

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL LANGEVIN

E. REYSSAT

GEORGES RHIN

## **Diamètres transfinis et problème de Favard**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 38, n° 1 (1988), p. 1-16

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1988\\_\\_38\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_1_1_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## DIAMÈTRES TRANSFINIS ET PROBLÈME DE FAVARD

par M. LANGEVIN, E. REYSSAT, G. RHIN

---

Soit  $X = \{z_1, \dots, z_d\}$  l'ensemble des conjugués d'un entier algébrique irrationnel  $z_1$ . On cherche à minorer son diamètre :

$$\text{diam}(X) = \max |z_i - z_j|.$$

L'étude de ce diamètre, commencée par Favard [F1] [F2] et poursuivie plus récemment par Blanksby, Lloyd-Smith et McAuley [Bl], [LS1], [LS2], [Bl,LS,M] a suggéré deux problèmes :

- 1) Montrer que  $\text{diam}(X) \geq \sqrt{3}$  dès que  $d \geq 2$ .
- 2) Montrer que  $\text{diam}(X) \geq 2 - \varepsilon$  pour  $d$  suffisamment grand.

Des arguments géométriques nous permettent de minorer le diamètre en fonction du produit des distances  $|z_i - z_j|$ , produit trivialement minoré par 1. En remplaçant cette dernière minoration par les minorations classiques pour les discriminants (spécialement dans le cas des petits degrés) on obtient ainsi la solution du premier problème. Le second vient d'être résolu mais la démonstration ne fournit pas d'inégalité intéressante lorsque  $d < 50$ . Nous obtenons ici le théorème suivant :

---

*Mots-clés* : Entiers algébriques - Diamètre transfini.

## THÉOREME.

- a)  $\text{diam}(X) \geq \sqrt{3}$             pour  $d \geq 2$   
 b)  $\text{diam}(X) \geq 1,748$         pour  $d \geq 3$   
 c)  $\text{diam}(X) \geq 1,8$             pour  $d \geq 57$   
 d)  $\text{diam}(X) \geq 1,8819\dots$     pour  $d$  assez grand.

Des résultats numériques pour d'autres valeurs de  $d$  sont donnés à la fin de cet article.

## Principe de démonstration du théorème

Pour toute partie compacte  $Y$  de  $\mathbf{C}$ , on note  $t_d(Y)$  la distance moyenne maximale de  $d$  points de  $Y$  :

$t_d(Y) = \sup_{z_1, \dots, z_d \in Y} \prod_{i \neq j} |z_i - z_j|^{1/d(d-1)}$ . En particulier,  $t_2(Y)$  est le diamètre de  $Y$ . La suite  $(t_d(Y))$  est décroissante [Li] et on appelle diamètre transfini de  $Y$  la limite  $t(Y) = \lim t_d(Y)$ . Pour tout entier  $d \geq 2$ , on notera  $K_d = \min \{|\text{disc}(K/\mathbf{Q})|^{1/d}; [K : \mathbf{Q}] = d\}$ , et  $k_d = (K_d/d)^{1/(d-1)}$ .

On va montrer que si  $t_2(X)$  est petit,  $X$  est alors inclus dans une région  $E$  assez petite et régulière pour qu'on puisse montrer  $t_d(E) < K_d^{1/(d-1)}$ , ce qui contredit l'inégalité évidente  $t_d(X) \geq K_d^{1/(d-1)}$ . Deux constructions de  $E$  sont à notre disposition :

PROPOSITION 1. —  $X$  est inclus dans un hexagone régulier  $H$  de diamètre  $\frac{2t_2(X)}{\sqrt{3}}$  et donc de diamètre transfini :

$t(H) = t_2(X) \times \frac{\Gamma(7/6)}{\sqrt{3}\Gamma(5/6)\Gamma(4/3)}$ . On en déduit une majoration de  $t_d(X)$  en fonction de  $t_2(X)$ , qui entraîne que  $t_2(X) \geq 1,8819\dots$  dès que  $d$  est assez grand.

Dans le cas des degrés plus petits, on emploie la méthode du triangle de Reuleaux : un triangle de Reuleaux (régulier) est l'ensemble des points dont la distance à chaque sommet d'un triangle équilatéral est au plus égale au côté de ce triangle (voir fig. 1). On obtient alors le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — Si un réel  $\Delta$  vérifie  $t_2(X) < \Delta < 2k_d \sin(5\pi/12)$ , alors il existe un réel  $R \in [k_d, \Delta/\sqrt{3}]$  tel que  $X$  soit inclus, à déplacement près, dans :

a) Le disque  $D(O, R)$  centré en  $O$  et de rayon  $R$ ;

b) Le triangle de Reuleaux  $T$  centré en  $O$ , ayant un sommet réel positif et dont le bord contient le point  $R e^{4iv}$ , où

$$v = \text{Arcsin}(\Delta/2R) - \pi/3 \quad (\text{voir fig. 1}).$$

De plus, dans chacun des cas particuliers suivants :

$$1) \Delta = 1,748 \text{ et } d \geq 5 \quad 2) \Delta = 1,8 \text{ et } d \geq 57$$

l'intersection  $E = D(O, R) \cap T$  vérifie  $t_d(E) \leq K_d^{1/(d-1)}$ , ce qui est contradictoire.

