JEAN NOURRIGAT

Réduction microlocale des systèmes d'opérateurs pseudo-différentiels

Annales de l'institut Fourier, tome 36, n° 3 (1986), p. 83-108

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_3_83_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 3 (1986), 83-108

RÉDUCTION MICROLOCALE DES SYSTÈMES D'OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

par Jean NOURRIGAT

Le lien entre hypoellipticité et représentations de groupes nilpotents a été établi dans des cas particuliers par Rockland [25], Folland-Stein [7], et Rothschild-Stein [26]. Dans de nombreux autres travaux, l'étude de certaines inégalités L^2 entraînant l'hypoellipticité d'un opérateur pseudo-différentiel sur $\mathbf{R}^n$ se ramène, par des transformations canoniques et des changements d'échelle, à celle de l'injectivité d'opérateurs à coefficients polynomiaux, définis globalement sur $\mathbf{R}^k$ $(k<n)$: Hörmander [13], [14], Grushin [8], Bolley-Camus-Helffer [2], Boutet de Monvel-Grigis-Helffer [4], Egorov [5], Helffer-Nourrigat [9], [11] et Rothschild [27]. Cette réduction à des opérateurs modèles apparaît aussi, mais de manière moins générale, dans des constructions de paramétrixes (Melin [18], [19], [20], Beals-Greiner [1], Taylor [28]) et en théorie spectrale (Métivier [21], Mohamed [23]). Comme l'avait pressenti C. Rockland les opérateurs modèles qui apparaissent dans ces travaux peuvent s'interpréter de manière très générale en termes de représentations de groupes nilpotents. Dans une note [10] avec B. Helffer est énoncée une conjecture dont la preuve fournirait la synthèse de ceux des résultats ci-dessus qui concernant des inégalités L^2, et leur extension à des systèmes. Le but de ce travail est de démontrer l'une des implications conjecturées dans [10].

On considère un système $X_1, \ldots, X_{2p}$ de fonctions C^∞ sur $\mathbf{R}^{2n}$, à valeurs réelles, dépendant d'un paramètre $\lambda \geqslant 1$. On suppose que, pour tout multi-indice (α, β), il existe $C_{\alpha\beta} > 0$ tel qu'on ait :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta X_j(x, \xi, \lambda)| \leqslant C_{\alpha\beta} \lambda^{1-\frac{1}{2}|\alpha+\beta|} \tag{0.1}$$

Mots clés: Inégalités L^2 – Systèmes d'opérateurs pseudo-différentiels – Représentations de groupes nilpotents – Applications symplectiques.

pour tous $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$, $\lambda \geqslant 1$ et $j \in \{1, \ldots, 2p\}$. On note $X_j(\lambda)$ l'opérateur pseudo-différentiel associé au symbole $X_j(x, \xi, \lambda)$. (Le choix entre le calcul de Weyl et le calcul usuel n'a aucune importance ici).

La plupart des travaux ci-dessus peuvent se ramener à l'étude d'inégalités L^2 pour des opérateurs exprimés de manière polynomiale par rapport à $X_1(\lambda), \ldots, X_{2p}(\lambda)$. Pour simplifier l'écriture, nous nous limiterons aux deux exemples suivants :

Problème 1. – Soit $L_j(\lambda) = X_j(\lambda) + i X_{p+j}(\lambda)$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$. A quelle condition existe-t-il $C_0 > 0$ tel qu'on ait :

$$\sum_{j=1}^{2p} \|X_j(\lambda) f\|^2 \leqslant C_0 \left(\sum_{j=1}^{p} \|L_j(\lambda) f\|^2 + \|f\|^2 \right) \tag{0.2}$$

pour tous $\lambda \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Il s'agit de normes L^2.

Problème 2. – Soit χ une fonction dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, égale à 1 dans un voisinage de l'origine, et soit $\mu \in]0,1[$. On pose

$$X_0(\lambda) = \lambda^\mu \chi(\lambda^{-1/2} x, \lambda^{-1/2} D_x).$$

A quelle condition existe-t-il $C_0 > 0$ tel qu'on ait :

$$\|X_0(\lambda) f\|^2 \leqslant C_0 \left(\sum_{j=1}^{2p} \|X_j(\lambda) f\|^2 + \|f\|^2 \right) \tag{0.3}$$

pour tous $\lambda \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$?

L'intérêt du problème 2 est de fournir une réciproque aux résultats de Bolley-Camus-Nourrigat [3] et Fefferman-Phong [6]. Le but de ce travail est d'établir une condition nécessaire pour les inégalités ci-dessus. L'extension aux inégalités analogues pour les opérateurs exprimés de manière polynomiale par rapport aux $X_j(\lambda)$ ne poserait probablement pas de difficulté.

Au § 1 nous énonçons cette condition en termes de représentations de groupes nilpotents. Pour le lecteur non spécialisé dans ce domaine, la condition est réécrite au § 2 sous une forme plus "concrète", et la suite de l'article peut être lue sans aucune connaissance sur les groupes nilpotents.

