'est pas plongé dans  $\mathbf{R}^3$ , (et donc  $M$  n'est pas plongé dans  $\mathbf{R}^3$ ).

2.1. Remarque. — Soit  $z \in D$ ,  $z = (r, \theta)$  avec  $r = \|z\|$  et  $\theta = \arg(z)$ . Dans tout ce qui suit,  $\tilde{X}$  est considéré comme une multifonction dans  $\mathbf{R}^3$  au sens suivant :

$$\tilde{X}(r, \theta + 2k\pi) = \tilde{X}(r, \theta) + kv, \quad k \in \mathbf{Z}$$

où  $v$  est la période de  $M$ .

2.2. — Démonstration du Lemme 2. — La démonstration est technique, elle utilise pourtant un simple argument géométrique :

Soit un cylindre  $(\theta, h)$  où  $h$  représente la hauteur d'un point du cylindre et  $\theta$  son argument,  $(\theta, h) \in \mathbf{R}^2$ . Considérons une courbe sur ce cylindre tournant dans le même sens, c'est-à-dire  $\theta(t)$  est une fonction monotone de  $t$ . Si  $(\theta, h_1)$ ,  $(\theta + 2\pi n_2, h_2)$ ,  $(\theta + 2\pi n_3, h_3)$  sont trois points de la courbe avec  $0 < n_2 < n_3$ ,  $n_2, n_3$  dans  $\mathbf{N}$ ,  $h_1 > h_2$  et  $h_2 < h_3$  alors la courbe se coupe sur le cylindre et n'est donc pas plongée dans  $\mathbf{R}^3$ , voir figure 1.

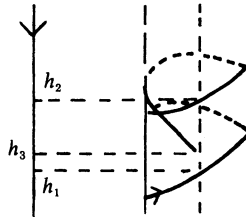


Fig. 1.

D'après les hypothèses nous avons :

$$g(z) = az^p + o(z^p); \quad \omega = \left( \frac{1}{z^q} + o\left(\frac{1}{z^q}\right) \right) dz$$

avec  $a \in \mathbf{C}$ ,  $p, q$  dans  $\mathbf{N}$  et  $q \geq p + 2$ . D'où :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z^q} + o\left(\frac{1}{z^q}\right) \right) dz \\ \Phi_2 &= \frac{i}{2} \left( \frac{1}{z^q} + o\left(\frac{1}{z^q}\right) \right) dz \\ \Phi_3 &= \left( \frac{a}{z^{q-p}} + o\left(\frac{1}{z^{q-p}}\right) \right) dz. \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{(q-1)z^{q-1}} \right) + o\left(\frac{1}{r^{q-1}}\right) + \alpha_1\theta \\ x_2 &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{(q-1)z^{q-1}} \right) + o\left(\frac{1}{r^{q-1}}\right) + \alpha_2\theta \\ x_3 &= \frac{-1}{q-p-1} \operatorname{Re} \left( \frac{a}{z^{q-p-1}} \right) + o\left(\frac{1}{r^{q-p-1}}\right) + \alpha_3\theta \end{aligned}$$

où  $z = (r, \theta)$  et où les  $\alpha_i$  proviennent des résidus des formes  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Donc :

$$(1) \quad x_1 - ix_2 = \frac{-1}{2(q-1)} \frac{1}{z^{q-1}} (1 + f(r, \theta))$$

avec  $\forall \theta \in \mathbf{R}, \lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta) = 0$ .

Donc :  $\forall \theta \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists r_0 > 0$  t.q.  $\forall r \leq r_0, \arg(1 + f(r, \theta)) < \varepsilon$ . Clairement si  $\theta$  est restreint à un compact,  $r_0$  est indépendant de  $\theta$ . Puis :

$$x_3 = \frac{-\|a\| \sin(n\theta + d)}{n r^n} + o\left(\frac{1}{r^n}\right) + \alpha_3\theta$$

avec  $d = \arg(i\bar{a})$ ,  $n = q - p - 1$  et donc  $n \geq 1$ .