Lorsque  $d \leq 4$ , des résultats de Lloyd-Smith permettent de conclure.

Démonstration de la proposition 1

Puisque  $X$  (ensemble de conjugués) est symétrique par rapport à l'axe réel, il est dans la bande horizontale centrée en  $O$  et de largeur  $t_2(X)$ . De plus,  $X$  est dans une bande de largeur  $t_2(X)$  faisant un angle  $\pi/3$  avec l'axe réel et donc aussi dans sa symétrique. Les trois bandes définissent donc un hexagone régulier  $H$ , de diamètre  $2t_2(X)/\sqrt{3}$ , qui contient  $X$ . On sait [N] que le diamètre transfini de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle unité vaut  $\frac{\Gamma(7/6)}{\Gamma(5/6)\Gamma(4/3)}$ . De plus, pour tout entier  $d \geq 3$ , on a [L1]

$$t_d(H) \leq \left( \prod_{k \geq d} k^{2/(k^2-1)} \right) t(H).$$

Puisque  $t_d(X) \geq K_d^{1/(d-1)}$ , on déduit donc des calculs précédents que

$$(0) \quad t_2(X) \geq \frac{\Gamma(5/6)\Gamma(4/3)\sqrt{3}}{\Gamma(7/6)} \left( \prod_{k \geq d} k^{-2/(k^2-1)} \right) K_d^{1/(d-1)}.$$

Le coefficient numérique vaut  $\frac{\Gamma(5/6)\Gamma(4/3)\sqrt{3}}{\Gamma(7/6)} = 1,881904\dots$  et le facteur restant tend vers 1, ce qui montre la proposition. La table 1 donne la valeur de la minoration obtenue pour quelques valeurs de  $d$ . La minoration utilisée pour  $K_d$  est optimale pour  $d \leq 6$  (en utilisant [M2] et [Po]), et provient des formules de Poitou au-delà (formule (3) de [D] pour  $d \leq 10$ , et formule (2) de [D] sinon).

### Démonstration de la proposition 2

Les résultats des trois premiers pas proviennent de [L1] et [L2]. On reprend ici certaines démonstrations par commodité.

#### Pas 0 : Un lemme auxiliaire

On note  $m_d(Y) = \inf(\|P\|_Y^{1/d}; P \in C[X] \text{ unitaire de degré } d)$

où  $\|P\|_Y = \sup_{z \in Y} |P(z)|$

et  $M_d(Y) = (m_1 m_2^2 \dots m_{d-1}^{d-1})^{2/d(d-1)}$ .

Lorsqu'il n'y a pas risque de confusion, on note simplement  $t_d$ ,  $m_d$  et  $M_d$  sans référence à  $Y$ .

Ces quantités vérifient les propriétés suivantes :

#### LEMME 1.

- Pour tout  $d \geq 2$ , on a  $t_d \leq d^{1/d-1} M_d$ .
- Si  $D$  désigne le disque unité,  $t_d(D) = d^{1/d-1}$ .
- La suite  $(M_d)$  est décroissante.

*Preuve.* — a) Soient  $z_1, \dots, z_d$  des points de  $Y$  réalisant le maximum dans  $t_d$ , et  $P_0 = 1, P_1, \dots, P_d$  des polynômes réalisant le minimum dans  $m_d$ . Alors

$$t_d^{d(d-1)} = \left| \begin{array}{ccc} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & & z_d \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{d-1} & \dots & z_d^{d-1} \end{array} \right|^2.$$

En faisant une combinaison linéaire sur les lignes, on peut remplacer la dernière ligne par  $(P_{d-1}(z_i))$ . Puis de même pour l'avant-dernière,

et ainsi de suite, d'où

$$t_d^{d(d-1)} = \left| \begin{array}{ccc} 1 & \dots & 1 \\ P_1(z_1) & & P_1(z_d) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{d-1}(z_1) & \dots & P_{d-1}(z_d) \end{array} \right|^2$$

et donc par l'inégalité de Hadamard :

$$t_d^{d(d-1)} \leq \prod_{i=0}^{d-1} \sum_{j=1}^d |P_i(z_j)|^2 \leq \prod d \|P_i\|_Y^2 \leq \prod d m_i^{2i} = d^d M_d^{d(d-1)},$$

d'où a).

b) Dans le cas du disque, on a clairement  $m_d \leq 1$  et donc  $M_d \leq 1$ . Par ailleurs, si  $\zeta$  est une racine primitive  $d$ -ième de l'unité, on a par définition  $t_d^{d(d-1)} \geq \prod |\zeta^i - \zeta^j| = |\text{disc}(T^d - 1)| = d^d$ , et le a) permet de conclure qu'il y a égalité. (On peut voir aussi directement qu'il y a égalité dans l'inégalité de Hadamard, puisque la matrice est alors unitaire).

c) Pour tout  $i < d$ , on a  $m_d^d \leq m_i^i m_{d-i}^{d-i}$  (faire le produit des polynômes), et par suite  $m_d \leq M_d$ . La formule  $M_{d+1}^{d(d+1)/2} = m_d^d M_d^{d(d-1)/2}$  montre que  $M_{d+1}$  est une moyenne entre  $m_d$  et  $M_d$  et donc est située entre les deux, ce qui prouve que  $M_{d+1} \leq M_d$ , d'où c).

