Annales de l'institut Fourier

Jean-Marc Drezet

Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

Annales de l'institut Fourier, tome 38, n° 3 (1988), p. 105-168

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_3_105_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
38, 3 (1988), 105-168

GROUPE DE PICARD DES VARIETES DE MODULES DE FAISCEAUX SEMI-STABLES SUR $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$

par Jean-Marc DREZET

Introduction.

Soient r, c_1, c_2 des entiers, avec $r \geq 2$. On se propose ici de calculer le groupe de Picard de la variété de modules $M(r, c_1, c_2)$ des faisceaux cohérents semi-stables sur $\mathbf{P}_2$, de rang r, et de classes de Chern c_1, c_2.

Les premiers résultats dans cette direction ont été obtenus par Le Potier ([17]) qui a déterminé le groupe de Picard des variétés de modules de fibrés stables de rang 2 et de degré pair sur $\mathbf{P}_2$. Plus récemment, Strømme ([25]) a calculé $\mathrm{Pic}(M(2, c_1, c_2))$ dans le cas où c_1 ou c_2 est impair. Dans [17], c'est le groupe de Picard d'un ouvert lisse de $M(2, c_1, c_2)$ qui est obtenu, et dans [25] celui des variétés de modules $M(2, c_1, c_2)$ qui sont lisses. Le premier résultat de cet article est le

THÉORÈME A. — *La variété de modules $M(r, c_1, c_2)$ est localement factorielle.*

On en déduit que le groupe de Picard de $M(r, c_1, c_2)$ est isomorphe au groupe des classes d'équivalence linéaire de ses diviseurs de Weil. Le calcul effectif de $\mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2))$ fait intervenir les conditions d'existence des faisceaux stables sur $\mathbf{P}_2$. D'après [6] et [7], il existe une unique application $\delta : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{R}$ possédant la propriété suivante : on a $\dim(M(r, c_1, c_2)) > 0$ si et seulement si

$$\Delta(r, c_1, c_2) = \frac{1}{r}\Big(c_2 - \Big(1 - \frac{1}{r}\Big)c_1^2/2\Big) \geq \delta(c_1/r).$$

Mots-clés : Groupe de Picard – Faisceaux semi-stables – Factoriel.

Si on a égalité, on dit que $M(r, c_1, c_2)$ est *de hauteur nulle* (cf. 1.2). On peut maintenant énoncer le

THÉORÈME B. — *Supposons que* $\dim(M(r, c_1, c_2)) > 0$. *Alors on a*

(i) $\mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)) \simeq \mathbf{Z}$ *si* $M(r, c_1, c_2)$ *est de hauteur nulle.*

(ii) $\mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)) \simeq \mathbf{Z}^2$ *si* $M(r, c_1, c_2)$ *n'est pas de hauteur nulle.*

Donnons maintenant une construction des éléments de

$$\mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)).$$

On appelle *famille de faisceaux* de $M(r, c_1, c_2)$ paramétrée par une variété algébrique lisse S un faisceau cohérent E sur $S \times \mathbf{P}_2$, plat sur S, tel que pour tout point fermé s de $S, E_s = E_{|\{s\}\times\mathbf{P}_2}$ soit semi-stable, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. On note $K(S)$ le groupe de Grothendieck de S. Soit E une famille de faisceaux de $M(r, c_1, c_2)$ paramétrée par S. On note p_S, p_2 les projections $S \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow S$ et $S \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathbf{P}_2$. Deux familles E, E' de faisceaux de $M(r, c_1, c_2)$ paramétrées par S sont dites *équivalentes* s'il existe un fibré en droites L sur S et un isomorphisme $E' \simeq E \otimes p_S^* L$. On note $F(S)$ l'ensemble des classes d'équivalence de telles familles. On définit ainsi un foncteur F de la catégorie des variétés algébriques lisses dans celle des ensembles (cf. 1.1.).

On note $\eta = \eta(r, c_1, c_2)$ la classe dans $K(\mathbf{P}_2)$ d'un fibré vectoriel algébrique V sur $\mathbf{P}_2$, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. On note $H = H(r, c_1, c_2)$ le noyau du morphisme de groupes

$$\chi_\eta : K(\mathbf{P}_2) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

défini par $\chi_\eta([W]) = \chi(V \otimes W)$ pour tout fibré vectoriel algébrique W sur $\mathbf{P}_2$, $[W]$ désignant la classe de W dans $K(\mathbf{P}_2)$. La classe η, le morphisme χ_η ainsi que H ne dépendent que de r, c_1, c_2. Notons que H est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$.

Le morphisme $\gamma_E : H \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)$, restriction du morphisme $K(\mathbf{P}_2) \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)$ associant à $[W]$ le fibré en droites

$$\det(p_{S!}[E \otimes p_2^* W])^{-1}$$

ne dépend que de la classe d'équivalence de E (d'après la définition de H), et en dépend fonctoriellement. On en déduit un morphisme

$$\gamma : H \longrightarrow \mathrm{Pic}(F)$$

où Pic(F) est le *groupe de Picard du foncteur F* (cf. 1.1.4.). D'autre part, il existe un morphisme canonique

$$\sigma : \mathrm{Pic}(M(r,c_1,c_2)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(F)$$

déduit de la propriété universelle de $M(r,c_1,c_2)$. On a alors le

THÉORÈME C. – *Il existe un unique morphisme*

$$\mathsf{L} : H \longrightarrow \mathrm{Pic}(M(r,c_1,c_2))$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\mathsf{L}"'] & \mathrm{Pic}(F) \\ & \mathrm{Pic}(M(r,c_1,c_2)) \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Plus concrètement, si $W_1, \dots, W_k$ sont des fibrés vectoriels algébriques sur $\mathbf{P}_2$, $n_1, \dots, n_k$ des entiers tels que $\alpha = -\sum_{1 \le i \le k} n_i[W_i]$ soit dans H, on a

$$\bigotimes_{1 \le i \le k} \det(p_S![E \otimes p_2^* W_i])^{\otimes n_i} \simeq p_E^* \mathsf{L}(\alpha),$$

où $f_E : S \longrightarrow M(r,c_1,c_2)$ est le morphisme déduit de E (cf. 1.1).

Soit χ la caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux cohérents sur $\mathbf{P}_2$ de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. Le résultat précédent n'apporte quelque chose que dans le cas où r, c_1 et χ ne sont pas premiers entre eux. En effet, dans le cas contraire, il existe un *faisceau universel* E_0 sur $M(r,c_1,c_2) \times \mathbf{P}_2$ (cf. 1.1.), et il suffit de prendre

$$\mathsf{L}(\alpha) = \bigotimes_{1 \le i \le k} \det(p_M![E_0 \otimes p_2^* W_i])^{\otimes n_i},$$

p_M désignant la projection $M(r,c_1,c_2) \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow M(r,c_1,c_2)$.

On peut maintenant décrire $\mathrm{Pic}(M(r,c_1,c_2))$.

THÉORÈME D. — *Si $M(r,c_1,c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, le morphisme de groupes*

$$\mathsf{L} : H \longrightarrow \mathrm{Pic}(M(r,c_1,c_2))$$

est un isomorphisme.

Il reste à traiter le cas des variétés de modules de hauteur nulle. On appelle *fibré exceptionnel* sur $\mathbf{P}_2$ un fibré vectoriel algébrique stable G tel que $\mathrm{Ext}^1(G,G) = 0$ (cf. [7]). Supposons que $M(r,c_1,c_2)$ soit de hauteur nulle. On peut alors définir un fibré exceptionnel F, dit *induit* par $M(r,c_1,c_2)$, possédant notamment la propriété suivante : pour tout faisceau semi-stable V de rang r et de classes de Chern c_1,c_2, on a $h^i(F^*\otimes V) = 0$ pour tout $i \geq 0$. Alors $[F^*]$ est un élément de H, et $\gamma([F^*])$ est l'élément neutre de $\mathrm{Pic}(F)$. On prouvera le

THÉORÈME E. — *Si $M(r,c_1,c_2)$ est de hauteur nulle, de fibré exceptionnel induit F, le morphisme de groupes*

$$\mathbf{L} : H \longrightarrow \mathrm{Pic}(M(r,c_1,c_2))$$

est surjectif, et son noyau est le sous-groupe engendré par $[F^*]$.

Soit $M = M(r,c_1,c_2)$ une variété de modules de dimension strictement positive, M_0 l'ouvert des points lisses de M. On a $\mathrm{codim}_M(M\backslash M_0) \geq 2$ car M est normale. On peut donc définir le déterminant ω_M du faisceau cotangent de M. On a alors

THÉORÈME F. — *On a $\omega_M \simeq \mathbf{L}(\beta)$, avec $\beta = \eta^*\otimes\omega - \eta^*$, η^* désignant la classe duale de η, et ω celle du fibré canonique sur $\mathbf{P}_2$.*

(La classe duale de $[V]$, V étant un fibré vectoriel algébrique sur $\mathbf{P}_2$, est la classe du dual V^* de V).

Voici le plan des démonstrations. On montrera (cf. 1.5) qu'on peut se ramener au cas où $-1 < c_1/r \leq 0$ (la variété de modules et les faisceaux correspondants sont dits *normalisés*). Dans ce cas on représente naturellement $M(r,c_1,c_2)$ comme bon quotient d'une variété lisse $\mathcal{M}$ de complexes de fibrés vectoriels sur $\mathbf{P}_2$ par un groupe réductif G_M (cf. 1.6).

Soient $M_s(r,c_1,c_2)$ l'ouvert de $M(r,c_1,c_2)$ correspondant aux faisceaux stables, $\mathcal{M}_s$ son image réciproque dans $\mathcal{M}$. Alors le morphisme quotient $\mathcal{M} \longrightarrow M_s(r,c_1,c_2)$ est un *quotient géométrique*. Il en découle un morphisme

$$\mathrm{Char}(G_M) \xrightarrow{\pi_M} \mathrm{Pic}(M_s(r,c_1,c_2)),$$

$\mathrm{Char}(G_M)$ désignant le groupe des caractères de G_M.

Dans le §2 on montrera qu'en fait π_M est à valeurs dans

$\mathrm{Pic}(M(r,c_1,c_2))$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Char}(G_M) \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[dr, "\overline{\pi}_M"'] & \mathrm{Pic}(M_s(r,c_1,c_2)) \\ & \mathrm{Pic}(M(r,c_1,c_2)) \arrow[u, "\text{restriction}"'] \end{tikzcd}$$

d'où le morphisme $\overline{\pi}_M$. Cela signifie que tout fibré en droites sur $M_s(r,c_1,c_2)$ provenant d'un caractère de G_M peut être *prolongé* à $M(r,c_1,c_2)$. On en déduit dans le §3 les théorèmes A et B en utilisant de plus les résultats suivants :

1) Le morphisme canonique π_M : Charg$(G_M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M_s(r,c_1,c_2))$ est surjectif, et c'est un isomorphisme si $M(r,c_1,c_2)$ n'est pas de hauteur nulle (démonstrations dans les §4 à 7).

2) Si $M(r,c_1,c_2)$ est de hauteur nulle et non isomorphe à $\mathbf{P}_5$, on a $\mathrm{Pic}(M_s(r,c_1,c_2)) \simeq \mathbb{Z}$ (ce résultat provient de [6]).

Les autres théorèmes sont démontrés dans le §3. On définit d'abord pour cela un morphisme de groupes

$$\Lambda : \mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow H$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Char}(G_M) \arrow[r, "\overline{\pi}_M"] \arrow[d, "\Lambda"'] & \mathrm{Pic}(M(r,c_1,c_2)) \arrow[d, "\sigma"] \\ H \arrow[r, "\gamma"] \arrow[ur, dashed, "\mathbf{L}"] & \mathrm{Pic}(F) \end{tikzcd}$$

soit commutatif. En général, Λ est un isomorphisme. Ceci permet de définir $\mathbf{L}$.

On suppose ici que le corps de base est $\mathbb{C}$, mais les résultats précédents s'étendent sans difficulté au cas où le corps de base est algébriquement clos de caractéristique nulle.

J'ai beaucoup profité de l'aide efficace de J. Le Potier pour effectuer ce travail. Je tiens ici à l'en remercier. Je remercie aussi le referee pour les améliorations qu'il a apportées à la présentation des résultats.

1. Préliminaires.

1.1. Faisceaux semi-stables.

1.1.1. Formulaire et notations.

Soit E un faisceau cohérent sur $\mathbf{P}_2$, de rang $r > 0$, et de classes de Chern c_1, c_2. On pose

$$\Delta(r, c_1, c_2) = \Delta(E) = \frac{1}{r}\Big(c_2 - \Big(1 - \frac{1}{r}\Big)c_1^2/2\Big),$$

qu'on appelle le *discriminant* de E. On appelle *pente* de E le nombre rationnel c_1/r et on le note $\mu(E)$. Posons $P(X) = \frac{X^2}{2} + \frac{3X}{2} + 1$. Le théorème de Riemann-Roch prend la forme suivante : on a $\chi(E) = r(P(\mu(E)) - \Delta(E))$, $\chi(E)$ désignant la caractéristique d'Euler-Poincaré de E. Si E, F sont des faisceaux cohérents sur $\mathbf{P}_2$, on pose

$$\chi(E, F) = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i \dim(\mathrm{Ext}^i(E, F)).$$

Alors on a, si $\mathrm{rg}(E) > 0$ et $\mathrm{rg}(F) > 0$,

$$\chi(E, F) = \mathrm{rg}(E)\mathrm{rg}(F)(P(\mu(F) - \mu(E)) - \Delta(E) - \Delta(F))$$

(proposition (1.1) de [7]). On a, pour tout entier $i \geq 0$, un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^i(E, F) \simeq \mathrm{Ext}^{2-i}(F, E(-3))^*,$$

(dualité de Serre, proposition (1.2) de [7]), même si $\mathrm{rg}(E)$ ou $\mathrm{rg}(F)$ est nul.

On note Q le fibré quotient canonique de $\mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{O}(1))^*$ sur $\mathbf{P}_2$.

1.1.2. Faisceaux semi-stables.

Soit E un faisceau cohérent sur $\mathbf{P}_2$. On dit que E est *semi-stable* (resp. *stable*) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau propre F de E on a $\mu(F) \leq \mu(E)$, et en cas d'égalité

$$\frac{\chi(E)}{\mathrm{rg}(E)} \geq \frac{\chi(F)}{\mathrm{rg}(F)} \qquad (\text{resp.} >).$$

Cette notion de stabilité est celle de Gieseker ([11]) et Maruyama ([19]). Les variétés de modules $M(r, c_1, c_2)$ sont construites dans l'article précédemment cité de Gieseker.

Si E est semi-stable, il existe une filtration de E, dite *de Jordan-Hölder* : $0 = E_0 \subset \ldots \subset E_m = E$, telle que pour $1 \leq i \leq m, E_i/E_{i-1}$ soit stable et de même pente et discriminant que E. Une telle filtration n'est pas toujours unique, mais la classe d'isomorphisme du gradué (c'est-à-dire la somme directe des E_i/E_{i-1}) ne dépend que de celle de E. On notera $\mathrm{Gr}(E)$ la classe d'isomorphisme de $\oplus E_i/E_{i-1}$.

Soit E un faisceau cohérent sans torsion sur $\mathbf{P}_2$. Il existe une unique filtration de $E : 0 = E_0 \subset \ldots \subset E_m$, telle que pour $1 \leq i \leq m-1$, E_i/E_{i-1} soit l'unique sous-faisceau G de E/E_{i-1} possédant les propriétés suivantes : pour tout sous-faisceau propre H de E/E_{i-1}, on a $\mu(H) \leq \mu(G)$, et si $\mu(H) = \mu(G)$, on a $\Delta(H) \geq \Delta(G)$, et si enfin $\Delta(H) = \Delta(G)$, alors $\mathrm{rg}(H) \leq \mathrm{rg}(G)$. On l'appelle la *filtration de Harder-Narasimhan* de E.

1.1.3. Variétés de modules.

La *variété de modules* $M(r, c_1, c_2)$ est une variété algébrique, unique à isomorphisme près, possédant les propriétés suivantes :

Soit $F = F(r, c_1, c_2)$ le foncteur contravariant de la catégorie des variétés algébriques complexes dans celle des ensembles associant à S l'ensemble des classes d'équivalence de familles plates de faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 sur $\mathbf{P}_2$ paramétrées par S (cf. Introduction). Alors

(i) Il existe un morphisme de foncteurs

$$F \longrightarrow \mathrm{Hom}(-, M).$$

(ii) Si M' est une variété algébrique et $F \longrightarrow \mathrm{Hom}(-, M')$ un morphisme de foncteurs, il existe un unique morphisme $f : M \longrightarrow M'$ tel qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}(-,M) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(-,f)"] \\ F \arrow[ur] \arrow[r] & \mathrm{Hom}(-,M') \end{tikzcd}$$

En particulier, d'après (i), d'une famille E de faisceaux de $M(r, c_1, c_2)$ paramétrée par S on déduit un morphisme

$$f_E : S \longrightarrow M(r, c_1, c_2).$$

La variété $M(r, c_1, c_2)$ est projective, normale et irréductible ([7], [19]). Les points fermés de $M(r, c_1, c_2)$ sont les classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 (deux tels faisceaux E, E' étant *équivalents* si $\mathrm{Gr}(E) = \mathrm{Gr}(E')$).

1.1.4. Groupe de Picard du foncteur F.

Un élément L de $\mathrm{Pic}(F)$ est la donnée, pour toute variété algébrique lisse S et tout élément E de $F(S)$, d'un élément L_E de $\mathrm{Pic}(S)$ dépendant fonctoriellement de S, c'est-à-dire que pour tout morphisme $f : T \longrightarrow S$ de variétés algébriques lisses et tout E dans $F(S)$, on a

$$f^* L_E \simeq L_{f^*E}.$$

La structure de groupe abélien de $\mathrm{Pic}(F)$ est définie par

$$(L.L')_E = L_E \otimes L'_E.$$

L'élément neutre de $\mathrm{Pic}(F)$ est évidemment défini par $L_E = \mathcal{O}_S$, pour tous S, E.

On définit maintenant un morphisme de groupes

$$\sigma : \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(F).$$

Pour tout L dans $\mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2))$, toute variété algébrique lisse S et tout E dans $F(S)$, on a

$$\sigma(L)_E = f_E^* L.$$

Le morphisme σ est injectif. Pour le voir il suffit de trouver un E comme précédemment tel que le morphisme $f_E^* : \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)$ soit injectif. D'après Gieseker ([11]) il existe une variété algébrique lisse R sur laquelle opère un groupe $PGL(N)$, et un élément E de $F(R)$ tel que $f_E : R \longrightarrow M(r, c_1, c_2)$ soit un bon quotient de R par $PGL(N)$ (cf. §2). Un fibré de $\mathrm{Ker}(f_E^*)$ provient d'un caractère de $PGL(N)$, et comme tout caractère de $PGL(N)$ est trivial, f_E^* est injectif.

1.2. Fibrés exceptionnels et variétés de modules de hauteur nulle.

Soit $M(r,c_1,c_2)$ une variété de modules de hauteur nulle. Posons $\mu = c_1/r$. D'après [6], il existe un fibré exceptionnel G, unique à isomorphisme près, tel que $|\mu - \mu(G)| < x_G$, x_G désignant la solution inférieure à 1 de l'équation

$$X^2 - 3X + 1/\mathrm{rg}(G)^2 = 0.$$

Si $\mu \leq \mu(G)$, on a pour tout $i \geq 0$ et tout faisceau semi-stable E de rang r et de classes de Chern $c_1, c_2, h^i(G^* \otimes E) = 0$, et G est par définition le fibré exceptionnel *induit* par $M(r,c_1,c_2)$. Si $\mu > \mu(G)$, on a pour tout $i \geq 0$ et tout faisceau semi-stable E de rang r et de classes de Chern $c_1, c_2, h^i(G(3) \otimes E) = 0$, et $G^*(-3)$ est par définition le fibré exceptionnel *induit* par $M(r,c_1,c_2)$. Les égalités précédentes découlent de la semi-stabilité de E et de la relation

$$\delta(\mu) = P(-|\mu(G) - \mu|) - \Delta(G),$$

d'où on déduit $\chi(G^* \otimes E) = 0$ (resp. $\chi(G(3) \otimes E) = 0$) si $\mu \leq \mu(G)$ (resp. $\mu > \mu(G)$). Pour plus de détails voir [6] et [7].

1.3. Groupe de Picard. Diviseurs de Weil. Groupe de Grothendieck.

Soit S une variété algébrique intègre. On note $\mathrm{Pic}(S)$ le groupe de Picard de S, c'est-à-dire le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites algébriques sur S.

Supposons que S soit normale. On note $\mathrm{Cl}(S)$ le groupe des classes d'équivalence linéaire de diviseurs de Weil de S. On peut définir un morphisme canonique

$$\alpha_S : \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Cl}(S)$$

qui est injectif. C'est un isomorphisme si et seulement si S est localement factorielle. Pour plus de détails, voir [13], prop. 1-12 et [20], p. 141.

Soit S une variété algébrique lisse. On note $K(S)$ le groupe de Grothendieck des classes d'équivalence de faisceaux cohérents sur S (voir [3]). On notera $[E]$ l'image dans $K(S)$ d'un faisceau cohérent E sur S.

Si T est une autre variété lisse, et $f : T \longrightarrow S$ un morphisme propre, on définit un morphisme de groupes $f_! : K(T) \longrightarrow K(S)$ en associant à $[E]$ l'élément $\sum(-1)^i[R^i f_* E]$ de $K(S)$.

Il existe un unique morphisme de groupes det : $K(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)$ tel que pour tout faisceau localement libre E sur S, $\det[E]$ soit la classe d'isomorphisme du déterminant de E.

1.4. Familles complètes de faisceaux sur $\mathbf{P}_2$.

1.4.1. Dans ce qui suit T désigne une variété algébrique lisse irréductible et F un faisceau cohérent sur $T\times\mathbf{P}_2$ tel que pour tout point fermé t de T, F_t soit sans torsion, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. On suppose que $\dim(M(r, c_1, c_2)) > 0$. On introduit dans [7] deux conditions

(KS) Le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de F au point t de T est surjectif.

(L) On a $\mathrm{Ext}^2(F_t, F_t) = 0$.

Soit $(H_1, \dots, H_m)$ une suite de polynômes à une variable à coefficients rationnels. On dit qu'un faisceau cohérent sans torsion E sur $\mathbf{P}_2$ est *de poids* $(H_1, \dots, H_m)$ si la filtration de Harder-Narasimhan de E est de longueur $m : 0 = E_0 \subset \dots \subset E_m = E$, et si pour $1 \leq i \leq m$, $\mathrm{Gr}_i(E) = E_i/E_{i-1}$ a pour polynômes de Hilbert H_i.

Soit E un faisceau cohérent sur $\mathbf{P}_2$. On dit que E est *p-semi-stable* (resp. *p-stable*) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau propre E' de E on a $\mu(E') \leq \mu(E)$ (resp. $<$). On a les implications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} E \text{ est } p\text{-stable} & \Longrightarrow & E \text{ est stable} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ E \text{ est } p\text{-semi-stable} & \Longleftarrow & E \text{ est semi-stable} \end{array}$$

Soit $(H_1, \dots, H_m)$ le poids d'un faisceau cohérent sans torsion E. Alors on a pour $1 \leq i \leq m$, $H_i(X) = r_i(P(\mu_i + X) - \Delta_i)$, où r_i, μ_i, Δ_i désignent respectivement le rang, la pente et le discriminant du i^e gradué de la filtration de Harder-Narasimhan de E. Alors E est p-semi-stable si et seulement si $\mu_1 = \mu(E)$, et on a aussi dans ce cas $\mu_2 = \dots = \mu_m = \mu(E)$.

PROPOSITION 1.1. — *Supposons que $c_1 = 0$, que les conditions (L) et (KS) soient satisfaites, que pour tout point t de T, F_t soit p-semi-stable* *et que $h^0(F_t) = 0$. Soit T^{ss} l'ouvert de T des points t tels que F_t soit semi-stable. Alors on a* $\mathrm{codim}_T(T\backslash T^{ss}) \geq 2$.