De plus si  $\theta \in \left[ \frac{-d + k\pi}{n}, \frac{-d + (k+1)\pi}{n} \right]$ , avec  $k \in \mathbf{Z}$ , alors

$$\sin(n\theta + d) \begin{cases} \leq 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \geq 0 & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Or  $n < q - 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{n} > \frac{2\pi}{q-1}$ , donc  $\exists \theta' \in \left] \frac{-d}{n}, \frac{-d+\pi}{n} \right[$ ,  $\exists n_0$  tels que :

$$(2) \quad \theta' + \frac{2\pi}{q-1} \in \left] \frac{-d+\pi}{n}, \frac{-d+2\pi}{n} \right[$$

et

$$\theta' + \frac{2\pi n_0}{q-1} \in \left] \frac{-d+k\pi}{n}, \frac{-d+(k+1)\pi}{n} \right[$$

avec  $k$  pair, et donc si  $r$  est assez petit :

- $x_3(r, \theta') > 0$ ,
- $x_3\left(r, \theta' + \frac{2\pi}{q-1}\right) < 0$ ,
- $x_3\left(r, \theta' + \frac{2\pi n_0}{q-1}\right) > 0$ .

Appelons  $Y$  la composée de  $\tilde{X}$  avec la projection sur le plan  $(x_1, x_2)$  :

$$Y(z) = \frac{-1}{2(q-1)z^{q-1}}(1+f(r, \theta)) \quad \text{et} \quad Y' = \frac{-1}{2(q-1)z^{q-1}}.$$

Soient  $r_0$  un rayon de  $D$ ,  $Y'(r_0)$  est donc une demi-droite du plan  $(x_1, x_2)$ . De plus si on fixe  $\varepsilon$ ,  $Y(r_0 + \frac{2\pi n}{q-1})$  sera, pour tout entier  $n$  et pour  $r$  assez petit, une courbe de  $(x_1, x_2)$  comprise dans le secteur de  $(x_1, x_2)$  centré en  $Y'(r_0)$  (nous avons  $Y'(r_0) = Y'(r_0 + \frac{2\pi n}{q-1})$  pour tout entier  $n$ ) et d'ouverture angulaire  $2\varepsilon$ , car on aura  $\arg(1+f(r, \theta)) < \varepsilon$ , voir figure 2.

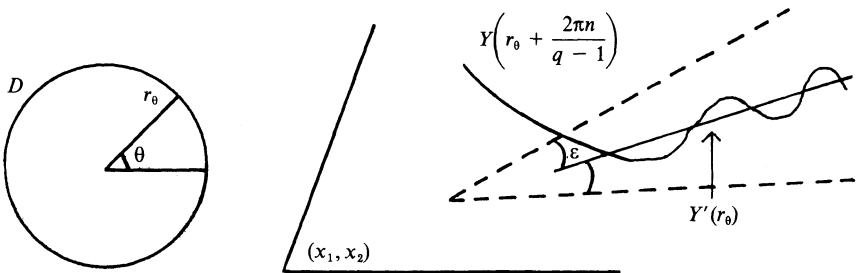


Fig. 2.

Ici nous désignons par  $r_0$  (resp.  $R_0$ ) le rayon de  $D$  (resp. de  $(x_1, x_2)$ ) déterminé par l'angle  $\theta$  et nous désignons par  $S(r_0, \eta)$  (resp.  $S'(R_0, \eta)$ )

le secteur de  $D$  (resp. de  $(x_1, x_2)$ ) centré en  $r_0$  (resp.  $R_0$ ) et d'ouverture angulaire  $2\eta$  où  $\eta > 0$ , voir figure 3.