### Pas 1 : Lemme de Jung

Nous précisons ici le lemme classique de Jung :

LEMME 2. — Il existe trois points  $A, B, C$  de  $X$  formant un triangle aigu (un segment si  $B = C$ ) dont le cercle circonscrit contient  $X$ .

Preuve. — Soit  $D = D(z, R)$  un disque minimal contenant  $X$ . Si  $\varepsilon > 0$  alors  $X$  n'est pas dans le translaté  $D(z - \varepsilon, R)$  car l'intersection des 2 disques est dans un disque plus petit. Ainsi  $X$  rencontre toute lunule  $D(z, R) \setminus D(z - \varepsilon, R)$  et par compacité leur intersection qui est le demi-cercle "à droite" de  $D(z, R)$ . Par rotation on voit de même que  $X$  rencontre tout demi-cercle du bord de  $D(z, R)$ , donc ce bord

contient trois points convenables. (Voir [Be] ou [L1] pour plus de détails).

*Pas 2 : triangle équilatéral*

On suppose par translation le cercle  $\Gamma$  circonscrit à  $ABC$  centré en  $O$ . Les angles  $\alpha, \beta, \gamma$  en  $O$  qui sous-tendent les côtés  $BC, CA, AB$  ont pour somme  $2\pi$ . On peut supposer  $\alpha = \max(\alpha, \beta, \gamma) \geq 2\pi/3$ . Alors

$$(1) \quad t_2(X) \geq BC = 2R \sin(\alpha/2).$$

Par ailleurs, puisque le disque  $D(O, R)$  contient  $X$ , le lemme 1 b) montre que

$$(2) \quad R = t_d(D(O, R))d^{-1/d-1} \geq t_d(X)d^{-1/d-1}.$$

On déduit donc de (1) et (2) que

$$(3) \quad k_d \leq R \leq \Delta/\sqrt{3}.$$

Notons  $u = \alpha/2 - \pi/3$ . Si  $u$  est petit,  $ABC$  est presque équilatéral, ce qu'on peut facilement préciser ([L1], lemme 4) :

il existe trois points  $A_1, B_1, C_1$  sur  $\Gamma$  formant un triangle équilatéral et tels que les arcs  $AA_1, BB_1, CC_1$  soient de longueur au plus  $2Ru$ .

*Pas 3 : inclusion dans un triangle de Reuleaux*

Par rotation, on se ramène au cas où  $A_1$  est réel positif. On peut supposer le point  $C$  sur le plus petit arc entre  $C_1$  et  $A_1$ .

On oriente le cercle  $\Gamma$  de sorte que l'arc  $C_1A_1$  ait une mesure  $+2\pi R/3$  et on construit sur ce cercle des points  $A'_1, C'_1, P_1, P_2$  de sorte que  $C_1C'_1 = A_1A'_1 = 2Ru$ ,  $A_1P_1 = 4Ru$ , et  $P_2$  est symétrique de  $P_1$  par rapport à  $OC_1$  (voir fig. 1). Il y a un unique triangle de Reuleaux  $TR$  centré en  $O$  dont le bord contient  $P_1$  et ayant un sommet réel positif. Nous allons montrer que  $TR$  contient  $X$ . Soit  $M$  un point de  $X$ . La distance de l'arc  $P_1P_2$  du Reuleaux à l'arc  $C_1C'_1$  de  $\Gamma$  est la distance  $C'_1P_1$  (remarquer que  $P_1P_2$  a une mesure positive

puisque  $4u = 4 \operatorname{Arc} \sin(\Delta/2k_d) - 4\pi/3 \leq \pi/3$ . Cette distance vaut encore :

$$\begin{aligned} C'_1 P_1 &= C_1 A'_1 && \text{par rotation d'angle } 2u \\ &= 2R \sin(\alpha) && \text{car l'angle } C_1 O A'_1 \text{ vaut } 2\pi/3 + 2u = 2\alpha \\ &\leq t_2(X) && \text{d'après (1).} \end{aligned}$$