On évoquera aussi les variantes locales des problèmes 1 et 2, plus directement liées à l'hypoellipticité. La question de savoir si les conditions nécessaires énoncées ici sont aussi suffisantes est un problème ouvert (voir § 5). Si les conditions énoncées peuvent paraître peu explicites en général, rappelons que, dans tous les cas où une condition explicite est connue, on peut montrer facilement que c'est un cas particulier de la condition ci-dessous, (voir [29] pour le lien avec le résultat d'Egorov sur les opérateurs sous-elliptiques, et [11] pour les autres théorèmes classiques).

1. Enoncé en termes de représentations de groupes.

Soit r un entier $\geqslant 1$. Soit $\mathscr{G}$ l'algèbre de Lie nilpotente libre, à $2p$ générateurs $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_{2p}$, de rang de nilpotence r. Il existe une base de $\mathscr{G}$ formée de crochets itérés $\widetilde{X}_I$ des générateurs $\widetilde{X}_j$. On note $|I|$ la longueur d'un tel crochet, et on note $X_I(x, \xi, \lambda)$ le crochet de Poisson itéré des fonctions $X_j(x, \xi, \lambda)$ qui correspond aux mêmes indices que le crochet $\widetilde{X}_I$.

DEFINITION 1. — *On note* Γ_r *l'ensemble des formes linéaires* $\ell \in \mathscr{G}^*$ *telles qu'il existe des suites* (x_ν, ξ_ν) *dans* $\mathbf{R}^{2n}$, (λ_ν) *et* (t_ν) *dans* $\mathbf{R}^+$, *telle que :*

a) *La suite* λ_ν *tend vers* $+\infty$.

b) *La suite* $t_\nu^r \lambda_\nu$ *est bornée*.

c) *Pour tout crochet* $\widetilde{X}_I$, *on a, quand* $\nu \to +\infty$

$$t_\nu^{|I|} X_I(x_\nu, \xi_\nu, \lambda_\nu) \to \ell(\widetilde{X}_I). \tag{1.1}$$

Pour tout $\ell \in \mathscr{G}^*$, soit π_ℓ la représentation unitaire irréductible du groupe $\exp \mathscr{G}$, associée, selon la théorie de Kirillov [17], à la forme linéaire ℓ. On notera aussi π_ℓ la représentation correspondante de l'algèbre $\mathscr{G}$. Rappelons que $\pi_\ell(\widetilde{X}_j)$ est un opérateur différentiel dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{k(\ell)})$, où $k(\ell)$ est un entier dépendant de ℓ, (voir [11]). Lorsqu'on a $\ell([X, Y]) = 0$ pour tous X et Y dans $\mathscr{G}$, la représentation π_ℓ est scalaire, et l'on a $\pi_\ell(X) = i\ell(X)$ pour tout $X \in \mathscr{G}$. On convient alors que $\mathscr{S}(\mathbf{R}^0) = \mathbf{C}$. On pose évidemment

$$\pi_\ell(\widetilde{L}_j) = \pi_\ell(\widetilde{X}_j) + i\pi_\ell(\widetilde{X}_{p+j}).$$

Le résultat principal est le suivant :

THEOREME 1. — *S'il existe* $C_0 > 0$ *tel que (0.2) soit vérifiée pour tous* $\lambda \geq 1$ *et* $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, *alors, pour tout* $r \geq 1$, *pour tout* $\ell \in \Gamma_r$ *et pour tout* $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{k(\ell)})$ *on a :*

$$\sum_{j=1}^{2p} \|\pi_\ell(\widetilde{X}_j)\Psi\|^2 \leq C_0 \sum_{j=1}^{p} \|\pi_\ell(\widetilde{L}_j)\Psi\|^2 . \tag{1.2}$$

Par conséquent, si $\ell \in \Gamma_r \backslash \{0\}$, *le système* $\pi_\ell(\widetilde{L}_j)\,(1 \leq j \leq p)$ *est injectif dans* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{k(\ell)})$.

Pour le problème 2, on note $\widetilde{\mathcal{G}}$ l'algèbre de Lie à $2p+1$ générateurs $\widetilde{X}_0, \widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_{2p}$, de rang de nilpotence r, où r est en entier tel que $r - 1 \leq \mu^{-1} < r$. Soit $\widetilde{\Gamma}$ l'ensemble analogue à celui de la définition 1. Soit $a > 0$ tel qu'on ait $\chi(x, \xi) = 1$ si $|x| + |\xi| < a$.

