Annales de l'institut Fourier

Georges Philibert

Une mesure d'indépendance algébrique

Annales de l'institut Fourier, tome 38, nº 3 (1988), p. 85-103
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_3_85_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
38, 3 (1988), 85-103

UNE MESURE D'INDEPENDANCE ALGEBRIQUE

par Georges PHILIBERT

---

1. Introduction. Notations.

Soient Ω un réseau de $\mathbf{R}^2$ d'invariants g_2 et g_3 algébriques et ω une période primitive de Ω de sorte que $\Omega = \mathbf{Z}\omega + \mathbf{Z}\omega'$, avec $\tau = \dfrac{\omega'}{\omega} \in \mathcal{H}$, demi-plan de Poincaré.

Le nombre $\eta = \eta(\omega)$ est la pseudo-période associée à ω .

Au paragraphe 2, nous énonçons le résultat obtenu : la mesure d'indépendance algébrique de $\dfrac{\pi}{\omega}$ et $\dfrac{\eta(\omega)}{\omega}$. Signalons que ce résultat contient l'indépendance de ces nombres, indépendance démontrée en 1976 par G.V. Chudnovsky, [2].

La preuve de notre résultat se fera en deux parties : la première consistera à construire des polynômes convenables, la seconde, à l'aide de ces polynômes, utilisera un théorème de P. Philippon [8] pour obtenir la mesure. Dans la première partie, les outils essentiels sont un lemme de Siegel, un lemme d'extrapolation et un lemme de zéros. Dans un dernier paragraphe, nous rassemblerons les lemmes nécessaires à la démonstration.

La démonstration mettra en jeu des polynômes de $K[X,Y]$ où $K = \mathbf{Q}\left(g_2, \mathcal{P}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)$, $\mathcal{P}$ étant la fonction de Weierstrass associée à Ω . Pour mesurer de tels polynômes nous utilisons leur degré et leur hauteur logarithmique absolue, h, définie par P. Philippon [9] de la façon suivante :

Mots-clés : Théorie des nombres - Transcendance - Indépendance algébrique - Fonctions elliptiques : périodes, quasi-périodes.

On désigne par $\mathcal{M}_K$ l'ensemble des valeurs absolues normalisées de K et pour $v \in \mathcal{M}_K$, n_v est le degré local, $\left(\prod_{v\in\mathcal{M}_k} |x|_v^{n_v} = 1\right)$. On définit, pour $v \in \mathcal{M}_K$ et $P(X,Y) = \sum_{i,j} a_{ij}X^iY^j \in K[X,Y]$:

$$M_v(P) = \begin{cases} \operatorname*{Max}_{i,j} |a_{ij}|_v & \text{si } v \text{ est ultramétrique} \\ M(P^\sigma) & \text{si } v \text{ est archimédienne et correspond} \\ & \text{à un plongement } \sigma \text{ de } K \text{ dans } \mathbf{C} \end{cases}$$

où $M(P)$ est la mesure de Mahler du polynôme P :

$$M(P) = \exp \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{Log}|P(e^{2i\pi u_1}, e^{2i\pi u_2})| du_1\, du_2 \ .$$

Alors

$$h(P) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{v\in\mathcal{M}_K} n_v \operatorname{Log}\, \operatorname{Max}(1, M_v(P)) \ .$$

La taille d'un polynôme P de $K[X,Y]$ est alors définie par : $t(P) = d^0(P)+h(P)$, où $d^0(P)$ est le degré total de P ($d^0_X(P)$ et $d^0_Y(P)$ désigneront les degrés partiels de P en X et Y respectivement).

Par ailleurs, nous utiliserons aussi la hauteur classique H et la longueur L d'un polynôme : si $P(X,Y) = \sum_{i,j} a_{ij}X^iY^j \in \mathbf{C}[X,Y]$:

$$H(P) = \operatorname*{Max}_{i,j} |a_{ij}| \ , \quad L(P) = \sum_{i,j} |a_{ij}| \ .$$

De plus nous noterons $e_1 = \wp\left(\frac{\omega}{2}\right)$ et $d = [K:\mathbf{Q}]$.

2. La mesure d'indépendance algébrique.

Le réseau Ω, la période ω et le corps K étant fixés comme dans l'introduction, on a le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux constantes c et c' dépendant de ω , Ω et ε telles que pour tout polynôme P de $K[X,Y]$ de taille supérieure à c' et non constant on ait :*

$$\left|P\left(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta(\omega)}{\omega}\right)\right| \geq \exp(-(ct(P))^{3+\varepsilon}) \ .$$

La forme du théorème de P. Philippon sur les mesures fait que le résultat est exprimé en termes de taille, sans séparation du degré et de la hauteur. De ce point de vue, on peut dire que le résultat obtenu est un peu moins précis que celui de G.V. Chudnovsky [4].

3. Démonstration du théorème.

On notera $A_0, A_1, \ldots, A_{23}$ des constantes ne dépendant que de Ω , ω et K .

3.1. Construction de polynômes.

Les outils utilisés dans cette première partie de la démonstration sont un lemme de Siegel, un lemme d'extrapolation et un lemme de zéros; les énoncés de ces lemmes sont donnés dans le paragraphe 4. La construction de ces polynômes s'effectue en deux temps. Dans le premier, on construit une fonction auxiliaire et dans le second on en déduit les polynômes souhaités.

1er temps : Construction de la fonction auxiliaire.
On se donne deux entiers positifs D_1 et D_2 et l'on va construire une fonction méromorphe de la forme :

$$\Phi(z) = \sum_{\ell<D_1} \sum_{m<D_2} P_{\ell m}\left(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta(\omega)}{\omega}\right) \mathcal{P}^{\ell}(z) \left(\zeta(z) - \frac{\eta(\omega)}{\omega} z\right)^m ,$$

ayant de nombreux zéros, les $P_{\ell m}$ étant des polynômes de $\mathbf{Z}[X, Y]$ à préciser, et ζ la fonction de Weierstrass associée à Ω . Dans la suite, nous noterons $D = \mathrm{Max}(D_1, D_2)$ et $f(z) = \zeta(z) - \dfrac{\eta(\omega)}{\omega} z$. De même nous écrirons η pour $\eta(\omega)$. Les zéros choisis pour Φ sont les points $z_n = \dfrac{\omega}{2} + n\omega'$.

De façon précise, N et T étant des entiers positifs, nous imposerons à Φ d'avoir en z_n un zéro d'ordre au moins égal à T, pour tout $n < N$.

Soit $\Gamma_{\ell m}(z) = \mathcal{P}^{\ell}(z) f^m(z)$.

On peut appliquer le lemme 1 (§4) avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\ell, m, 0)$, $a = -\dfrac{\eta}{\omega}$, $b = 0$:

$$\Gamma_{\ell m}^{(t)}(z) = \sum_{\mu_1=0}^{\ell+2t} \sum_{\mu_2=0}^{m} \sum_{\mu_3=0}^{t} \sum_{k_1=0}^{m} \sum_{k_2=0}^{t} \gamma_{\ell m}(t, \mu_1, \mu_2, \mu_3, k_1, k_2) \left(-\frac{\eta}{\omega}\right)^{k_1} \left(\frac{g_2}{2}\right)^{k_2} \mathcal{P}^{\mu_1}(z) f^{\mu_2}(z) \mathcal{P}'^{\mu_3}(z) ,$$

où

$$\gamma_{\ell m}(t,\mu_1,\mu_2,\mu_3,k_1,k_2)\in\mathbf{Z}$$

et

$$|\gamma_{\ell m}(t,\mu_1,\mu_2,\mu_3,k_1,k_2)|\le 10^t(\mathrm{Max}(\ell,m)+t)^t\ .$$

On a $f(z+\omega')-f(z)=\eta(\omega')-\dfrac{\eta(\omega)}{\omega}\omega'=-\dfrac{2i\pi}{\omega}$ (d'après la formule de Legendre) et $f\left(\dfrac{\omega}{2}\right)=0$. Ainsi $f(z_n)=-\dfrac{2i\pi}{\omega}n$. De plus $\mathcal{P}(z_n)=\mathcal{P}\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$ est le nombre algébrique noté e_1 et $\mathcal{P}'(z_n)=\mathcal{P}'\left(\dfrac{\omega}{2}\right)=0$.