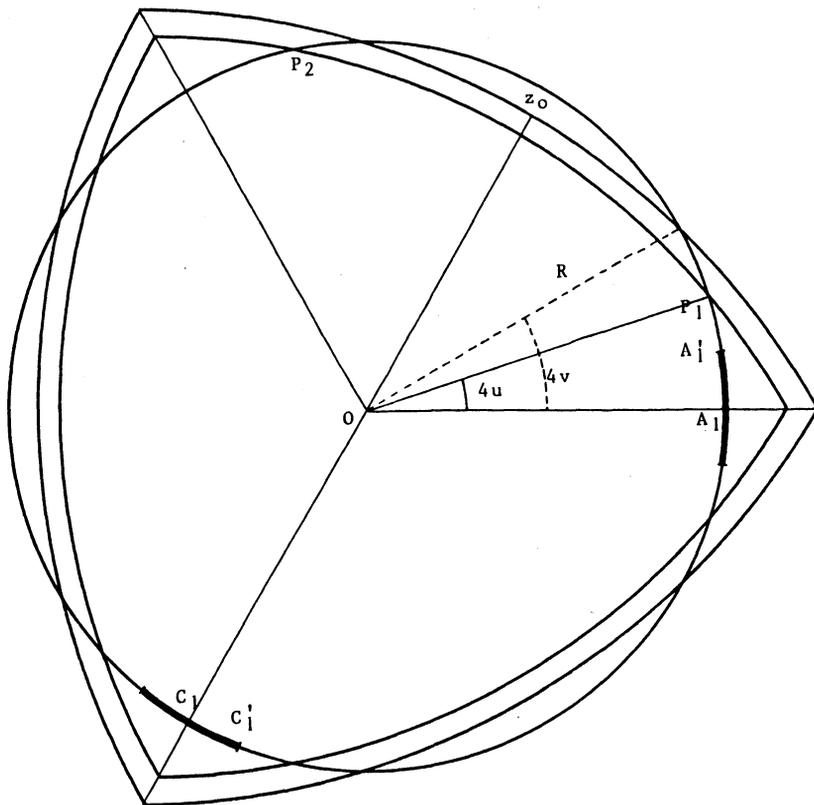


Figure 1

Puisque  $C$  est sur l'arc  $C_1 C'_1$ , le point  $M$ , qui est à l'intérieur du cercle  $\Gamma$  et vérifie  $MC < t_2(X)$ , est à l'intérieur du cercle passant par  $P_1$  et  $P_2$  définissant le bord de  $TR$ ; par symétrie d'ordre 3,  $M$  est donc dans  $TR$ . Puisque  $u = \operatorname{Arcsin}(BC/2R) - \pi/3 \leq v$ , on voit que le triangle de Reuleaux  $TR$  est inclus dans le triangle de Reuleaux



$T$  de la proposition 2. Cela démontre la première partie de cette proposition :  $X$  est contenu dans l'ensemble  $E = D(O, R) \cap T$ , donc  $t_d(X) \leq t_d(E)$ .

*Pas 4 : Formules majorant  $t_d(E)$*

Pour majorer  $t_d(E)$ , on utilise le lemme 1 a). Il nous suffit donc de majorer les  $m_i(E)$ ; nous utiliserons pour cela uniquement une valeur non triviale de  $m_3(E)$ . On cherche ainsi des polynômes cubiques petits sur  $E$ . D'après la symétrie d'ordre 3, il est commode de se restreindre aux polynômes de la forme  $z^3 - h$ , et ainsi :

$$m_3^3(E) \leq \sup_{h \in \mathbf{C}} \|z^3 - h\|_E = \sup_{k \in \mathbf{C}} \|z - k\|_{E'},$$

où  $E'$  est l'image de  $E$  par  $z \mapsto z^3$ . Ainsi,  $m_3^3(E)$  est au plus égal au rayon d'un cercle contenant  $E'$ . Nous utiliserons en général le cercle  $\Omega$  circonscrit au triangle  $Z_0 Z_1 \bar{Z}_1$ , où  $Z_1$  et  $Z_0$  sont les images par  $z \mapsto z^3$  du point  $z_1 = R e^{4i\pi/3}$  et du point  $z_0$  du bord de  $T$  d'argument  $\pi/3$  (voir fig. 1 et 2). Montrons que ce cercle contient bien  $E'$ .

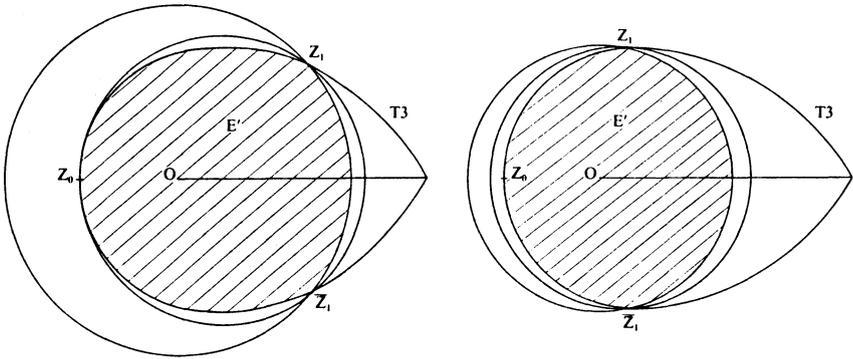


Figure 2

Notons  $T3$  la courbe image du Reulcaux  $T$  par  $z \mapsto z^3$ . La région  $E'$  est limitée à gauche de  $\text{Re}(Z_1)$  par l'arc  $Z_0 Z_1$  de  $T3$ , et son symétrique par rapport à l'axe réel, et à droite par l'arc  $Z_1 \bar{Z}_1$  du cercle  $D' = D(O, R^3)$ . Ce dernier arc est intérieur au cercle  $\Omega$  (car  $Z_0$  est intérieur à  $D'$ ). Il reste à voir que l'arc  $Z_0 Z_1$  de  $T3$  est également intérieur à  $\Omega$ . Or, il est tangent à  $\Omega$  en  $Z_0$  et le recoupe

en  $Z_1$ , donc il suffit de voir, comme le suggère la figure 2, que sa courbure décroît entre  $Z_0$  et  $Z_1$ , ce qui découle du :

LEMME 3. — *La courbure de la courbe  $\Gamma$  paramétrée par  $Z = (\cos \theta - a + i \sin \theta)^3$  décroît lorsque  $\theta$  varie de 0 à  $\pi/2$ .*

Preuve. —  $\Gamma$  est image par  $z \mapsto z^3$  du cercle  $z = \cos \theta - a + i \sin \theta$ , de paramétrisation polaire  $r^2(\theta) = 1 - 2a \cos \theta + a^2$ , donc  $\Gamma$  est paramétrée en polaires par  $(R(\psi), \psi)$ , avec  $\psi = 3\theta$  et  $R(\psi) = r^3(\theta)$ .