THEOREME 2. — *S'il existe* $C_0 > 0$ *tel que (0.3) soit vérifiée pour tous* $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *et* $\lambda \geq 1$, *alors on a, pour tous*

$$\ell \in \widetilde{\Gamma} \quad \text{et} \quad \Psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{k(\ell)}) :$$

$$\|\pi_\ell(\widetilde{X}_0)\Psi\|^2 \leq C_0 \sum_{j=1}^{2p} \|\pi_\ell(\widetilde{X}_j)\Psi\|^2 . \tag{1.3}$$

De plus, il existe $\lambda_0 > 1$ *tel que, si* $\lambda \geq \lambda_0$ *et* $|x| + |\xi| \leq a\lambda^{1/2}$ *on a :*

$$\sum_{|I| \leq r-1} |X_I(x, \xi, \lambda)| \neq 0 .$$

La première affirmation se démontre de manière identique à celle du théorème 1, et nous ne la détaillerons pas. Montrons comment la seconde s'en déduit en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite (x_ν, ξ_ν) dans $\mathbf{R}^{2n}$ et une suite (λ_ν) tendant vers $+\infty$, telles que $|x_\nu| + |\xi_\nu| \leq a\,\lambda^{1/2}$ et $X_I(x_\nu, \xi_\nu, \lambda_\nu) = 0$ si $|I| \leq r - 1$. Posons $t_\nu = \lambda_\nu^{-\mu}$. La suite $t_\nu^r \lambda_\nu$ est donc bornée. Soit ℓ la forme linéaire sur $\widetilde{\mathcal{G}}$ telle que $\ell(\widetilde{X}_0) = 1$ et $\ell(X) = 0$ pour tout crochet X des générateurs de l'algèbre qui fait intervenir au moins une fois l'un des $\widetilde{X}_j\,(j \neq 0)$. On vérifie facilement l'égalité (1.1) de sorte que ℓ est dans $\widetilde{\Gamma}$, et l'inégalité (1.3) est vérifiée. Comme on l'a rappelé, la représentation π_ℓ correspondant à cette forme linéaire est scalaire, et l'on a $\pi_\ell(\widetilde{X}_0) = i$ et $\pi_\ell(\widetilde{X}_j) = 0$ pour $j \neq 0$, ce qui est en contradiction avec (1.3). Le théorème 2 sera donc démontré avec le théorème 1.

Soit maintenant Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, et $X_1, \ldots, X_{2p}$ des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $m \in \mathrm{R}$ dans Ω, dans la classe usuelle $\mathscr{L}^m_{1,0}(\Omega)$. Leurs symboles principaux, notés $X_j(x, \xi)$, sont supposés réels. Pour les applications à l'hypoellipticité, on s'intéresse à la variante locale du problème 1. On pose $L_j = X_j + i X_{p+j}$, $(j \leqslant p)$. Soit x_0 un point de Ω. On se demande à quelle condition il existe un voisinage V de x_0 et une constante $C_0 > 0$ tels qu'on ait :

$$\sum_{j=1}^{2p} \|X_j u\|^2 \leqslant C_0 \left(\sum_{j=1}^{p} \|L_j u\|^2 + \|u\|^2_{m-1} \right) \tag{1.4}$$

pour tout $u \in C_0^\infty(V)$. On note $\| \ \|_s$ la norme dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^n)$. Pour tout $r \geqslant 1$, on va définir un ensemble $\Gamma_r(x_0)$ localisé.

DEFINITION 2. – *On note* $\Gamma_r(x_0)$ *l'ensemble des formes linéaires* $\ell \in \mathscr{G}^*$ *telles qu'il existe des suites* (x_ν, ξ_ν) *dans* $\Omega \times \mathbf{R}^n$ *et* (t_ν) *dans* $\mathbf{R}^+$, *telles que :*

a) *La suite* $|\xi_\nu|$ *tend vers* $+\infty$ *et la suite* x_ν *tend vers* x_0.

b) *La suite* $t_\nu |\xi_\nu|^{m-1+\frac{1}{r}}$ *est bornée.*

c) *Pour tout crochet* $\widetilde{X}_I$, *on a, quand* $\nu \longrightarrow \infty$

$$t_\nu^{|I|} X_I(x_\nu, \xi_\nu) \longrightarrow \ell(\widetilde{X}_I).$$

On déduit facilement du théorème 1, à l'aide de fonctions de troncature, la conséquence suivante :

THEOREME 3. – *S'il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel que (0.7) soit vérifiée, alors, pour tout* $r \geqslant 1$, *pour tout* $\ell \in \Gamma_r(x_0)$, *et pour* $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{k(\ell)})$, *l'inégalité (1.4) est vérifiée. Par conséquent, si* $\ell \neq 0$, *le système* $\pi_\ell(\widetilde{L}_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ *est injectif dans* $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{k(\ell)})$.

De même, on déduit du théorème 2 une réciproque du résultat de [3] et [6].