Les poids des faisceaux F_t sont en nombre fini d'après [7], et si $\alpha = (H_1, \ldots, H_m)$ est l'un d'eux, l'ensemble T_α des points t de T tels que F_t soit de poids α est une sous-variété localement fermée lisse de T de codimension

$$d_\alpha = \sum_{i<j} r_i r_j (\Delta_i + \Delta_j - 1),$$

avec les notations précédentes (proposition (3.3) de [7]). Supposons que $m > 1$. Soit t un point de T. On pose $n_i = c_2(\mathrm{Gr}_i(F_t))$ pour $1 \geq i \geq m$. Alors on a $\Delta_i = n_i/r_i$, et

$$d_\alpha \geq r_1 r_m (n_1/r_1 + n_m/r_m - 1) = r_m(n_1 - r_1) + n_m r_1.$$

Il faut montrer que $d_\alpha \geq 2$, et pour cela il suffit de prouver que $n_1 \geq r_1$ et $n_m \geq 2$. Le faisceau $\mathrm{Gr}_1(F_t)$ est semi-stable de pente 0, donc on a $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gr}_1(F_t), \mathcal{O}(-3)) = 0$, d'où par dualité de Serre $h^2(\mathrm{Gr}_1(F_t)) = 0$. Puisque $h^0(F_t) = 0$, on a aussi $h^0(\mathrm{Gr}_1(F_t)) = 0$, donc

$$h^1(\mathrm{Gr}_1(F_t)) = -\chi(\mathrm{Gr}_1(F_t)) = n_1 - r_1 \geq 0,$$

ce qui démontre la première inégalité. En ce qui concerne la seconde, notons que par définition de la filtration de Harder-Narasimhan on a

$$\frac{H_1(X)}{r_1} > \frac{H_m(X)}{r_m} \qquad \text{pour tout } X \text{ assez grand,}$$

ce qui équivaut à $n_1/r_1 < n_m/r_m$. Puisque $n_1/r_1 \geq 1$, on a $n_m \geq 2$. Ceci achève la démonstration de la proposition 1.1.

1.4.2. On ne suppose plus à présent que $c_1 = 0$. Le résultat suivant est démontré dans [6] (proposition 33) :

Proposition 1.2. — *Supposons que F soit une famille de faisceaux de $M(r, c_1, c_2)$ vérifiant la condition (KS). Soit T^s l'ouvert de T des points t tels que F_t soit stable. Alors, si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas une variété de modules de hauteur nulle isomorphe à $\mathbf{P}_5$, on a* $\mathrm{codim}_T(T\backslash T^s) \geq 2$.

On en déduit le

Corollaire 1.3. — *Soit $M_s(r, c_1, c_2)$ l'ouvert de $M(r, c_1, c_2)$ correspondant aux faisceaux stables. Alors, si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas une variété de modules de hauteur nulle isomorphe à $\mathbf{P}_5$, on a*

$$\mathrm{codim}_{M(r,c_1,c_2)}(M(r, c_1, c_2)\backslash M_s(r, c_1, c_2)) \geq 2.$$

Les fibrés exceptionnels induits par les exceptions du corollaire 1.3 sont de rang 1.

1.4.3. Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbf{P}_2$, ℓ une droite de $\mathbf{P}_2$. Alors il existe une unique suite décroissante $(k_i^\ell)_{1\leq i\leq r}$ d'entiers, telle que

$$E_{|\ell} \simeq \bigoplus_{1\leq i\leq r} \mathcal{O}_\ell(k_i^\ell)$$

(Grothendieck [12]). Il existe une seule telle suite $(k_i^0)_{1\leq i\leq r}$ telle que l'ensemble des droites ℓ telles que $(k_i^\ell)_{1\leq i\leq r} = (k_i^0)_{1\leq i\leq r}$ soit un ouvert non vide de $\mathbf{P}_2^*$. On dit que $(k_i^0)_{1\leq i\leq r}$ est le *type de décomposition générique* de E.

Soit E_0 un fibré vectoriel sur $\mathbf{P}_1$. On dit que E_0 est *rigide* si $\mathrm{Ext}^1(E_0, E_0) = 0$. Si $E = \mathcal{O}(k_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(k_r)$, cela revient à dire que l'ensemble des k_i est réduit à un entier ou à deux entiers consécutifs. On dit que E est de *type de décomposition générique rigide* si le fibré sur $\mathbf{P}_1$ somme directe des $\mathcal{O}(k_i^0)$ est rigide.

PROPOSITION 1.4. – *Supposons que F vérifie les conditions (L) et (KS) et que pour tout point t de T le faisceau F_t soit localement libre et de type de décomposition générique rigide. Soit T^{ss} l'ouvert de T des points t tels que F_t soit semi-stable. Alors on a, si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle,* $\mathrm{codim}_T(T\backslash T^{ss}) \geq 2$.

Ce résultat est dû à J. Le Potier.

D'après [7], $T\backslash T^{ss}$ est la réunion d'un nombre fini de sous-variétés lisses localement fermées disjointes. Soit t un point de $T\backslash T^{ss}$, Y la sous-variété lisse contenant t. Alors on a d'après la proposition (3.3) de [7]

$$\mathrm{codim}_T(Y) = -\sum_{1\leq i\leq j\leq m} \chi(\mathrm{Gr}_i(F_t)),\ \mathrm{Gr}_j(F_t)).$$

Chacun des termes de cette somme est négatif ou nul d'après le lemme (4.8) de [7]. Supposons que $\mathrm{codim}_T(Y) = 1$. Alors on a $\chi(\mathrm{Gr}_1(F_t),\ \mathrm{Gr}_m(F_t)) = 0$ ou -1. Si $\chi(\mathrm{Gr}_1(F_t),\ \mathrm{Gr}_m(F_t)) = 0$, d'après la démonstration du lemme (4.8) de [7], $\mathrm{Gr}_1(F_t)$ ou $\mathrm{Gr}_m(F_t)$ est semi-exceptionnel, c'est-à-dire somme directe de fibrés exceptionnels deux à deux isomorphes. Supposons que $\mathrm{Gr}_1(F_t)$ soit semi-exceptionnel (l'autre cas est analogue). Alors, on a

$$\begin{aligned}\chi(\mathrm{Gr}_1(F_t), F_t) &= \chi(\mathrm{Gr}_1(F_t), \mathrm{Gr}_1(F_t)) + \sum_{i>1} \chi(\mathrm{Gr}_1(F_t), \mathrm{Gr}_i(F_t))\\ &\geq \chi(\mathrm{Gr}_1(F_t), \mathrm{Gr}_1(F_t)) - 1 \geq 0.\end{aligned}$$

Mais on a $\mu(\mathrm{Gr}_1(F_t)) \geq \mu(F_t)$, et $M(r,c_1,c_2)$ n'est pas de hauteur nulle. Donc, conformément à la condition pour que $\dim(M(r,c_1,c_2)) > 0$ (cf. [7]), on a $\chi(\mathrm{Gr}_1(F_t), F_t) < 0$, ce qui est contradictoire. On ne peut donc pas avoir $\chi(\mathrm{Gr}_1(F_t), \mathrm{Gr}_m(F_t)) = 0$.

Supposons maintenant que $\chi(\mathrm{Gr}_1(F_t), \mathrm{Gr}_m(F_t)) = -1$, c'est-à-dire

$$\Delta_1 + \Delta_m = \frac{1}{r_1 r_m} + P(\mu_m - \mu_1). \tag{1}$$

On a vu que ni $\mathrm{Gr}_1(F_t)$ ni $\mathrm{Gr}_m(F_t)$ ne peuvent être semi-exceptionnels, donc on a $(2\Delta_i - 1)r_i^2 \geq 1$ pour $i = 1, m$, car $(2\Delta_i - 1)r_i^2 = d_i - 1$, d_i étant la dimension de la variété de modules contenant $\mathrm{Gr}_i(F_t)$. On a $d_i \geq 1$ car $\mathrm{Gr}_i(F_t)$ n'est pas semi-exceptionnel, et en fait $d_i \geq 2$ car il n'existe pas de variété de modules de dimension 1 d'après [7]. Donc

$$\frac{1}{r_1 r_m} + P(\mu_m - \mu_1) \geq 1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_m^2}\Big),$$

c'est-à-dire

$$1 - P(\mu_1 - \mu_m) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_m}\Big)^2 \leq 0.$$

Mais d'après le lemme (4.8) de [7], on a $0 \leq \mu_1 - \mu_m \leq 1$, donc $1 - P(\mu_1 - \mu_m) \geq 0$, d'où

$$1 - P(\mu_1 - \mu_m) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_m}\Big)^2 = 0,$$

et $\mu_1 = \mu_m$, $r_1 = r_m$. On a

$$\Delta_i \geq \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{r_i^2}\Big) \quad \text{pour } i = 1, m,$$

et d'après (1) on a $\Delta_1 + \Delta_m = 1 + 1/r_1^2$, donc $\Delta_1 = \Delta_m$ et finalement $H_1 = H_m$. Ceci contredit la définition de la filtration de Harder-Narasimhan de F_t. On a donc bien $\mathrm{codim}_T(Y) \neq 1$. La démonstration du fait que $\mathrm{codim}_T(Y) \neq 0$ est analogue, en plus facile. On a donc bien $\mathrm{codim}_T(T \backslash T^{ss}) \geq 2$. Ceci démontre la proposition 1.4.

1.5. Variétés de modules normalisées.

Rappelons qu'un faisceau cohérent sur $\mathbf{P}_2$ de rang $r > 0$ et de première classe de Chern c_1 est dit *normalisé* si $-1 < c_1/r \leq 0$. Soit k un entier. Si E est un faisceau cohérent de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, on note c_1', c_2' les classes de Chern de $E(k)$. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} c_1' &= c_1 + rk, \\ c_2' &= c_2 + (r-1)c_1 k + \frac{r(r-1)}{2}k^2. \end{aligned}$$

On définit un isomorphisme $M(r, c_1, c_2) \simeq M(r, c_1', c_2')$ en associant au point correspondant au faisceau semi-stable E le point correspondant à $E(k)$. Cet isomorphisme est compatible avec un isomorphisme évident de foncteurs

$$\Theta : F(r, c_1, c_2) \simeq F(r, c_1', c_2').$$

Le produit tensoriel par $[\mathcal{O}(-k)]$ définit un automorphisme

$$\Theta_k : K(\mathbf{P}_2) \longrightarrow K(\mathbf{P}_2).$$

Il est immédiat que Θ_k induit un isomorphisme

$$H(r, c_1, c_2) \simeq H(r, c_1', c_2'),$$

qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H(r, c_1, c_2) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, dash, "\Theta_k"'] & \mathrm{Pic}(F(r, c_1, c_2)) \arrow[d, dash, "\Theta"] \\ H(r, c_1', c_2') \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{Pic}(F(r, c_1', c_2')) \end{tikzcd}$$

et que

$$\Theta_k(\eta^*(r, c_1, c_2)) = \eta^*(r, c_1', c_2').$$

Il en découle que pour démontrer les théorèmes A à F on peut supposer que la variété de modules est normalisée (si $-k$ est la partie entière de c_1/r, on a en effet $-1 < c_1'/r \leq 0$).

1.6. Complexes de Kronecker.

1.6.1. On rappelle ici des résultats de [7]. Soit $K^\bullet$ un complexe fini de faisceaux cohérents sur $\mathbf{P}_2$. On définit le *rang* $\mathrm{rg}(K^\bullet)$, le *degré* $c_1(K^\bullet)$, la *caractéristique d'Euler* $\chi(K^\bullet)$ et le *polynôme de Hilbert* $P^\bullet_K$ de $K^\bullet$ par

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{rg}(K^\bullet) = \sum(-1)^i \mathrm{rg}(K^i) & ; & c_1(K^\bullet) = \sum(-1)^i c_1(K^i); \\ \chi(K^\bullet) = \sum(-1)^i \chi(K^i) & , & P_{K^\bullet} = \sum(-1)^i P_{K^i}, \end{array}$$

P_{K^i} désignant le polynôme de Hilbert de K^i. On appelle *complexe de Kronecker* un complexe du type

$$0 \longrightarrow \Lambda^2 Q^* \otimes H_{-1} \longrightarrow Q^* \otimes H_0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_1 \longrightarrow 0,$$

les H_i étant des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. On définit de manière évidente les morphismes de complexes de Kronecker, les sous-complexes de Kronecker et complexes de Kronecker quotients d'un complexe de Kronecker. On montre ainsi que les complexes de Kronecker forment une catégorie abélienne. Ils sont utilisés dans [1] pour étudier les fibrés stables de rang 2 sur $\mathbf{P}_2$. Ce sont des cas particuliers de *monades* (cf. Horrocks [15]).

Soit $K^\bullet$ un complexe de Kronecker de rang r, de degré c_1 et de caractéristique d'Euler χ. On dit que $K^\bullet$ est *semi-stable* (resp. *stable*) si pour tout sous-complexe de Kronecker $K'^\bullet$ de $K^\bullet$, avec $K'^\bullet \neq 0$ et $K'^\bullet \neq K^\bullet$, on a pour $m \gg 0$, $rP_{K'^\bullet}(m) - \mathrm{rg}(K'^\bullet)P_{K^\bullet}(m) \leq 0$ (resp. $<$). Ceci équivaut à

$$rc_1(K'^\bullet) - \mathrm{rg}(K'^\bullet)c_1 \leq 0,$$

et en cas d'égalité

$$r\chi(K'^\bullet) - \mathrm{rg}(K'^\bullet)\chi \leq 0 \text{ (resp. } <\text{)}.$$

Soit $M(r, c_1, c_2)$ une variété de modules telle que $M_s(r, c_1, c_2)$ soit non vide, et que $-r < c_1 \leq 0$. Soit E un faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 sur $\mathbf{P}_2$. On associe à E un complexe de Kronecker K_E

$$0 \longrightarrow \Lambda^2 Q^* \otimes H^1(E(-2)) \xrightarrow{u_E} Q^* \otimes H^1(E(-1)) \xrightarrow{v_E} \mathcal{O} \otimes H^1(E) \longrightarrow 0$$

au moyen de la suite spectrale de Beilinson ([1], [2], [18]). La dimension de l'espace vectoriel $H^1(E(-i))$ pour $i = 0, 1, 2$ ne dépend que de r, c_1, c_2. On a

$$\dim(H^1(E(-i))) = -\chi(E(-i)) = -r(P(c_1/r - i) - \Delta(r, c_1, c_2)).$$

Le morphisme de faisceaux u_E est injectif, v_E est surjectif, $\mathrm{Ker}(v_E)/\mathrm{Im}(u_E)$ est isomorphe à E et K_E est semi-stable. Si E est stable, K_E l'est aussi.

Réciproquement, soit

$$0 \longrightarrow \Lambda^2 Q^* \otimes H_{-1} \xrightarrow{u} Q^* \otimes H_0 \xrightarrow{v} \mathcal{O} \otimes H_1 \longrightarrow 0$$

un complexe de Kronecker semi-stable (resp. stable), la dimension de H_i étant $n_i = -\chi(E(i-1))$ pour $i = -1, 0, 1$. Alors le morphisme de faisceaux u est injectif, v est surjectif, et $\mathrm{Ker}(v)/\mathrm{Im}(u)$ est semi-stable (resp. stable) de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. De plus, le complexe de Kronecker précédent est isomorphe à celui qui est associé à $\mathrm{Ker}(v)/\mathrm{Im}(u)$.

Soit $\mathcal{M}$ la variété des tels complexes de Kronecker semi-stables. Elle est lisse et irréductible. Sur $\mathcal{M} \times \mathbf{P}_2$ existe un "complexe universel" dont la cohomologie en degré 0 est une famille de faisceaux de $M(r, c_1, c_2)$ paramétrée par $\mathcal{M}$. On en déduit un morphisme $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow M(r, c_1, c_2)$.

Le groupe $G_M = (GL(n_{-1}) \times GL(n_0) \times GL(n_1))/\mathbb{C}^*$ agit sur $\mathcal{M}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{lll} G_M \times \mathcal{M} & \longrightarrow \mathcal{M} & \\ (\mathbb{C}^*(g_{-1}, g_0, g_1), (u, v)) & \longmapsto ((I_{Q^*} \otimes g_0) \circ u \circ (I_{\Lambda^2 Q^*} \otimes g_{-1})^{-1}, & \\ & \quad g_1 \circ v \circ (I_{Q^*} \otimes g_0)^{-1}). & \end{array}$$

En fait, π est un bon quotient de $\mathcal{M}$ par G_M (proposition (2.6) de [7]).

1.6.2. Les caractères de G_M.

On note $\mathrm{Char}(G_M)$ le groupe des caractères de G_M. Supposons d'abord que $n_1 > 0$ et $n_{-1} > 0$. Les caractères de G_M sont définis par les triplets (a_0, a_1, a_2) d'entiers tels que

$$a_2 n_{-1} + a_1 n_0 + a_0 n_1 = 0.$$

Le caractère associé à (a_0, a_1, a_2) est

$$\begin{array}{l} \lambda : G_M \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \mathbb{C}^*(g_{-1}, g_0, g_1) \longmapsto \det(g_{-1})^{a_2} \det(g_0)^{a_1} \det(g_1)^{a_0}. \end{array}$$

Le groupe $\mathrm{Char}(G_M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. Si $n_1 = 0$ ou $n_{-1} = 0$, $\mathrm{Char}(G_M)$ s'identifie de même à un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ isomorphe à $\mathbb{Z}$.

1.6.3. Le morphisme $\Lambda : \mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow H$.

On supposera d'abord que $n_1 > 0$, $n_{-1} > 0$. Considérons le morphisme de groupes

$$\begin{array}{l} \Lambda_0 : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow K(\mathbf{P}_2) \\ (a_0, a_1, a_2) \longrightarrow \sum_{0 \le i \le 2} a_i [\mathcal{O}(-i)]. \end{array}$$

LEMME 1.5. – *Le morphisme Λ_0 est un isomorphisme.*

Soit $x = \sum_{0 \leq i \leq 2} a_i[\mathcal{O}(-i)]$ un élément de l'image de Λ_0. Alors on a

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(x) &= a_0 + a_1 + a_2, \\ c_1(x) &= -a_1 - 2a_2, \\ c_2(x) &= 2a_1a_2 + 2a_2(a_2-1) + a_1(a_1-1)/2 \\ &= \frac{1}{2}c_1(x)^2 - a_1/2 - 2a_2. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que pour tout triplet (r, c_1, c_2) d'entiers, le système d'équations

$$\begin{aligned} r &= a_0 + a_1 + a_2, \\ c_1 &= -a_1 - 2a_2, \\ c_2 - c_1^2/2 &= -2a_2 - a_1/2, \end{aligned}$$

possède une solution entière (a_0, a_1, a_2) unique. Ceci est vrai. Cette solution est

$$\begin{aligned} a_0 &= r - c_2 + c_1(c_1+3)/2, \\ a_1 &= 2c_2 - c_1^2 - 2c_1, \\ a_2 &= -c_2 + c_1(c_1+1)/2. \end{aligned}$$

Ceci démontre le lemme 1.5.

Remarque. – Un calcul simple montre que l'inverse de Λ_0 est défini par

$$\Lambda_0^{-1}([W]) = (\chi(W), -\chi(W \otimes Q^*), \chi(W(-1))),$$

pour tout fibré vectoriel algébrique W sur $\mathbf{P}_2$.

Par définition des entiers n_i, l'égalité $a_2n_{-1}+a_1n_0+a_0n_1 = 0$ équivaut à

$$\chi_\eta(\Lambda_0(a_0, a_1, a_2)) = 0.$$

Par conséquent, en voyant comme dans 1.6.2 $\mathrm{Char}(G_M)$ comme un sous-groupe de $\mathbb{Z}^3$, on a

$$\Lambda_0(\mathrm{Char}(G_M)) = H(r, c_1, c_2).$$

Le morphisme Λ est simplement la restriction de Λ_0. C'est un isomorphisme.

Etudions maintenant le cas $n_1 = 0$ (le cas $n_{-1} = 0$ est analogue). Dans ce cas $M(r, c_1, c_2)$ est une variété de modules de hauteur nulle de fibré exceptionnel associé $\mathcal{O}$. Le morphisme Λ est défini par

$$\Lambda(a_1, a_2) = a_1[\mathcal{O}(-1)] + a_2[\mathcal{O}(-2)],$$

pour tous entiers a_1, a_2 tels que $a_2 n_{-1} + a_1 n_0 = 0$. Dans ce cas ce n'est bien entendu pas un isomorphisme, mais on a un isomorphisme

$$H \simeq \Lambda(\mathrm{Char}(G_M)) \oplus \mathbf{Z}[\mathcal{O}].$$

1.7. Variétés de saut et formule de Porteous.

On décrit ici certains résultats de [10] et [14]. Soient S une variété algébrique lisse irréductible, E un fibré vectoriel de rang 2 sur S, P le fibré en droites projectives sur S déduit de E. On note $p : P \longrightarrow S$ la projection. Soit G un faisceau cohérent sur P, plat sur S. Pour tout point fermé s de S, on pose $G_s = G_{|p^{-1}(s)}$. Supposons que pour tout s, G_s soit sans torsion, et que si χ désigne la caractéristique d'Euler des faisceaux G_s, on ait $\chi \leq 0$. On définit dans [14], pour tout s, une application linéaire canonique

$$d_s : T_s S \longrightarrow L(H^0(G_s), H^1(G_s))$$

($T_s S$ désignant l'espace tangent de S en s). Si E est trivial, on a $P \simeq S \times \mathbf{P}_1$, et d_s s'interprète de la façon suivante : soient

$$\omega_s : T_s S \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(G_s, G_s)$$

le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de G en s,

$$\eta_s : \mathrm{Ext}^1(G_s, G_s) \longrightarrow L(H^0(G_s), H^1(G_s))$$

l'application canonique (appelée "comorphisme de Petri" dans [14]). Alors on a

$$d_s = -\eta_s \circ \omega_s$$

([14], 7.7). Dans le cas général, on peut définir un sous-schéma fermé $Z^1(G)$, dont le support est l'ensemble des s tels que $h^0(G_s) \geq 1$. On a, pour toute composante irréductible Y de $Z^1(G)$,

$$\mathrm{codim}_S(Y) \leq 1 - \chi.$$

En cas d'égalité (pour toutes les composantes), ou si $Z^1(G) = \emptyset$, l'élément de l'anneau de Chow de S associé à $Z^1(G)$ est donné par

$$[Z^1(G)] = c_{1-\chi}(-p_!(G))$$

(formule de Porteous). Soit s un point du support de $Z^1(G)$ tel que $h^0(G_s) = 1$. Alors, si d_s est surjective, $Z^1(G)$ est lisse en s.

2. Fibrés en droites sur un quotient.

Dans cette partie on définit le morphisme

$$\mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)).$$

On sait très bien définir un morphisme

$$\mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M_s(r, c_1, c_2))$$

(à l'aide de la proposition 2.2 qui suit). Le problème est donc de prolonger les fibrés en droites sur $M_s(r, c_1, c_2)$ provenant de $\mathrm{Char}(G_M)$ à $M(r, c_1, c_2)$. Plus généralement, étant donné un bon quotient $\pi : X \longrightarrow N$ par un groupe réductif G, on cherche des conditions suffisantes pour qu'un caractère de G définisse un fibré en droites sur N (voir 2.2 pour une définition précise). On montre ensuite (dans 2.8) que ces conditions sont vérifiées par tout caractère de G_M, dans le cas du quotient $\mathcal{M} \longrightarrow M(r, c_1, c_2)$.

2.1. Bons quotients.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe, X une variété algébrique intègre sur laquelle opère algébriquement le groupe G. Un *bon quotient* de X par G est un morphisme de variétés algébriques $\pi : X \longrightarrow N$ tel que

1) π est surjectif et affine.

2) Si U est un ouvert affine de N, on a $\mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G = \mathcal{O}_N(U)$, le premier terme de cette égalité désignant l'espace des fonctions régulières G-invariantes sur $\pi^{-1}(U)$.