Ainsi $\Gamma_{\ell m}^{(t)}(z_n)$ s'écrit comme valeur en $\left(\dfrac{2i\pi}{\omega},\dfrac{\eta}{\omega}\right)$ d'un polynôme de $K[X,Y]$ de degrés partiels au plus égaux à m .

Nous posons $\Gamma_{\ell m}^{(t)}(z_n)=F_{\ell mtn}\left(\dfrac{2i\pi}{\omega},\dfrac{\eta}{\omega}\right)$ avec :

$$\begin{aligned}F_{\ell mtn}(X,Y)=&\sum_{\mu_1<D_1+2t}\ \sum_{\mu_2<D_2}\ \sum_{k_1<D_2}\ \sum_{k_2<t}\gamma_{\ell m}(t,\mu_1,\mu_2,k_1,k_2)\\ &(-1)^{k_1+\mu_2}\left(\frac{g_2}{2}\right)^{k_2}(e_1)^{\mu_1}n^{\mu_2}X^{\mu_2}Y^{k_1}\end{aligned}\tag{1}$$

où $\gamma_{\ell m}(t,\mu_1,\mu_2,k_1,k_2)=\gamma_{\ell m}(t,\mu_1,\mu_2,0,k_1,k_2)$, de sorte que $F_{\ell mtn}\in K[X,Y]$ et que, si σ est un plongement de K dans $\mathbf{C}$:

$$L(F_{\ell mtn}^\sigma)\le(D_1+2t)tD_2^2\left(1+|\frac{g_2^\sigma}{2}|\right)^t(1+|e_1^\sigma|)^{D_1+2t}10^t(D+t)^tn^{D_2}$$

d'où $L(F_{\ell mtn}^\sigma)\le\exp[A_0(t\mathrm{Log}(D+t)+D_1+D_2\mathrm{Log}N)]$.

On pose : $Q_{tn}(X,Y)=\displaystyle\sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2}P_{\ell m}(X,Y)F_{\ell mtn}(X,Y)$.

Ainsi $\Phi^{(t)}(z_n)=Q_{tn}\left(\dfrac{2i\pi}{\omega},\dfrac{\eta}{\omega}\right)$ pour $(t,n)\in\mathbf{N}^2$.

Puisque $F_{\ell mtn}$ a des degrés partiels au plus égaux à $m<D_2$ on choisit pour $P_{\ell m}$ un polynôme de $\mathbf{Z}[X,Y]$ de degrés partiels au plus D_2-1 :

$$P_{\ell m}(X,Y)=\sum_{\alpha<D_2}\sum_{\beta<D_2}p(\ell,m,\alpha,\beta)X^\alpha Y^\beta\ .$$

Ainsi Φ a un zéro en z_n d'ordre au moins égal à T, si $Q_{tn}=0$ pour $t<T$. L'annulation de tous les coefficients des $Q_{tn}(t<T\ ,n<N)$ fournit un système linéaire d'au plus $4TND_2^2$ équations dont les $D_1D_2^3$ inconnues sont les $p(\ell,m,\alpha,\beta)$. D'après le lemme de Siegel (§4, lemme 2), ce système admet une solution non triviale dans $\mathbf{Z}$ pourvu que :

$D_1D_2^3 > [K : \mathbf{Q}]4TND_2^2$, c'est à dire $D_1D_2 > 4dNT$, et cette solution est telle que $\mathrm{Max}\{|p(\ell,m,\alpha,\beta)|, \ell < D_1, m < D_2, \alpha < D_2,\ \beta < D_2\}$ soit majoré par :

$$\exp\left(\mathrm{Log}3+\frac{4dTN}{D_1D_2-4dTN}(\mathrm{Log}2+A_1(D_1+D_2\mathrm{Log}N+T\mathrm{Log}(D+T)))\right).$$

En imposant la contrainte légèrement plus forte :$D_1D_2 > 8dNT$ on aura :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Max}\{|p(\ell,m,\alpha,\beta)|\ ;\ \ell < D_1, m,\alpha,\beta < D_2\}\\ &\qquad\qquad\qquad \leq \exp[A_2(D_1 + D_2\mathrm{Log}N + T\mathrm{Log}(D+T))]\ .\end{aligned}$$

En conclusion, sous la condition $D_1D_2 > 8dNT$, il existe des polynômes $P_{\ell m} \in \mathbf{Z}]X,Y]$, $\ell < D_1$, $m < D_2$, non tous nuls, tels que :

(2)

i) $d_X^0(P_{\ell m}) < D_2, d_Y^0 < D_2, H(P_{\ell m}) \leq \exp[A_2(D_1 + D_2\mathrm{Log}N + T\mathrm{Log}(D+T))]$

ii) la fonction $\Phi(x) = \sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} P_{\ell m}\left(\frac{2i\pi}{\omega},\frac{\eta}{\omega}\right)P^{\ell}(z)f^{m}(z)$ ait un zéro d'ordre au moins égal à T en z_n

iii) les polynômes $Q_{tn} = \sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} P_{\ell m}F_{\ell mtn}$ vérifient $Q_{tn}\left(\frac{2i\pi}{\omega'},\frac{\eta}{\omega}\right) = \Phi^{(t)}(z_n)$ et sont nuls pour $t < T$, $n < N$, où $F_{\ell mtn} \in K[X,Y]$, de degrés partiels au plus égaux à D_2 est tel que pour tout plongement σ de K dans $\mathbf{C}$:

$$L(F^{\sigma}_{\ell mtn}) \leq \exp[A_0(t\mathrm{Log}(D+t) + D_2\mathrm{Log}\, n + D_1)]\ .$$

2ème temps : Lemme d'extrapolation, lemme de zéros.
Il s'agit d'abord de montrer que les polynômes Q_{tn} qui sont nuls pour $t < T$, $n < N$ n'ont pas de zéro commun dans une boule suffisamment petite de centre $\left(\frac{2i\pi}{\omega},\frac{\eta}{\omega}\right)$ pour $t < U$, $n < N$ (U est un entier supérieur à T).

Mais les zéros communs aux Q_{tn}, $t < U$, $n < N$, sont de deux types différents : les zéros communs aux $P_{\ell m}$ et les autres.

Par un lemme de zéros, nous montrerons que, pour des paramètres bien choisis, les seuls zéros communs sont les zéros communs aux $P_{\ell m}$. Pour nous en "débarrasser", nous modifierons les polynômes $P_{\ell m}$, c'est à dire la fonction auxiliaire. Cependant, cette modification a le défaut suivant : la nouvelle fonction n'a plus de zéros en z_n ; nous montrerons toutefois qu'elle reste petite en ces points et un lemme d'extrapolation nous permettra de montrer que les Q_{tn} modifiés sont tout de même petits en $\left(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega}\right)$.

Dans la suite, le point $\left(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega}\right)$ sera noté $\underline{\theta}$.

1) Modification des polynômes $P_{\ell m}$.