THEOREME 4. — *Soient* $\xi_0 \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$, et $\sigma \in]0,1[$. *Supposons qu'il existe un opérateur pseudo-différentiel* $\chi(x, D)$ *dans* $\mathscr{L}^0_{1,0}(\Omega)$, *elliptique en* (x_0, ξ_0), *une constante* $C > 0$ *et un voisinage* V *de* x_0, *tels qu'on ait :*

$$\|\chi(x, D)u\|^2_{m-\sigma} \leqslant C\left(\sum_{j=1}^{2p} \|X_j u\|^2 + \|u\|^2_{m-1}\right)$$

pour tout $u \in C_0^\infty(V)$. *Alors il existe un crochet de Poisson itéré, de longueur* $\leqslant (1-\sigma)^{-1}$, *des symboles principaux des opérateurs* X_j, *qui est non nul en* (x_0, ξ_0).

Les théorèmes 3 et 4 se déduisent facilement des théorèmes 1 et 2. Les § 2 à 4 de l'article sont consacrés à la preuve du théorème 1. Les problèmes ouverts concernant sa réciproque sont évoqués au § 5. Signalons que les ensembles Γ_r et $\Gamma_r(x_0)$ sont stables par l'action du groupe exp $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{G}^*$ (représentation coadjointe) (voir [29]).

2. Forme explicite des représentations.

On dira qu'un système d'opérateurs $(Y_1, \ldots, Y_{2p})$ dans $\mathbf{R}^n$ est dans l'ensemble S_r si :

1) Tout commutateur itéré Y_I de ces opérateurs est de la forme suivante :

$$Y_I = A_1^{(I)} \frac{\partial}{\partial y_1} + A_2^{(I)}(y_1) \frac{\partial}{\partial y_2} + \ldots + A_n^{(I)}(y_1, \ldots, y_{n-1}) \frac{\partial}{\partial y_n} + i B^{(I)}(y) \quad (2.1)$$

où les $A_j^{(I)}$ et $B^{(I)}$ sont des polynômes réels, ne dépendant que des variables indiquées.

2) On a $Y_I = 0$ si $|I| > r$.

Le théorème 1 se déduit du théorème suivant :

THEOREME 1′. — *S'il existe* $C_0 > 0$ *tel que (0.2) soit vérifiée, alors, pour tout* $r \geqslant 1$ *et pour tout* $\ell \in \Gamma_r$, *il existe un système*

$(Y_1, \ldots, Y_{2p})$ *dans* S_r *tel qu'on ait, avec les notations ci-dessus :*

$$\ell(\widetilde{X}_I) = B^{(I)}(0,0) \quad si \quad |I| \leqslant r. \tag{2.2}$$

De plus, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, *on a*

$$\sum_{j=1}^{2p} \|Y_j f\|^2 \leqslant C_0 \sum_{j=1}^{p} \|(Y_j + i\, Y_{p+j}) f\|^2. \tag{2.3}$$

En effet, on peut associer à tout système $(Y_1, \ldots, Y_{2p})$ dans S_r une représentation π de l'algèbre $\mathcal{G}$ (à cause de la propriété 2 ci-dessus). On applique à cette représentation π le théorème 4.2 du chapitre II de [11], rappelé ci-dessous, qui établit le lien entre π et les représentations irréductibles.

PROPOSITION 1. – *Soit* π *une représentation de l'algèbre* $\mathcal{G}$ *dans* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *telle que, pour tout* $X \in \mathcal{G}$, $\pi(X)$ *soit un opérateur différentiel d'une forme analogue au membre de droite de* (2.1). *Soit* $C_0 > 0$. *Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *On a, pour tout* $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$

$$\sum_{j=1}^{2p} \|\pi(\widetilde{X}_j) f\|^2 \leqslant C_0 \sum_{j=1}^{p} \|\pi(\widetilde{L}_j) f\|^2.$$

ii) *Pour tout* $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$, *si* $\ell_{(x,\xi)}$ *est la forme linéaire sur* $\mathcal{G}$ *définie par*

$$\ell_{(x,\xi)}(X) = \frac{1}{i}\pi(X)(x, \xi) \qquad \forall X \in \mathcal{G},$$

on a, pour tout f *dans* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$, $k = k(\ell_{(x,\xi)})$:

$$\sum_{j=1}^{2p} \|\pi_{\ell_{(x,\xi)}}(\widetilde{X}_j) f\|^2 \leqslant C_0 \sum_{j=1}^{p} \|\pi_{\ell_{(x,\xi)}}(\widetilde{L}_j) f\|^2.$$

Il nous suffit donc de démontrer le théorème 1'. On pose $E = \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n \times [1, \infty[$ et on note $z = (x, \xi, \lambda)$ la variable de E. On posera :

$$M(z) = M(x, \xi, \lambda) = \lambda^{\frac{1}{r}1} + \sum_{|I| \leqslant r} |X_I(x, \xi, \lambda)|^{1/|I|}. \tag{2.4}$$

L'entier r est fixé dans les § 2, 3 et 4. On désigne par P l'ensemble des multi-indices (α, β) tels que $|\beta| \leqslant 1$ et tels que $\alpha_j \neq 0$ et $\beta_k \neq 0$ entraînent $j < k$, (c'est-à-dire tel que le terme $y^\alpha \partial_y^\beta$ puisse apparaître dans le développement d'un opérateur analogue à (2.1)).