Les courbures  $c$  et  $C$  sont données par les formules classiques

$$c = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \quad C = \frac{R^2 + 2R'^2 - RR''}{(R^2 + R'^2)^{3/2}}.$$

On en déduit

$$C = \frac{1}{r^2} \left( \frac{c}{3} + \frac{2}{3\sqrt{r^2 + r'^2}} \right).$$

La courbure  $c$  est constante puisqu'il s'agit d'un cercle. Par ailleurs,  $r^2 = 1 - 2a \cos \theta + a^2$  croît avec  $\theta$ , ainsi que  $(rr')^2 = a^2 \sin^2 \theta$  donc également  $r^2 \sqrt{r^2 + r'^2}$ , ce qu'il fallait prouver.

Le raisonnement précédent montre en fait que, tant que  $\operatorname{Re}(Z_1) > 0$ , il suffit de prendre le rayon du cercle minimal contenant les points  $Z_0, Z_1, \bar{Z}_1$ . Lorsque  $\operatorname{Im}(Z_1) > \operatorname{Re}(Z_1 - Z_0)$ , ce cercle est simplement le cercle de diamètre  $Z_1 \bar{Z}_1$ . Enfin si  $\operatorname{Re}(Z_1) \leq 0$ , on se contente de l'inclusion  $E \subseteq D(O, R)$ .

On déduit donc de ce résultat le suivant :

LEMME 4.

$$(4) \quad m_3^3(E) \leq |z_1^3 - z_0^3|/2\operatorname{Re}(z_1^3 - z_0^3) \text{ si } \operatorname{Im}(z_1^3) \leq \operatorname{Re}(z_1^3 - z_0^3)$$

$$(5) \quad m_3^3(E) \leq |\operatorname{Im}(z_1^3)| \text{ si } \operatorname{Im}(z_1^3) > \operatorname{Re}(z_1^3 - z_0^3) \text{ et } \operatorname{Re}(z_1^3) > 0$$

$$(6) \quad m_3^3(E) \leq R^3 \text{ si } \operatorname{Re}(z_1^3) \leq 0$$

$$\text{où (7) } z_0 = e^{i\pi/3} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \frac{R}{2}$$

$$\left( \cos \left( \frac{\pi}{3} - 4v \right) + \sqrt{\cos^2 \left( \frac{\pi}{3} - 4v \right) + 2} \right)$$

$$\text{et (8) } v = \operatorname{Arcsin}(\Delta/2R) - \pi/3.$$

*Preuve.* — L'argument de  $z_0$  est évidemment  $\pi/3$  et son module vaut  $(\sqrt{3} - 1)\Delta'/\sqrt{3}$ , où  $\Delta'$  est la largeur du triangle de Reuleaux  $T$  étudié plus haut (c'est-à-dire la distance entre deux sommets). Calculons cette largeur (voir figure 1) :

$$\Delta'^2 = (z_1 - j^2 \Delta'/\sqrt{3})(\bar{z}_1 - j \Delta'/\sqrt{3}) = R^2 + \Delta'^2/3 - \frac{\Delta'}{\sqrt{3}} 2R \cos(2\pi/3 + 4v).$$

Cette équation du second degré donne

$$\Delta'/R\sqrt{3} = \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2(2\pi/3 + 4v) + 2} - \cos(2\pi/3 + 4v)$$

d'où l'on déduit  $z_0$ .

Le rayon du cercle circonscrit à un triangle est le produit des côtés divisé par 4 fois l'aire du triangle, ce qui nous donne ici la majoration (4).

En appliquant la formule évidente  $m_{p+q}^{p+q} \leq m_p^p \cdot m_q^q$  aux valeurs  $p = s \bmod 3$  et  $q = 3$ .  $[s/3]$ , on voit que pour tout  $d > 1$ , on a :

$$M_d = (m_1 \cdot m_2^2 \dots m_{d-1}^{d-1})^{2/d(d-1)} \leq (m_1^{3k+(i^2+i)/2} m_3^{3k(3k-1+2^j)/2})^{2/d(d-1)} \quad (9)$$

où  $k = \left\lfloor \frac{d-1}{3} \right\rfloor$ ,  $i = (d-1) \bmod 3$ ,  $j = d \bmod 3$ .

Les formules (4) à (9) et l'égalité  $m_1(E) = R$  nous donnent donc une majoration de  $M_d(E)$  en fonction de  $\Delta$ ,  $R$  et  $d$ . Notons  $M(d, \Delta, R)$  la borne ainsi obtenue. Puisque  $t_d(X) \geq K_d^{1/(d-1)}$ , on a

$$M(d, \Delta, R) \geq t_d d^{-1/d-1} \geq k_d$$

(rappelons que  $k_d = (K_d/d)^{1/d-1}$ ).