Comme les $P_{\ell m}$ ne sont pas tous nuls, pour tout $\underline{x} \in \mathbf{C}^2$, $\underline{x} = (x_1, x_2)$, il existe $\underline{q} = (q_1, q_2) \in \mathbf{N}^2$ et $(\ell, m) \in \{0, \dots, D_1 - 1\} \times \{0, \dots, D_2 - 1\}$ tels que $D^{\underline{q}} P_{\ell m}(\underline{x}) \neq 0$ où $D^{\underline{q}} = \dfrac{\partial^{q_1+q_2}}{\partial X^{q_1} \partial Y^{q_2}}$.

Pour $\underline{x} \in \mathbf{C}^2$, soit $\underline{q} \in \mathbf{N}^2$, $\underline{q} = (q_1, q_2)$, avec $q_1 + q_2$ minimal tel qu'il existe (ℓ, m) vérifiant $D^{\underline{q}} P_{\ell m}(\underline{x}) \neq 0$.

Si pour un $\underline{x}$ de $\mathbf{C}^2$, plusieurs $\underline{q}$ conviennent, on choisit l'un quelconque. On définit ainsi une application g de $\mathbf{C}^2$ dans $\{0, \dots, D_2\}^2$ car nécessairement q_1 et q_2 sont inférieurs aux degrés partiels des $P_{\ell m}$.

Soit alors $J = g(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est la boule de $\mathbf{C}^2$ de centre $\underline{\theta}$ de rayon $\exp(-\lambda T N^2)$, λ étant une constante à préciser.

Pour $\underline{q} \in J$, nous désignerons par $P_{\ell m \underline{q}}$ le polynôme :

$$P_{\ell m \underline{q}}(X, Y) = \frac{1}{q_1! q_2!} D^{\underline{q}} P_{\ell m}(X, Y) .$$

$$(3) \quad P_{\ell m \underline{q}}(X, Y) = \sum_{q_1 \leq \alpha < D_2} \sum_{q_2 \leq \beta < D_2} p(\ell, m, \alpha, \beta) \binom{\alpha}{q_1} \binom{\beta}{q_2} X^{\alpha - q_1} Y^{\beta - q_2}$$

d'où

$$(4) \quad L(P_{\ell m \underline{q}}) \leq D_2^2 2^{2D_2} H(P_{\ell m}) \leq \exp[A_3(D_1 + D_2 \mathrm{Log} N + T \mathrm{Log}(D+T))] .$$

On considère alors, pour $t < U$, $n < N$, $\underline{q} \in J$, la famille de polynômes $Q_{t,n,\underline{q}}$:

$$Q_{tn\underline{q}}(X, Y) = \sum_{\ell < D_1} \sum_{m < D_2} P_{\ell m \underline{q}}(X, Y) F_{\ell m t n}(X, Y) .$$

Nous allons montrer que cette famille de polynômes Q_{tnq}, $t < U$, $n < N$, $\underline{q} \in J$, pour des paramètres bien choisis, n'a pas de zéro dans la boule $\mathcal{B}$ et que ces polynômes sont petits en $\underline{\theta}$.

2) Majoration de $|Q_{tn\underline{q}}(\underline{\theta})$.

$$Q_{tn\underline{q}}(\underline{\theta}) = \sum_{\ell < D_1} \sum_{m < D_2} P_{\ell m \underline{q}}(\underline{\theta}) F_{\ell m t n}(\underline{\theta}) .$$

Puisque $\underline{q} \in J$, il existe $\underline{x} \in \mathcal{B}$ tel que $g(\underline{x}) = \underline{q}$. L'inégalité triangulaire donne :

$$|Q_{tn\underline{q}}(\underline{\theta})| \leq |\sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2}(P_{\ell m\underline{q}}(\underline{\theta}) - P_{\ell m\underline{q}}(\underline{x}))F_{\ell mtn}(\underline{\theta})|$$
$$+|\sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} P_{\ell m\underline{q}}(\underline{x})F_{\ell mtn}(\underline{\theta})| \ .$$

Les deux termes du second membre seront pour $t < U$, $n < N$, majorés séparément : le premier ne présente aucune difficulté, le second au contraire nécessitera l'utilisation d'un lemme d'extrapolation.

Pour simplifier l'écriture, le premier sera noté B_1 et le second B_2 . D'après le lemme 3 du §4, on a :

$$|P_{\ell m\underline{q}}(\underline{\theta}) - P_{\ell m\underline{q}}(\underline{x})| \leq d^0(P_{\ell m\underline{q}})L(P_{\ell m\underline{q}})$$
$$\operatorname{Max}\left(1, |x_1|, |x_2|, |\frac{2i\pi}{\omega}|, |\frac{\eta}{\omega}|\right)^{d^0(P_{\ell m\underline{q}})}\left(|x_1 - \frac{2i\pi}{\omega}| + |x_2 - \frac{\eta}{\omega}|\right) .$$

Puisque $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathcal{B}$, on obtient, d'après (3) et (4) :

$$|P_{\ell m\underline{q}}(\underline{\theta}) - P_{\ell m\underline{q}}(\underline{x})| \leq \exp[-\lambda TN^2 + A_4(D_1 + D_2\mathrm{Log}N + T\mathrm{Log}(D+T))] \ .$$

Par ailleurs $|F_{\ell mtn}(\underline{\theta})| \leq L(F_{\ell mtn})\left(1 + |\frac{2i\pi}{\omega}|\right)^{D_2}\left(1 + |\frac{\eta}{\omega}|\right)^{D_2}$. D'après (2) et la définition de B_1, on obtient pour $t < U, (T < U)$, $n < N$:

(5) $\quad B_1 \leq \exp[-\lambda TN^2 + A_5(U\mathrm{Log}(D+U) + D_1 + D_2\mathrm{Log}N)]$.

La majoration de B_2 pour $t < U$, $n < N$ se fera en deux étapes, nous allons d'abord majorer B_2 pour $t < T$, $n < N$.

Puisque pour $t < T$, $n < N$, $Q_{tn} = 0$, on a aussi $D^{\underline{q}}Q_{tn} = 0$ c'est à dire

$$\sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} D^{\underline{q}}(P_{\ell m}F_{\ell mtn}) = 0 \ .$$

Comme $\underline{q} = (q_1, q_2)$ est tel que $q_1 + q_2$ est minimal pour la propriété : il existe (ℓ, m) tel que $D^{\underline{q}}P_{\ell m}(\underline{x}) \neq 0$, on a :

$$\sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} P_{\ell m\underline{q}}(\underline{x})F_{\ell mtn}(\underline{x}) = 0 \text{ pour } t < T,\ n < N \ .$$

Donc pour $t < T$, $n < N$, $B_2 = |\sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} P_{\ell m\underline{q}}(\underline{x})(F_{\ell mtn}(\underline{\theta}) - F_{\ell mtn}(\underline{x}))|$. Or $|P_{\ell m\underline{q}}(\underline{x})| \leq L(P_{\ell m\underline{q}})(1+|x_1|)^{D_2}(1+|x_2|)^{D_2} \leq \exp[A_6(D_1+$

$D_2 \mathrm{Log} N + T\mathrm{Log}(D+T))]$ et le lemme 3 du §4 donne :

$$|F_{\ell mtn}(\underline{\theta}) - F_{\ell mtn}(\underline{x})| \leq d^0(F_{\ell mtn}) L(F_{\ell mtn})$$
$$\mathrm{Max}\left(1, |\frac{2i\pi}{\omega}|, |\frac{\eta}{\omega}|, |x_1|, |x_2|\right)^{d^0(F_{\ell mtn})} \left(|x_1 - \frac{2i\pi}{\omega}| + |x_2 - \frac{\eta}{\omega}|\right) .$$

D'après (2), pour $t < T$, $n < N$, on obtient :

$$|F_{\ell mtn}(\underline{\theta}) - F_{\ell mtn}(\underline{x})|$$
$$\leq \exp[-\lambda T N^2 + A_7(T\mathrm{Log}(D+T) + D_1 + D_2 \mathrm{Log} N)]$$

et

$$B_2 \leq \exp[-\lambda T N^2 + A_8(T\mathrm{Log}(D+T) + D_1 + D_2 \mathrm{Log} N)] .$$

La majoration de B_2 pour $t < U$, $n < N$, sera obtenue par le lemme d'extrapolation (voir §4, lemme 5).