3) Si F_1, F_2 sont des fermés disjoints G-invariants de X, alors $\pi(F_1)$ et $\pi(F_2)$ sont des fermés disjoints de N.

Le morphisme π possède alors la propriété universelle suivante : si $\varphi : X \longrightarrow Y$ est un morphisme G-invariant de variétés algébriques, il existe un unique morphisme $\varphi' : N \longrightarrow Y$ tel que $\varphi = \varphi' \circ \pi$. On en déduit l'unicité de N et π à isomorphisme près. La variété N est intègre, et normale si X l'est. On dit que π est un *quotient géométrique* si ses fibres sont les orbites de l'action de G et si elles ont la même dimension que G. Pour ces résultats, voir [21], [22] et [24].

On suppose dans ce qui suit que X possède un bon quotient $\pi : X \longrightarrow N$.

LEMME 2.1. — *Soit x_0 un point de X. Alors $\overline{Gx_0}$ contient une unique orbite fermée de X.*

Soit Gx une orbite contenue dans $\overline{Gx_0}$, et de dimension minimale. Alors Gx est fermée car sinon $\overline{Gx}\backslash Gx$ contiendrait une orbite de dimension inférieure à celle de Gx, et cette orbite serait contenue dans $\overline{Gx_0}$. Si Gy est une autre orbite fermée contenue dans $\overline{Gx_0}$, on a $\pi(Gx) = \pi(Gy) = \{\pi(x_0)\}$, donc d'après 3), Gx et Gy ne sont pas disjointes, et sont donc égales. Ceci démontre le lemme 2.1.

En fait on montre de même que $\pi^{-1}(\pi(x_0))$ contient une unique orbite fermée.

2.2. Fibrés en droites.

Dans tout ce qui suit on suppose que X possède un bon quotient $\pi : X \longrightarrow N$. Considérons une action linéaire de G sur le fibré trivial $X \times \mathbb{C}$, au-dessus de l'action de G sur X. Elle provient d'un *morphisme croisé*, c'est-à-dire un morphisme $\chi : G \times X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tel qu'on ait $\chi(gg', x) = \chi(g, g'x)\chi(g'x)$ pour tous g, g' dans G et x dans X. Si l'action de G sur X est libre et si π est un quotient géométrique, on déduit de χ un fibré en droites sur N (cf. [17]), c'est simplement $(X \times \mathbb{C})/G$.

Tout caractère λ de G définit un morphisme croisé : $\chi(g, x) = \lambda(g)$. Réciproquement, si toute fonction inversible sur G est le produit d'un caractère par une constante, tout morphisme croisé provient d'un caractère (proposition 13 de [6]). On supposera que c'est le cas dans tout ce qui suit.

Rappelons une conséquence de [17] (proposition 4) :

PROPOSITION 2.2. — *Supposons que G agisse librement sur X, que $\pi : X \longrightarrow N$ soit un quotient géométrique, et que toute fonction régulière inversible sur G soit le produit d'un caractère par une constante. Alors on a une suite exacte de groupes abéliens*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^*(X)/\mathbb{C}^* \xrightarrow{\psi} \mathrm{Char}(G) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Pic}(N) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}(X).$$

On a, pour toute fonction régulière inversible f sur X,

$$\psi(f)(g) = f(gx)/f(x),$$

pour tous g dans G et x dans X. Pour tout caractère λ de G, on a $\varphi(\lambda) = (X \times \mathbf{C})/G$, l'action de G sur $X \times \mathbf{C}$ étant définie par le morphisme croisé déduit de λ.

Soit λ un caractère de G. On va voir que sous des hypothèses plus générales que celles de la proposition 2.2, λ définit de façon naturelle un fibré en droites sur N. On peut d'ailleurs généraliser la proposition 2.2, en remplaçant Char(G) par le sous-groupe de Char(G) des caractères vérifiant ces conditions (on n'utilisera pas ce résultat par la suite).

Notons L'_λ le fibré $X \times \mathbf{C}$, muni de l'action de G définie par λ : $g(x,t) = (gx, \lambda(g)t)$. Soit V_λ la réunion des ouverts V de N tels qu'il existe une fonction inversible $f : \pi^{-1}(V) \longrightarrow \mathbf{C}^*$ λ^{-1}-*invariante*, c'est-à-dire telle que $f(gx) = \lambda(g)^{-1}f(x)$ pour tous x dans X et g dans G. Soit $(f_i : \pi^{-1}(V_i) \longrightarrow \mathbf{C}^*)$ la famille de toutes ces fonctions régulières λ^{-1}-invariantes. Posons $V_{ij} = V_i \cap V_j$. Une fonction G-invariante du type

$$\begin{aligned} f_{ij} : \pi^{-1}(V_{ij}) &\longrightarrow \mathbf{C}^* \\ x &\longmapsto f_i(x)/f_j(x) \end{aligned}$$

définit une fonction régulière $\overline{f_{ij}} : V_{ij} \longrightarrow \mathbf{C}^*$, d'après 2). Alors $(\overline{f_{ij}})$ est une famille de cocycles définissant un fibré en droites L_λ sur V_λ, et si π^*L_λ est muni de l'action évidente de G, il existe un G-isomorphisme canonique $\pi^*L_\lambda \simeq L'_\lambda$.

2.3. Résultat principal.

Proposition 2.3. — *On a $V_\lambda = N$ si et seulement si pour tout point x_0 de X la condition suivante (C_0) est réalisée :*

Soit Gx l'unique orbite fermée de X contenue dans $\overline{Gx_0}$. Soit

$$\begin{aligned} g : D - \{P\} &\longrightarrow G \\ t &\longmapsto g_t \end{aligned}$$

un morphisme ((D,P) étant un germe de courbe lisse), tel que

$$\begin{aligned} \beta : D - \{P\} &\longrightarrow \overline{Gx_0} \\ t &\longmapsto g_t x_0 \end{aligned}$$

admette un prolongement $\overline{\beta}$ à D tel que $\overline{\beta}(P) = x$. Alors le morphisme $\varphi = \lambda \circ g : D - \{P\} \longrightarrow \mathbf{C}^*$ admet un prolongement $\overline{\varphi}$ à D, et l'élément $\overline{\varphi}(P)$ de $\mathbf{C}^*$ est indépendant de g.

Autrement dit, si $\lim\limits_{t\to P} g_t x_0 = x$, $\lim\limits_{t\to P} \lambda(g_t)$ existe et ne dépend que de x_0 et x.

Soit x_0 un point de X tel que $\pi(x_0)$ soit dans V_λ. Montrons que x_0 vérifie (C_0). Il existe un voisinage V de $\pi(x_0)$ et une fonction λ^{-1}-invariante $f : \pi^{-1}(V) \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Alors on a, pour tout t dans $D - \{P\}$, $\lambda(g_t) = f(x_0)/f(g_t x_0)$, donc φ se prolonge à D entier par la formule $\overline{\varphi}(t) = f(x_0)/f(\overline{\beta}(t))$. On a $\overline{\varphi}(P) = f(x_0)/f(x)$, qui ne dépend que de x_0 et x. Donc x_0 vérifie bien la propriété (C_0).

Réciproquement, supposons que (C_0) soit satisfaite par tout point de X et montrons que $V_\lambda = N$. Considérons les conditions suivantes, pour tout point x_0 de X :

Condition (C') : Soit $m : G \longrightarrow \overline{Gx_0}$
$$g \longmapsto gx_0.$$
Alors λ se factorise de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "m"'] & \mathbb{C}^* \\ \overline{Gx_0} \arrow[ur, "\vartheta"'] & \end{tikzcd}$$

ϑ étant un morphisme de variétés algébriques.

Condition (C'') : Soient $\alpha : G \longrightarrow \overline{Gx_0} \times \mathbb{C}^*$
$$g \longmapsto (gx_0, \lambda(g)),$$
et q la restriction à $\mathrm{Im}(\alpha)$ de la projection $\overline{Gx_0} \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \overline{Gx_0}$.
Alors q est un morphisme bijectif.

Condition (C) : Soient $\overline{\alpha} : G \longrightarrow \overline{Gx_0} \times \mathbf{P}_1$
$$g \longrightarrow (gx_0, \lambda(g)),$$
et $\overline{q}$ la restriction à $\overline{\mathrm{Im}(\alpha)}$ de la projection $\overline{Gx_0} \times \mathbf{P}_1 \longrightarrow \overline{Gx_0}$.
Alors, si Gx désigne l'unique orbite fermée de X contenue dans $\overline{Gx_0}, \overline{q}^{-1}(x)$ est réduit à un point de la forme (x, t), avec t dans $\mathbb{C}^*$.

On démontrera successivement les assertions suivantes :

(i) Si x_0 vérifie la condition (C'), alors x_0 est dans V_λ.

(ii) (C') découle de (C'').

(iii) (C'') découle de (C).

(iv) (C) découle de (C_0).

2.4. Démonstration de (i).

Supposons que x_0 vérifie la condition (C'), en plus de la condition (C_0). Il faut montrer qu'il existe un voisinage U de $\pi(x_0)$ et une fonction régulière λ-invariante $f : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Soit U_0 un voisinage affine de $\pi(x_0)$. Alors $\pi^{-1}(U_0)$ est un voisinage affine de x_0. Considérons l'action de G sur $\Gamma(\pi^{-1}(U_0), L'_\lambda)$ (déduite de son action sur L'_λ). L'espace $\Gamma(\pi^{-1}(U_0), L'_\lambda)^G$ des points G-invariants est constitué précisément des fonctions λ-invariantes (non nécessairement inversibles) sur $\pi^{-1}(U_0)$. Sur $\Gamma(\pi^{-1}(U_0), L'_\lambda)$ on peut définir un opérateur de Reynolds

$$R : \Gamma(\pi^{-1}(U_0), L'_\lambda), \longrightarrow \Gamma(\pi^{-1}(U_0), L'_\lambda)^G,$$

bien que $\Gamma(\pi^{-1}(U_0), L'_\lambda)$ ne soit pas de dimension finie. En effet, il suffit pour cela de prouver que pour tout élément f de $\Gamma(\pi^{-1}(U_0), L'_\lambda)$, $G.f.$ est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\Gamma(\pi^{-1}(U_0), L'_\lambda)$. Cela résulte du fait que si Y et Z sont des variétés affines, σ une fonction régulière sur $Y \times Z$, l'ensemble des fonctions régulières du type $\sigma(y, -)$ est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{C}[Z]$ (on applique ce résultat à la fonction définie σ sur $G \times \pi^{-1}(U_0)$ par $\sigma(g,z) = (gf)(z)$).

La fonction ϑ est λ-invariante (elle l'est évidemment sur Gx_0, donc aussi sur son adhérence). Elle s'étend en une fonction régulière $\overline{\vartheta}$ sur $\pi^{-1}(U_0)$. Alors $R(\overline{\vartheta})$ est λ-invariante et sa restriction à $\overline{Gx_0}$ est ϑ, par fonctorialité de l'opérateur de Reynolds. Il reste à montrer que l'ouvert des points où $R(\overline{\vartheta})$ ne s'annule pas est de la forme $\pi^{-1}(U)$, U étant un ouvert de N (la fonction λ-invariante inversible est alors la restriction de $R(\overline{\vartheta})$ à $\pi^{-1}(U)$). Il suffit de montrer que si z est un point de $\pi^{-1}(U_0)$ tel que $R(\overline{\vartheta})(z) \neq 0$, alors $R(\overline{\vartheta})$ ne s'annule pas sur $\pi^{-1}(\pi(z))$. Soit Gu l'unique orbite fermée de X contenue dans $\pi^{-1}(\pi(z))$. Pour tout point y de $\pi^{-1}(\pi(z))$, Gu est contenue dans $\overline{Gy}$, donc la condition (C_0) permet de définir la "limite de $\lambda(g)$ quand gy tend vers u", qui est un scalaire non nul λ_y. On a alors par continuité, et car $R(\overline{\vartheta})$ est λ-invariante, $R(\overline{\vartheta})(u) = \lambda_z R(\overline{\vartheta})(z) = \lambda_y R(\overline{\vartheta})(y)$, ce qui prouve que $R(\overline{\vartheta})(y) \neq 0$. Ceci démontre (i).

2.5. Démonstration de (ii).

Supposons que x_0 vérifie la condition (C''). Le morphisme q est une bijection $\overline{\mathrm{Im}(\alpha)} \longrightarrow \overline{Gx_0}$, et si α' est le morphisme analogue à α déduit de λ^{-1}, la projection sur $\overline{Gx_0}$ induit une bijection $q' : \overline{\mathrm{Im}(\alpha')} \longrightarrow \overline{Gx_0}$. Considérons l'action de G sur $\overline{Gx_0} \times \mathbf{C}^*$

$$\begin{aligned} G \times (\overline{Gx_0} \times \mathbf{C}^*) &\longrightarrow \overline{Gx_0} \times \mathbf{C}^* \\ (g,(y,t)) &\longmapsto (gy, \lambda(g)^{-1}t). \end{aligned}$$

Puisque $\overline{Gx_0} \times \mathbf{C}^*$ est une variété affine, il existe un bon quotient $\pi_0 : \overline{Gx_0} \times \mathbf{C}^* \longrightarrow M_0$. On va montrer que la restriction p de π_0 à $\{x_0\} \times \mathbf{C}^*$ est un isomorphisme, et on identifiera ainsi M_0 et $\mathbf{C}^*$. Il suffira alors de prendre $\vartheta(y) = \pi_0(y,1)$, et (C') sera démontrée.

Montrons d'abord que p est injectif. Soient t, t' des scalaires tels que $\pi_0(x_0,t) = \pi_0(x_0,t')$. Cela signifie que $\overline{G(x_0,t)} \cap \overline{G(x_0,t')}$ est non vide. Soit (y,t_0) un point de cette intersection. Alors $(y,t_0/t)$ et $(y,t_0/t')$ sont dans $\overline{G(x_0,1)}$, qui n'est autre que $\overline{\mathrm{Im}(\alpha')}$. Comme q' est une bijection, on a $t_0/t = t_0/t'$, d'où $t = t'$, ce qui prouve l'injectivité de p.

Montrons maintenant que p est surjectif. Pour cela, il suffit de prouver que quelques soient y dans $\overline{Gx_0}$ et t dans $\mathbf{C}^*$, il existe un t' dans $\mathbf{C}^*$ tel que $\pi_0(y,t) = \pi_0(x_0,t')$, c'est-à-dire tel que $(y, t/t')$ soit dans $\overline{G(x_0,1)}$. Ceci est vrai car $\overline{G(x_0,1)} = \overline{\mathrm{Im}(\alpha')}$, et q' est une bijection.

Donc p est un morphisme bijectif. L'action de $\mathbf{C}^*$ sur $\overline{Gx_0} \times \mathbf{C}^*$ est compatible avec celle de G, et définit donc une action de $\mathbf{C}^*$ sur M_0. Puisque p est une bijection cette action est transitive, donc M_0 étant lisse en au moins un point l'est partout. De même, p est étale en au moins un point donc l'est partout. C'est donc un isomorphisme. Ceci démontre (ii).

2.6. Démonstration de (iii).

Supposons que (C) soit satisfaite pour tout point de X. On va montrer que (C'') l'est pour x_0. Il faut prouver que pour tout point y de $\overline{Gx_0}$, $q^{-1}(y)$ est réduit à un point. Soient $\overline{\alpha_y}$ le morphisme analogue à $\overline{\alpha}$ correspondant à y, et $\overline{q}_y$ la restriction à $\overline{\mathrm{Im}(\overline{\alpha}_y)}$ de la projection $\overline{Gy} \times \mathbf{P}_1 \longrightarrow \overline{Gy}$. Puisque Gx est l'unique orbite fermée de X contenue dans $\overline{Gy}$, $\overline{q_y}^{-1}(x)$ est réduit à un point (x,t_1), et $\overline{q}^{-1}(x)$ est aussi réduit à un point (x,t_0), t_0, t_1 étant des scalaires non nuls. On va montrer que $q^{-1}(y)$ est réduit au point $(y, t_0/t_1)$.

Soient

$$\begin{aligned} \Phi : G \times G &\longrightarrow X \times X \times X \times \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1 = Y \\ (g,g') &\longmapsto (gx_0, g'y, g'gx_0, \lambda(g'), \lambda(g'g)), \end{aligned}$$

et $p_1 : Y \longrightarrow X \times X \times X$ la projection. Montrons d'abord que (y,x,x,t_1,t_0) est un point de $\overline{\mathrm{Im}(\Phi)}$ et que c'est le seul point de $\overline{\mathrm{Im}(\Phi)} \cap p_1^{-1}(y,x,x)$.

On a, pour tout (g,g') dans $G\times G$, $p_1\circ\Phi(g,g')=(gx_0,g'y,g'gx_0)$. Il en découle que pour tout g' dans G, $(y,g'y,g'y)$ est un point de $\overline{\mathrm{Im}(p_1\circ\Phi)}$, donc $\overline{\mathrm{Im}(\Phi)}$ contient un point de type $(y,g'y,g'y,\lambda(g'),t)$. Par conséquent $\overline{\mathrm{Im}(\Phi)}$ contient un point de la forme (y,x,x,t_1,t). On a alors $t=t_0$: soient

$$\begin{aligned} p_2 : Y &\longrightarrow X\times \mathbf{P}_1\\ (x_1,x_2,x_3,t',t'') &\longmapsto (x_3,t'') \end{aligned}$$

la projection, et

$$\begin{aligned} \mu : G\times G &\longrightarrow G\\ (g,g') &\longmapsto gg'. \end{aligned}$$

Alors on a $\alpha\circ\mu=p_2\circ\Phi$, donc (x,t) est dans $\overline{\mathrm{Im}(\overline{\alpha})}$, d'ou $t=t_0$. De la même façon on montre que si $(y,x,x,t't'')$ est dans $\overline{\mathrm{Im}(\Phi)}$ on a $t'=t_1$. Puisque (y,x,x,t_1,t_0) est dans $\overline{\mathrm{Im}(\Phi)}$, $(y,t_0/t_1)$ est dans $\overline{\mathrm{Im}(\alpha)}$, car $\alpha=\vartheta\circ\Phi$, avec

$$\begin{aligned} \vartheta : X\times X\times X\times \mathbf{C}^*\times\mathbf{C}^* &\longrightarrow X\times\mathbf{C}^*\\ (x_1,x_2,x_3,t',t'') &\longmapsto (x_1,t''/t'). \end{aligned}$$

Il reste à montrer que si (y,t) est dans $\overline{\mathrm{Im}(\alpha)}$, on a $t=t_1/t_0$. Comme précédemment, on montre que pour tout g' dans G, $(y,g'y,g'y,\lambda(g'),\lambda(g')t)$ appartient à $\overline{\mathrm{Im}(\Phi)}$, d'où on déduit que (y,x,x,t_1,t_1t) est aussi dans $\overline{\mathrm{Im}(\Phi)}$, d'où $t_1t=t_0$ et finalement $t=t_0/t_1$. Ceci démontre (iii).

2.7. Démonstration de (iv).

Montrons que (C) est satisfaite si (C_0) l'est. Soit (x,t) un point de $\overline{q}^{-1}(x)$. Puisque (x,t) est dans $\overline{\mathrm{Im}(\overline{\alpha})}$, il existe un morphisme

$$\begin{aligned} \beta : D-\{P\} &\longrightarrow G\\ t &\longmapsto g_t \end{aligned}$$

((D,P) étant un germe de courbe lisse), tel que le morphisme

$$\begin{aligned} \psi : D-\{P\} &\longrightarrow \overline{Gx_0}\times\mathbf{P}_1\\ t &\longmapsto (g_tx_0,\lambda(g_t)) \end{aligned}$$

admette un prolongement $\overline{\psi}$ à D tel que $\overline{\psi}(P)=(x,t)$. D'après (C_0), t est donc dans $\mathbf{C}^*$ et est uniquement déterminé. Ceci démontre (iv).

2.8. Application.

On prend pour X l'espace $\mathcal{M}$ des complexes de Kronecker semi-stables du type

$$\Lambda^2 Q^* \otimes H_{-1} \longrightarrow Q^* \otimes H_0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_1$$

défini en 1.6. Sur $\mathcal{M}$ agit le groupe réductif $G_M = (\prod_{-1 \leq i \leq 1} GL(H_i))/\mathbb{C}^*$, et il existe un bon quotient $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow M$ (M est une variété de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$). Posons $n_i = \dim(H_i)$ pour $i = -1, 0, 1$. On supposera dans ce qui suit que n_{-1}, n_0, n_1 sont non nuls. Les autres cas se traitent de façon analogue.

Toute fonction inversible sur G_M est le produit d'un caractère de G_M par une constante. Donc, comme on l'a noté dans 2.2, les morphismes croisés $G_M \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ proviennent des caractères de G_M. Le résultat à démontrer est la

PROPOSITION 2.4. — *Soit λ un caractère de G_M alors λ possède la propriété (C_0).*

LEMME 2.5. — *Soit E un faisceau cohérent semi-stable sur $\mathbb{P}_2$. Soit σ un endomorphisme de E. Alors il existe une filtration de Jordan-Hölder de E invariante par σ.*

Considérons la filtration suivante de $E : 0 = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_m = E$, où, pour $1 \leq i \leq m$, E_i/E_{i-1} est la somme de tous les sous-faisceaux de E/E_{i-1}, stables et de mêmes pente et discriminant que E. Il est clair que cette filtration est invariante par σ. On cherche une filtration de Jordan-Hölder de E invariante par σ plus fine que la filtration précédente. On est donc ramené au cas où E est une somme directe de faisceaux stables. On peut écrire

$$E = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} E'_i \otimes \mathbb{C}^{n_i},$$

les E'_i étant des faisceaux stables de mêmes pente et discriminant que E, non isomorphes deux à deux. Les sous-faisceaux $E'_i \otimes \mathbb{C}^{n_i}$ de E sont invariants par σ. On est donc ramené au cas où $E = E' \otimes \mathbb{C}^n$, E' étant un faisceau stable. Un endomorphisme de E provient d'une matrice $n \times n$, et en trigonalisant celle-ci, on obtient une filtration de Jordan-Hölder de E invariante par σ. Ceci démontre le lemme 2.5.

LEMME 2.6. — *Soit E un faisceau semi-stable sur $\mathbf{P}_2$, somme directe de sous-faisceaux stables,*

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_m = E,$$
$$0 = E'_0 \subset E'_1 \subset \ldots \subset E'_m = E$$

des filtrations de Jordan-Hölder de E telles que pour $1 \leq i \leq m$, E_i/E_{i-1} soit isomorphe à E'_i/E'_{i-1}. Alors il existe un automorphisme σ de E tel que $\sigma(E_i) = E'_i$ pour $1 \leq i \leq m$.

Tout sous-faisceau stable de E de mêmes pente et discriminant que E est facteur direct de E. Il suffit donc, en raisonnant par récurrence sur le rang de E, de montrer que si F, F' sont des sous-faisceaux stables de E, isomorphes et de mêmes pente et discriminant que E, il existe un automorphisme de E envoyant F sur F'. Ceci est immédiat.

Soit λ un caractère de G_M, défini par le triplet d'entiers (a_0, a_1, a_2) (cf. 1.6.2).