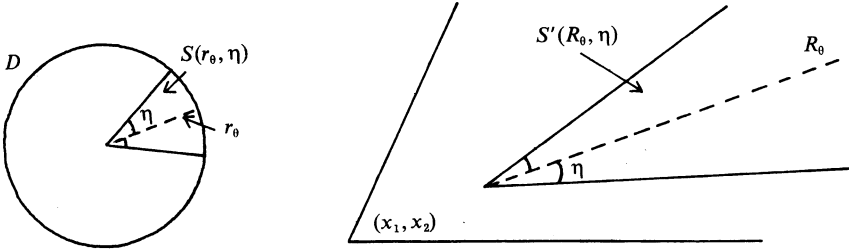


Fig. 3.

Soient enfin  $\theta'$ ,  $n_0$ ,  $k$  vérifiant (2) et  $\eta > 0$  vérifiant  $0 < \eta < \mu$  avec :

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot \inf \left\{ \left( \theta' + \frac{d}{n} \right); \left( \frac{-d + \pi}{n} - \theta' \right); \left( \theta' + \frac{2\pi}{q-1} - \frac{-d + \pi}{n} \right); \right. \\ \left. \left( -\theta' - \frac{2\pi}{q-1} + \frac{-d + 2\pi}{n} \right); \left( \theta' + \frac{2\pi n_0}{q-1} - \frac{-d + k\pi}{n} \right); \right. \\ \left. \left( -\theta' - \frac{2\pi n_0}{q-1} + \frac{-d + (k+1)\pi}{n} \right) \right\}.$$

Si nous imposons ces restrictions sur  $\eta$  c'est pour obtenir :

- $\forall z \in S(r_0, \eta)$ ,  $x_3(z) > 0$ ,
- $\forall z \in S(r_{\theta' + \frac{2\pi}{q-1}}, \eta)$ ,  $x_3(z) < 0$ ,
- $\forall z \in S(r_{\theta' + \frac{2\pi n_0}{q-1}}, \eta)$ ,  $x_3(z) > 0$ .

Nous avons :

$$Y'(r_{\theta'}) = Y'(r_{\theta' + \frac{2\pi}{q-1}}) = Y'(r_{\theta' + \frac{2\pi n_0}{q-1}}),$$

et

$$Y'(S(r_{\theta'}, \eta)) = Y'(S(r_{\theta' + \frac{2\pi}{q-1}}, \eta)) = Y'(S(r_{\theta' + \frac{2\pi n_0}{q-1}}, \eta)).$$

Choisissons  $\varepsilon$  petit devant  $\eta$ , et  $r_0 > 0$  tels que :

$$\forall r < r_0, \forall \theta \in \left[ \frac{-d}{n}, \frac{-d + (k+1)\pi}{n} \right], \arg(1 + f(r, \theta)) < \varepsilon.$$



Nous avons donc pour  $r < r_0$  (voir figure 2 et les explications qui la précèdent) :

- $Y(r_{\theta'-\eta}) \cup Y(r_{\theta'-\eta+\frac{2\pi}{q-1}}) \cup Y(r_{\theta'-\eta+\frac{2\pi n_0}{q-1}}) \subset S'(Y'(r_{\theta'-\eta}), \varepsilon)$ .
- $Y(r_{\theta'+\eta}) \cup Y(r_{\theta'+\eta+\frac{2\pi}{q-1}}) \cup Y(r_{\theta'+\eta+\frac{2\pi n_0}{q-1}}) \subset S'(Y'(r_{\theta'+\eta}), \varepsilon)$ .