La preuve du théorème 1' repose sur la construction, pour tout $z = (x, \xi, \lambda) \in \mathrm{E}$, d'une application symplectique θ_z et d'un opérateur T_z dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ dont nous allons énoncer les propriétés, et que nous construirons ensuite.

PROPOSITION 2. — *Pour tout* $z = (x, \xi, \lambda) \in \mathrm{E}$, *il existe une application symplectique* θ_z *définie dans un voisinage* V_z *de l'origine, à valeurs dans* $\mathbf{R}^{2n}$, *telle que* $\theta_z(0,0) = (x, \xi)$, *et qui possède les propriétés suivantes :*

1) *Pour tout multi-indice* (α, β), *il existe* $\mathrm{C}_{\alpha\beta} > 0$, *indépendant de* z, *tel que :*

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta (\mathrm{X}_j \circ \theta_z)(0,0)| \leqslant \mathrm{C}_{\alpha\beta} \mathrm{M}(z) \qquad \forall j \leqslant 2p, \qquad \forall z \in \mathrm{E}. \tag{2.5}$$

2) *Si le multi-indice* (α, β) *n'est pas dans* P, *ou bien si* $|\alpha + \beta| \geqslant r$, *on a :*

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta (\mathrm{X}_j \circ \theta_z)(0,0)| \leqslant \mathrm{C}_{\alpha\beta} \qquad \forall j \leqslant 2p, \qquad \forall z \in \mathrm{E}. \tag{2.6}$$

3) *Pour tout crochet de Poisson* X_I *et pour tout multi-indice* (α, β) *il existe* $\mathrm{C}_{\alpha\beta\mathrm{I}} > 0$ *tel que :*

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta (\mathrm{X}_\mathrm{I} \circ \theta_z)(0,0)| \leqslant \mathrm{C}_{\alpha\beta\mathrm{I}} \lambda \qquad \forall z = (x, \xi, \lambda) \in \mathrm{E}. \tag{2.7}$$

Remarquons que la fonction M dépend de l'entier r, et les applications θ_z en dépendent aussi. Posons :

$$\sigma_z(\mathrm{X}_j)(y, \eta) = \sum_{|\alpha+\beta| < r} \partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta (\mathrm{X}_j \circ \theta_z)(0,0) \frac{y^\alpha \eta^\beta}{\alpha! \, \beta!}$$

et notons aussi $\sigma_z(\mathrm{X}_j)$ l'opérateur différentiel associé à ce symbole. Le choix entre le calcul de Weyl et le calcul usuel n'a toujours pas d'importance à cause de (2.6). La proposition suivante montre comment on peut "quantifier" les applications symplectiques θ_z. On pose

$$\mathrm{N}(f) = \sum_{|\alpha+\beta| < r+1} \|y^\alpha \mathrm{D}_y^\beta f\| \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n).$$

PROPOSITION 3. – *Pour tout* $z = (x, \xi, \lambda) \in \mathrm{E}$, *il existe une application linéaire* T_z *dans* $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ *qui possède les propriétés suivantes :*

a) *Il existe* $\mathrm{C} > 0$, *indépendant de* z, *tel que*

$$\|\mathrm{T}_z f\| \leqslant \mathrm{C}\, \|f\| \qquad \forall z \in \mathrm{E}, \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n). \tag{2.8}$$

b) *Pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\mathrm{C}(\epsilon) > 0$ *tel que*

$$\|\sigma_z(\mathrm{X}_j) f\|^2 \leqslant (1+\epsilon)\, \|\mathrm{X}_j(\lambda)\mathrm{T}_z f\|^2 + \mathrm{C}(\epsilon)\,\mathrm{N}(f)^2 \tag{2.9}$$

$$\|\mathrm{X}_j(\lambda)\,\mathrm{T}_z f\|^2 \leqslant (1+\epsilon)\, \|\sigma_z(\mathrm{X}_j) f\|^2 + \mathrm{C}(\epsilon)\,\mathrm{N}(f)^2 \tag{2.10}$$

ainsi que les inégalités analogues où X_j *est remplacé par* L_j, *soient vérifiées pour tous* $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, $z \in \mathrm{E}$ et $j \in \{1, \ldots, 2p\}$.