Soient x_0 un point de $\mathcal{M}$, $G_M x$ l'unique orbite fermée de $\mathcal{M}$ contenue dans $\overline{G_M x_0}$. Soit $0 = z_0 \subset z_1 \subset \ldots \subset z_m = x_0$ une filtration de x_0 par des sous-complexes de Kronecker, correspondant à une filtration de Jordan-Hölder de la cohomologie E de x_0 en degré 0. On peut écrire

$$z_j : \Lambda^2 Q^* \otimes H^j_{-1} \longrightarrow Q^* \otimes H^j_0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^j_1,$$

pour $1 \leq i \leq m$, et (n_{-1}, n_0, n_1) est un multiple entier de $(\dim(H^j_i))_{-1 \leq i \leq 1}$. Soient $\mathcal{M}_j$ la variété de complexes de Kronecker semi-stables contenant z_j/z_{j-1}, G_{Mj} le groupe analogue à G_M opérant sur $\mathcal{M}_j$, λ_j le caractère de G_{Mj} défini par (a_0, a_1, a_2). Alors, si g est un élément de G_M laissant invariante la filtration précédente de x_0, et si g_j désigne l'élément de G_{Mj} induit par g, on a

$$\lambda(g) = \prod_{1 \leq j \leq m} \lambda_j(g_j).$$

On va en déduire le

COROLLAIRE 2.7. — *Si g est un élément du stabilisateur d'un point de $\mathcal{M}$, on a $\lambda(g) = 1$.*

En effet, supposons que g soit un élément du stabilisateur de x_0. D'après le lemme 2.5, on peut supposer que la filtration précédente de x_0 est invariante par g. Pour $1 \leq j \leq m$, g_j est un élément du stabilisateur de z_j/z_{j-1}. Puisque la cohomologie en degré 0 de z_j/z_{j-1} est stable, g_j

est l'élément neutre de G_{Mj}, d'où $\lambda(g_j) = 1$. On a donc $\lambda(g) = 1$, ce qui prouve le corollaire 2.7.

On utilisera plus loin le

LEMME 2.8. — *Soit y un complexe de Kronecker stable de $\mathcal{M}$. Alors le morphisme*

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathcal{M} \\ g &\longmapsto gy \end{aligned}$$

est un plongement.

Il suffit de montrer que ce morphisme est propre. Pour cela, il suffit de prouver que $G_M y$ est fermé (cf. [22], lemma 3.17.). Cela découle du fait que $G_M y$ est l'image réciproque d'un point par $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow M$.

Démontrons maintenant la proposition 2.4. Soient (D, P) un germe de courbe lisse, et

$$\begin{aligned} g : D - \{P\} &\longrightarrow G_M \\ t &\longmapsto g_t \end{aligned}$$

un morphisme tel que

$$\begin{aligned} \beta : D - \{P\} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ t &\longmapsto g_t x_0 \end{aligned}$$

admette un prolongement $\overline{\beta}$ à D, avec $\overline{\beta}(P) = x$. Il faut montrer que $\varphi = \lambda \circ g : D - \{P\} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ admet un prolongement $\overline{\varphi}$ à D, et que $\overline{\varphi}(P)$ ne dépend que de x_0 et x. Soit Γ_i la variété de drapeaux de sous-espaces vectoriels de H_i contenant $(H_i^j)_{1 \leq j \leq m}$, pour $-1 \leq i \leq 1$, et $\Gamma = \Gamma_{-1} \times \Gamma_0 \times \Gamma_1$. Le groupe G_M opère de manière évidente sur Γ de telle sorte que pour tout h dans G_M, $h((H_i^j))$ soit le triplet de filtrations associé à la filtration $0 = hz_0 \subset hz_1 \subset \ldots \subset hz_m$. Puisque Γ est une variété projective, le morphisme

$$\begin{aligned} \Theta : D - \{P\} &\longrightarrow \Gamma \\ t &\longmapsto g_t((H_i^j)) \end{aligned}$$

admet un prolongement $\overline{\Theta}$ à D. Il existe un morphisme $\sigma : D \longrightarrow G_M$ tel que pour tout t dans D on ait $\sigma(t)\overline{\Theta}(t) = ((H_i^j))$ (cela découle du fait que Γ s'identifie à $G_M/\mathrm{stab}((H_i^j))$). Alors, pour tout t dans D et tout entier j tel que $1 \leq j \leq m$, $\sigma(t)\overline{\beta}(t)$ possède un sous-module de Kronecker

$$z_j(t) : \Lambda^2 Q^* \otimes H_{-1}^j \longrightarrow Q^* \otimes H_0^j \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_i^j,$$

et $z_j(t)/z_{j-1}(t)$ est isomorphe à z_j/z_{j-1} (pour $t = P$ cela découle du lemme 2.8).

Un raisonnement analogue montre que si x_0 est isomorphe à la somme directe des z_j/z_{j-1}, il en est de même de x, et dans ce cas on peut prendre $x_0 = x$, c'est-à-dire que $G_M x_0$ est fermée. On en déduit que dans le cas général x est isomorphe à la somme directe des z_j/z_{j-1}.

On note, pour $1 \leq j \leq m$, et t dans $D - \{P\}$, $g_j(t)$ l'élément de G_{Mj} déduit de $\sigma(t)g_t$. D'après le lemme 2.8 le morphisme g_j admet un prolongement à D, aussi noté g_j. En fait $g_j(P)$ est l'unique élément γ de G_{Mj} tel que $z_j(P)/z_{j-1}(P) = \gamma \cdot z_j/z_{j-1}$. Le morphisme φ admet donc un prolongement $\overline{\varphi}$ à D, et pour tout t dans D on a

$$\overline{\varphi}(t) = \lambda(\sigma(t))^{-1} \prod_{1 \leq j \leq m} \lambda_j(g_j(t)).$$

Cette formule montre que la valeur de $\overline{\varphi}$ en P ne dépend que $\overline{\Theta}(P)$.

Montrons maintenant que $\overline{\Theta}(P)$ ne dépend pas de g. D'après le lemme 2.6, si $((H_i'^j))$ est un élément de Γ tel qu'il existe pour $1 \leq j \leq m$ un sous-complexe de Kronecker de x

$$z_j' : \Lambda^2 Q^* \otimes H_{-1}'^j \longrightarrow Q^* \otimes H_0'^j \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_1'^j$$

et que z_j'/z_{j-1}' soit isomorphe à z_j/z_{j-1}, il existe un g_0 dans G_{Mx}, le stabilisateur de x, tel que $g_0((H_i'^j)) = \overline{\Theta}(P)$. Soit alors $g' : D' - \{P\} \longrightarrow G_M$ un autre morphisme analogue à g. On note $\overline{\Theta}'$, σ', φ' les morphismes analogues à $\overline{\Theta}$, σ et φ, définis par g'. Supposons que $\overline{\Theta}'(P) = ((H_i'^j))$. On peut choisir $\sigma' : D \longrightarrow G_M$ de telle sorte que $\sigma'(P) = \sigma(P)g_0$. Puisque $\lambda(g_0) = 1$ d'après le corollaire 2.7 on a $\lambda(g_t') = \lambda(g_0 g_t')$ pour tout t dans $D' - \{P\}$, et on est ramené en remplaçant g' par $g_0 g'$, au cas où $\overline{\Theta}'(P) = \overline{\Theta}'(P) = \overline{\Theta}(P)$. On a alors $\overline{\varphi}'(P) = \overline{\varphi}(P)$. Ceci achève la démonstration de la proposition 2.4.

Conclusion : On a bien défini le morphisme naturel $\mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2))$.

3. Groupe de Picard.

Soit $M = M(r, c_1, c_2)$ une variété de modules de dimension strictement positive, $M_s = M_s(r, c_1, c_2)$, $\mathcal{M}$ la variété de complexes de Kronecker associée à M (cf. 1.6). On a un morphisme de groupes

$$\pi_M : \mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M),$$

qui d'après la proposition 2.4 se factorise de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
\overline{\pi}_M : \mathrm{Char}(G_M) \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_M"'] & & \mathrm{Pic}(M_s) \arrow[dl, "j"] \\
& \mathrm{Pic}(M_s) &
\end{tikzcd}$$

j étant la restriction. On démontrera dans la suite la

PROPOSITION 3.1. — *Le morphisme de groupes π_M est surjectif. C'est un isomorphisme si la variété de modules M n'est pas de hauteur nulle.*

Donnons les grands traits de sa démonstration. On peut se ramener au cas où $-r < c_1 \leq 0$.

Si $c_1 = 0$, on étudie directement la variété $\mathcal{M}$ (§4). Cette méthode s'inspire de [17].

Si $c_1 \neq 0$, on utilise la description d'Ellingsrud ([8]) de certains ouverts de M (§5).

Dans les cas où $c_1 = -1$ ou $1-r$, il sera nécessaire d'étudier certaines sous-variétés de M (§6).

Enfin, on traitera dans la partie 7 le cas $r = 2$, en utilisant les résultats de Strømme ([25]) et Le Potier ([17]).

On suppose dans le reste de cette partie que la proposition 3.1 est démontrée. On va en déduire les théorèmes A à F.

3.1. Démonstration du théorème A.

Il faut montrer que M est localement factorielle. C'est évident si $M \simeq \mathbf{P}_5$. Sinon, d'après le corollaire 1.3 on a $\mathrm{codim}_M(M \backslash M_s) \geq 2$. Il suffit donc de montrer que la restriction $j : \mathrm{Pic}(M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M_s)$ est surjective. C'est une conséquence de la surjectivité de π_M et de sa factorisation précédente.

3.2. Démonstration du théorème B.

Si M n'est pas de hauteur nulle, on a $\mathrm{codim}_M(M \backslash M_s) \geq 2$, donc, M étant localement factorielle, on a $\mathrm{Pic}(M) \simeq \mathrm{Pic}(M_s)$. Ce dernier est isomorphe à $\mathrm{Char}(G_M)$ d'après la proposition 3.1, et $\mathrm{Char}(G_M) \simeq \mathbb{Z}^2$. Donc $\mathrm{Pic}(M) \simeq \mathbb{Z}^2$.

Si M est de hauteur nulle, et si $M \simeq \mathbf{P}_5$, on a $\mathrm{Pic}(M) \simeq \mathbf{Z}$. Si M n'est pas isomorphe à $\mathbf{P}_5$, on a encore $\mathrm{codim}_M(M\backslash M_s) \geq 2$, et $\mathrm{Pic}(M) \simeq \mathrm{Pic}(M_s)$. Soit M_0 l'ouvert des points lisses de M. Il contient M_s et d'après [6] (théorème 7), on a $\mathrm{Pic}(M_0) \simeq \mathbf{Z}$. On a donc $\mathrm{Pic}(M) \simeq \mathbf{Z}$.

3.3. Démonstration du théorème C.

Il faut définir le morphisme $\mathbf{L} : H(r,c_1,c_2) = H \longrightarrow \mathrm{Pic}(M)$. La variété $\mathcal{M}$ est constituée de complexes de Kronecker du type

$$\Lambda^2 Q^* \otimes H_{-1} \longrightarrow Q^* \otimes H_0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_1.$$

Posons $n_i = \dim(H_i)$ pour $i = -1, 0, 1$. Supposons que $n_{-1} > 0$ et $n_1 > 0$. On a alors un isomorphisme $\Lambda : \mathrm{Char}(G_M) \simeq H$ (cf. 1.6.3). On prend simplement

$$\mathbf{L} = \overline{\pi}_M \circ \Lambda^{-1}.$$

Pour démontrer l'existence de $\mathbf{L}$, il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Char}(G_M) & \xrightarrow{\overline{\pi}_M} & \mathrm{Pic}(M) \\ {\scriptstyle \Lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ H & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Pic}(F) \end{array}$$

Soit λ un caractère de G_M, défini par un triplet (a_0, a_1, a_2) (cf. 1.6.2). Posons $\alpha = \Lambda(\lambda)$.

Soit V la cohomologie en degré 0 du complexe de Kronecker universel sur $\mathcal{M} \times \mathbf{P}_2$. On a des isomorphismes canoniques

$$R^1 p_{\mathcal{M}*}(V \otimes p_2^* \mathcal{O}(-i)) = \mathcal{O} \otimes H_{-i+1}$$

pour $i = 0, 1, 2, p_{\mathcal{M}}, p_2$ désignant les projections $\mathcal{M} \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathbf{P}_2$. Donc, par définition de γ, Λ et $\overline{\pi}_M$, on a des G_M-isomorphismes

$$(1) \qquad \pi^*(\overline{\pi}_M(\lambda)) \simeq \gamma(\alpha)_V \simeq \bigotimes_{0 \leq i \leq 2} \det(H_{i-1})^{\otimes a_i}.$$

Soit S une variété algébrique lisse, E une famille de faisceaux de $M(r, c_1, c_2)$ paramétrée par S. Les faisceaux $R^1 p_{S*}(E \otimes p_2^* \mathcal{O}(-i))$, $i = 0, 1, 2$, sont localement libres, et sur un voisinage d'un point s de S, on a des trivialisations

$$R^1 p_{S*}(E \otimes p_2^* \mathcal{O}(-i))_{|U_s} \simeq \mathcal{O}_{U_s} \otimes H_{-i+1},$$

d'où on déduit, à l'aide de la suite spectrale de Beilinson, un morphisme $f_s : U_s \longrightarrow \mathcal{M}$ tel que $f_{E|U_s} = \pi \circ f_s$. On en déduit à l'aide de (1) et de f_s un isomorphisme

$$\varphi : \gamma(\alpha)_{E|U_s} \simeq f_E^* \overline{\pi}_M(\lambda)_{|U_s}.$$

Si on prend une trivialisation différente de (1), le morphisme induit $U_s \longrightarrow \mathcal{M}$ est le produit de f_s par un morphisme $U_s \longrightarrow G_M$. Il en découle que φ ne dépend pas de la trivialisation (1). Les isomorphismes φ se recollent donc et définissent un isomorphisme

$$\gamma(\alpha)_E \simeq f_E^* \overline{\pi}_M(\lambda)_{|U_s}.$$

On a donc bien $\sigma(\overline{\pi}_M(\lambda)) = \gamma(\Lambda(\lambda))$. L'existence de $\mathbf{L}$ est ainsi prouvée. Son unicité découle de l'injectivité de σ (1.1.4).

Supposons maintenant que $n_1 = 0$ (le cas $n_{-1} = 0$ est analogue). Dans ce cas $M(r, c_1, c_2)$ est de hauteur nulle, de fibré exceptionnel induit $\mathcal{O}$. On a d'après 1.6.3 un isomorphisme naturel

$$H \simeq \Lambda(\mathrm{Char}(G_M)) \oplus \mathbb{Z}[\mathcal{O}].$$

On définit alors $\mathbf{L}$ par

$$\mathbf{L}([\mathcal{O}]) = \mathcal{O}_{M(r,c_1,c_2)},$$

et $$\mathbf{L} = \overline{\pi}_M \circ \Lambda^{-1} \quad \text{sur } \Lambda(\mathrm{Char}(G_M)).$$

Pour montrer que $\sigma \circ \mathbf{L} = \gamma$, il reste à prouver que le diagramme (*) est commutatif, ce qui est analogue au cas précédent. L'injectivité de σ entraîne aussi l'unicité de $\mathbf{L}$.

Ceci achève la démonstration du théorème C.

3.4. Démonstrations des théorèmes D et E.

Le théorème D découle du fait que $\mathbf{L} = \overline{\pi}_M \circ \Lambda^{-1}$, et de ce que $\overline{\pi}_M$ est un isomorphisme si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle.

Démontrons le théorème E. Supposons que $M(r, c_1, c_2)$ soit de hauteur nulle. Puisque $\overline{\pi}_M$ est surjectif, il découle de la définition de $\mathbf{L}$ (cf. 3.3), que $\mathbf{L}$ l'est aussi. Puisque $\mathrm{Pic}(M(r, c_1, c_2)) \simeq \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{Ker}(\mathbf{L}) \simeq \mathbb{Z}$. Il faut montrer que $\mathrm{Ker}(\mathbf{L})$ est engendré par $[F^*]$, F désignant le fibré exceptionnel induit par M. On sait déjà que $[F^*]$ est dans $\mathrm{Ker}(\mathbf{L})$. Il reste donc à montrer que $[F^*]$ ne peut pas se mettre sous la forme $[F^*] = nz$, avec n entier, $n > 1$, et z dans $K(\mathbf{P}_2)$. D'après 1.6.3, cela revient à prouver que les entiers $\chi(F^*)$,

$\chi(F^* \otimes Q^*)$ et $\chi(F^*(-1))$ sont premiers entre eux. Mais on peut voir (par un calcul direct ou en utilisant la suite spectrale de Beilinson), qu'on a

$$\mathrm{rg}(F^*) = -\chi(F^* \otimes Q^*) + \chi(F^*) + \chi(F^*(-1)),$$
$$c_1(F^*) = \chi(F^* \otimes Q^*) - 2\chi(F^*(-1)).$$

Puisque le rang et la première classe de Chern d'un fibré exceptionnel sont premiers entre eux d'après [7], $\chi(F^*)$, $\chi(F^* \otimes Q^*)$ et $\chi(F^*(-1))$ sont aussi premiers entre eux. Ceci achève la démonstration du théorème E.

3.5. Démonstration du théorème F.

Supposons d'abord que $\mathrm{codim}_M(M\backslash M_s) \geq 2$. On supposera que $n_{-1} > 0$, $n_1 > 0$ (les autres cas sont analogues). On a d'après [7] une suite exacte de fibrés vectoriels sur $\pi^{-1}(M_s) = \mathcal{M}_s$:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} \pi^*(T_{M_s}) \longrightarrow 0,$$

avec $A = \mathcal{O}_{\mathcal{M}_s} \otimes (\bigoplus_{-1\leq i\leq 1} \mathrm{End}(H_i))/\mathbf{C}$, B étant le noyau du morphisme

$$d : \mathcal{O}_{\mathcal{M}_s} \otimes (\mathrm{Hom}(\Lambda^2 Q^* \otimes H_{-1},\ Q^* \otimes H_0) \oplus \mathrm{Hom}(Q^* \otimes H_0,\ \mathcal{O} \otimes H_1))$$
$$\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}_s} \otimes \mathrm{Hom}(\Lambda^2 Q^* \otimes H_{-1},\ \mathcal{O} \otimes H_1),$$

défini au-dessus du point (u,v) de $\mathcal{M}_s$ par $d(u',v') = v'u - vu'$, pour tous u' dans $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 Q^* \otimes H_{-1}, Q^* \otimes H_0)$ et v' dans $\mathrm{Hom}(Q^* \otimes H_0, \mathcal{O} \otimes H_1)$. Les morphismes f, h, d sont des G_M-morphismes et d est surjectif. On a donc un isomorphisme de G_M-fibrés en droites

$$\pi^*(\omega_M)_{|\mathcal{M}_s} \simeq \det(B)^{-1} \det(A).$$

Le G_M-fibré $\det(B)$ se calcule à partir des déterminants des fibrés de départ et d'arrivée de d. Il en découle, puisque $\mathrm{codim}_M(M\backslash M_s) \geq 2$, qu'on a $\omega_M = \overline{\pi}_M(\lambda)$, λ étant le caractère de G_M défini par

$$\alpha = (3(n_0 - n_{-1}),\ 3(n_{-1} - n_1),\ 3(n_1 - n_0)).$$

Un calcul simple montre que $\Lambda(\alpha) = \eta^* \otimes \omega - \eta^*$. Le théorème F en découle.

Si $\mathrm{codim}_M(M\backslash M_s) \geq 2$, M est isomorphe à $\mathbf{P}_5$, et le théorème F est alors une conséquence de [6], IV, §7.

4. Le cas $c_1 = 0$, $r > 2$.

Rappelons que $\mathcal{M}$ désigne la variété des complexes de Kronecker associée à $M(r, 0, c_2)$. Soit $\mathcal{M}_p$ l'espace des complexes de Kronecker (u, v) tels que le morphisme de faisceaux u soit injectif, v surjectif, et $\mathrm{Ker}(v)/\mathrm{Im}(u)$ p-semi-stable (cf. 1.4). Soit $\mathcal{M}_s$ l'ouvert de $\mathcal{M}$ des complexes de Kronecker stables, $\mathcal{M}_0$ l'ouvert de $\mathcal{M}_s$ des complexes (u,v) tels que $\mathrm{Ker}(v)/\mathrm{Im}(u)$ soit localement libre. On supposera d'abord que $M(r,0,c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, c'est-à-dire que $r < c_2$. La variété $\mathcal{M}_p$ est lisse. Pour le voir on procède comme pour montrer que $\mathcal{M}$ est lisse (proposition (2.6) de [7]), en remarquant que pour tout faisceau p-semi-stable E, on a $\mathrm{Ext}^2(E,E) = 0$.

LEMME 4.1. — *On a* $\mathrm{codim}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}\backslash\mathcal{M}_s) \geq 2$, $\mathrm{codim}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{M}_p\backslash\mathcal{M}_s) \geq 2$ *et* $\mathrm{codim}_{\mathcal{M}_s}(\mathcal{M}_s\backslash\mathcal{M}_0) \geq 2$.

On applique les résultats de 1.4 à la cohomologie V du complexe de Kronecker universel sur $\mathcal{M}_p \times \mathbf{P}_2$. Cette famile de faisceaux sur $\mathbf{P}_2$ vérifie bien les propriétés (L) et (KS). D'après la proposition 1.1 on a

$$\mathrm{codim}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{M}_p\backslash\mathcal{M}) \geq 2,$$

et d'après la proposition 1.2, $\mathrm{codim}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}\backslash\mathcal{M}_s) \geq 2$, ce qui démontre les deux premières inégalités. La troisième découle de la proposition 2.8 de [7], et du fait que $r > 2$.

D'après [17], on a une suite exacte de groupes abéliens

$$\mathcal{O}^*(\mathcal{M}_s)/\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M_s(r,0,c_2)) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}(\mathcal{M}_s)$$

(cf. prop. 2.2), car l'action de G_M sur $\mathcal{M}_s$ est libre, et

$$\pi : \mathcal{M}_s \longrightarrow M_s(r,0,c_2)$$

est un quotient géométrique. Pour démontrer la proposition 3.1 il suffit donc d'après le lemme 4.1 de prouver la

PROPOSITION 4.2. — *On a* $\mathcal{O}^*(\mathcal{M}_p) = \mathbf{C}^*$ *et* $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_p) = 0$.

4.1. Restriction à des droites.

Pour tout élément non nul z de $H^0(\mathcal{O}(1))$, soit $\mathcal{M}_z$ l'ouvert de $\mathcal{M}_p$ constitué des complexes (u,v) tels que la restriction de $\mathrm{Ker}(v)/\mathrm{Im}(u)$ à la droite de $\mathbf{P}_2$ d'équation $z = 0$ soit un faisceau trivial.

LEMME 4.3. — *On a, si* z, z' *sont linéairement indépendants dans* $H^o(\mathcal{O}(1))$, $\mathrm{codim}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{M}_p\backslash(\mathcal{M}_z \sqcup \mathcal{M}_{z'})) \geq 2$.

D'après le lemme 4.1 il suffit de montrer que

$$\mathrm{codim}_{\mathcal{M}_0}(\mathcal{M}_0\backslash(\mathcal{M}_z \sqcup \mathcal{M}_{z'})) \geq 2.$$

D'après Hulek [16], les ouverts $\mathcal{M}_z$ et $\mathcal{M}_z$, sont non vides. Donc, si $Y = \mathcal{M}_0 \cap (\mathcal{M}_z \backslash \mathcal{M}_{z'})$, et si $\overline{Y}$ désigne l'adhérence de Y dans $\mathcal{M}_0$, il suffit de montrer que $\mathcal{M}_0 \backslash (\mathcal{M}_z \sqcup \mathcal{M}_{z'})$ est contenu dans $\overline{Y} \backslash Y$. Cela revient à montrer, puisque V vérifie la condition (KS), que tout fibré stable E de rang r et de classes de Chern $0, c_2$ dont les restrictions aux droites ℓ, ℓ' d'équations respectives $z = 0$, $z' = 0$, sont non triviales, peut se déformer en fibrés dont la restriction à ℓ est triviale, mais non la restriction à ℓ'. Autrement dit, il faut prouver que l'application canonique

$$\lambda : \mathrm{Ext}^1(E,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell}, E_{|\ell}) \oplus \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell'}, E_{|\ell'})$$

est surjective. Le faisceau $\mathrm{End}(E)_{\ell \sqcup \ell'}$ est un sous-faisceau de $\mathrm{End}(E)_{|\ell} \oplus \mathrm{End}(E)_{|\ell'}$, et le quotient est concentré en le point d'intersection de ℓ et ℓ'. On en déduit que l'application canonique

$$\mu : \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell \sqcup \ell'}, E_{|\ell \sqcup \ell'}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell}, E_{|\ell}) \oplus \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell'}, E_{|\ell'})$$

est surjective. On a d'autre part une suite exacte

$$0 \longrightarrow E(-2) \longrightarrow E \longrightarrow E_{\ell \sqcup \ell'} \longrightarrow 0,$$

d'où on déduit, en utilisant le fait que $\mathrm{Ext}^2(E, E(-2)) = 0$, que

$$\nu : \mathrm{Ext}^1(E,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell \sqcup \ell'}, E_{\ell \sqcup \ell'})$$

est surjective. Donc $\lambda = \mu \circ \nu$ est surjective. Ceci démontre le lemme 4.3.