Donc le secteur de  $(x_1, x_2)$  délimité par  $e^{i\varepsilon} \cdot Y'(r_{\theta'-\eta})$  et  $e^{-i\varepsilon} \cdot Y'(r_{\theta'+\eta})$  est contenu dans  $E$  où :

$$E = Y(S(r_{\theta'}, \eta)) \cap Y(S(r_{\theta'+\frac{2\pi}{q-1}}, \eta)) \cap Y(S(r_{\theta'+\frac{2\pi n_0}{q-1}}, \eta)),$$

de plus ce secteur est non vide si  $\varepsilon$  est assez petit, plus précisément si  $\theta' - \eta + \varepsilon < \theta' + \eta - \varepsilon$ .

$$\text{Soit } D' = \left\{ (r, \theta) \text{ avec } 0 < r < r_0 \text{ et } \theta \in \left[ \frac{-d}{n}, \frac{-d + (k+1)\pi}{n} \right] \right\}.$$

Alors d'après ce qui précède, en coupant  $\tilde{X}(D')$  par un cylindre d'axe l'axe  $x_3$ , de rayon assez grand, on obtient une courbe ayant les mêmes propriétés que la courbe décrite au début de la démonstration du lemme 2, ce qui démontre le lemme 2.

Démontrons maintenant le théorème. Soit  $(g, \omega)$  la représentation de Weierstrass de  $\Pi(M)$ , nous savons que, par complétude,  $\omega$  possède des pôles en  $z_1$  et  $z_2$ . De plus, comme  $g$  est borné aux bouts, chaque pôle de  $g$  correspond à un zéro de multiplicité double de  $\omega$ , voir lemme 1. Nous avons donc :

$$g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} ; \quad \omega = \frac{\alpha Q^2(z)}{(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}} dz$$

où  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes irréductibles avec  $Q(z_i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2$  et où  $\alpha$  est une constante complexe. Quitte à utiliser une rotation nous pouvons supposer que  $g(\infty) \neq 0$ ,  $g(\infty) \neq \infty$ . Nous en déduisons  $d^0(g) = d^0(P) = d^0(Q)$ . Appelons  $a_i$  la multiplicité de  $g$  en  $z_i$ ,  $i = 1, 2$ . Comme  $M$  est plongé dans  $\mathbf{R}^3$  le lemme 2 affirme que :

$$(3) \quad n_i \leq a_i + 1, \quad i = 1, 2,$$

il y a donc trois cas à considérer :

1. Les deux bouts ne sont pas parallèles.
2. Les deux bouts sont parallèles et  $g(z_1) = g(z_2)$ , c'est-à-dire que les vecteurs normaux limites aux bouts sont égaux.

3. Les deux bouts sont parallèles et  $\overline{g(z_1)} = \frac{-1}{g(z_2)}$ , c'est-à-dire les vecteurs normaux limites aux bouts sont antipodiques.

Nous allons montrer que les deux premiers cas sont impossibles.

Supposons le cas 1. D'après les hypothèses  $\infty$  n'est ni un pôle ni un zéro de  $\omega$  d'où :

$$n_1 + n_2 = 2d^0(Q) + 2 = 2d^0(g) + 2.$$

Or  $a_i \leq d^0(g)$ , nous en déduisons :  $a_1 + a_2 + 2 \leq n_1 + n_2$ . Et d'après (3) :  $n_1 + n_2 \leq a_1 + a_2 + 2$ . En combinant ces deux inégalités nous trouvons :  $n_1 + n_2 = a_1 + a_2 + 2$ , ce qui avec le lemme 2 entraîne :  $n_1 = a_1 + 1$  et  $n_2 = a_2 + 1$ .

Donc  $a_1 = a_2 = d^0(g)$ . Soit  $a = d^0(g)$ , nous avons :

$$g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} ; \quad \omega = \frac{\alpha Q^2(z)}{(z-z_1)^{a+1}(z-z_2)^{a+1}} dz,$$

avec  $d^0(g) = d^0(P) = d^0(Q) = a$  ;  $M$  est donc une surface périodique de  $\mathbf{R}^3$  avec deux bouts de type hélicoïde non parallèles. Ces deux bouts doivent donc s'intersecter et nous en déduisons que  $M$  n'est pas plongé.