Posons $\Phi_{\underline{q}}(z) = \sum_{\ell < D_1} \sum_{m < D_2} P_{\ell m \underline{q}}(\underline{x}) \mathcal{P}^\ell(z) f^m(z)$

de sorte que :

$$\Phi_{\underline{q}}^{(t)}(z_n) = \sum_{\ell < D_1} \sum_{m < D_2} P_{\ell m \underline{q}}(\underline{x}) F_{\ell mtn}(\underline{\theta}) .$$

D'après la majoration précédente, $\Phi_{\underline{q}}^{(t)}(z_n)$ est "petit" pour $t < T$, $n < N$. La fonction $\varphi(z) = \sigma(z) \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega} z^2 + \frac{i\pi}{\omega} z\right)$ est un dénominateur de $f(z)$ et $\varphi^2(z)$ un dénominateur de $\mathcal{P}(z)$ (σ est la fonction "sigma" de Weierstrass associée au réseau Ω). Nous appliquons le lemme d'extrapolation à la fonction $\psi_{\underline{q}}(z) = \Phi_{\underline{q}}(z) \cdot (\varphi(z))^{2D_1 + D_2}$ pour les disques de rayon $r_1 = N(|\omega| + |\omega'|)$ et $r_2 = 8r_1$, en tenant compte des valeurs de $\psi_{\underline{q}}$ aux points de $E = \{z = \omega/2 + n\omega' + p\omega, 0 \leq n < N,\ p \in \mathbf{Z}, |z| < r_1\}$. Le lemme 5 du §4 donne :

$$|\psi_{\underline{q}}^{(t)}|_{r_1} \leq t! \left\{ 2|\psi_{\underline{q}}|_{r_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2TN^2} + \frac{4N^2}{N(|\omega| + |\omega'|)} \right.$$
$$\left. \left(\frac{33N(|\omega| + |\omega'|)}{\sqrt{2}\delta N}\right)^{2TN^2} \underset{z \in E,\ 0 \leq s < T}{\mathrm{Max}} |\frac{\psi_{\underline{q}}^{(s)}(z)}{s!}| \right\},$$

$$\delta = \underset{\omega_1 \in \Omega^*}{\mathrm{Min}} |\omega_1| ,$$

car le nombre de points de E est au moins égal à $2N^2$.

Nous évaluons d'abord $|\psi_{\underline{q}}^{(s)}(z)|$ pour $z \in E$, $s < T$.

On a $\psi_{\underline{q}}^{(s)}(z) = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} (\varphi^{2D_1 + D_2}(z))^{(j)} \Phi_{\underline{q}}^{(s-j)}(z)$.

D'après le calcul précédent, pour $n < N$, $s < T$:

$$|\Phi_{\underline{q}}^{(s-j)}(z_n)| \leq \exp[-\lambda T N^2 + A_8(T\mathrm{Log}(T+D) + D_1 + D_2 \mathrm{Log} N)] .$$

Il reste à majorer $(\varphi^{2D_1+D_2}(z))^{(j)}$ en $z = z_n$ pour $j < T$. Or

$$(\varphi^{2D_1+D_2})^{(j)}(z_n) = \frac{j!}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_n} \frac{\varphi^{2D_1+D_2}(z)}{(z-z_n)^{j+1}} dz$$

où $\mathcal{C}_n = \{z/|z - z_n| = r_0\}$, r_0 étant une constante positive.
D'où $|(\varphi^{2D_1+D_2})^{(j)}(z_n)| \leq \frac{j!}{r_0^j} \mathrm{Sup}_{w \in \mathcal{C}_n} |\varphi^{2D_1+D_2}(w)|$. Pour $z \in \mathcal{C}_n$, $z = \frac{\omega}{2} + n\omega' + r_0 e^{ix}$; comme φ est d'ordre de croissance 2

$$|\varphi^{2D_1+D_2}(w)| \leq \exp A_9(D_1 + D_2)N^2, \text{ pour } w \in \mathcal{C}_n .$$

Ainsi

$$|[\varphi^{2D_1+D_2}(z)^{(j)}]_{z=z_n}| \leq \frac{j!}{r_0^j} \exp A_9(D_1 + D_2)N^2 ,$$

et

$$|\frac{1}{s!}\psi_{\underline{q}}^{(s)}(z_n)| \leq \exp[-\lambda T N^2 + A_{10}(DN^2 + T\mathrm{Log}(D+T))], s < T, n < N.$$

La fonction $\psi_{\underline{q}}$ est ω-périodique, cette majoration est donc vraie pour tous les points de $\underline{E}$. Il reste à majorer $|\psi_{\underline{q}}|_{r_2}$.

$$\psi_{\underline{q}}(z) = \sum_{\ell < D_1} \sum_{m < D_2} P_{\ell m \underline{q}}(\underline{x})(\varphi^2(z)\mathcal{P}(z))^\ell (\varphi(z) f(z))^m (\varphi(z))^{2D_1 - 2\ell + D_2 - m} .$$

Puisque les fonctions φ , $\mathcal{P}$, f sont d'ordre de croissance 2, pour $|z| = 8N(|\omega| + |\omega'|) = r_2$, on a :

$$\mathrm{Max}\{|\varphi^2(z)\mathcal{P}(z)|, \ |\varphi(z)f(z)|, \ |\varphi(z)|\} \leq \exp A_{11} N^2,$$

et $|\psi_{\underline{q}}|_{r_2} \leq \exp[A_{12}(DN^2 + T\mathrm{Log}(D+T))]$.

Le lemme d'extrapolation donne :

$$|\psi_{\underline{q}}^{(t)}|_{r_1} \leq t! \Big\{ 2\exp[A_{12}(DN^2 + T\mathrm{Log}(D+T)) - TN^2] + \frac{4N}{|\omega| + |\omega'|} \left(\frac{33(|\omega| + |\omega'|)}{\sqrt{2}\delta} \right)^{2TN^2} \exp[-\lambda T N^2 + A_{10}(N^2 D + T\mathrm{Log}(T+D))] \Big\} .$$

Comme $|\psi_{\underline{q}}^{(t)}|_{r_1}$ doit être "petit", on choisit $\lambda = 1 + 2\mathrm{Log}33\left(\frac{|\omega|+|\omega'|}{\delta\sqrt{2}}\right) > 1$, et on obtient :

$$(6) \qquad |\psi_{\underline{q}}^{(t)}|_{r_1} \leq t!\exp[-TN^2 + A_{13}(DN^2 + T\mathrm{Log}(D+T)] \, .$$

Il faut maintenant revenir à $\Phi_{\underline{q}}$. Plus précisément, il faut majorer $|\Phi_{\underline{q}}^{(t)}(z)|$ en $z = z_n$ pour $n < N$ et $t < U$ à l'aide de $\psi_{\underline{q}}$.