Pour démontrer la proposition 4.2 il reste à prouver la

PROPOSITION 4.4. — *On a*

$$a - \mathcal{O}^*(\mathcal{M}_z \sqcup \mathcal{M}_{z'}) = \mathbb{C}^*,$$
$$b - \mathrm{Pic}(\mathcal{M}_z \sqcup \mathcal{M}_{z'}) = 0.$$

4.2. Démonstration de la proposition 4.4.

4.2.1. Etude de $\mathcal{M}_z$.

Posons $n = c_2$. On a alors $n > r > 2$. Les éléments de $\mathcal{M}_p$ sont des complexes

$$0 \longrightarrow \Lambda^2 Q^* \otimes \mathbb{C}^n \xrightarrow{u} Q^* \otimes \mathbb{C}^n \xrightarrow{v} \mathcal{O}^{n-r} \longrightarrow 0.$$

Soient $M(n)$ l'espace des matrices $n \times n$, $t_u : H^o(\mathcal{O}(1)) \longrightarrow M(n)$ l'application déduite de u, et $s_v : H^o(\mathcal{O}(1)) \longrightarrow L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-r})$ celle déduite de v.

PROPOSITION 4.5. — *On a*

(i) $\mathcal{O}^*(\mathcal{M}_z)/\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{Z}$, *et ce groupe est engendré par la fonction* $(u,v) \longrightarrow \det(t_u(z))$.

(ii) $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_z) = 0$.

Soient z', z'' des éléments de $H^0(\mathcal{O}(1))$ tels que (z, z', z'') soit une base de $H^0(\mathcal{O}(1))$. Le morphisme

$$\begin{aligned} h : \mathcal{M}_z &\longrightarrow M(n)^3 \times L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-r}) \\ (u,v) &\longmapsto (t_u(z), t_u(z'), t_u(z''), s_v(z), s_v(z'), s_v(z'')) \end{aligned}$$

induit un isomorphisme de $\mathcal{M}_z$ sur la sous-variété de $M(n)^3 \times L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-r})$ des $(A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2)$ tels que A_0 soit inversible, qu'on ait $B_j A_i = B_i A_j$ pour $0 \le i, j \le 2$, et que pour tout couple $((a_0, a_1, a_2), (b_0, b_1, b_2))$ d'éléments linéairement indépendants de $\mathbb{C}^3$ on ait

$$\mathrm{Im}\Big(\sum_{0 \le i \le 2} a_i B_i\Big) + \mathrm{Im}\Big(\sum_{0 \le i \le 2} b_i B_i\Big) = \mathbb{C}^{n-r}.$$

En effet, si $(A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2) = h(u,v)$, la première condition signifie que la restriction de $\mathrm{Ker}(v)/\mathrm{Im}(u)$ à la droite des zéros de z est triviale, la seconde que $v \circ u = 0$, et la troisième que v est surjectif. Réciproquement, si $(A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2)$ possède les trois propriétés précédentes, on en déduit un complexe de Kronecker (u,v) avec u injectif (comme morphisme de faisceaux) et v surjectif. Le faisceau $\mathrm{coker}(\mathrm{Im}(u))$ est sans torsion : cela découle du fait que le complexe de Kronecker réduit à u est semi-stable, A_0 étant inversible. L'absence de torsion de $\mathrm{coker}(u)$ découle alors de la proposition 2.3 de [7]. Donc $\mathrm{Ker}(v)/\mathrm{Im}(u)$ est sans torsion. La restriction de ce faisceau à la droite des zéros de z est triviale, car A_0 est inversible, donc $\mathrm{Ker}(v)/\mathrm{Im}(u)$ est de type de décomposition générique trivial, donc il est p-semi-stable. Par conséquent (u,v) est un élément de $\mathcal{M}_z$. On identifiera donc par la suite $\mathcal{M}_z$ et la sous-variété localement fermée image de h.

On a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z &\longrightarrow C_r \times GL(n) \\ (u,v) &\longmapsto ((t_u(z')t_u(z)^{-1}, t_u(z'')t_u(z)^{-1}, s_v(z)), t_u(z)), \end{aligned}$$

où C_r est définie de la façon suivante : c'est la variété des (A_1, A_2, B_0) de $M(n)^2 \times L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-r})$ tels que $\mathrm{Im}([A_1, A_2]) \subset \mathrm{Ker}(B_0)$, que B_0 soit surjective et que pour toutes valeurs propres a_1 de A_1 et a_2 de A_2 on ait $\mathrm{Im}(A_1 - a_1 I) + \mathrm{Im}(A_2 - a_2 I) + \mathrm{Ker}(B_0) = \mathbb{C}^n$.

Pour démontrer la proposition 4.5 il suffit de prouver la

PROPOSITION 4.6. — *On a*

(i) $\mathcal{O}^*(C_r) = \mathbb{C}^*$.

(ii) $\mathrm{Pic}(C_r) = 0$.

Démontrons la proposition 4.6. On a $\dim(\mathcal{M}_z) = 3n^2$. Il en découle que $\dim(C_r) = 2n^2$. Soit X_r la sous-variété de $M(n)^2 \times L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-r})$ des (A_1, A_2, B_0) vérifiant seulement les deux premières conditions précédentes, c'est-à-dire tels que $\mathrm{Im}([A_1, A_2]) \subset \mathrm{Ker}(B_0)$ et que B_0 soit surjective. Pour tout entier s tel que $0 < s < r$, soit X_r^s la sous-variété (localement fermée) de X_r constituée des (A_1, A_2, B_0) tels que $\mathrm{rg}([A_1, A_2]) = s$. Soit Z_r la sous-variété de $M(n)^2$ des (A, B) tels que $\mathrm{rg}([A, B]) = r$. Alors X_r^r est un $GL(n-r)$-fibré principal de base Z_r. Soit Z_r^{reg} l'ouvert de Z_r des (A, B) tels que A soit régulière, c'est-à-dire que son polynôme minimal soit de degré n. Soit $X_r^{r,\mathrm{reg}}$ l'ouvert des points de X_r^r au-dessus de Z_r^{reg}.

LEMME 4.7. — *On a* $\mathrm{codim}_{Z_r}(Z_r \backslash Z_r^{\mathrm{reg}}) \geq 2$.

Supposons que le lemme 4.7 soit démontré. Soit s un entier tel que $0 < s < r$. La donnée d'une surjection $\mathbb{C}^{n-s} \longrightarrow \mathbb{C}^{n-r}$ définit un morphisme $X_s^s \longrightarrow X_r^s$ qui est surjectif et dont les fibres sont de dimension $(n-s)(r-s)$. Donc, puisque $\dim(X_s^s) = \dim(X_r^r) = 2n^2$, on a $\mathrm{codim}_{X_r}(X_r^s) = (n-s)(r-s)$. On a $\dim(X_0^0) = 2n^2 + n$, d'où on déduit $\mathrm{codim}_{X_r}(X_r^0) = (r-1)n$. Il découle des égalités précédentes que $\mathrm{codim}_{X_r}(X_r \backslash X_r^r) \geq 2$. Le lemme 4.7 entraîne que $\mathrm{codim}_{X_r}(X_r \backslash X_r^{r,\mathrm{reg}}) \geq 2$. Posons

$$C_r^{\mathrm{reg}} = C_r \cap X_r^{r,\mathrm{reg}}.$$

Pour démontrer la proposition 4.6 il suffit donc de prouver la

PROPOSITION 4.8. — *On a*

(i) $\mathcal{O}^*(C_r^{\mathrm{reg}}) = \mathbb{C}^*$.

(ii) $\mathrm{Pic}(C_r^{\mathrm{reg}}) = 0$.

Démonstration du lemme 4.7 :

Pour toute matrice A, soit X_A^r la variété des matrices de la forme $[A, B]$, de rang r. Hulek a montré dans [16] que si A est régulière, X_A^r est irréductible de dimension $2rn - r^2 - n$. En fait, si Y_A est le sous-espace vectoriel de $M(n)$ des matrices de la forme $[A, B]$, et R_s la sous-variété de $M(n)$ des matrices de rang s pour $0 \leq s \leq n$, on a si A est régulière

$$\dim(X_A^r) = \dim(Y_A) - \mathrm{codim}_{M(n)}(R_r).$$

Soit A une matrice régulière. On va montrer que X_A^r engendre Y_A comme espace vectoriel. Pour cela, prouvons d'abord que

$$\overline{X_A^r} = X_A^r \sqcup X_A^{r-1} \sqcup \ldots \sqcup X_A^0.$$

On a $\overline{R_r} = R_0 \sqcup R_1 \sqcup \ldots \sqcup R_r$, et $\overline{R_r}$ est une variété irréductible, donc toutes les composantes irréductibles de $X_A^r \sqcup X_A^{r-1} \ldots \sqcup X_A^0 = Y_A \cap \overline{R_r}$ sont de dimension au moins égale à $\dim(Y_A) - \mathrm{codim}_{M(n)}(R_r) = \dim(X_A^r)$. Comme $\dim(X_A^s) < \dim(X_A^r)$ si $r > s$, $Y_A \cap \overline{R_r}$ est irréductible, donc $X_A^r \sqcup X_A^{r-1} \ldots \sqcup X_A^0 \subset \overline{X_A^r}$. L'inclusion réciproque étant immédiate, notre égalité est prouvée. Montrons maintenant que X_A^r engendre Y_A. Puisque X_A^r engendre le même sous-espace vectoriel de Y_A que son adhérence, il suffit de montrer que $X_A^2 \sqcup X_A^1$ engendre Y_A. Si A est une matrice régulière de blocs carrés

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

(relativement à une base de $\mathbb{C}^n$), Y_A est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} M_1 & P \\ Q & M_2 \end{pmatrix}$$

avec M_1 dans Y_{A_1} et M_2 dans Y_{A_2}. Pour le voir on remarque que Y_A est l'ensemble des matrices B telles que $\mathrm{Tr}(BC) = 0$ pour toute matrice C commutant avec A. Il suffit donc, pour prouver que $X_A^2 \sqcup X_A^1$ engendre Y_A, de considérer les cas où A est une matrice diagonale possédant n valeurs propres distinctes ou bien une matrice de Jordan. Dans le premier cas, Y_A est constitué des matrices dont les termes diagonaux sont nuls. On construit une base de Y_A dont les éléments sont dans X_A^1 en considérant des matrices dont un seul terme est non nul. En effet, si ce terme n'est pas sur la diagonale, une telle matrice est dans X_A^1. Si A est une matrice de Jordan, Y_A est constitué des matrices $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ telles que pour $k = 0, \ldots, n-1$ on ait

$$a_{1+k,1} + a_{2+k,2} + \ldots + a_{n,n-k} = 0.$$

On construit une base de Y_A en prenant d'une part des matrices n'ayant qu'un seul terme non nul d'indice i, j avec $i \leq j$, et d'autre part des matrices (a_{ij}) telles qu'il existe un entier k avec $0 \leq k \leq n-1$ tel que $a_{ij} = 0$ si $i - j \neq k$, et possédant exactement deux termes non nuls. Les matrices du premier type appartiennent à X_A^1, celles du second à X_A^2. Donc si A est une matrice régulière, X_A^r engendre Y_A.

On va maintenant montrer que si A est une matrice non régulière, alors $\dim(X_A^r) < 2rn - r^2 - n$. Remarquons d'abord qu'il existe une matrice régulière A_0 telle que $Y_A \subset Y_{A_0}$: il suffit de trouver une matrice régulière A_0 telle que toute matrice commutant avec A_0 commute aussi avec A, car alors si C commute avec A_0, pour toute matrice B on a $\mathrm{Tr}([A,B]C) = 0$, donc $[A,B]$ est dans Y_{A_0}. Pour trouver A_0 on peut supposer que A est une matrice diagonale de matrices $B_1,\ldots,B_m$ régulières. On prend pour A_0 une matrice du même type avec à la place de B_i une matrice $B_i - a_iI$, les scalaires a_i étant choisis de telle sorte que A_0 soit régulière. L'inclusion $Y_A \subset Y_{A_0}$ est stricte car A n'est pas régulière. On a $X^r_A = X^r_{A_0} \cap Y_A$, et comme $X^r_{A_0}$ engendre Y_{A_0}, que $\dim(Y_A) < \dim(Y_{A_0})$, et que $X^r_{A_0}$ est irréductible, on a $\dim(X^r_A) < \dim(X^r_{A_0}) = 2rn - r^2 + n$.

Démontrons maintenant le lemme 4.7. Soient H un polynôme unitaire de degré au plus $n-1$, A une matrice de polynôme minimal H. Soit $n+d$ la dimension du commutant de A. Soit D_H la variété des matrices dont le polynôme minimal est H. Alors on a $\dim(D_H) \leq n^2 - n - d$. Soit C_H la variété des couples de matrices (A,B) tels que $\mathrm{rg}([A,B]) = r$, et que le polynôme minimal de A soit H. D'après ce qui précède on a $\dim(C_H) < 2rn - r^2 - n + n^2$, donc on a

$$\dim(Z_r \backslash Z_r^{\mathrm{reg}}) < 2rn - r^2 + n^2 - 1 = \dim(Z_r) - 1,$$

ce qui démontre le lemme 4.7.

Démonstration de la proposition 4.8 :

Soit S l'ouvert de $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-r})$ des applications linéaires surjectives, et

$$\begin{aligned} F : (M(n) \times S) \times M(n) &\longrightarrow (M(n) \times S) \times L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-r}) \\ ((A,B_0),B) &\longmapsto ((A,B_0), B_0[A,B]). \end{aligned}$$

C'est un morphisme de fibrés vectoriels sur $M(n) \times S$. Pour tout A dans $M(n)$ on note C_A le commutant de A dans $M(n)$. Soit $M(n)^{\mathrm{reg}}$ l'ouvert de $M(n)$ constitué des matrices régulières.

LEMME 4.9. — (i) *Le morphisme F est surjectif en (A,B_0) si et seulement si aucun élément non nul de C_A ne s'annule sur* $\mathrm{Ker}(B_0)$.

(ii) *Il existe un ouvert U de $M(n)_{\mathrm{reg}} \times S$ tel que F soit surjectif en tout point de U et que*

$$\begin{aligned} &(F_{|U})^{-1}(0) \subset C_r^{\mathrm{reg}}, \\ &\mathrm{codim}_{C_r}(C_r^{\mathrm{reg}} \backslash (F_{|U})^{-1}(0)) \geq 2, \\ &\mathrm{codim}_{M(n)\times S}((M(n) \times S) \backslash U) \geq 2. \end{aligned}$$

(i) On reprend les notations du lemme 4.7. On munit $M(n)$ du produit scalaire défini par la trace. Alors $F_{(A,B_0)}$ est surjective si et seulement si $Y_A + L(\mathbb{C}^n, \mathrm{Ker}(B_0)) = M(n)$, c'est-à-dire si et seulement si $Y_A^\perp \cap L(\mathbb{C}^n, \mathrm{Ker}(B_0))^\perp$ est réduit à $\{0\}$, et (i) découle du fait que $Y_A^\perp = C_A$, et que $L(\mathbb{C}^n, \mathrm{Ker}(B_0))^\perp$ est l'espace des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ qui s'annulent sur $\mathrm{Ker}(B_0)$.

(ii) Si A est une matrice régulière, $C_A = \mathbb{C}[A]$, et $\mathbb{C}[A] \cap L(\mathbb{C}^n, \mathrm{Ker}(B_0))^\perp$ est un idéal de $\mathbb{C}[A]$, engendré par un élément $P_{A,B_0}(A)$, P_{A,B_0} étant un polynôme de degré au plus $n-1$ divisant le polynôme minimal de A. On a

$$\dim(\mathbb{C}[A] \cap L(\mathbb{C}^n, \mathrm{Ker}(B_0))^\perp) = n - \deg(P_{A,B_0}).$$

Pour $1 \leq k \leq n-1$, soit $V_{B_0,k}$ la sous-variété de $M(n)_{\mathrm{reg}}$ des A telles que $\deg(P_{A,B_0}) = k$. Toute matrice A de $V_{B_0,k}$ possède un sous-espace invariant de dimension k contenant $\mathrm{Ker}(B_0)$. Donc $r \leq k$ et

$$\dim(V_{B_0,k}) \leq (k-r)(n-k) + k^2 + n(n-k) = n^2 - r(n-k).$$

Soit W_k la sous-variété de $M(n)_{\mathrm{reg}} \times S$ des (A, B_0) tels que A soit dans $V_{B_0,k}$. Alors on a

$$\dim((F_{|W_k})^{-1}(0)) = \dim(W_k) + d \leq n^2 + n(n-r) - r(n-k) + d,$$

d étant la dimension du noyau de F en un point de W_k. Si (A, B_0) est un point de W_k, $\mathrm{Im}(F_{(A,B_0)})$ est de codimension $n-k$, donc $d = nr + n - k$, et

$$\dim((F_{|W_k})^{-1}(0)) \leq 2n^2 - (n-k)(r-1).$$

Soit U le complémentaire de l'union des W_k pour $r \leq k \leq n-1$. Alors $(F_{|U})^{-1}(0)$ est contenu dans C_r^{reg}, puisque si (A, B_0) est dans U, et si a est une valeur propre de A, on a

$$\mathrm{Ker}(B_0) + \mathrm{Im}(A - aI) = \mathbb{C}^n,$$

A n'étant pas dans $V_{B_0,k}$. D'après ce qui précède on a donc

$$\mathrm{codim}_{C_r}(C_r^{\mathrm{reg}} \backslash (F_{|U})^{-1}(0)) \geq r - 1 \geq 2.$$

La troisième inégalité du lemme 4.9 est immédiate. Sa démonstration est donc achevée.

On peut maintenant démontrer la proposition 4.8. On a

$$\mathcal{O}^*(C_r^{\mathrm{reg}}) \simeq \mathcal{O}^*((F_{|U})^{-1}(0)) \text{ et } \mathrm{Pic}(C_r^{\mathrm{reg}}) \simeq \mathrm{Pic}((F_{|U})^{-1}(0)),$$

et $(F_{|U})^{-1}(0)$ est un fibré vectoriel sur U, donc

$$\mathcal{O}^*(C_r^{\mathrm{reg}}) \simeq \mathcal{O}^*(U) \text{ et } \mathrm{Pic}(C_r^{\mathrm{reg}}) \simeq \mathrm{Pic}(U).$$

Mais U est un ouvert de $M(n) \times S$ dont le complémentaire est de codimension au moins 2, donc $\mathcal{O}^*(U) = \mathbb{C}^*$ et $\mathrm{Pic}(U) = 0$, ce qui dénombre la proposition 4.8.

Les propositions 4.6 et 4.5 sont donc aussi démontrées.

4.2.2. Démonstration de la proposition 4.4.

Prouvons d'abord $a-$, c'est-à-dire que $\mathcal{O}^*(\mathcal{M}_z \sqcup \mathcal{M}_{z'}) = \mathbb{C}^*$. Soit Δ l'hypersurface de $\mathcal{M}_z \sqcup \mathcal{M}_{z'}$ définie par l'équation

$$\varphi(u,v) = \det(t_u(z)) = 0.$$

Il suffit, d'après la proposition 4.5 de montrer que Δ est non vide. Soit $((A_1, A_2, B_0), C)$ un élément de $\mathcal{M}_{z'}$, avec $A_1 = t_u(z)$. Alors, si a_1 est une valeur propre de A_1, $((A_1 - a_1 I, A_2, B_0), C)$ est un élément de $\mathcal{M}_{z'} \cap \Delta$, donc $\Delta \neq \emptyset$.

Prouvons maintenant $b-$, c'est-à-dire que $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_z \sqcup \mathcal{M}_{z'}) = 0$. Il suffit de montrer que Δ est une hypersurface intègre de $\mathcal{M}_{z'}$. En effet, on a dans ce cas une suite exacte

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathrm{Pic}(\mathcal{M}_z \sqcup \mathcal{M}_{z'}) \xrightarrow{\text{restr.}} \mathrm{Pic}(\mathcal{M}_z) = 0,$$

le morphisme i associant à 1 le faisceau d'idéaux de Δ. Or celui-ci est trivial car Δ est défini par une équation algébrique. Donc $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_z \sqcup \mathcal{M}_{z'}) = 0$. Montrons que Δ est une hypersurface intègre de $\mathcal{M}_{z'}$.

Avec les notations du lemme 4.9, il suffit de montrer que la sous-variété de $(F_{|U})^{-1}(0)$ définie par l'équation $f(x) = 0$, où

$$f(x) = \det(A) \text{ si } x = ((A, B_0), B),$$

est une hypersurface intègre de $(F_{|U})^{-1}(0)$. Ceci est immédiat.

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.4.

4.3. Le cas des variétés de hauteur nulle.

La variété $M(r, c_1, c_2)$ est de hauteur nulle si et seulement si $r = n$. Dans ce cas, $\mathcal{M}_s$ est un ouvert de l'espace affine $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 Q^* \otimes \mathbb{C}^n, Q^* \otimes \mathbb{C}^n)$, donc $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_s) = 0$, d'où la surjectivité du morphisme π_M. Ceci achève la démonstration de la proposition 3.1 dans le cas où $c_1 = 0, r > 2$.

5. Le cas $-r < c_1 < 0, r > 2$.

Il s'agit toujours de démontrer la proposition 3.1 dans les cas précisés dans le titre. Pour cela, on utilise une description due à Ellingsrud ([8]) d'un ouvert U de $M_s(r, c_1, c_2)$. On montre que le morphisme de groupes induit par π_M

$$\mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U)$$

est surjectif. Dans certains cas, $M_s(r, c_1, c_2)\backslash U$ peut contenir des hypersurfaces de $M_s(r, c_1, c_2)$. On montrera alors que les faisceaux d'idéaux de ces hypersurfaces proviennent de $\mathrm{Char}(G_M)$. La démonstration de quelques résultats concernant les cas $c_1 = -1$ ou $1 - r$ sera effectuée dans le §6.

5.1. La construction d'Ellingsrud et son utilisation.

5.1.1. Fibrés sur $\mathbf{P}_2$ et éclatements de $\mathbf{P}_2$.

Soient r, c_1, c_2 des entiers tels que $-r < c_1 < 0$, $r > 2$, et que $M(r, c_1, c_2)$ soit de dimension strictement positive. On donne ici une description de certains ouverts de $M(r, c_1, c_2)$, tirée de [8].

Soient x un point de $\mathbf{P}_2$, U_x l'ouvert de $M_s(r, c_1, c_2)$ constitué des fibrés vectoriels dont la restriction à toute droite passant par x est rigide. Dans le cas où c_1 est distinct de -1 et $1 - r$, on verra que $\mathrm{codim}_{M_s}(M_s(r, c_1, c_2)\backslash U_x) \geq 2$. Soit P_x l'éclatement de $\mathbf{P}_2$ en x. C'est la sous-variété de $\mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2^*$ des couples (y, ℓ), ℓ étant une droite de $\mathbf{P}_2$ contenant x et y. Soient $p : P_x \longrightarrow \mathbf{P}_2$ et $q : P_x \longrightarrow L$ les projections, L désignant la droite de $\mathbf{P}_2^*$ définie par x. La fibre $p^{-1}(x)$ s'identifie à L (à l'aide de q). Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbf{P}_2$, de type de décomposition $(-1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$ sur toute droite passant par x, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. Posons

$$A = q_* p^* E, \quad B = (q_* p^*(E^*(-1)))^*.$$

Ce sont des fibrés vectoriels sur L, et on a sur P_x une suite exacte

$$0 \longrightarrow q^* A \longrightarrow p^* E \longrightarrow q^* B \otimes p^* \mathcal{O}(-1) \longrightarrow 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) \quad &= r + c_1, \ \mathrm{rg}(B) = -c_1, \\ c_1(A) \quad &= -c_2 + c_1(c_1 + 1)/2 = -c_1(B). \end{aligned}$$

De plus, si E est stable, A est de type de décomposition négatif, B de type de décomposition positif. Il n'y a donc qu'un nombre fini de choix possibles pour les types de décomposition de A et B.