Les propositions 2 et 3 seront démontrées aux § 3 et 4. Montrons maintenant comment le théorème 1′ s'en déduit. Soit ℓ un élément de Γ_r. Soient $z_\nu = (x_\nu, \xi_\nu, \lambda_\nu)$ une suite dans E, et (t_ν) une suite dans $\mathbf{R}^+$, qui ont les propriétés a), b) et c) de la définition 1. On suppose l'inégalité (0.2) vérifiée, et on l'applique à $\lambda = \lambda_\nu$ et $f = \mathrm{T}_{(z_\nu)}\Psi$, où Ψ est une fonction fixée dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. D'après (2.8), (2.9) et (2.10), pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\mathrm{C}_1(\epsilon) > 0$, indépendant de ν, tel que :

$$\sum_{j=1}^{2p} \|\sigma_{z_\nu}(\mathrm{X}_j)\Psi\|^2 < (\mathrm{C}_0 + \epsilon) \sum_{j=1}^{p} \|\sigma_{z_\nu}(\mathrm{L}_j)\Psi\|^2 + \mathrm{C}_1(\epsilon)\,\mathrm{N}(\Psi)^2. \tag{2.11}$$

D'après (2.4) et les points a), b) et c) de la définition 1, la suite $t_\nu \mathrm{M}(z_\nu)$ est bornée, et la suite (t_ν) tend vers 0. D'après (2.5), les suites

$$t_\nu\, \partial_y^\alpha\, \partial_\eta^\beta (\mathrm{X}_j \circ \theta_{z_\nu})(0,0) \quad (|\alpha + \beta| \leqslant r,\ (\alpha, \beta) \in \mathrm{P},\quad j \leqslant 2p)$$

sont donc bornées. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que ces suites ont des limites $a_{\alpha\beta j}$. Posons

$$\mathrm{Y}_j = i \sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in \mathrm{P} \\ |\alpha+\beta| \leqslant r}} a_{\alpha\beta j}\, \frac{y^\alpha\, \mathrm{D}_y^\beta}{\alpha!\, \beta!}. \tag{2.12}$$

Multiplions (2.11) par t_ν^2 et faisons tendre ν vers $+\infty$. D'après ce qui précède et d'après (2.6), on a

$$t_\nu \, \sigma_{z_\nu}(\mathrm{X}_j)\,\Psi \longrightarrow \mathrm{Y}_j\,\Psi \qquad \text{dans} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n).$$

Puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit l'inégalité (2.3).

D'après (2.12) les Y_j et donc aussi tous leurs commutateurs, sont d'une forme analogue à celle du membre de droite de (2.1). D'après (2.6), pour tout multi-indice (α, β), on a, quand $\nu \longrightarrow +\infty$:

$$t_\nu \, \partial_y^\alpha \, \partial_\eta^\beta (\mathrm{X}_j \circ \theta_{z_\nu})(0,0) \longrightarrow i^{-1} \, \partial_y^\alpha \, \partial_\eta^\beta \, \mathrm{Y}_j(0,0) \tag{2.13}$$

où $\mathrm{Y}_j(y, \eta)$ désigne le symbole complet de l'opérateur Y_j. Pour des opérateurs analogues à (2.1), on voit que les commutateurs correspondent exactement aux crochets de Poisson des symboles. Par conséquent, pour tout commutateur Y_I et pour tout multi-indice (α, β), on a

$$t_\nu^{|\mathrm{I}|} \, \partial_y^\alpha \, \partial_\eta^\beta (\mathrm{X}_\mathrm{I} \circ \theta_{z_\nu})(0,0) \longrightarrow i^{-1} \, \partial_y^\alpha \, \partial_\eta^\beta \, \mathrm{Y}_\mathrm{I}(0,0). \tag{2.14}$$

Puisque la suite $\mathrm{M}(z_\nu)^{-r}\lambda_\nu$ est bornée, on déduit de (2.7) et (2.14) que les symboles $\mathrm{Y}_\mathrm{I}(y, \eta)$ des commutateurs Y_I sont des polynômes et qu'ils sont nuls lorsque $|\mathrm{I}| > r$. Par conséquent le système $(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_{2p})$ est dans l'ensemble S_r. Enfin, l'égalité (2.2) résulte de (2.14) et de (1.1). Le théorème 1 sera donc démontré quand les propositions 2 et 3 le seront.

3. Construction des applications θ_Z.

Pour tout $z = (x, \xi, \lambda) \in \mathrm{E}$, soit θ_z^0 la translation définie par :

$$\theta_z^0(y, \eta) = (x + y, \xi + \eta) \qquad \forall (y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}. \tag{3.1}$$

Dans le cas où $\lambda^{1/2} \leqslant \mathrm{M}(x, \xi, \lambda)$, on voit facilement que l'application $\theta_z = \theta_z^0$ possède toutes les propriétés de la proposition 2. Soit E' l'ensemble des points $z = (x, \xi, \lambda)$ tels que $\lambda^{1/2} > \mathrm{M}(x, \xi, \lambda)$. Pour tout $z \in \mathrm{E}'$, on va construire, par récurrence, des applications symplectiques θ_z^k, $(0 \leqslant k \leqslant n)$, puis on posera $\theta_z = \theta_z^n$.