Soit $r'_0 = \frac{1}{2}d\left(\frac{\omega}{2}, \Omega\right)$; pour $t \geq 0$, on a :

$$\Phi_{\underline{q}}^{(t)}(z_n) = \frac{t!}{2i\pi}\int_{\gamma_n} \frac{\Phi_{\underline{q}}(z)}{(z-z_n)^{t+1}}dz \text{ ,où } \gamma_n = \{z \in \mathbf{C}; |z - z_n| = r'_0\} \, .$$

Donc $|\Phi_{\underline{q}}^{(t)}(z_n)| \leq \frac{t!}{r_0'^t} \sup_{w\in\gamma_n} |\Phi_{\underline{q}}(w)|$. Or $\Phi_{\underline{q}}(w) = \frac{1}{\varphi^{2D_1+D_2}(w)}\psi_{\underline{q}}(w)$ et pour $w \in \gamma_n$, on a $|w| < r_1$, donc

$$|\Phi_{\underline{q}}^{(t)}(z_n)| \leq \frac{t!}{r_0'^t}|\psi_{\underline{q}}|_{r_1} \sup_{w\in\gamma_n} \frac{1}{|\varphi^{2D_1+D_2}(w)|} \, .$$

Pour $z \in \gamma_n$, $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(x)$ où x appartient au cercle de centre $\omega/2$ de rayon r'_0 donc $\mathcal{P}(z)$ est borné et par le lemme 4 du §4 on a $|\varphi^2(w)| \geq A_{14} > 0$ pour $w \in \gamma_n$. D'où

$$|\Phi_{\underline{q}}^{(t)}(z_n)| \leq \frac{t!}{r_0'^t}|\psi_{\underline{q}}|_{r_1} \exp(2D_1 + D_2)\mathrm{Log}(1/A_{14}) \, .$$

Pour $t < U$, $n < N$, (6) permet d'écrire :

$$B_2 = |\Phi_{\underline{q}}^{(t)}(z_n)| \leq \exp[-TN^2 + A_{15}(U\mathrm{Log}U + DN^2 + T\mathrm{Log}(D+T))] \, .$$

La majoration (5) pour B_1 et cette majoration de B_2 donnent pour $n < N$, $t < U$, $\underline{q} \in J$:

$$|Q_{tn\underline{q}}(\underline{\theta})| \leq \exp[-TN^2 + A_{16}(U\mathrm{Log}(U+D) + DN^2)] \, .$$

3) Lemme de zéros.

Nous allons établir par un lemme de zéros que les $Q_{tn\underline{q}}(t < U,\ n < N,\ \underline{q} \in J)$ n'ont pas de zéro commun dans la boule $\mathcal{B}$ de centre $\underline{\theta}$ et de rayon $e^{-\lambda TN^2}$ pourvu que D_1, D_2, N, T et U satisfassent une condition supplémentaire.

Soit $(a,b) \in \mathcal{B}$ un zéro commun à tous les $Q_{tn\underline{q}}$. Soit $\underline{q}_0 = g(a,b) \in J$; par construction, il existe $\ell < D_1$, $m < D_2$ tels que $P_{\ell m\underline{q}_0}(a,b) \neq 0$. Pour $n < N$, on définit la fonction méromorphe

$$\Phi_{\underline{q}_0,n}(z) = \sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} P_{\ell m\underline{q}_0}(a,b)\mathcal{P}^\lambda(z)(\zeta(z) - bz + \delta_n)^m$$

où les δ_n sont des constantes que l'on va préciser. On va faire en sorte que, pour $t < U$, $n < N$, $\Phi^{(t)}_{\underline{q}_0,n}(z_n) = Q_{tn\underline{q}_0}(a,b)$. Comme (a,b) joue en quelque sorte le "rôle" de $\underline{\theta} = \left(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega}\right)$, il suffit pour cela que $\zeta(z_n) - bz_n + \delta_n = -an$ car $\zeta(z_n) - \frac{\eta}{\omega} z_n = -\frac{2i\pi}{\omega} n$.

On choisit donc $\delta_n = -an + bz_n - \zeta(z_n)$. Avec ce choix, on a donc N fonctions $\Phi_{\underline{q}_0,n}$, $(0 \leq n < N)$ vérifiant pour $t < U$:

$$\Phi^{(t)}_{\underline{q}_0,n}(z_n) = Q_{tn\underline{q}_0}(a,b) = 0 .$$

Comme les $P_{\ell m\underline{q}_0}(a,b)$ ne sont pas tous nuls, le lemme 6 du §4 montre que

$$NU \leq 12 D_1 D_2 + 3ND_1 + 9D_2 ,$$

à condition que les $\zeta(z_n) - bz_n + \delta_n = -an$ soient distincts. Il suffit pour cela que $a \neq 0$; donc comme $(a,b) \in \mathcal{B}$ il suffit que $|\frac{2i\pi}{\omega}|$ soit supérieur au rayon $e^{-\lambda TN^2}$ de la boule $\mathcal{B}$. Ainsi sous les deux contraintes $|\frac{2i\pi}{\omega}| > e^{-TN^2}$, $NU > 12D_1D_2 + 3ND_1 + 9D_2$ les polynômes $Q_{tn\underline{q}}(t < U,\ n < N,\ \underline{q} \in J)$ n'ont pas de zéro commun dans la boule de centre $\underline{\theta}$ de rayon $e^{-\lambda TN^2}$.

4) Hauteur des $Q_{tn\underline{q}}$.

Comme $Q_{tn\underline{q}}(X,Y) = \sum_{\ell<D_1} \sum_{m<D_2} P_{\ell m\underline{q}}(X,Y) F_{\ell mtn}(X,Y)$, on a :

$$h(Q_{tn\underline{q}}) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{v\in\mathcal{M}_K} n_v \operatorname{Max}\left(0, \operatorname{Log} M_v\left(\sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} P_{\ell m\underline{q}}(X,Y) F_{\ell mtn}(X,Y)\right)\right) .$$

Soit v une place infinie de K, v correspondant au plongement σ.

$$M_v\left(\sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} P_{\ell m\underline{q}}(X,Y) F_{\ell mtn}(X,Y)\right) = M\left(\sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} P_{\ell m\underline{q}}(X,Y) F^{\sigma}_{\ell mtn}(X,Y)\right) ,$$

car $P_{\ell m\underline{q}} \in \mathbf{Z}[X,Y]$. D'où :

$$M_v\Big(\sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} P_{\ell m\underline{q}}(X,Y)F_{\ell mtn}(X,Y)\Big)$$

$$\leq L\Big(\sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} P_{\ell m\underline{q}}(X,Y)F^{\sigma}_{\ell mtn}(X,Y)\Big)$$

$$\leq \sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} L(P_{\ell m\underline{q}}F^{\sigma}_{\ell mtn})$$

$$\leq \sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} L(P_{\ell m\underline{q}})L(F^{\sigma}_{\ell mtn}) \; .$$

Donc (2) et (4) donnent pour $t < U$, $n < N$, $\underline{q} \in J$:

$$M_v\left(\sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} P_{\ell m\underline{q}}(X,Y)F_{\ell mtn}(X,Y)\right)$$

$$\leq \exp[A_{17}(U\mathrm{Log}(D+U) + D_2\mathrm{Log}N + D_1)] \; .$$

D'où :

$$\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{v\in\mathcal{A}_K} n_v\,\mathrm{Max}(0,\mathrm{Log}M_v(Q_{tn\underline{q}}))$$

$$\leq A_{17}(U\mathrm{Log}(D+U) + D_2\mathrm{Log}N + D_1) \; ,$$

où $\mathcal{A}_K$ désigne l'ensemble des places infinies de K .