Montrons cette dernière affirmation. Considérons un bout  $z_i$ , comme au lemme 2, nous pouvons supposer que  $z_i = 0$  et après rotation que  $g(0) = 0$ . Or comme au départ  $g(z_i) \neq \infty$ , la rotation n'affecte ni le degré de  $g$  en 0 ni la multiplicité du pôle de  $\omega$  en 0. Donc en conservant les notations du lemme, nous avons  $q = p + 1$  avec  $p = a$  et  $q = a + 1$ . Les calculs (1) effectués au cours de la démonstration du lemme montrent que l'image de  $D = \{(r, \theta), r \in ]0, 1[, \theta \in [0, 4\pi]\}$  par  $\tilde{X}$  fait au moins un tour complet au-dessus du plan  $(x_1, x_2)$  (en prenant  $\theta$  dans  $[0, 4\pi]$  nous considérons un domaine fondamental du bout suivi de son translaté).

Si nous coupons maintenant  $\tilde{X}(D')$  par  $S_R$ , la sphère de rayon  $R$ , et si nous ramenons cette intersection sur  $S_1$  à l'aide d'une homotétie, nous obtenons pour  $R$  assez grand une courbe de  $S_1$  (non fermée) faisant au moins un tour autour de l'axe  $x_3$ . Les techniques de Meeks et Jorge [1] montrent que lorsque  $R$  tend vers l'infini la courbe converge vers le grand cercle orthogonal à  $x_3$ , c'est-à-dire orthogonal au vecteur normal limite au bout. En faisant de même avec l'autre bout, les deux

courbes de  $S_1$  ainsi construites doivent donc se couper si  $R$  est assez grand car les deux grands cercles limite sont distincts puisque les bouts ne sont pas parallèles, ce qui démontre l'assertion.

Ainsi puisque  $M$  est plongé, le cas 1 est impossible.

Considérons maintenant le cas 2. Comme précédemment nous avons :  $n_1 + n_2 = 2d^0(g) + 2$  et  $n_i \leq a_i + 1$ ,  $i = 1, 2$ . De plus  $g(z_1) = g(z_2)$  entraîne  $a_1 + a_2 \leq d^0(g)$ , d'où :

$$2(a_1 + a_2) + 2 \leq n_1 + n_2 \leq a_1 + a_2 + 2$$

et finalement :  $a_1 + a_2 \leq 0$ , ce qui est absurde car  $a_i \geq 1$ .

Il ne reste donc que le cas 3 comme possibilité. Comme dans le cas 1 nous obtenons :  $n_1 = n_2 = d^0(g) + 1$ . En utilisant un reparamétrage et une rotation, nous pouvons supposer  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -1$ ,  $g(1) = 1$ ,  $g(-1) = -1$ , car  $S^2$  moins deux points n'a qu'une structure conforme. En posant  $n = d^0(g)$ , nous déduisons de ce qui précède que  $\omega$  possède un pôle d'ordre  $n + 1$  en 1 et  $-1$  ce qui nous permet, en utilisant le lemme 1 comme précédemment, de trouver la forme suivante pour  $\omega$ . Nous avons donc :

$$g(z) - 1 = \frac{\gamma(z-1)^n}{Q(z)} ; \quad g(z) + 1 = \frac{\beta(z+1)^n}{Q(z)} ;$$

$$\omega = \frac{\alpha Q^2(z)}{(z-1)^{n+1}(z+1)^{n+1}} dz.$$

Soit  $R$  la rotation fixant  $x_2$  et envoyant  $x_3$  sur  $-x_1$  :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En appelant  $(g', \omega')$  la nouvelle représentation de Weierstrass, nous avons :  $\Phi'_1 = -\Phi_3$ ,  $\Phi'_2 = \Phi_2$ ,  $\Phi'_3 = \Phi_1$  et donc comme  $\omega' = \Phi'_1 - i\Phi'_2$  et  $g' = \frac{\Phi'_3}{\Phi'_1 - i\Phi'_2}$  :

$$g'(z) = -\frac{\beta(z+1)^n}{\gamma(z-1)^n} ; \quad \omega' = \frac{\alpha\gamma^2(z-1)^{n-1}}{2(z+1)^{n+1}} dz.$$