Réciproquement, on considère des fibrés vectoriels A, B sur $\mathbf{P}_1$ possédant les propriétés précédentes, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= r + c_1, \ \mathrm{rg}(B) = -c_1, \\ c_1(A) &= -c_2 + c_1(c_1+1)/2 = -c_1(B), \end{aligned}$$

que A est de type de décomposition négatif, et B de type de décomposition positif. Les constructions qui vont suivre ne dépendent que des classes d'isomorphisme de A et B, c'est-à-dire de leurs *types de décomposition* (cf. 1.4.3), notés respectivement α, β.

En général, il existe un fibré vectoriel sur L, unique à isomorphisme près, rigide et de rang et première classe de Chern donnés. On notera A_0 et B_0 des fibrés rigides sur L tels que

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A_0) &= r + c_1, \ \mathrm{rg}(B_0) = -c_1, \\ c_1(A_0) &= -c_2 + c_1(c_1+1)/2 = -c_1(B_0). \end{aligned}$$

Les types de décomposition de A_0 et B_0 seront notés respectivement α_0, β_0.

Les extensions

$$0 \longrightarrow q^*A \longrightarrow E \longrightarrow q^*B \otimes p^*\mathcal{O}(-1) \longrightarrow 0$$

sont classifiées par

$$V_{\alpha\beta} = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{P_x}}(q^*B \otimes p^*\mathcal{O}(-1), q^*A).$$

Sur $V_{\alpha\beta} \times P_x$ existe une *extension universelle*

$$O \longrightarrow p_1^* q^* A \longrightarrow F \longrightarrow p_1^*(q^*B \otimes p^*\mathcal{O}(-1)) \longrightarrow 0,$$

p_1 désignant la projection $V_{\alpha\beta} \times P_x \longrightarrow P_x$. Sur $V_{\alpha\beta}$ agit le groupe $G = (\mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Aut}(B))/\mathbf{C}^*$, et pour tous ε, ε' dans $V_{\alpha\beta}$, on a $F_\varepsilon \simeq F_{\varepsilon'}$ si et seulement si ε, ε' sont dans la même orbite. Soit $V^s_{\alpha\beta}$ l'ouvert de $V_{\alpha\beta}$ des points ε tels que F_ε provienne d'un fibré vectoriel sur $\mathbf{P}_2$ (cela revient à dire que la restriction de F_ε à $p^{-1}(x)$ est triviale) qui soit stable. Alors G agit librement sur $V^s_{\alpha\beta}$. Soit F' le fibré vectoriel sur $V^s_{\alpha\beta} \times \mathbf{P}_2$ déduit de F, c'est-à-dire l'image directe par $I \times p$ de la restriction de F à $V^s_{\alpha\beta} \times P_x$. On déduit de F' un morphisme

$$f_{\alpha\beta} : V^s_{\alpha\beta} \longrightarrow M(r, c_1, c_2)$$

dont les fibrés sont les orbites de l'action de G.

5.1.2. Plan des démonstrations.

On verra que $X_0 = \mathrm{Im}(f_{\alpha_0\beta_0})$ est un ouvert de $M_s(r,c_1,c_2)$. On définit dans 5.6 un morphisme $X_0 \longrightarrow \mathcal{M}$ compatible avec un morphisme de groupes

$$\psi : G \longrightarrow G_{\mathcal{M}}.$$

On déduit de ψ un morphisme de groupes

$$\overline{\psi} : \mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow \mathrm{Char}(G).$$

D'autre part, on construira un morphisme naturel surjectif

$$G_1 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_0),$$

G_1 désignant un quotient de $\mathrm{Char}(G)$, et ce morphisme est un isomorphisme si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle. Le composé

$$\mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow G_1 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_0)$$

est le morphisme déduit de π_M. Il est surjectif. On en déduira la proposition 3.1 dans 5.8.

Dans certains cas $U_x \backslash X_0$ est constitué d'un certain nombre d'hypersurfaces irréductibles de la forme $\overline{\mathrm{Im}(f_{\alpha\beta})}$, et on prouvera que leurs faisceaux d'idéaux proviennent de $\mathrm{Char}(G_M)$ (5.9). Si $c_1 \neq -1$ et $c_1 \neq 1-r$, $M_s(r, c_1, c_2)\backslash U_x$ est de codimension au moins 2 et sinon c'est une hypersurface et on montrera dans le §6 que son faisceau d'idéaux provient de $\mathrm{Char}(G_M)$.

5.1.3. Dimension des $\overline{\mathrm{Im}(f_{\alpha\beta})}$.

Un calcul élémentaire donne si $V^s_{\alpha\beta}$ n'est pas vide

$$\dim(\overline{\mathrm{Im}(f_{\alpha\beta})}) = \dim(M(r, c_1, c_2)) - \dim(\mathrm{Ext}^1(A, A)) - \dim(\mathrm{Ext}^1(B, B)).$$

On peut aussi déduire ce résultat du

LEMME 5.1. — *Soit* $0 \longrightarrow q^*A \longrightarrow p^*E \longrightarrow q^*B \otimes p^*\mathcal{O}(-1) \longrightarrow 0$ *une suite exacte, E étant un fibré vectoriel sur* $\mathbf{P}_2$. *Soit* $h : V_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E, E)$ *l'application déduite de cette suite. Alors on a un isomorphisme*

$$\mathrm{Coker}(h) \simeq \mathrm{Ext}^1(A, A) \oplus \mathrm{Ext}^1(B, B).$$

A la filtration $q^*A \subset p^*E$ de p^*E est associée une suite spectrale $E_r^{m,n}$ convergeant vers $\mathrm{Ext}^{m+n}(E, E)$. On va décrire les termes de niveau E_1 pouvant éventuellement être non nuls. On a $\mathrm{Ext}^i(q^*A, q^*B \otimes p^*\mathcal{O}(-1)) = 0$ (cela se voit en utilisant le foncteur q^*). De même, $\mathrm{Ext}^2(q^*B \otimes p^*\mathcal{O}(-1), q^*A) = 0$, et $\mathrm{Hom}(q^*B \otimes p^*\mathcal{O}(-1), q^*A) = 0$. Les termes $E_1^{m,n}$ éventuellement non nuls sont figurés ci-dessous

$$\begin{array}{l|ll}
\uparrow n & & \\
\mathrm{Ext}^1(A,A)\oplus \mathrm{Ext}^1(B,B) & & \\
\bullet & & \\
\mathrm{Ext}^0(A,A)\oplus \mathrm{Ext}^0(B,B) & & V_{\alpha\beta} \\
\hline
 & & \xrightarrow{\quad m \quad}
\end{array}$$

On a donc une suite exacte

$$V_{\alpha\beta} \xrightarrow{h} \mathrm{Ext}^1(E,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A,A)\oplus \mathrm{Ext}^1(B,B) \longrightarrow 0.$$

Ceci démontre le lemme 5.1.

5.2. Caractérisation des fibrés provenant de $\mathbf{P}_2$.

Soit $H_{\alpha\beta}$ l'ensemble des points ε de $V_{\alpha\beta}$ tels que F_ε ne provienne pas d'un fibré vectoriel sur $\mathbf{P}_2$. C'est l'ensemble des points ε tels que

$$h^0(p^{-1}(x), F_\varepsilon \otimes \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}(-1)) \neq 0.$$

D'après le théorème de semi-continuité, c'est donc une sous-variété fermée de $V_{\alpha\beta}$. Soit ε le point de $V_{\alpha\beta}\backslash H_{\alpha\beta}$ correspondant à l'extension du lemme 5.1. Alors l'application $h : V_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F'_\varepsilon, F'_\varepsilon)$ n'est autre que le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de F'_ε au point ε (cf. Newstead [23], Appendix). On déduit du lemme 5.1 que si A et B sont rigides, F' est une déformation complète de F'_ε.

On note A_0 (resp. B_0) le fibré rigide sur L, unique à isomorphisme près, de même polynôme de Hilbert que A (resp. B), α_0 le type de décomposition de A_0, β_0 celui de B_0.

Lemme 5.2. — *On suppose que*

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(A,A)) + \dim(\mathrm{Ext}^1(B,B)) \leq 1.$$

Alors $V_{\alpha\beta} \neq H_{\alpha\beta}$.

Soit ε un point de $V_{\alpha\beta}$. La restriction à $p^{-1}(x)$ de l'extension donnée par ε donne une suite exacte

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow A \longrightarrow F_{|p^{-1}(x)} \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

A ε on a donc associé une extension de B par A. Le morphisme induit $V_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(B,A)$ est la restriction naturelle. Ce morphisme est surjectif :

pour le voir, il suffit de montrer que si J est le faisceau d'idéaux de $p^{-1}(x)$, on a $h^2(q^*(B^*\otimes A)\otimes p^*\mathcal{O}(1)\otimes J)=0$. Mais $J=p^*\mathcal{O}(-1)\otimes q^*\mathcal{O}(1)$, donc $h^2(q^*(B^*\otimes A)\otimes p^*\mathcal{O}(1)\otimes J)=h^2(q^*(B^*\otimes A(1)))=h^2(B^*\otimes A(1))=0$.

Pour démontrer le lemme 5.2, il suffit de trouver un point ε de $V_{\alpha\beta}$ tel que $F_{|V_{\alpha\beta}\times p^{-1}(x)}$ soit une déformation complète de $F_{\varepsilon|_{p^{-1}(x)}}$. Pour cela, il suffit que le morphisme déduit de (1)

$$\varphi : \mathrm{Ext}^1(B,A)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F_{\varepsilon|_{p^{-1}(x)}},F_{\varepsilon|_{p^{-1}(x)}})$$

soit surjectif. Comme dans le lemme 5.1, on considère la suite spectrale $E_r^{m,n}$ associée à la filtration $A\subset F_{\varepsilon|_{p^{-1}(x)}}$, convergeant vers $\mathrm{Ext}^{m+n}(F_{\varepsilon|_{p^{-1}(x)}},F_{\varepsilon|_{p^{-1}(x)}})$. Elle montre que coker$(\varphi)$ est isomorphe au conoyau du morphisme canonique

$$\psi : \mathrm{Hom}(A,B)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A,A)\oplus\mathrm{Ext}^1(B,B),$$

défini par l'élément $e(\varepsilon)$ de $\mathrm{Ext}^1(B,A)$ déduit de (1) et les accouplements

$$\mathrm{Hom}(A,B)\times\mathrm{Ext}^1(B,A)\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(A,A)$$

et

$$\mathrm{Hom}(A,B)\times\mathrm{Ext}^1(B,A)\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(B,B).$$

Il est évident que φ est surjectif si A et B sont rigides. On va montrer que c'est aussi le cas si $\dim(\mathrm{Ext}^1(A,A))+\dim(\mathrm{Ext}^1(B,B))=1$, et si ε est convenablement choisi. On peut supposer que $\dim(\mathrm{Ext}^1(A,A))=1$ et $\mathrm{Ext}^1(B,B)=0$ (l'autre cas est analogue). Il faut alors trouver ε tel que la multiplication par $e(\varepsilon):\mathrm{Hom}(A,B)\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(A,A)$ soit surjective. Pour cela, il suffit d'après (1) qu'on ait $h^1(F_{\varepsilon|_{p^{-1}(x)}}\otimes A^*)=0$. C'est le cas si les entiers qui apparaissent dans le type de décomposition de $F_{\varepsilon|_{p^{-1}(x)}}$ sont supérieurs ou égaux à -2.

Il reste alors à trouver un ε dans $V_{\alpha\beta}$ tel que $F_{\varepsilon|_{p^{-1}(x)}}$ soit trivial ou de type de décomposition $(1,0,\ldots,0,-1)$. Soit ε un point de $V_{\alpha\beta}$ tel que $F_{\varepsilon|_{p^{-1}(x)}}$ soit d'un type de décomposition différent des précédents. On a alors

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(F_{\varepsilon|_{p^{-1}(x)}},F_{\varepsilon|_{p^{-1}(x)}}))\geq 2.$$

Le morphisme de restriction $\mathrm{Ext}^1(F_\varepsilon,F_\varepsilon)\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(F_{\varepsilon|_{p^{-1}(x)}},F_{\varepsilon|_{p^{-1}(x)}})$ est surjectif : pour le voir il suffit de prouver que $\mathrm{Ext}^2(F_\varepsilon,F_\varepsilon\otimes J)=0$. Par dualité de Serre sur P_x on a

$$\mathrm{Ext}^2(F_\varepsilon,F_\varepsilon\otimes J)\simeq\mathrm{Hom}(F_\varepsilon,F_\varepsilon\otimes J^*\otimes\omega)^*,$$

avec $\omega\simeq p^*\mathcal{O}(-2)\otimes q^*\mathcal{O}(-1)$, et

$$\mathrm{Hom}(F_\varepsilon,F_\varepsilon\otimes J^*\otimes\omega)=\mathrm{Hom}(F_\varepsilon,F_\varepsilon\otimes p^*\mathcal{O}(-1)\otimes q^*\mathcal{O}(-2))=0,$$

à cause du type de décomposition de F_ε sur une droite générique de $\mathbf{P}_2$ ne passant pas par x.

On en déduit avec le lemme 5.1 que l'image du morphisme de déformation infinitésimale

$$V_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F_\varepsilon|_{p^{-1}(x)}, F_\varepsilon|_{p^{-1}(x)})$$

est de codimension au plus 1. Par conséquent, la sous-variété de $V_{\alpha\beta}$ des ε' tels que $F_\varepsilon|_{p^{-1}(x)}$ ne soit ni trivial ni de type de décomposition $(1,0,\ldots,0,-1)$ est de codimension au moins 1 en ε. Elle ne peut donc pas être égale à $V_{\alpha\beta}$ tout entier. Ceci achève la démonstration du lemme 5.2.

Remarque. — En fait, il découle de la démonstration du lemme 5.2 que dans tous les cas, pour tout ε dans $V_{\alpha\beta}$, le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1(F_\varepsilon, F_\varepsilon) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F_\varepsilon|_{p^{-1}(x)}, F_\varepsilon|_{p^{-1}(x)})$$

est surjectif. Il en découle que pour tout ε dans $V_{\alpha_0\beta_0}$, $F|_{V_{\alpha_0\beta_0}\times p^{-1}(x)}$ est une déformation complète de $F_\varepsilon|_{p^{-1}(x)}$.

COROLLAIRE 5.3. — *La sous-variété $H_{\alpha_0\beta_0}$ est une hypersurface irréductible de $V_{\alpha_0\beta_0}$.*

Posons $E_0 = \mathcal{O}_L(1) \oplus (r-2)\mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(-1)$. Il découle de la théorie des déformations des fibrés sur $\mathbf{P}_1$ (Brieskorn [4]) et du lemme 5.2 que les points ε de $V_{\alpha_0\beta_0}$ tels que $F_\varepsilon|_{p^{-1}(x)}$ soit isomorphe à E_0 constituent une hypersurface lisse X. Pour tout point ε de $V_{\alpha_0\beta_0}$, la suite exacte

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow F_\varepsilon|_{p^{-1}(x)} \longrightarrow B_0 \longrightarrow 0 \tag{2}$$

restriction à $p^{-1}(x)$ de la suite exacte définie par ε, montre que $F_\varepsilon|_{p^{-1}(x)}$ est trivial si et seulement si l'application

$$D_\varepsilon : H^0(B_0(-1)) \longrightarrow H^1(A_0(-1))$$

déduite de (2) est bijective. Donc $H_{\alpha_0\beta_0}$ est défini par l'équation $\det(D_\varepsilon) = 0$, et c'est une hypersurface contenant X. Pour voir que $H_{\alpha_0\beta_0}$ est irréductible, il reste à montrer que $H_{\alpha_0\beta_0}\backslash X$ est de codimension au moins 3 dans $V_{\alpha_0\beta_0}$ (car $H_{\alpha_0\beta_0}$ est une sous-variété homogène). Cela découle du fait que si $F_\varepsilon|_{p^{-1}(x)}$ n'est ni trivial ni isomorphe à E_0 on a

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(F_\varepsilon|_{p^{-1}(x)}, F_\varepsilon|_{p^{-1}(x)})) \geq 3.$$

Ceci démontre le corollaire 5.3.

5.3. Existence de fibrés stables.

LEMME 5.4. — *Si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, et si* $\dim(\mathrm{Ext}^1(A, A)) + \dim(\mathrm{Ext}^1(B, B)) = 1$, *$V^s_{\alpha\beta}$ n'est pas vide.*

On a déjà vu que $V_{\alpha\beta} \neq H_{\alpha\beta}$. Il reste à montrer qu'il existe un point ε de $V_{\alpha\beta}\backslash H_{\alpha\beta}$ tel que F'_ε soit stable. Soit (S, s_0) un germe de variété lisse tel qu'il existe une déformation semi-universelle F'' de F'_ε paramétrée par S, avec $F''_{s_0} \simeq F'_\varepsilon$. On déduit de F' un morphisme $\Phi : U \longrightarrow S$, U désignant le germe défini par $V_{\alpha\beta}$ au voisinage de ε, et on a

$$\Phi(\varepsilon) = s_0, \quad \Phi^* F'' \simeq F'_{|U\times \mathbf{P}_2}.$$

On a $T_{s_0}S = \mathrm{Ext}^1(F'_\varepsilon, F'_\varepsilon)$, et d'après le lemme 5.1, l'image de l'application tangente $T_\varepsilon V_{\alpha\beta} \longrightarrow T_{s_0}S$ est un hyperplan.

La sous-variété Z des points s tels que F''_s ne soit pas semi-stable est de codimension au moins 2, d'après les propositions 1.2 et 1.4. Donc $\mathrm{Im}(\Phi)$ n'est pas contenu dans Z. Il en découle qu'il existe un point ε' de $V_{\alpha\beta}\backslash H_{\alpha\beta}$ tel que $F'_{\varepsilon'}$ soit stable. Ceci démontre le lemme 5.4.

En utilisant la proposition 1.4 on obtient aussi le

COROLLAIRE 5.5. — *Si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, on a*

$$\mathrm{codim}_{V_{\alpha_0\beta_0}}((V_{\alpha_0\beta_0}\backslash H_{\alpha_0\beta_0})\backslash V^s_{\alpha_0\beta_0}) \geq 2.$$

5.4. Caractères du groupe G.

On va déterminer le groupe des caractères du groupe

$$G = \mathrm{Aut}(A_0) \times \mathrm{Aut}(B_0))/\mathbb{C}^*.$$

On s'en sert plus loin pour étudier $\mathrm{Pic}(\mathrm{Im}(f_{\alpha_0\beta_0}))$. On peut écrire $A_0 = a\mathcal{O}(k) \oplus a_0\mathcal{O}(k+1)$, $B_0 = b\mathcal{O}(k') \oplus b_0\mathcal{O}(k'+1)$, avec $a > 0$, $b > 0$. Les automorphismes de A_0 s'identifient aux matrices du type

$$M = \begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

avec X dans $GL(a)$, Y dans $GL(a_0)$, Z étant un morphisme $a\mathcal{O}(k) \longrightarrow a_0\mathcal{O}(k+1)$. Le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(A_0)$ constitué des M telles que X et Y soient les matrices identités est un espace vectoriel, donc tout morphisme

$\mathrm{Aut}(A_0) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est constant sur ce sous-groupe. On en déduit que

$$\mathrm{Char}(\mathrm{Aut}(A_0)) = \mathrm{Char}(GL(a) \times GL(a_0)),$$

et de même

$$\mathrm{Char}(\mathrm{Aut}(B_0)) = \mathrm{Char}(GL(b) \times GL(b_0)).$$

Supposons que a_0 et b_0 soient non nuls. Alors $\mathrm{Char}(G)$ est constitué des morphismes

$$\varphi_{s,t,u,v} : (\mathrm{Aut}(A_0) \times \mathrm{Aut}(B_0))/\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$\mathbb{C}^*(\begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X' & Z' \\ 0 & Y' \end{pmatrix}) \longmapsto \det(X)^s \det(Y)^t \det(X')^u \det(Y')^v,$$

s, t, u, v étant des entiers tels que $sa + ta_0 + ub + vb_0 = 0$. Donc $\mathrm{Char}(G)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^3$. Si un des entiers a_0, b_0 est nul (resp. les deux), alors $\mathrm{Char}(G)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ (resp. $\mathbb{Z}$), et on définit de même les caractères $\varphi_{s,t,u}$ (resp. $\varphi_{s,t}$).

5.5. Suites exactes canoniques.

Elles seront utilisées dans 5.6 pour définir un morphisme

$$V^s_{\alpha_0\beta_0} \longrightarrow \mathcal{M}.$$

LEMME 5.6. — *Soit ε un point de $V^s_{\alpha\beta}$. Alors on a des suites exactes*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathcal{O}_L(-1) \otimes H^1(F'(-1)) \xrightarrow{u} \mathcal{O}_L \otimes H^1(F') \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_L(-1) \otimes H^1(F'(-2)) \xrightarrow{v} \mathcal{O}_L \otimes H^1(F'(-1)) \longrightarrow B(-1) \longrightarrow 0,$$

u et v étant les morphismes canoniques.

Pour définir u et v on remarque que $H^0(\mathcal{O}_L(1))^* \subset H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))$. Considérons le complexe de Kronecker de F' (cf. 1.6) :

$$K^\cdot : \Lambda^2 Q^* \otimes H^1(F'(-2)) \xrightarrow{\gamma} Q^* \otimes H^1(F'(-1)) \xrightarrow{\nu} \mathcal{O} \otimes H^1(F').$$

Le morphisme de faisceaux γ est injectif, ν est surjectif, et $F' \simeq \mathrm{Ker}(\nu)/\mathrm{Im}(\gamma)$. De cette suite exacte on déduit les suivantes sur P_x

$$0 \longrightarrow p^*\Lambda^2 Q^* \otimes H^1(F'(-2)) \longrightarrow p^*Q^* \otimes H^1(F'(-1)) \longrightarrow p^*\mathrm{coker}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow p^*F' \longrightarrow p^*\mathrm{coker}(\gamma) \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H^1(F') \longrightarrow 0.$$

De la suite exacte $0 \longrightarrow q^*A \longrightarrow p^*F'_\varepsilon \longrightarrow q^*B \otimes p^*\mathcal{O}(-1) \longrightarrow 0$ on déduit $q_*p^*F'_\varepsilon \simeq A$, $R^1q_*p^*F'_\varepsilon = 0$. En prenant l'image directe sur L des suites exactes sur P_x précédentes, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow q_*p^*F'_\varepsilon \longrightarrow q_*p^*\mathrm{coker}(\gamma) \longrightarrow \mathcal{O}_L \otimes H^1(F'_\varepsilon) \longrightarrow 0,$$

et l'isomorphisme $q_*p^*\mathrm{coker}(\gamma) \simeq \mathcal{O}_L(-1) \otimes H^1(F'_\varepsilon(-1))$. On en déduit la première suite exacte du lemme 5.6. La seconde s'obtient de manière analogue.