Soit v une place finie de K ; on désigne par Δ_1 et Δ_2 des dénominateurs de e_1 et $\frac{g_2}{2}$ respectivement. D'après l'expression de $F_{\ell mtn}$ explicitée en (1), $\Delta_1^{D_1+2t}\Delta_2^t F_{\ell mtn} \in \mathbf{Z}[X,Y]$. Donc

$$M_v\left(\sum_{\ell<D_1}\sum_{m<D_2} P_{\ell m\underline{q}}(X,Y)\Delta_1^{D_1+2t}\Delta_2^t F_{\ell mtn}(X,Y)\right) \leq 1 \; ,$$

car $P_{\ell m\underline{q}} \in \mathbf{Z}[X,Y]$. Ainsi

$$M_v(Q_{tn\underline{q}}) \leq |\Delta_1|_v^{-D_1-2t}|\Delta_2|_v^{-t} \; ,$$

et

$$\frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{v\in\mathcal{U}_K} n_v\,\mathrm{Max}(0,\mathrm{Log}M_v(Q_{tn\underline{q}})) \leq t\mathrm{Log}\Delta_2 + (D_1+2t)\mathrm{Log}\Delta_1 \; ,$$

où $\mathcal{U}_K$ désigne l'ensemble des places finies de K .
Par suite, pour $t < U$, $n < N$, $\underline{q} \in J$:

$$h(Q_{tn\underline{q}}) \leq A_{18}(U\mathrm{Log}(D+U) + D_2\mathrm{Log}N + D_1) \; .$$

En conclusion de ce premier temps de la démonstration, on peut énoncer :

PROPOSITION 1. — *Le réseau Ω, la période ω et le corps K étant fixés comme dans l'introduction, soient D_1 , D_2 , N , T , U des entiers positifs vérifiant :*

$$(7)\quad \begin{aligned} &\text{i) } D_1D_2 > 8[K:\mathbf{Q}]NT \\ &\text{ii) } NU > 12D_1D_2 + 3ND_1 + 9D_2 \\ &\text{iii) } \left|\frac{2i\pi}{\omega}\right| > \exp(-\lambda TN^2), \lambda = 1 + 2\log\left(33\frac{|\omega|+|\omega'|}{\delta\sqrt{2}}\right), \delta = \min_{\omega_1\in\Omega^*}|\omega_1|. \end{aligned}$$

Alors il existe des constantes A_{16} , A_{18}, un ensemble J et une famille de polynômes $Q_{tn\underline{q}} \in K[X,Y]$, $t < U$, $n < N$, $\underline{q} \in J$ vérifiant :

$$(8)\quad \begin{aligned} &- d^0_X(Q_{tn\underline{q}}) \leq 2D_2 \ , \ d^0_Y(Q_{tn\underline{q}}) \leq 2D_2 \\ &- h(Q_{tn\underline{q}}) \leq A_{18}(U\mathrm{Log}(D+U) + D_2\mathrm{Log}N + D_1) \\ &- \left|Q_{tn\underline{q}}\left(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega}\right)\right| \leq \exp[-TN^2 + A_{16}(U\mathrm{Log}(D+U) + DN^2)] \end{aligned}$$

– *Les $Q_{tn\underline{q}}$ n'ont pas de zéro commun dans la boule de centre $\left(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega}\right)$, de rayon $e^{-\lambda TN^2}$.*

3.2. Un théorème de Philippon.

Dans ce deuxième temps, nous appliquons le théorème de P. Philippon sur les mesures d'indépendance algébrique ([7], théorème 2) pour obtenir une mesure d'indépendance de $\dfrac{2i\pi}{\omega}$ et $\dfrac{\eta}{\omega}$.

Nous allons d'abord tenir compte des contraintes apparues jusque-là pour réduire le nombre des paramètres.

1) Réduction des paramètres.

Sous les contraintes (7), les polynômes $Q_{tn\underline{q}}$ vérifient en particulier :

$$|Q_{tn\underline{q}}(\underline{\theta})| \leq \exp[-TN^2 + A_{16}(U\mathrm{Log}(D+U) + DN^2)] \ .$$

On peut alors remarquer que, pour appliquer le résultat de Philippon, $Q_{tn\underline{q}}(\underline{\theta})$ doit être "petit"; nous imposerons donc les contraintes supplémentaires suivantes :

$$(9)\quad \begin{aligned} &\text{v) } A_{16}DN^2 \leq \frac{1}{4}TN^2 \\ &\text{vi) } A_{16}U\mathrm{Log}(D+U) \leq \frac{1}{4}TN^2 \ . \end{aligned}$$

Les contraintes (7) et (9) entraînent $\max(D_1, D_2) << T \leq U$ et comme l'on doit avoir $D_1D_2 >> NT$, on a nécessairement $N << \min(D_1, D_2)$. Nous prendrons donc $D_1 = k^{d_1}N$, $D_2 = k^{d_2}N$, $T = k^tN$, $U = k^uN$ où k, d_1, d_2, t, u sont des constantes à préciser. Les contraintes s'écrivent alors :

$$
(10) \qquad \begin{aligned}
&\text{i) } 4dk^t < k^{d_1+d_2} \\
&\text{ii) } 9k^{d_2} + 3k^{d_1}N + 12k^{d_1+d_2}N < k^uN \\
&\text{iii) } -\mathrm{Log}|\frac{2i\pi}{\omega}| < \lambda k^tN^3 \\
&\text{iv) } k^t < k^u \\
&\text{v) } 4A_{16}\,\mathrm{Max}(k^{d_1}, k^{d_2}) \leq k^t \\
&\text{vi) } 4A_{16}k^u\mathrm{Log}(D+U) \leq k^tN^2 .
\end{aligned}
$$

Nous imposerons donc $t < d_1 + d_2 < u$, $\mathrm{Max}(d_1, d_2) < t$, $1 < t$. Nous choisissons pour cela $d_1 = d_2 = 2$, $t = 3$, $u = 5$. Les cinq premières contraintes sont réalisées de manière évidente pour

$$k > 24A_{16}d \ \mathrm{Max}\left(1, -\mathrm{Log}|\frac{2i\pi}{\omega}|\right)^{1/3} .$$

Seule la contrainte vi) est un peu plus complexe. Elle s'écrit

$$4A_{16}k^2\mathrm{Log}(N(k^2 + k^5)) \leq N^2.$$

Il suffit pour cela que

$$4A_{16}k^2\mathrm{Log}(2Nk^5) < N^2 .$$

Mais pour N assez grand cette inégalité est réalisée.

En résumé, si l'on pose : $A_{19} = [24A_{16}d\ \mathrm{Max}(1, -\mathrm{Log}\frac{2i\pi}{\omega})^{1/3}] + 1$ ([ ] est la partie entière), il existe un entier A_{20} tel que pour $k = A_{19}$ et $N \geq A_{20}$, avec $D_1 = D_2 = k^2N$, $T = k^3N$, $U = k^5N$, les contraintes (7) et (9) sont réalisées. D'où la proposition :

PROPOSITION 2. — *Le réseau Ω, la période ω et le corps K étant fixés comme dans l'introduction, il existe des constantes entières positives A_{19}, A_{20}, A_{21}, A_{22}, telles que pour tout entier $N > A_{20}$, il existe un ensemble J et une famille de polynômes dans $K[X, Y]$, $Q_{tn\underline{q}}(t <$*

$A_{19}^5 N$, $n < N$, $\underline{q} \in J$) *vérifiant :*

(11)

1) $\max(d_X^0(Q_{tn\underline{q}}), d_Y^0(Q_{tn\underline{q}})) \leq 2A_{19}^2 N$

2) $h(Q_{tn\underline{q}}) \leq A_{21} N \mathrm{Log} N$

3) $\left|Q_{tn\underline{q}}\left(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega}\right)\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{2}A_{19}^3 N^3\right)$

4) *Les* $Q_{tn\underline{q}}$ *n'ont pas de zéro commun dans la boule* $\mathcal{B}$ *de centre* $\left(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega}\right)$ de rayon $e^{-A_{22}N^3}$.