*Pas 5 : Calculs donnant la contradiction cherchée*

Pour obtenir une contradiction avec l'hypothèse  $t_2(X) \leq \Delta$ , il suffit donc de montrer que  $M(d, \Delta, R) < k_d$  pour toute valeur de  $R$  dans l'intervalle  $[k_d, \Delta/\sqrt{3}]$ . Fixons par exemple  $d = 6$ . On a dans ce cas  $k_6 = 0,949144\dots$  (en degré 6 le plus petit discriminant vaut

9747 [M1,M2]). Pour trouver la meilleure valeur de  $\Delta$  donnant une contradiction, on étudie la variation de la fonction  $M(6, \Delta, R)$  en fonction de  $R$  pour quelques valeurs de  $\Delta$  proches de  $\sqrt{3}$ .

Le calcul pour quelques centaines de valeurs de  $R$  permet de tracer des courbes qui ont l'allure de celles de la figure 3. Il semble donc y avoir un unique maximum. Si ce maximum (probable) est inférieur à  $k_6$ , on recommence le calcul avec un  $\Delta$  plus grand. Si le maximum est supérieur à  $k_6$  on ne peut rien conclure, et on recommence avec un  $\Delta$  moins ambitieux.

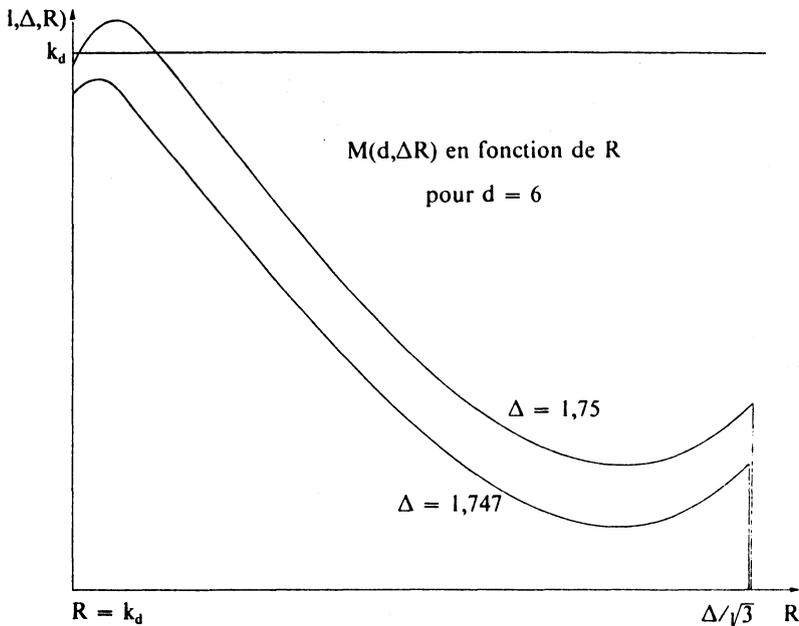


Figure 3

Ainsi on cherche par approximations successives la valeur de  $\Delta$  telle que le maximum ait la valeur  $k_6$  et le calcul donne  $\Delta = 1,74838\dots$

Une fois notre conviction faite, il reste à prouver que, pour une valeur légèrement inférieure de  $\Delta$ , le maximum de  $M(6, \Delta, R)$  est bien inférieur à  $k_6$  (rien n'empêche a priori la courbe d'avoir un

pic entre deux points calculés). On utilise pour cela une certaine régularité de la fonction  $M(d, \Delta, R)$  :

LEMME 5. — *Pour chaque valeur de  $d$  et  $\Delta$ , la fonction  $R \mapsto M(d, \Delta, R)/R$  est décroissante.*

*Preuve.* — L'angle  $v = \text{Arcsin}(\Delta/2R) - \pi/3$  est une fonction décroissante de  $R$ . Par suite, l'ensemble  $E$  construit plus haut devient, après homothétie de rapport  $1/R$ , un ensemble décroissant avec  $R$  (c'est l'intersection du disque de rayon 1 avec le Reuleaux qui passe par le point  $e^{4iv}$ ). Le rayon du cercle circonscrit au transformé de  $E$  par  $z \mapsto z^3$  décroît donc aussi, *cf. qfd.*

Ainsi, si l'on exhibe une suite de rayons  $R_i$  tels que  $k_d = R_0 < R_1 < \dots < R_n$ ,  $R_n < \Delta/\sqrt{3}$ , et pour lesquels  $M(d, \Delta, R_i)/R_i \leq k_d/R_{i+1}$ , alors on voit que, pour tout  $R$  dans l'intervalle  $[R_i, R_{i+1}[$ ,  $M(d, \Delta, R)/R \leq k_d/R_{i+1} < k_d/R$ , ce qu'on voulait prouver.