Si l'on pose $\nu_0(z) = \lambda^{1/2}$, on déduit de (0.1) que, pour tout crochet de Poisson X_I et pour tout multi-indice (α, β), il existe

$C_{\alpha\beta I} > 0$ tel qu'on ait :

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta (X_I \circ \theta_z^0)(y, \eta)| \leqslant C_{\alpha\beta I}\, \nu_0(z)^{2-|\alpha+\beta|} \tag{3.2}$$

pour tous $(y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}$ et $z \in E'$. On définira aussi une suite de réels $\nu_k(z)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ afin de généraliser (3.2).

Pour décrire les propriétés de θ_z^k et de $\nu_k(z)$, on posera $y' = (y_1, \ldots, y_k)$, $y'' = (y_{k+1}, \ldots, y_n)$, et de même pour les variables duales et les multi-indices. On posera aussi :

$$\Sigma_k = \{(y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}, \; y_j = \eta_j = 0 \quad \forall j \leqslant k-1\} .$$

On note Q_k l'ensemble des multi-indices (α, β) tels qu'il existe $\ell \leqslant k$ tel que $\beta_\ell \neq 0$, et $\alpha_j = \beta_j = 0$ pour tout $j < \ell$. On note M_ℓ^k (resp. M_ℓ) l'ensemble des multi-indices (α, β) tels que $\alpha_j = \beta_j = 0$ pour tout $j > k$ (resp. pour tout $j < \ell$), et $M_\ell^k = M^k \cap M_\ell$. Enfin, on note (j) le multi-indice $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, où le 1 est à la j^{ieme} place.

PROPOSITION 4. — *Pour tout* $k \leqslant n$ *et* $z = (x, \xi, \lambda) \in E'$, *il existe une application symplectique* θ_z^k *définie dans un voisinage* V_z^k *de l'origine, à valeurs dans* $\mathbf{R}^{2n}$, *telle que* $\theta_z^k(0, 0) = (x, \xi)$, *et un réel* $\nu_k(z) \geqslant M(z)$, *qui possèdent les propriétés suivantes :*

A_k) *Le voisinage* V_z^k *est de la forme suivante :*

$$V_z^k = \{(y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}, |y'| \leqslant a\, M(z), |\eta'| \leqslant a \frac{\nu_k(z)^2}{M(z)}, \; |(y'', \eta'')| \leqslant a\, \nu_k(z)\} \tag{3.3}$$

où $a > 0$ *est indépendant de* z.

B_k) *Pour tout crochet de Poisson itéré* X_I *des symboles* $X_j(x, \xi, \lambda)$ *et pour tout multi-indice* (α, β), *il existe* $C_{\alpha\beta I}$, *indépendant de* $z \in E'$. *tel que :*

$$|\partial_y^\alpha \partial_n^\beta (X_I \circ \theta_z^k)(y, \eta)| \leqslant C_{\alpha\beta I}\, \lambda M(z)^{-|\alpha'+\beta'|}\, \nu_k(z)^{-|\alpha''+\beta''|}$$

pour tout $(y, \eta) \in V_z^k$, *pour tout* $z \in E'$.

C_k) *On a, de plus, si* (y, η) *est dans* $\Sigma_{k+1} \cap \mathrm{V}_z^k$

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta (\mathrm{X_I} \circ \theta_z^k)(y, \eta)| \leqslant \mathrm{C}_{\alpha\beta\mathrm{I}}\, \mathrm{M}(z)^{|\mathrm{I}|-1}\, \nu_k(z)^{2-|\alpha''+\beta''|}.$$

D_k) *Si le multi-indice* (α, β) *est dans* Q_k, *on a :*

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta (\mathrm{X_I} \circ \theta_z^k)(0, 0)| \leqslant \mathrm{C}_{\alpha\beta}\, \mathrm{M}(z)^{|\mathrm{I}|+1-|\alpha'+\beta'|}\, \nu_k(z)^{-|\alpha''+\beta''|}.$$

E_k) *Si le multi-indice* (α, β) *est dans* M^k, *il existe un nombre fini de crochets* $\mathrm{X_J}$ *(ne dépendant que de* α, β *et* I) *et de fonctions* f_{IJ} *et* g_I *(dépendant aussi de* z), *tels qu'on ait dans* $\Sigma_k \cap \mathrm{V}_z^k$ *l'égalité suivante :*

$$\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta (\mathrm{X_I} \circ \theta_z^k) = \mathrm{M}(z)^{|\mathrm{I}|} (g_\mathrm{I} + \sum_\mathrm{J} f_{\mathrm{IJ}}\, \mathrm{M}(z)^{-|\mathrm{J}|} (\mathrm{X_J} \circ \theta_z^k)).$$