2) Le théorème de Philippon.

Nous allons appliquer, pour obtenir la mesure cherchée, le théorème sur les mesures d'indépendance algébrique de Philippon ([8], théorème 2).

Rappelons d'abord l'énoncé de ce théorème, dans le cas particulier de notre situation :

THÉORÈME (Philippon). — *Soit* K *un corps de nombres,* $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{C}^2$ *; soient* t_1 *une fonction croissante de* $\mathbf{N}$ *dans* $\mathbf{R}_+$ *et* v *une bijection croissante de* $\mathbf{R}_+$ *dans* $\mathbf{R}_+$ *. Soit* $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $0 \leq \varepsilon < 1$ *. On suppose qu'il existe une suite d'idéaux* $(I_N)_{N \geq N_0}$ *telle que pour tout* $N \geq N_0$*, l'ensemble des zéros de* I_N *dans la boule* $\mathcal{B}$ $(\underline{\theta}, \exp(-t_1^2(N)v(N)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}))$ *soit vide et telle que l'idéal* I_N *soit engendré par des polynômes* $Q_{N,1}, \ldots, Q_{N,m(N))}$ *de taille majorée par* $t_1(N)$ *et vérifiant :*

$$\operatorname*{Max}_{1 \leq j \leq m(N)} |Q_{N,j}(\underline{\theta})| \leq \exp(-t_1^2(N+1)v(N+1)) \, .$$

Alors il existe des nombres réels $c = c([K : \mathbf{Q}])$ *et* c' *tels que pour tout polynôme* P*, non constant, de* $K[X,Y]$ *de taille supérieure à* c'*, on ait, en notant* w *la fonction réciproque de* $c^{-1}v^{1-\varepsilon}$ *:*

$$|P(\underline{\theta})| \geq \exp(-(ct(P))^{\frac{1}{1-\varepsilon}} t_1^2(w(t(P)))) \, .$$

Remarque. — Ce cas particulier correspond à $n = 2$, $k = 1$, et J idéal principal dans l'énoncé du théorème général de Philippon.

Nous appliquons ce théorème pour $K = \mathbf{Q}(g_2, e_1)$, $\underline{\theta} = \left(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega}\right)$.

Nous choisissons pour I_N l'idéal engendré par les polynômes $Q_{tn\underline{q}}$ ($t < A_{19}^5 N$, $n < N$, $\underline{q} \in J$) construits dans §3.1 pour $N \geq A_{20}$. Il reste à préciser t_1 et v de telle sorte que les hypothèses du théorème soient réalisées.

Choix de t_1 : Puisque $d^0(Q_{tn\underline{q}}) \leq 4A_{19}^2 N$ et $h(Q_{tn\underline{q}}) \leq A_{21} N \mathrm{Log} N$, on a

$t(Q_{tn\underline{q}}) \leq A_{23}N\mathrm{Log}N$. Or pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_1(\varepsilon)$ tel que $N \geq N_1(\varepsilon)$ implique $A_{23}N\mathrm{Log}N \leq N^{1+\varepsilon}$. Nous choisissons donc $t_1(N) = N^{1+\varepsilon}$ qui est bien une fonction croissante qui majore la taille des générateurs de I_N $(N \geq N_1(\varepsilon))$.

Choix de v, ε : L'idéal I_N ne doit pas avoir de zéro dans la boule de centre $\underline{\theta}$ de rayon $\exp(-t_1^2(N)v(N)^{1+\frac{\varepsilon}{2}})$. Compte tenu des propriétés (11) des $Q_{tn\underline{q}}$ le réel ε et la fonction v seront choisis tels que : $A_{22}N^3 < t_1^2(N)v(N)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}$ c'est à dire tels que :

$$A_{22}N^{1-2\varepsilon} < v(N)^{1+\frac{\varepsilon}{2}} \ . \tag{12}$$

Une autre condition est que :

$$\operatorname*{Max}_{t,n,\underline{q}} |Q_{tn\underline{q}}(\underline{\theta})| \leq \exp(-t_1^2(N+1)v(N+1)) \ .$$

Donc v sera choisie telle que : $\frac{1}{2}A_{19}^3N^3 \geq t_1^2(N+1)v(N+1)$ c'est à dire telle que :

$$\frac{1}{2}A_{19}^3N^3 \geq (N+1)^{2+2\varepsilon}v(N+1) \ . \tag{13}$$

On prend $v(N)$ de la forme $N^{1-\alpha}$. Pour que (12) et (13) soient réalisées, il faut que $\varepsilon \in]0, 1/2[$ et $\alpha \in]2\varepsilon, \frac{5\varepsilon}{2+\varepsilon}[$; il existe alors $N_2(\varepsilon)$ tel que pour $N \geq N_2(\varepsilon)$, les conditions (12) et (13) soient réalisées. En résumé, en posant $N_0 = \mathrm{Max}(A_{20}, N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$ si $t_1(N) = N^{1+\varepsilon}$ et si $v(N) = N^{1-\alpha}$ avec $\varepsilon \in]0, 1/2[$ et $\alpha \in]2\varepsilon, \frac{5\varepsilon}{2+\varepsilon}[$, les conditions du théorème de Philippon sont remplies. Par suite, si w est la fonction réciproque de $c^{-1}v^{1-\varepsilon}$, pour $P \in K[X, Y]$ non constant de taille supérieure à c', on a :

$$|P(\underline{\theta})| \geq \exp(-(ct(P))^{1/(1-\varepsilon)}(w(t(P)))^{2+2\varepsilon}) \ .$$

Comme $v(N) = N^{1-\alpha}$, on a $w(N) = (cN)^{\frac{1}{(1-\alpha)(1-\varepsilon)}}$.
Donc $|P(\underline{\theta})| \geq \exp(-(ct(P))^{3+\varepsilon_1})$, où $\varepsilon_1 = \dfrac{2\alpha + 5\varepsilon - 3\alpha\varepsilon}{(1-\varepsilon)(1-\alpha)}$; puisque $\alpha \in]2\varepsilon, \frac{5\varepsilon}{2+\varepsilon}[$, ε_1 tend vers 0 quand ε tend vers 0.

4. Lemmes auxiliaires.

Les lemmes qui ont été nécessaires sont classiques et seuls les énoncés seront rappelés.

LEMME 1. — *Soient* Ω *un réseau d'invariants* g_2 *et* g_3, $\mathcal{P}$ *et* ζ *les fonctions de Weierstress associées à* Ω .
Si $\Gamma(z) = \mathcal{P}^{\lambda_1}(z)(\zeta(z)+az+b)^{\lambda_2}\mathcal{P}'^{\lambda_3}(z)$, *où* $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbf{N}^3$ *et* $(a,b) \in \mathbf{C}^2$, *alors pour tout* $t \in \mathbf{N}$, *on a :*

$$\Gamma^{(t)}(z) = \sum_{\mu_1 \leq \lambda_1+2t} \sum_{\mu_2 \leq \lambda_2} \sum_{\mu_3 \leq \lambda_3+t} \sum_{k_1 \leq \lambda_2} \sum_{k_2 \leq t} \gamma(t,\mu_1,\mu_2,\mu_3,k_1,k_2) a^{k_1} \left(\frac{g_2}{2}\right)^{k_2} \mathcal{P}^{\mu_1}(z)(\zeta(z)+az+b)^{\mu_2}\mathcal{P}'^{\mu_3}(z)$$

où

$$\gamma(t,\mu_1,\mu_2,\mu_3,k_1,k_2) \in \mathbf{Z}$$

et

$$|\gamma(t,\mu_1,\mu_2,\mu_3,k_1,k_2)| \leq [10(\mathrm{Max}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)+t)]^t .$$

La démonstration de ce lemme est standard et ne présente aucune difficulté.