Changeons de paramètre en utilisant  $f: \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ ;  $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ . Maintenant  $\Pi(M)$  est paramétré par  $\mathbf{S}^2 - \{0, \infty\}$ . En appelant  $(g'', \omega'')$  la représentation induite, nous avons :

$$g''(z) = -\frac{\beta}{\gamma} z^n; \quad \omega'' = -\frac{\alpha\gamma^2}{4z^{n+1}} dz.$$

Enfin en effectuant le changement de variable  $z \rightarrow \left(\frac{-\gamma}{\beta}\right)^{1/n} v$  et en appelant  $(g, \omega)$  la nouvelle représentation, nous obtenons :

$$g(v) = v^n \quad \text{et} \quad \omega = \frac{c}{v^{n+1}} dv$$

avec  $c = (\alpha\beta\gamma)/4$ . Il est maintenant clair que  $\Pi(M)$  est en fait la surface de représentation  $g(z) = z$ ,  $\omega = c \cdot dz/z^2$  parcourue  $n$  fois (faire le changement de variable  $z \rightarrow v^n$ ) ceci à une homotétie près. Nous pouvons supposer  $\|c\| = 1$ ,  $M$  est donc une surface associée à l'hélicoïde. Or nous savons que les seules surfaces plongées de cette famille, paramétrée par  $c$ , sont l'hélicoïde et la caténoïde, comme nous supposons  $M$  périodique, nous obtenons le théorème.

Nous avons en fait montré le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — Soit  $M$  une surface minimale complète de  $\mathbf{R}^3$  non plane et  $v$  un vecteur de  $\mathbf{R}^3$ . Appelons  $\Pi$  la projection de  $\mathbf{R}^3$  sur  $\mathbf{R}^3/v\mathbf{Z}$ . Si

- $\Pi(M)$  est de courbure totale finie,
- $\Pi(M)$  est modelé sur  $\mathbf{S}^2 - \{z_1, z_2\}$ ,

alors si de plus  $M$  est plongé dans  $\mathbf{R}^3$ ,  $M$  est soit l'hélicoïde soit la caténoïde.

Nous pouvons différencier ces deux surfaces en demandant  $M$  périodique dans  $\mathbf{R}^3$  ou  $\Pi(M)$  plongé dans  $\mathbf{R}^3/v\mathbf{Z}$ , en effet seule l'hélicoïde vérifie ces deux propriétés alors que la caténoïde n'en vérifie aucune.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. JORGE, W. MEEKS, The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature. *Topology*, Vol. 22, n° 2 (1983), 203-221.
- [2] R. LANGEVIN, G. LEVITT, H. ROSENBERG, Complete minimal surfaces with long lines boundary. A paraître dans *Duke Mathematical Journal*.
- [3] H. BLAINE LAWSON, Lectures on minimal submanifolds, Vol. 1, Math-lecture Series 9, Publish or Perish.
- [4] R. OSSERMAN, A survey of minimal surfaces. *Van Nostrand Reinhold Math. Studies*, 25, 1969.
- [5] R. OSSERMAN, Global properties of minimal surfaces in  $E^3$  and  $E^n$ , *Annals of Math.*, Vol. 80 (1964), 340-364.
- [6] B. RIEMANN, Œuvres complètes, tome XIII des mémoires de la société royale de Goettinguen (1987), p. 305.
- [7] E. TOUBIANA, Thèse de doctorat.

Manuscrit reçu le 24 mars 1987  
révisé le 21 octobre 1987.

Éric TOUBIANA,  
203, rue du Faubourg-Saint-Antoine  
75011 Paris.