On construit donc de proche en proche un graphe en escalier compris entre les graphes de  $M(d, \Delta, R)/R$  et  $k_d/R$ , en posant  $R_0 = k_d$ , et  $R_{i+1} = k_d R_i / M(d, \Delta, R_i)$ . Cela n'est bien sûr possible en un nombre fini de pas (et pas trop gros pour être calculable sur machine) que si les courbes sont suffisamment séparées, c'est-à-dire si l'on a pris suffisamment de marge pour la valeur de  $\Delta$ . Par exemple, lorsque  $d = 6$ , et que  $\Delta = 1,748$ , il suffit de 24 pas pour passer de  $K_6$  jusqu'au-delà de  $\Delta/\sqrt{3}$  (*cf. fig. 4*). Pour  $\Delta = 1,74838$  il en faut 379.

Nous donnons dans la table 1 les valeurs de  $\Delta$  obtenues pour quelques valeurs de  $d$ . Comme pour la proposition 1, on utilise [M2], [Po] et [D] pour estimer  $k_d$ . La table n'est a priori pas suffisante pour prouver la proposition 2 qui impose un résultat pour toute valeur de  $d \geq 5$ . Cependant, comme le suggère cette table, les valeurs sont presque décroissantes. La minoration de  $k_d$  utilisée est telle que les deux suites  $(k_{2d})$  et  $(k_{2d+1})$  sont croissantes; cela est vrai pour les premières valeurs (optimales) de  $k_d$  ainsi que pour la minoration par la formule de Poitou. La suite  $(k_d)$  elle-même n'est pas croissante, ce qui est dû au fait que les plus petits discriminants arrivent pour des corps totalement imaginaires, ce qui est exclu en degré impair.

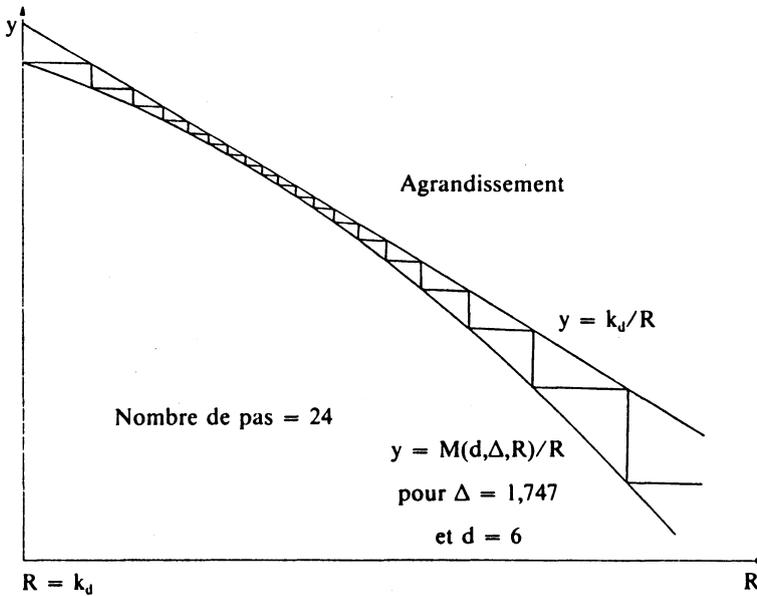
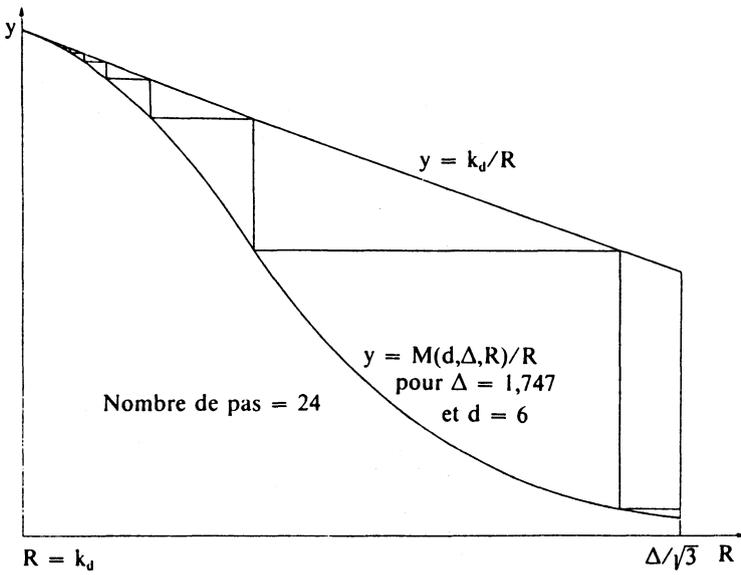


Figure 4

Table 1

Cette table donne, pour quelques valeurs de  $d$ , la minoration de  $t_2(X)$  obtenue par la formule (0) utilisant le diamètre transfini de l'hexagone régulier, ainsi que la valeur optimale de  $\Delta$  obtenue par le procédé de la proposition 2. On voit que cette deuxième valeur est plus intéressante pour les petites valeurs de  $d$ , jusque vers 400.