On déduit du lemme 5.6 les isomorphismes canoniques

$$H^1(F'_\varepsilon(-2)) \simeq H^0(B(-2)),\ H^1(F'_\varepsilon) \simeq H^1(A),$$
$$H^1(F'_\varepsilon(-1)) \simeq H^1(A(-1)) \simeq H^o(B(-1)).$$

Notons qu'on peut les retrouver directement en partant de la suite exacte

$$0 \longrightarrow q^*A \longrightarrow p^*F'_\varepsilon \longrightarrow q^*B \otimes p^*\mathcal{O}(-1) \longrightarrow 0.$$

5.6. Lien avec les complexes de Kronecker.

Rappelons que $\mathcal{M}$ désigne la variété des complexes de Kronecker semi-stables associée à $M(r, c_1, c_2)$, $\mathcal{M}_s$ l'ouvert de $\mathcal{M}$ des complexes stables. Soit ε un point de $V^s_{\alpha_0\beta_0}$. Alors on a des isomorphismes

$$(3)\qquad \begin{array}{l} H^1(F'_\varepsilon(-2)) \simeq H^0(B_0(-2)),\ H^1(F'_\varepsilon) \simeq H^1(A_0), \\ H^1(F'_\varepsilon(-1)) \simeq H^1(A_0(-1)) \simeq H^0(B_0(-1)). \end{array}$$

Supposons que les complexes de Kronecker de $\mathcal{M}$ soient du type

$$\Lambda^2 Q^* \otimes H_{-1} \longrightarrow Q^* \otimes H_0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_1.$$

La donnée d'isomorphismes

$$H_{-1} \simeq H^0(B_0(-2)),\ H_0 \simeq H^0(B_0(-1)),\ H_1 \simeq H^1(A_0)$$

définit un morphisme $\Phi : V^s_{\alpha_0\beta_0} \longrightarrow \mathcal{M}_s$, associant à ε le complexe de Kronecker de F'_ε, compte tenu des isomorphismes (3). Ce morphisme est compatible avec le morphisme de groupes $G \longrightarrow G_M$ défini par les isomorphismes (3), induisant

$$\begin{array}{rcl} \overline{\psi} : \mathrm{Char}(G_M) & \longrightarrow & \mathrm{Char}(G) \\ \lambda_{(u,v,w)} & \longmapsto & \varphi_{-w(k+1),-w(k+2),vk'+u(k'-1),v(k'+1)+uk'} \end{array}$$

(ceci si a_0 et b_0 sont non nuls, les autres cas étant analogues).

LEMME 5.7. — *Soit χ le caractère de G défini par un générateur de l'idéal de $H_{\alpha_0\beta_0}$ dans $V_{\alpha_0\beta_0}$. Alors le morphisme déduit de ψ*

$$\psi_0 : \mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow \mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\chi$$

est surjectif.

On supposera que a_0 et b_0 sont non nuls, les autres cas étant analogues. Soit f un générateur de l'idéal de H. On a alors pour tous g dans G et x dans X, $\chi(g) = f(gx)/f(x)$. Soit $D_\varepsilon : H^0(B_0(-1)) \longrightarrow H^1(A_0(-1))$ l'application définie dans la démonstration du corollaire 5.3. La fonction $\det(D_\varepsilon)$ est une puissance de f (à une constante multiplicative près). Le caractère qui lui est associé est $\varphi_{-k,-k-1,-k',-k'-1}$. Il suffit de montrer que le morphisme déduit de $\overline{\psi}$

$$\psi : \mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow \mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\varphi_{-k,-k-1,-k',-k'-1}$$

est surjectif. Avec les identifications déjà vues de $\mathrm{Char}(G_M)$ et $\mathrm{Char}(G)$ à des sous-groupes de $\mathbb{Z}^3$ et $\mathbb{Z}^4$ respectivement, on voit que le morphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{Char}(G_M) \oplus \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathrm{Char}(G) \\ (\lambda, n) &\longmapsto \overline{\psi}(\lambda) + n\varphi_{-k,-k-1,-k',-k'-1} \end{aligned}$$

provient de la matrice

$$\begin{pmatrix} -k-1 & 0 & 0 & -k \\ -k-2 & 0 & 0 & -k-1 \\ 0 & k' & k'-1 & -k' \\ 0 & k'+1 & k' & -k'-1 \end{pmatrix}.$$

La surjectivité de ψ_0 découle du fait que le déterminant de cette matrice est 1. Ceci démontre le lemme 5.7.

5.7. Etude de l'image de $f_{\alpha_0\beta_0}$.

Posons $X_0 = \mathrm{Im}(f_{\alpha_0\beta_0})$. D'après le lemme 5.1, $f_{\alpha_0\beta_0}$ est une submersion, donc X_0 est un ouvert de $M_s(r, c_1, c_2)$.

LEMME 5.8. — *Si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, on a $\mathcal{O}^*(X_0) = \mathbb{C}^*$.*

Soit φ un élément de $\mathcal{O}^*(X_0)$. Alors $\varphi \circ f_{\alpha_0\beta_0} = \varphi_0$ est une fonction régulière inversible G-invariante sur $V^s_{\alpha_0\beta_0}$. Soit f un générateur de l'idéal de l'hypersurface $H_{\alpha_0\beta_0}$ de $V_{\alpha_0\beta_0}$. D'après les corollaires (5.3) et (5.5), on a $\varphi_0 = \delta f^n$, δ étant un scalaire non nul et n un entier. Soit χ le caractère de G associé à $f(\chi(g) = f(gx)/f(x))$. D'après 5.5, χ est non trivial. Le caractère associé à φ_0 est χ^n, donc $\chi^n = 1$ puisque φ_0 est G-invariante, d'où $n = 0$. Donc φ_0 est constante. Ceci démontre le lemme 5.8.

PROPOSITION 5.9. — *Si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, il existe un isomorphisme canonique* $\mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\chi \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_0)$, *$\chi$ désignant le caractère de G défini par $H_{\alpha_0\beta_0}$.*

LEMME 5.10. — *Soit U un ouvert de X_0. Alors le morphisme canonique*

$$\mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(f_{\alpha_0\beta_0}^{-1}(U))^G$$

est surjectif.

Cela signifie qu'en fait X_0 est un quotient de $V_{\alpha_0\beta_0}^s$ par G. Soit $\widetilde{X}_0$ la variété des triplets (x_0, u, v), avec x_0 dans $\pi^{-1}(X_0)$ (qui est un ouvert de $\mathcal{M}$), u(resp. v) étant un isomorphisme $q_*p^*E \simeq A_0$ (resp. $R^1q_*p^*(E(-1)) \simeq B_0(-1)$), E désignant la cohomologie en degré 0 de x_0. Sur $\widetilde{X}_0$ opèrent les groupes G et G_M. La projection $\widetilde{X}_0 \longrightarrow \pi^{-1}(X_0)$ est localement triviale : cela découle du fait que si V désigne la cohomologie du complexe de Kronecker universel sur $\pi^{-1}(X_0) \times \mathbf{P}_2$, il existe des trivialisations locales des fibrés $p_{0*}(Hom(p_L^*A_0, X_1))$ et $p_{0*}(Hom(p_L^*B_0(-1), X_2))$, p_0 et p_L désignant respectivement les projections $\pi^{-1}(X_0) \times L \longrightarrow \pi^{-1}(X_0)$ et $\pi^{-1}(X_0) \times L \longrightarrow L$, et

$$X_1 = (I \times q)_*(I \times p)^*V, \quad X_2 = R^1(I \times q)_*(I \times p)^*(V(-1)).$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X}_0 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "q_1"'] & \pi^{-1}(X_0) \arrow[d, "\pi"] \\
V_{\alpha_0\beta_0}^s \arrow[r] & X_0
\end{tikzcd}$$

q_1 associant à (x_0, u, v) l'extension

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & q^*A_0 \arrow[r] \arrow[d, "u"', "\wr"] & p^*E \arrow[r] & q^*B_0 \otimes p^*\mathcal{O}(-1) \arrow[r] \arrow[d, "v"', "\wr"] & 0 \\
& q^*(q_*p^*E) & & q^*(R^1q_*p^*E(-1))(1) \otimes p^*\mathcal{O}(-1), &
\end{tikzcd}$$

E désignant la cohomologie de x_0 en degré 0. Soit φ une fonction régulière G-invariante sur $f_{\alpha_0\beta_0}^{-1}(U)$. On en déduit une application $\overline{\varphi} : U \longrightarrow \mathbf{C}$. Il faut montrer qu'elle est régulière. Pour cela, il suffit de prouver que $\overline{\varphi}\circ\pi$ est régulière sur $\pi^{-1}(U)$. Puisque p_1 est localement triviale, il suffit de montrer que $\overline{\varphi} \circ \pi \circ p_1$ est régulière. Mais on a $\overline{\varphi} \circ \pi \circ p_1 = \overline{\varphi} \circ f_{\alpha_0\beta_0} \circ q_1 = \varphi \circ q_1$, donc $\overline{\varphi} \circ \pi \circ p_1$ est bien régulière. Ceci démontre le lemme 5.10.

Démontrons maintenant la proposition 5.9. On définit d'abord un morphisme de groupes $\vartheta : \mathrm{Pic}(X_0) \longrightarrow \mathrm{Char}(G)/\mathbf{Z}\chi$. Soit L un élément de $\mathrm{Pic}(X_0)$. Le fibré en droites $f_{\alpha_0\beta_0}^* L$ est trivial, et muni d'une structure de

G-fibré. A tout isomorphisme $f^*_{\alpha_0\beta_0}L \simeq \mathcal{O}$ on associe donc une structure de G-fibré sur $\mathcal{O}$, c'est-à-dire un caractère de G. Ces structures de G-fibré diffèrent d'un automorphisme de $\mathcal{O}$, c'est-à-dire que les caractères qu'ils définissent forment une classe d'équivalence modulo $\mathbb{Z}\chi$, qui est par définition $\vartheta(L)$. Il suffit maintenant de montrer que ϑ est un isomorphisme.

On va voir d'abord que ϑ est surjectif. Soit η un élément de $\mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\chi$. On peut d'après le lemme 5.7 écrire $\eta = \psi_0(\lambda)$, avec λ dans $\mathrm{Char}(G_M)$. Le caractère λ définit un fibré en droites L sur X_0, et $\vartheta(L) = \eta$.

Montrons maintenant que ϑ est injectif. Soit L un élément de $\mathrm{Ker}(\vartheta)$. Un G-isomorphisme $f^*_{\alpha_0\beta_0}L \xrightarrow{h} \mathcal{O}$ induit un isomorphisme de fibrés vectoriels "ensembliste" $\overline{\varphi} : L \longrightarrow \mathcal{O}_{X_0}$. Il faut montrer que c'est un isomorphisme algébrique. Soit U un ouvert de X_0 tel qu'on ait une trivialisation $\mathcal{O}_U \simeq L_{|U}$. Alors $\varphi_{|U}$ est défini par un élément G-invariant de $\mathcal{O}^*(f^{-1}_{\alpha_0\beta_0}(U))$. D'après le lemme 5.8, $\overline{\varphi}_{|U}$, qu'on peut voir comme une application $U \longrightarrow \mathbb{C}^*$, est régulière. Ceci montre que $\overline{\varphi}$ est bien un isomorphisme algébrique. La proposition 5.9 est donc démontrée.

On démontre de même la

PROPOSITION 5.11. — *Si $M(r,c_1,c_2)$ est de hauteur nulle, il existe un morphisme canonique surjectif* $\mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\chi \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_0)$, *$\chi$ désignant le caractère de g défini par $H_{\alpha_0\beta_0}$.*

5.8. Démonstration de la proposition 3.1.

5.8.1. Rappelons que U_x désigne l'ouvert de $M_s(r,c_1,c_2)$ correspondant aux fibrés vectoriels dont la restriction à toute droite passant par x est rigide. Soit M_0 l'ouvert de $M_s(r,c_1,c_2)$ correspondant aux faisceaux localement libres. Puisque $r > 2$, on a d'après la proposition (2.8) de [7], $\mathrm{codim}_{M_s(r,c_1,c_2)}(M_s(r,c_1,c_2)\backslash M_0) \geq 2$. On démontrera dans le §6 la

PROPOSITION 5.12. — *Si $c_1 = 1-r$ ou -1, et $r > 2$ $M_s(r,c_1,c_2)\backslash U_x$ contient une unique hypersurface intègre K_0. Le fibré en droites Λ_0 associé à K_0 est un élément de l'image de π_M.*

Si $1-r < c_1 < -1$, on a d'après [5], $\mathrm{codim}_{M_0}(M_0\backslash U_x) \geq 2$. Examinons maintenant U_x. Rappelons qu'on a

$$A_0 = a\mathcal{O}(k) \oplus a_0\mathcal{O}(k+1), \ \ B_0 = b\mathcal{O}(k') \oplus b_0\mathcal{O}(k'+1),$$

avec $a > 0,\ b > 0$. Si $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$, si A n'est pas isomorphe à A_0, ou si B n'est pas isomorphe à B_0, on a $\dim(\mathrm{Ext}^1(A,A)) + \dim(\mathrm{Ext}^1(B,B)) \geq 2$, donc d'après le lemme 5.1, U_x étant la réunion de tous les $\mathrm{Im}(f_{\alpha\beta})$, on a $\mathrm{codim}_{U_x}(U_x\backslash X_0) \geq 2$ (avec $X_0 = \mathrm{Im}(f_{\alpha_0\beta_0})$ comme dans 5.7).

Si $a_0 = 0$ et $a > 1$, on note α_1 le type de décomposition $(k+1, k, \ldots, k, k-1)$. Alors $K_1 = \overline{\mathrm{Im}(f_{\alpha_1\beta_0})}$ est une hypersurface irréductible de U_x. Soit Λ_1 le fibré en droites sur U_x associé à K_1.

Si $b_0 = 0$ et $b > 1$, on définit de même le type de décomposition β_1, l'hypersurface irréductible K_2 de U_x, et l'élément Λ_2 de $\mathrm{Pic}(U_x)$ associé.

Si $a_0 = 0,\ a > 1$ et si $b_0 > 0$ ou $b_0 = 0,\ b = 1$, on a

$$\mathrm{codim}_{U_x}(U_x\backslash(X_0 \sqcup K_1)) \geq 2.$$

Si $b_0 = 0, b > 1$, et si $a_0 > 0$ ou $a_0 = 0,\ a = 1$, on a

$$\mathrm{codim}_{U_x}(U_x\backslash(X_0 \sqcup K_2)) \geq 2.$$

Enfin, si $a_0 = 0,\ a > 1,\ b_0 = 0$ et $b > 1$, on a

$$\mathrm{codim}_{U_x}(U_x\backslash(X_0 \sqcup K_1 \sqcup K_2)) \geq 2.$$

5.8.2. On démontrera plus loin les assertions suivantes : soit π'_M le morphisme canonique $\mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U_x)$. Alors

(i) Si $a_0 = 0,\ a > 1,\ \Lambda_1$ est un élément de $\mathrm{Im}(\pi'_M)$.

(ii) Si $b_0 = 0,\ b > 1,\ \Lambda_2$ est un élément de $\mathrm{Im}(\pi'_M)$.

Démontrons maintenant la proposition 3.1. La surjectivité de π_M découle immédiatement de (i), (ii), du lemme 5.7 et des propositions 5.9, 5.11, 5.12. Il reste à montrer que si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle, π_M est un isomorphisme. Cela revient à prouver, π_M étant surjectif, que $\mathrm{Pic}(M_0)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

Supposons que $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$. Dans ce cas, $\mathrm{Pic}(X_0)$ est isomorphe à $\mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\chi$, qui contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$, ainsi par conséquent que $\mathrm{Pic}(M_0)$.

Supposons que $a_0 = 0, a > 1$ et $b_0 > 0$. Alors $\mathrm{Pic}(X_0) \simeq \mathrm{Char}(G)/\mathbb{Z}\chi$, qui contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$. Il suffit donc de montrer que le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(U_x)$ engendré par Λ_1 est sans torsion. Dans le cas contraire, on en déduirait une fonction régulière sur U_x s'annulant précisément sur K_1, et cette fonction induirait une fonction régulière inversible non constante sur X_0. Ceci est impossible d'après le lemme 5.8. Donc $\mathrm{Pic}(M_0)$ contient bien un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

Le cas $b_0 = 0,\ b > 1$ et $a_0 > 0$ est analogue au précédent.

Si $a_0 = b_0 = 0$, $a > 1$ et $b > 1$, on procède comme dans les cas précédents, en considérant Λ_1, Λ_2 et en utilisant le lemme 5.8.

Les cas où $a = 1$ ou $b = 1$ sont analogues. On utilise en plus Λ_0 et la proposition 5.12.

5.9. Etude de Λ_1 et Λ_2.

On va démontrer les assertions (i) et (ii) de 5.8.2.

On utilise ici les résultats de 1.7. On ne démontrera que (i), (ii) étant analogue. Soit V la cohomologie du complexe de Kronecker universel sur $\pi^{-1}(U_x) \times \mathbf{P}_2$. Comme dans le lemme 5.6 on a une suite exacte sur $\pi^{-1}(U_x) \times L$

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow p_L^*\mathcal{O}_L(-1) \otimes H_{-1} \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_0 \longrightarrow 0,$$

avec $W = (I \times q)_*(I \times p)^*V$, p_L désignant la projection $\pi^{-1}(U_x) \times L \longrightarrow L$. La sous-variété $\pi^{-1}(K_1)$ est précisément l'ensemble des points y tels que W_y ne soit pas rigide. Rappelons que $A_0 = a\mathcal{O}_L(k)$. Par conséquent, W_y n'est par rigide si et seulement si $h^0(W_y(-k-1)) \neq 0$. Il en découle que $\pi^{-1}(K_1)$ est le support du *schéma de saut* (cf. 1.7) $Z = Z^1(W \otimes p_L^*\mathcal{O}_L(-k-1))$.

On va montrer qu'elle est intègre. On sait déjà qu'elle est irréductible, et il suffit de prouver que si y est un point de $\pi^{-1}(\mathrm{Im}(f_{\alpha_1\beta}))$, Z est lisse en y. Pour cela il suffit de montrer que l'application canonique

$$d_s : T_y\mathcal{M} \longrightarrow L(H^0(W_y(-k-1)), H^1(W_y(-k-1)))$$

est surjective. Mais d_s est la composée du morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer $w : T_y\mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(V_y, V_y)$, et des morphismes canoniques

$$\begin{aligned} \vartheta : \mathrm{Ext}^1(V_y, V_y) &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(W_y, W_y), \\ \eta : \mathrm{Ext}^1(W_y, W_y) &\longrightarrow L(H^0(W_y(-k-1), H^1(W_y(-k-1))). \end{aligned}$$

On sait que w est surjectif, et ϑ aussi d'après le lemme 5.1. La surjectivité de η découle du type de décomposition de $W_y(-k-1)$. Donc d_s est surjective, et Z est lisse en y. On a donc $Z = \pi^{-1}(K_1)$. On a dans l'anneau de Chow de $\pi^{-1}(U_x)$

$$[\pi^{-1}(K_1)] = \pi_{0!}(-c_1(W \otimes p_L^*\mathcal{O}_L(-k-1)))$$

(π_0 désignant la projection $\mathcal{M} \times L \longrightarrow \mathcal{M}$). On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow W \otimes p_L^*\mathcal{O}_L(-k-1) \longrightarrow p_L^*\mathcal{O}_L(-k-2) \otimes H_1 \longrightarrow p_L^*\mathcal{O}_L(-k-1) \otimes H_0 \longrightarrow 0$$

d'où on déduit immédiatement $c_1(W\otimes p_L^*\mathcal{O}_L-k-1))=0$, et $[\pi^{-1}(K_1)]=0$, ce qui entraîne la trivialité de $\pi^*\Lambda_1$. Ceci démontre (i).

6. Le cas $c_1=-1$, $r>2$.

On démontre ici la proposition 5.12. On ne traitera que le cas $c_1=-1$, et on donnera des indications pour résoudre de même le cas $c_1=1-r$.

6.1. Préliminaires.

Soit V la cohomologie du complexe de Kronecker universel sur $\mathcal{M}_s\times\mathbf{P}_2$. Soit M_0 l'ouvert de $M_s(r,-1,c_2)$ correspondant aux faisceaux localement libres. Puisque $r>2$, on a $\operatorname{codim}_{M_s(r,c_1,c_2)}(M_s(r,c_1,c_2)\backslash M_0)\geq 2$, et il suffit de démontrer la proposition 5.12 avec M_0 à la place de $M_s(r,-1,c_2)$. Soit $\mathcal{M}'_s$ l'ouvert de $\pi^{-1}(M_0)$ constitué des points y tels que pour toute droite ℓ de $\mathbf{P}_2$ passant par x on ait $h^1(V_{y|\ell})=0$.

LEMME 6.1. — *On a* $\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_s}(\mathcal{M}_s\backslash\mathcal{M}'_s)\geq 2$.

Il suffit de montrer que pour toute droite ℓ passant par x, la sous-variété fermée Y de $\mathcal{M}_s$ constituée des y tels que $h^1(V_{y|\ell})>0$ est de codimension au moins 3. Pour cela, on remarque que pour tout y dans $\mathcal{M}_s$, $V_{|\mathcal{M}_s\times\ell}$ est une déformation complète de $V_{y|\ell}$ (cela découle du fait que V est une déformation complète de V_y et de ce que l'application canonique

$$\operatorname{Ext}^1(V_y,V_y)\longrightarrow\operatorname{Ext}^1(V_{y|\ell},V_{y|\ell})$$

est surjective parce que $\operatorname{Ext}^2(V_y,V_y(-1))=0$). Le lemme 6.1 découle du fait que si y est dans Y, on a $\dim(\operatorname{Ext}^1(V_{y|\ell},V_{y|\ell}))\geq 3$.

Soit $\mathcal{M}''_s$ l'ouvert de $\mathcal{M}_s$ constitué des points y tels qu'il existe au plus une droite ℓ passant par x telle que $V_{y|\ell}$ ne soit pas rigide.

LEMME 6.2. — *On a* $\operatorname{codim}_{\mathcal{M}'_s}(\mathcal{M}'_s\backslash\mathcal{M}''_s)\geq 2$.

Soient ℓ,ℓ' des droites distinctes passant par x. Il suffit de montrer que la sous-variété fermée Y de $\mathcal{M}'_s$ constituée des y tels que $V_{y|\ell}$ et $V_{y|\ell'}$ ne soient pas rigides est de codimension au moins 4. Cela découle de la surjectivité de l'application canonique

$$\operatorname{Ext}^1(V_y,V_y)\longrightarrow\operatorname{Ext}^1(V_{y|\ell},V_{y|\ell})\oplus\operatorname{Ext}^1(V_{y|\ell'},V_{y|\ell'})$$

et de ce que si $V_{y|\ell}$ n'est pas rigide, on a $\dim(\mathrm{Ext}^1(V_{y|\ell},V_{y|\ell})) \geq 2$. La surjectivité de l'application précédente se démontre comme dans le lemme 4.3, en utilisant le fait que $\mathrm{Ext}^2(V_y,V_y(-2))=0$.

Soit $U_0=\pi(\mathcal{M}_s'')$. C'est un ouvert de M_0, dont le complémentaire est de codimension au moins 2. Il suffit donc de prouver que $K_0'=U_0\backslash U_x$ est une hypersurface irréductible de U_0, et que si Λ_0' désigne le fibré en droites associé à K_0', $\pi^*\Lambda_0'$ est trivial sur $\pi^{-1}(U_0)$.

Soit X la sous-variété fermée de $\mathcal{M}_s''\times L$ constituée des couples (y,ℓ) tels que $V_{y|\ell}$ ne soit pas rigide. Le fibré $V_{y|\ell}$ n'est pas rigide si et seulement si $h^0(V_{y|\ell}(-1))\neq 0$. Donc X est le support du schéma de saut Z du fibré vectoriel $W_0=(I\times p)^*(V(-1))$ sur $\mathcal{M}_s''\times P_x$ (P_x désignant comme précédemment l'éclatement de $\mathbf{P}_2$ en x, $\mathcal{M}_s''\times P_x$ étant considéré comme un fibré projectif sur $\mathcal{M}_s''\times L$). La projection p_0 sur $\mathcal{M}_s''$ induit une bijection $X\longrightarrow\pi^{-1}(K_0')$. On verra dans le paragraphe suivant que X est irréductible et de codimension 1. Montrons que Z est lisse. Pour cela, il suffit de prouver que pour tout point (y,ℓ) de X, le morphisme canonique

$$d_{(y,\ell)}:T_{(y,\ell)}(\mathcal{M}_s''\times L)\longrightarrow L(H^0(V_y(-1)_{|\ell}),H^1(V_y(-1)_{|\ell}))$$

est surjectif. On va montrer que la restriction de $d_{(y,\ell)}$ à $T_y(\mathcal{M}_s'')$ est surjective. Cette restriction est le morphisme d_y défini par la variété de saut du fibré vectoriel $V(-1)_{|\mathcal{M}_s''\times\ell}$. C'est à un signe près la composée du morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer

$$w:T_y(\mathcal{M}_s'')\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(V_y,V_y),$$

et des morphismes canoniques

$$\begin{aligned}\vartheta&:\mathrm{Ext}^1(V_y,V_y)\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(V_{y|\ell},V_{y|\ell}),\\ \eta&:\mathrm{Ext}^1(V_{y|\ell},V_{y|\ell})\longrightarrow L(H^0(V_y(-1)_{|\ell}),H^1(V_y(-1)_{|\ell}).\end{aligned}$$

On sait déjà que w est surjective, ϑ l'est car $\mathrm{Ext}^2(V_y,V_y(-1))=0$, et η l'est à cause du type de décomposition de $V_y(-1)_{|\ell}$. Donc d_y est surjective et Z est lisse.