LEMME 2 (Lemme de Siegel). — *Soient* $(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)$ *des nombres algébriques de degrés* $d_1,\ldots,d_q$ *respectivement. Soit* $d = [\mathbf{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_q) : \mathbf{Q}]$. *Pour* $i = 1,\ldots,\nu$ *et* $j = 1,\ldots,\mu$, *soient* $P_{ij} \in \mathbf{Z}[X_1,\ldots,X_q]$ *des polynômes dont les degrés vérifient* $\deg_{X_h} \leq N_{j,h}$. *On pose*

$$L_j = \sum_{i=1}^{\nu} L(P_{ij}) \text{ et } \gamma_{ij} = P_{ij}(\alpha_1,\ldots,\alpha_q) .$$

Alors si $\nu > \mu d$ *il existe* $x_1,\ldots,x_\nu \in \mathbf{Z}$ *non tous nuls tels que :*

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu} \gamma_{ij} x_i = 0$ *pour tout* $j = 1,\ldots,\mu$
- $\displaystyle\mathop{\mathrm{Max}}_{1 \leq i \leq \nu} |x_i| \leq 2 + (2^\mu (V_1 \ldots V_\mu)^d)^{\frac{1}{\nu-\mu d}}$

où $V_j = L_j \displaystyle\prod_{h=1}^{q} M(\alpha_h)^{\frac{N_{j,h}}{d_h}}$.

A fortiori

$$\mathop{\mathrm{Max}}_{i \leq i \leq \nu} |x_i| \leq 3(2 \cdot V)^{\frac{\mu d}{\nu-\mu d}} \text{ où } V = \mathrm{Max}\{1, \mathop{\mathrm{Max}}_j V_j\} .$$

Ce lemme est démontré dans [6] (lemme 4).

LEMME 3. — *Soit* $P \in \mathbf{C}[X_1,\ldots,X_m]$ *un polynôme de degré total au plus* N *et soient* $x_1,\ldots,x_m$, $y_1,\ldots,y_m$ *des nombres complexes. Alors* on a :

$$|P(x_1,\ldots,x_m)-P(y_1,\ldots,y_m)| \leq NL(P)R^{N-1}\sum_{j=1}^{m}|x_j-y_j|$$

avec $R = \mathrm{Max}\{1,|x_1|,\ldots,|x_m|,|y_1|,\ldots,|y_m|\}$.

Ce lemme est démontré dans [10] (lemme 2.5).

LEMME 4. — *Soient $\tau \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Im}\tau > 0$, $\mathcal{P}_\tau$ et σ_τ les fonctions de Weierstrass associées au réseau $\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$. Alors si $z \notin \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$:*

$$|\varphi_\tau^2(z)| \geq \frac{1/4}{A(\tau)+|\mathcal{P}_\tau(z)|}\exp\left(-\frac{16}{\pi^2\mathrm{Im}^2\tau}-\frac{6}{\pi\mathrm{Im}\tau}-\frac{5\pi}{2}\mathrm{Im}\tau\right)$$

où $\varphi_\tau(z)=\sigma_\tau(z)\exp\left(-\eta_1(\tau)\frac{z^2}{2}+i\pi z\right)$ *et* $A(\tau)=\frac{7\pi^2}{3}+\frac{16}{\mathrm{Im}^2\tau}+\frac{1755}{8\pi\mathrm{Im}^3\tau}$.

Le méthode de démonstration de ce lemme est celle du lemme 7 de [6] (voir aussi [5], σ-lemme).

LEMME 5. — *Soient r_1 et r_2 deux nombres réels tels que $2 < r_1 < \frac{r_2}{4}$. Soient f une fonction analytique dans le disque complexe $|z| \leq r_2$ et E un sous-ensemble du disque $|z| \leq r_1$ contenant M points à une distance mutuelle supérieure à $\delta \leq 1$. Alors, pour tout couple (t,T) d'entiers positifs ou nuls,*

$$|f^{(t)}|_{r_1} \leq t!\left\{2|f|_{r_2}\left(\frac{4r_1}{r_2}\right)^{MT}+\frac{2M}{r_1}\left(\frac{33r_1}{\delta\sqrt{M}}\right)^{MT}\max_{x\in E,0\leq s\leq T-1}\left|\frac{f^{(s)}(x)}{s!}\right|\right\}.$$

Ce lemme est démontré dans [10] (lemme 4.5).

LEMME 6. — *Soient $P \in \mathbf{C}[X,Y]$, non nul, $\deg_X P = L_1$, $\deg_Y P = L_2$; et pour $n = 1,\ldots,N$ des fonctions $\Phi_n(z) = P(\mathcal{P}(z),\ \zeta(z)+az+b_n)$ où $\mathcal{P}$ et ζ sont associées au réseau Ω, et des points z_n de $\mathbf{C}\setminus\Omega$ tels que les $t_n = \zeta(z_n)+az_n+b_n$ soient distincts. Alors, si pour tout $n = 1,\ldots,N$, $\mathrm{ord}_{z_n}\Phi_n = k_n \geq 1$,*

$$\sum_{1}^{N} k_n \leq 12L_1L_2+3NL_1+9L_2 .$$

La méthode de démonstration de ce lemme est celle du théorème principal de [1] (on peut aussi voir [10], lemme 4.4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] W.D. BROWNAWELL, D.W. MASSER. — Multiplicity estimates for analytic functions I, J. für reine angew. Math., 314 (1979), 200-216.

[2] G.V. CHUDNOVSKY. — Algebraic independence of constants connected with exponential and elliptic functions, Dokl. Akad. Nauk. Ukrain. SSR, Ser. A, (1976), 698-701 & 767 (Russian, English summary).

[3] G.V. CHUDNOVSKY. — Algebraic grounds for the proof of algebraic independence, Comm. Pure Appl. Math., 34 (1981), 1-28.

[4] G.V. CHUDNOVSKY. — Contributions to the theory of transcendental numbers, American Mathematical Society, Survey & Monographs, 19 (1984).

[5] A. FAISANT, G. PHILIBERT. — Mesure d'approximation pour la fonction modulaire j, Publ. Univ. Paris VI, n°66, fasc. 2 (1983-1984).

[6] A. FAISANT, G. PHILIBERT. — Quelques résultats de transcendance liés à la fonction modulaire j, Journal of Number Theory, 25, n°2 (1987), 184-200.

[7] M. MIGNOTTE, M. WALDSCHMIDT. — Linear forms in two logarithms and Schneider's method, Math. Ann., n°231 (1978), 241-267.

[8] P. PHILIPPON. — Sur les mesures d'indépendance algébrique, Séminaire de théorie des nombres, Paris (1983-1984),Birkäuser, Progress in Math., vol. 59, 219-233.

[9] P. PHILIPPON. — Critères pour l'indépendance algébrique, Publication IHES, n°64 (1986), 5-52.

[10] E. REYSSAT. — Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielles, Bull. Soc. Math. France, n°108 (1980), 47-79.

[11] M. WALDSCHMIDT. — Simultaneous approximation of numbers connected with the exponential function, J. Austral. Math. Soc., series A, 25 (1978), 466-475.

Manuscrit reçu le 7 juillet 1987.

Georges PHILIBERT,
Université de Saint-Etienne
UER Sciences
Département de Mathématiques
23 rue du Docteur Michelon
42023 SAINT-ETIENNE CEDEX (France).