$d$	minoration par hexagone	$\Delta$ optimal
4	0,75548582	1,72459989
5	0,88405639	1,78192493
6	0,94920940	1,74838156
7	1,03013783	1,77298336
8	1,07894439	1,75430455
9	1,13499960	1,77234080
10	1,16860140	1,76035140
11	1,21130649	1,77002565
12	1,23795211	1,76240087
13	1,27332709	1,77238952
14	1,29461539	1,76675372
15	1,32318943	1,77443171
20	1,41154915	1,77559277
30	1,52151399	1,78509249
40	1,58597068	1,79173066
50	1,62898711	1,79675515
55	1,64613317	1,79938322
56	1,64868862	1,79924612
57	1,65209597	1,80012334
58	1,65451166	1,80000732
59	1,65772848	1,80083957
60	1,66001616	1,80073574
70	1,68359606	1,80399263
80	1,70219990	1,80671431
90	1,71729950	1,80903061
100	1,72982979	1,81103324
150	1,77038624	1,81806145
200	1,79284670	1,82237083
300	1,81742766	1,82750146
400	1,83082699	1,83051608
500	1,83935427	1,83252935
1000	1,85800816	1,83725007
1500	1,86495230	1,83914848
2000	1,86864724	1,84019995
5000	1,87591032	1,84237891
10000	1,87864616	1,84325483
20000	1,88014472	1,84375569

Néanmoins, si on a prouvé que  $M(d_0, \Delta, R) < k_{d_0}$  pour toute valeur de  $R$  dans  $[k_{d_0}, \Delta/\sqrt{3}]$ , alors, grâce au lemme 1c), on voit que si  $d$  est supérieur à  $d_0$  et de même parité, et si  $R \in [k_d, \Delta/\sqrt{3}]$ , alors  $M(d, \Delta, r) \leq M(d_0, \Delta, R) \leq k_{d_0} \leq k_d$ . Ainsi, une estimation de  $\Delta$  valable à la fois pour  $d_0$  et  $d_0 + 1$  sera valable pour tout  $d \geq d_0$ . En particulier, les deux valeurs trouvées pour  $d = 5$  et  $d = 6$  entraînent que  $t_2(X) \geq 1,748$  pour tout  $d \geq 5$ ; de même, les valeurs pour  $d = 57$  et  $d = 58$  montrent que  $t_2(X) \geq 1,8$  pour tout  $d \geq 57$ , ce qui prouve la proposition 2.

*Preuve du théorème*

D'après les propositions 1 et 2, il ne reste qu'à traiter le cas  $d \leq 4$  pour prouver le théorème. Une majoration du diamètre de  $X$  entraîne aussitôt une majoration des coefficients du polynôme minimal des entiers algébriques concernés. On est donc ramené à un nombre fini de calculs. Ces calculs ont été effectués par Lloyd-Smith [LS2] qui a ainsi montré :

si  $d = 2$ ,  $t_2(X) \geq \sqrt{3}$ ; si  $d = 3$ ,  $t_2(X) \geq 1,7942\dots$ ;

si  $d = 4$ ,  $t_2(X) \geq 1,8988\dots$

La preuve du théorème est ainsi achevée.

## BIBLIOGRAPHIE

- [Be] M. BERGER, Géométrie, Tome 3, Cedic, Nathan, 1978.
- [Bl] P.E. BLANKSBY, Greatest distance between zeros of integral polynomials; in Elementary and analytic theory of numbers, Banach center publications, vol. 17, Varsovie, 1984.
- [Bl,LS,M] P.E. BLANKSBY, C.W. LLOYD-SMITH, M.J. MCAULEY, On diameters of algebraic integers, preprint à paraître.
- [D] F. DIAZ Y DIAZ, Tables minorant la racine  $n$ -ième du discriminant d'un corps de degré  $n$ , Publications mathématiques d'Orsay, 1980.
- [F1] J. FAVARD, Sur les formes décomposables et les nombres algébriques, Bull. SMF, 57 (1929), 50-71.
- [F2] J. FAVARD, Sur les nombres algébriques, Mathematica, 4 (1930), 109-113.
- [L1] M. LANGEVIN, Approche géométrique du problème de Favard, CRAS, 10 (1987), 245-248.



- [L2] M. LANGEVIN, Etude géométrique de la mesure de Mahler et du diamètre transfini, preprint à paraître dans Pub. Math. Univ. St Etienne.
- [LS1] C.W. LLOYD-SMITH, Problems on the distribution of conjugates of algebraic numbers, Ph. D. Thesis, Univ. of Adelaide, 1980.
- [LS2] C.W. LLOYD-SMITH, On a problem of Favard concerning algebraic integers, Bull. Austral. Math. Soc., 29 (1984), 111-121.
- [M1] J. MARTINET, Petits discriminants des corps de nombres, in "Journées arithmétiques 1980", J.V. Armitage éd., London Math. Soc. Lecture Notes Series, 56 (1982), 151-193.
- [M2] J. MARTINET, Méthodes géométriques dans la recherche des petits discriminants, Séminaire de théorie des nombres, Paris, 1983/84, Birkhäuser.
- [N] NEHARI, Conformal mapping, 1952.
- [P] M. POHST, On the computation of number fields of small discriminants including the minimum discriminants of sixth degree fields; J. Number theory, 14 (1982), 99-117.

Manuscrit reçu le 19 mars 1987.  
M. LANGEVIN & E. REYSSAT,  
U.A. 763  
Institut Henri Poincaré  
11, rue P. et M. Curie  
75231 Paris cedex 05

G. RHIN,  
Fac. des Sciences  
Département de Math.  
Ile du Saulcy  
57045 Metz cedex.