On a donc $Z=X$. La classe de X dans l'anneau de Chow de $\mathcal{M}_s''\times L$ se calcule par la formule de Porteous : $[X]=c_2(-\pi_{0!}(W_0))$, π_0 désignant la projection $\mathcal{M}_s''\times P_x\longrightarrow\mathcal{M}_s''\times L$. Pour calculer $c_2(W_0)$, on peut utiliser le complexe de Kronecker universel sur $\mathcal{M}_s''\times\mathbf{P}_2$. Son image réciproque sur $\mathcal{M}_s''\times P_x$ a pour cohomologie en degré 0 le faisceau $W_0\times p_2^*\mathcal{O}(1)$, p_2 désignant la projection $\mathcal{M}_s''\times P_x\longrightarrow\mathbf{P}_2$. On en déduit immédiatement que les classes de Chern de $\pi_{0!}(W_0)$ proviennent de L (par la projection de

$\mathcal{M}''_s \times L$ sur L), et par conséquent $c_2(-\pi_{0!}(W_0)) = 0$. On a donc $[X] = 0$. Puisque p_0 induit un isomorphisme birationnel $X \longrightarrow \pi^{-1}(K'_0)$, on a

$$[\pi^{-1}(K'_0)] = p_{0*}([X]) = 0,$$

ce qui prouve que $\pi^*\Lambda'_0$ est trivial et démontre la proposition 5.12.

6.2. Démonstration de l'irréductibilité de X.

Il revient au même de prouver que $\pi^{-1}(K'_0)$ est irréductible et de codimension 1. Il suffit de montrer que pour toute droite ℓ de $\mathbf{P}_2$, la sous-variété fermée M_ℓ de M_0 correspondant aux fibrés dont la restriction à ℓ n'est pas rigide est irréductible et de codimension 2. D'après Brun-Hirschowitz ([5]), M_ℓ est équidimensionnelle et de codimension 2. Il reste à prouver que M_ℓ est irréductible. On utilisera les notations du chapitre précédent, avec les modifications suivantes : on notera $f^x_{\alpha_0\beta_0}$, au lieu de $f_{\alpha_0\beta_0}$, $V^x_{\alpha_0\beta_0}$ au lieu de $V_{\alpha_0\beta_0}$, etc., pour spécifier le point x, qui pourra varier.

LEMME 6.3. — *Soit M'_ℓ l'ouvert de M_ℓ correspondant aux fibrés n'ayant qu'un nombre fini de droites de saut. Alors M'_ℓ est dense dans M_ℓ.*

Soit ℓ' une droite de $\mathbf{P}_2$ distincte de ℓ. Alors, si E est un fibré vectoriel de $M_\ell \cap M_{\ell'}$, le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1(E,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell}, E_{|\ell}) \oplus \mathrm{Ext}^1(E_{|\ell'}, E_{|\ell'})$$

est surjectif, comme on l'a déjà vu. Il en découle que $M_\ell \cap M_{\ell'}$, est équidimensionnel de codimension 4 dans M_0. Soit T la sous-variété de $M_0 \times (\mathbf{P}_2^*\backslash\{\ell\})$ constituée des couples (E, ℓ') tels que E soit dans $M_\ell \cap M_{\ell'}$. D'après ce qui précède, on a $\dim(T) = \dim(M_\ell)$. Soit $p_M : T \longrightarrow M_\ell$ la projection. Le fermé $M_\ell \backslash M'_\ell$ est l'ensemble des E de M_0 tels que $p_M^{-1}(E)$ soit de dimension au moins 1. Ce fermé est de codimension au moins 3 dans M_0, puisque $\dim(p_M^{-1}(M_\ell \backslash M'_\ell)) \leq \dim(T) = \dim(M_\ell)$. Puisque M_ℓ est équidimensionnel, M'_ℓ est dense dans M_ℓ. Ceci démontre le lemme 6.3.

LEMME 6.4. — *Soit Y le complémentaire dans M_0 de la réunion des ouverts $\mathrm{Im}(f^y_{\alpha_0\beta_0})$, y parcourant $\mathbf{P}_2$. Soit $M''_\ell = M'_\ell \cap (M_0 \backslash Y)$. Alors M''_ℓ est dense dans M'_ℓ.*

Il suffit de montrer que Y ne contient aucune composante connexe de M'_ℓ, autrement dit que $Y \cap M'_\ell$ n'est pas de codimension 2 dans M_0.

La dimension de $Y \cap M'_{\ell'}$ est la même pour toutes les droites ℓ' de $\mathbf{P}_2$. Notons-la d. Soit Z la sous-variété de $M_0 \times \mathbf{P}_2$ constituée des (E, ℓ'), avec E dans $M'_{\ell'} \cap Y$. Alors on a $\dim(Z) = d + 2$. Les fibres de la projection $Z \longrightarrow M_0$ sont finies et son image est contenue dans Y, donc $d + 2 \leq \dim(Y) \leq \dim(M_0) - 1$, d'ou $\mathrm{codim}_{M_0}(Y \cap M'_{\ell'}) \geq 3$, ce qui démontre le lemme 6.4.

Il reste à montrer que M''_ℓ est irréductible. Il suffit de montrer qu'il en est de même de toutes les intersections de M''_ℓ avec les ouverts $\mathrm{Im}(f^y_{\alpha_0\beta_0})$, y parcourant $\mathbf{P}_2 \backslash \ell$. En effet, supposons cela démontré, et que M''_ℓ possède au moins deux composantes irréductibles Y_1, Y_2. Soit y_1 (resp. y_2) un point de $Y_1 \backslash Y_2$ (resp. $Y_2 \backslash Y_1$). Il existe un point y de $\mathbf{P}_2$ tel que y_1 et y_2 soient dans $\mathrm{Im}(f^y_{\alpha_0\beta_0})$, car les points z tels que y_1 (resp. y_2) soit dans $\mathrm{Im}(f^z_{\alpha_0\beta_0})$ constituent un ouvert de $\mathbf{P}_2$. Alors l'intersection de M''_ℓ avec $\mathrm{Im}(f^y_{\alpha_0\beta_0})$ n'est pas irréductible, contrairement à notre supposition.

Soit y un point de $\mathbf{P}_2 \backslash \ell$. Montrons que $M''_\ell \cap \mathrm{Im}(f^y_{\alpha_0\beta_0})$ est irréductible. On note F_ℓ la restriction à $V^y_{\alpha_0\beta_0} \times \ell$ du fibré extension universelle F^y sur $V^y_{\alpha_0\beta_0} \times P_y$. On va voir que pour tout ε dans $V^y_{\alpha_0\beta_0}$, F_ℓ est une déformation complète de $F_{\ell\varepsilon}$. Il en découle que la sous-variété fermée Y' de $V^y_{\alpha_0\beta_0}$ des points ε tels que $F_{\ell\varepsilon}$ ne soit pas rigide est équidimensionnel et de codimension 2. Il faut montrer que Y' est irréductible. Pour cela, on remarque que puisque Y' est une sous-variété homogène, des composantes irréductibles éventuelles se coupent en une sous-variété de codimension au moins 4. Il suffit donc de trouver un ouvert Y'_0 de Y' tel que $\mathrm{codim}_{Y'}(Y' \backslash Y'_0) \geq 5$, et qu'en chaque point de Y'_0 ne passe qu'une seule composante irréductible de Y'. L'ouvert Y'_0 est constitué des points ε tels que F_ℓ soit de type de décomposition $(1, 0, \ldots, 0, -1, -1)$ ou $(1, 0, \ldots, 0, -2)$. En effet, si ε n'est pas dans Y'_0, on a $\dim(\mathrm{Ext}^1(F_{\ell\varepsilon}, F_{\ell\varepsilon})) \geq 5$, donc $\mathrm{codim}_{Y'}(Y' \backslash Y'_0) \geq 5$. D'autre part, Y'_0 est lisse en les points ε tels que $F_{\ell\varepsilon}$ soit de type $(1, 0, \ldots, 0, -1, -1)$, et il reste à montrer que Y'_0 est irréductible au voisinage des points ε tels que $F_{\ell\varepsilon}$ soit de type $(1, 0, \ldots, 0, -2)$. Pour cela, il suffit de trouver une déformation complète E de $\mathcal{O}_\ell(1) \oplus (r-2)\mathcal{O}_\ell \oplus \mathcal{O}_\ell(-2)$, paramétrée par une variété lisse S, telle que la sous-variété fermée S' des points s de S tels que E_s ne soit pas rigide soit irréductible. C'est simplement la famille des extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(-2) \longrightarrow E_0 \longrightarrow (r-2)\mathcal{O}_\ell \oplus \mathcal{O}_\ell(1) \longrightarrow 0.$$

Dans ce cas, on a $S = H^1(\mathcal{O}_\ell(-3)) \oplus \mathbf{C}^{r-2}$, et $S' = \mathbf{C}^{r-2}$. Ceci prouve l'irréductibilité de Y'.

Montrons maintenant que pour tout ε dans $V^y_{\alpha_0\beta_0}$, F_ℓ est une déformation complète de $F_{\ell\varepsilon}$. Il suffit de montrer que le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1(F^y, F^y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F_{\ell\varepsilon}, F_{\ell\varepsilon})$$

est surjectif. Cela découle de l'égalité $\mathrm{Ext}^2(F^y, F^y \otimes p^*\mathcal{O}(-1)) = 0$: par dualité de Serre, on a

$$\mathrm{Ext}^2(F^y, F^y \otimes p^*\mathcal{O}(-1)) \simeq \mathrm{Hom}(F^y, F^y \otimes p^*\mathcal{O}(1) \otimes \omega)^*,$$

ω désignant le faisceau canonique sur P_y. On a $\omega \simeq p^*\mathcal{O}(-2) \otimes q^*\mathcal{O}(-1)$, donc $\mathrm{Hom}(F^y, F^y \otimes p^*\mathcal{O}(1) \otimes \omega) = \mathrm{Hom}(F^y, F^y \otimes p^*\mathcal{O}(-1) \otimes q^*\mathcal{O}(-1)) = 0$, à cause du type de décomposition générique de F^y.

6.3. Le cas $c_1 = 1 - r$.

On procède de la même façon, mais cette fois, on s'intéresse aux fibrés E sur $\mathbf{P}_2$ pour lesquels il existe une droite ℓ passant par x telle que $h^0(E_{|\ell})$ "saute".

7. Le cas $r = 2$.

On démontre ici la proposition 3.1 dans le cas où $r = 2$.

7.1. Le cas des variétés de hauteur nulle.

Si $M(2, c_1, c_2)$ est de hauteur nulle, on a $c_1 = 0$ et $c_2 = 2$. La variété $\mathcal{M}$ est un ouvert d'un espace affine, donc $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}) = 0$, et par conséquent $\pi_M : \mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M)$ est surjective. Ceci démontre la proposition 3.1. Dans toute la suite, on supposera que $M(2, c_1, c_2)$ n'est pas de hauteur nulle.

7.2. Le cas $c_1 = -1$.

Il existe sur $M(2, -1, c_2) \times \mathbf{P}_2$ un faisceau universel F, c'est-à-dire que pour tout point y de $M(2, -1, c_2)$, F_y est un faisceau semi-stable de rang 2, de classes de Chern $-1, c_2$, dont le point de $M(2, -1, c_2)$ associé est y. D'après Strømme [25], $\mathrm{Pic}(M(2, -1, c_2))$ est engendré par les fibrés en droites $L_i = \det(R^1 p_{1*}(F \otimes p_2^*\mathcal{O}(-i)))$, $i = 0, 1, 2$ (p_1, p_2 désignant les projections $M(2, -1, c_2) \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow M(2, -1, c_2)$ et $M(2, -1, c_2) \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow$

$\mathbf{P}_2$). Pour démontrer la proposition 3.1 on va prouver que les π^*L_i sont triviaux pour un choix convenable de F. Comme précédemment, V désigne la cohomologie en degré 0 du complexe de Kronecker universel sur $\mathcal{M} \times \mathbf{P}_2$. Elle est munie de l'action évidente du groupe $G_1 = (GL(H_{-1}) \times GL(H_0) \times GL(H_1))$. Soit m un point de $\mathcal{M}$, t un scalaire non nul. Alors l'action de $t(I_{H_{-1}}, I_{H_0}, I_{H_1})$ sur V_m est l'homothétie de rapport t. Il existe un caractère λ de G_1 tel que pour tout t dans $\mathbb{C}^*$ on ait $\lambda(t(I_{H_{-1}}, I_{H_0}, I_{H_1})) = 1/t$ (parce que $\dim(H_0) - \dim(H_{-1}) = 1$). Soit L_λ le G_1-fibré en droites sur $\mathcal{M}$ déduit de λ. Soit $p_1' : \mathcal{M} \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathcal{M}$ la projection. Alors le sous-groupe $\mathbb{C}^*$ de G_1 agit trivialement sur $V' = V \otimes p_1'^* L_\lambda$, qui est donc muni d'une action de G_M. Puisque π_M est un quotient géométrique et que l'action de G_M est libre, on peut "descendre" V' à $M(2,-1,c_2) \times \mathbf{P}_2$, et on obtient ainsi un faisceau universel F. On a des isomorphismes canoniques $\pi^*L_i \simeq \det(H_{i+1}) \otimes L_\lambda$, $i = 0,1,2$, ce qui démontre que les π^*L_i sont triviaux.

7.3. Le cas $c_1 = 0$.

Soient p_1', p_2' les projections $\mathcal{M}_s \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_s$ et $\mathcal{M}_s \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathbf{P}_2$. Strømme [25] a montré que si c_2 est impair, on a $(\mathrm{Pic} M_s(2,0,c_2)) \simeq \mathbb{Z}^2$. On va voir que c'est encore vrai si c_2 est pair. Soit M_0 l'ouvert de $M_s(2,0,c_2)$ correspondant aux faisceaux localement libres. Le Potier [17] a montré que $\mathrm{Pic}(M_0) \simeq \mathbb{Z}$, et $\mathcal{O}^*(M_0) = \mathbb{C}^*$. D'autre part, la démonstration de Strømme de l'irréductibilité de $M_s(2,0,c_2) \backslash M_0$ (première partie de la proposition (4.6) de [25]) est valable même si c_2 est pair, donc $M_s(2,0,c_2) \backslash M_0$ est une hypersurface irréductible. On a une suite exacte

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathrm{Pic}(M_s(2,0,c_2)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M_0) \longrightarrow 0,$$

le morphisme i associant à 1 le fibré en droites associé à $M_s(2,0,c_2) \backslash M_0$. Puisque $\mathcal{O}^*(M_0) = \mathbb{C}^*$, i est injectif, donc $\mathrm{Pic}(M_s(2,0,c_2)) \simeq \mathbb{Z}^2$. Il faut maintenant montrer que $\pi_M : \mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M_s(2,0,c_2))$ est surjectif. Pour cela, on prouvera que le faisceau d'idéaux de $\pi^{-1}(M_s(2,0,c_2) \backslash M_0)$ est trivial et que le morphisme canonique $\pi_M'' : \mathrm{Char}(G_M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M_0)$ est surjectif.

La première assertion se démontre comme la seconde partie de la proposition (4.6) de [25] : on trouve une résolution de l'idéal $\mathcal{I}$ de $\pi^{-1}(M_s(2,0,c_2)) \backslash M_0)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_0 \otimes \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_{-1}^* \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{L}$ est le G_1-fibré en droites

$$\det(H_{-1})^{\otimes -c_2-1} \otimes \det(H_0)^{\otimes 2c_2-1} \otimes \det(H_1)^{\otimes c_2},$$

avec $G_1 = GL(H_{-1} \times GL(H_0) \times GL(H_1)$. On en déduit que $\mathcal{I}$ est trivial, d'où l'assertion. La suite précédente est en fait une suite exacte de G_1-fibrés vectoriels, $\mathcal{I}$ étant muni de l'action naturelle de G_1. On en déduit que le fibré en droites associé à $M_s(2,0,c_2)\backslash M_0$ provient du caractère $\lambda_{c_2+1,1-2c_2,c_2}$ de G_M.

Démontrons la seconde assertion. Rappelons certains résultats de [17]. On prend pour H_0 l'espace vectoriel H^*_{-1} dual de H_{-1}. Soit $\mathcal{N}$ la sous-variété fermée de $\pi^{-1}(M_0)$ des complexes (u,v) tels que l'application linéaire $H^0(\mathcal{O}(1)) \longrightarrow L(H_{-1}, H^*_{-1})$ déduite de u soit à valeurs dans l'espace $S^2H^*_{-1}$ des applications linéaires symétriques. On a alors $\pi(\mathcal{N}) = M_0$. Le groupe réductif $G' = (GL(H_{-1}) \times GL(H_1))/\{\pm 1\}$ agit librement sur $\mathcal{N}$ de la façon suivante :

$$([(g_1,g_2)],(u,v)) \longmapsto ((I_{Q^*} \otimes {}^t g_1^{-1}) \circ u \circ (I_{\Lambda^2 Q^*} \otimes g_1^{-1}), g_2 \circ v \circ (I_{Q^*} \otimes {}^t g_1)).$$

L'inclusion $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ est compatible avec le morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \varphi : G' &\longrightarrow G_M \\ (g_1,g_2) &\longmapsto (g_1, {}^t g_1^{-1}, g_2). \end{aligned}$$

La restriction de π à $\mathcal{N}$ est un bon quotient de $\mathcal{N}$ par G', et le morphisme canonique $\mathrm{Char}(G') \longrightarrow \mathrm{Pic}(M_0)$ est surjectif. Le groupe $\mathrm{Char}(G')$ est constitué des morphismes

$$\begin{aligned} h_{a,b} : G' &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ [(g_1,g_2)] &\longrightarrow \det(g_1)^a \det(g_2)^b, \end{aligned}$$

a et b étant des entiers tels que $a+b$ soit pair si c_2 est impair. En fait, Le Potier montre que φ induit un isomorphisme du sous-groupe G_2 de $\mathrm{Char}(G')$ des $h_{a,b}$ avec $b=0$ sur $\mathrm{Pic}(M_0)$. Le morphisme de groupes φ induit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Char}(G_M) &\longrightarrow \mathrm{Char}(G') \\ \lambda_{a,b,c} &\longmapsto h_{a-b,c}. \end{aligned}$$

Le caractère de G_M correspondant à $\pi^{-1}(M_s(2,0,c_2)\backslash M_0)$ est $\lambda_{c_2+1,1-2c_2,c_2}$, dont l'image dans $\mathrm{Char}(G')$ est h_{3c_2,c_2}. Ce caractère définit le fibré trivial sur M_0, ainsi par conséquent que $h_{3,1}$. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Im}(\Phi)$ et $H_{3,1}$ engendrent un sous-groupe de $\mathrm{Char}(G')$ contenant G_2. Si c_2 est impair, tout élément de G_2 se met sous la forme $H_{2a,0}$, a étant un entier. On a $h_{2a,0} = \Phi(\lambda_{a,-a,0})$. Si c_2 est pair, tout élément de G_2 se met sous la forme $h_{a,0}$, a étant un entier. Si a est pair, $h_{a,0}$ est dans $\mathrm{Im}(\Phi)$, comme précédemment. Si a est impair on a

$$h_{a,0} = (h_{3,1})^{c_2/2}\Phi(\lambda_{\frac{a-1}{2}-c_2/2,c_2-\frac{a+1}{2},-c_2/2}).$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 3.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. BARTH, Moduli of vector bundles on the projective plane, Invent. Math., 42 (1977), 63-91.

[2] A.A. BEILINSON, Coherent sheaves on $\mathbf{P}_n$ and problems of linear algebra, Funkt. Anal. i Ego Pril., vol. 12, No 3 (1978), 68-69.

[3] A. BOREL, J.P. SERRE, Le théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. Math. de France, 86 (1858), 97-136.

[4] E. BRIESKORN, Uber holomorphe $\mathbf{P}_n$-Bündel über $\mathbf{P}_1$, Math, Ann., 157 (1967), 343-357.

[5] J. BRUN, A. HIRSCHOWITZ, Droites de saut des fibrés de rang élevé sur $\mathbf{P}_2$, Math, Zeits., 181 (1982), 171-178.

[6] J.M. DREZET, Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$, Preprint, 1985.

[7] J.M. DREZET, J. LE POTIER, Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur $\mathbf{P}_2$, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 18 (1985), 193-244.

[8] G. ELLINGSRUD, Sur l'irréductibilité du module des fibrés stables sur $\mathbf{P}_2$, Math. Zeits., 182 (1983), 189-192.

[9] G. ELLINGSRUD, S.A. STRØMME, The Picard group of the moduli for stable rank 2 vector bundles on $\mathbf{P}_2$ with odd Chern class, Preprint, Oslo, 1979.

[10] W. FULTON, Intersection theory, Springer Verlag, 1984.

[11] D. GIESEKER, On the moduli of vector bundles on an algebraic surface, Ann. of Math., 106 (1977), 45-60.

[12] A. GROTHENDIECK, Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, Amer. J. of Math., 79 (1957), 121-138.

[13] R. HARTSHORNE, Algebraic geometry, Grad. Texts in Math., 52, Springer-Verlag, 1977.

[14] A. HIRSCHOWITZ, Rank techniques and jump stratifications. Actes du congrès "Vector Bundles on Algebraic Varieties" Bombay, 1984.

[15] G. HORROCKS, Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring, Proc. London Math. Soc., 14 (1964), 689-713.

[16] K. HULEK, On the classification of stable rank-r vector bundles over the projective plane. *In* : Vector bundles and differential equations (A. Hirschowitz ed.). Proceedings (Nice 1979), Progress in Math., 7, Birkhäuser, 1980.

[17] J. LE POTIER, Sur le groupe de Picard de l'espace de modules de fibrés stables sur $\mathbf{P}_2$, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 14 (1981), 141-155.

[18] J. LE POTIER, Fibrés stables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, Math. Ann., 241 (1979), 217-256.

[19] M. MARUYAMA, Moduli of stable sheaves II, J. Math. Kyoto Univ., 18 (1978), 557-614.

[20] H. MATSUMURA, Commutative algebra, W.A. Benjamin Co., New York, 1980.

[21] D. MUMFORD, J. FOGARTY, Geometric Invariant Theory, Erg. der Math. und ihre Grenzg., 34, Springer-Verlag, 1982.

[22] P.E. NEWSTEAD, Introduction to moduli problems and orbit spaces, Tata Inst., Lect. Notes, 51, Springer-Verlag, 1978.

[23] P.E. NEWSTEAD, Rationality of moduli spaces of vector bundles, Math. Ann., 215 (1975), 251-268.

[24] C.S. SESHADRI, Mumford's conjecture for GL(2) and applications, Alg. Geom., Bombay Coll., (1968-1969), 347-371.

[25] S.A. STRØMME, Ample divisors on fine moduli spaces on the projective plane, Math. Zeits., 187 (1984), 405-423.

Manuscrit reçu le 15 décembre 1986,
révisé le 3 juillet 1987.

Jean-Marc DREZET,
Université de Paris VII
UER de Mathématiques
Aile 45-55, 5e étage
2 place Jussieu
75221 Paris Cedex 05.