De plus, pour tout multi-indice $(\gamma, \delta) \in \mathrm{M}_k$, *il existe* $\mathrm{C}_{\gamma\delta}$ *indépendant de* $z \in \mathrm{E}'$, *tel que :*

$$|\partial_y^\gamma \partial_\eta^\delta f_{\mathrm{IJ}}(0)| + |\partial_y^\gamma \partial_\eta^\delta g_\mathrm{I}(0)| \leqslant \mathrm{C}_{\gamma\delta}\, \mathrm{M}(z)^{-\gamma_k - \delta_k}\, \nu_k(z)^{-|\gamma''+\delta''|}. \tag{3.5}$$

F_k) *Si le multi-indice* (α, β) *est dans* M^k *mais pas dans* P, *on a :*

$$|\partial_y^\gamma \partial_\eta^\delta f_{\mathrm{IJ}}(0)| + |\partial_y^\gamma \partial_\eta^\delta g_\mathrm{I}(0)| \leqslant \mathrm{C}_{\gamma\delta}\, \mathrm{M}(z)^{-1-\gamma_k-\delta_k}\, \nu_k(z)^{-|\gamma''+\delta''|} \tag{3.6}$$

L'application θ_z^0 et le réel $\nu_0(z)$ déjà définis possèdent les propriétés A_0 à C_0, et les propriétés D_0 à F_0 sont vides, puisque, pour $k = 0$, il n'y a pas de variable y'. Lorsque la proposition sera démontrée pour $k = n$, la proposition 2 s'en déduira aussitôt en posant $\theta_z = \theta_z^n$.

Supposons construits les applications symplectiques θ_z^j $(j \leqslant k)$ et les réels $\nu_j(z) \geqslant \mathrm{M}(z)$ possédant les propriétés A_j à F_j $(j < k)$. Pour éviter une confusion, on posera ici $y''' = (y_k, \dots, y_n)$, $y'' = (y_{k+1}, \dots, y_n)$ et de même pour les variables duales et les multi-indices. Posons :

$$a_k(z) = \sup_{|\mathrm{I}| \leqslant r} \frac{1}{\mathrm{M}(z)^{|\mathrm{I}|}} |d_{y'''\eta'''} (\mathrm{X_I} \circ \theta_z^{k-1})(0, 0)|. \tag{3.7}$$

On distingue deux cas :

Cas I : Si $a_k(z) < 1$, on pose $\theta_z^k = \theta_z^{k-1}$ et $\nu_k(z) = \mathrm{M}(z)$. Notons que dans ce cas $\nu_k(z) \leqslant \nu_{k-1}(z)$.

Cas II : Soit E'' l'ensemble des $z \in \mathrm{E}'$ tels que $a_k(z) \geqslant 1$. Pour tout $z \in \mathrm{E}''$, on pose $\nu_k(z) = \mathrm{M}(z)\ a_k(z)$. D'après l'hypothèse de récurrence C_{k-1}, on voit que :

$$\nu_k(z) \leqslant \mathrm{C}\, \nu_{k-1}(z) \tag{3.8}$$

où C est indépendant de $z \in \mathrm{E}''$. Cette inégalité est donc vraie dans les deux cas.

LEMME 1. – *Pour tout crochet de Poisson* $\mathrm{X_I}$ *et pour tout multi-indice* (α, β), *il existe* $\mathrm{C}_{\alpha\beta\mathrm{I}} > 0$ *tel qu'on ait :*

$$|\partial_y^\alpha\, \partial_\eta^\beta (\mathrm{X_I} \circ \theta_z^{k-1})\quad (y, \eta)| \leqslant \mathrm{C}_{\alpha\beta\mathrm{I}}\, \mathrm{M}(z)^{|\mathrm{I}|-1}\, \nu_k(z)^{2-|\alpha''' + \beta'''|} \tag{3.9}$$

pour tout $(y, \eta) \in \Sigma_k$ *de norme* $\leqslant a\, \nu_k(z)$, *et pour tout* $z \in \mathrm{E}''$,

(*où* $a > 0$ *est une constante indépendante de* $z \in \mathrm{E}''$).

Ce lemme est vrai dans les cas I et II.

Démonstration du lemme. – Notons d'abord que, pour tout crochet $\mathrm{X_I}$, (quelle que soit sa longueur), il existe $\mathrm{C_I} > 0$ tel que

$$|\mathrm{X_I}(z)| \leqslant \mathrm{C_I}\, \mathrm{M}(z)^{|\mathrm{I}|} \qquad \forall z \in \mathrm{E}\,. \tag{3.10}$$

L'hypothèse de récurrence C_{k-1} et (3.8) montrent que (3.9) est vérifiée si $|\alpha''' + \beta'''| \geqslant 2$. Si $|\alpha''' + \beta'''| \leqslant 1$ et $y = \eta = 0$, l'inégalité (3.9) résulte du point E_{k-1} de l'hypothèse de récurrence, et de (3.7), (3.8) et (3.10). L'inégalité (3.9) s'en déduit dans le cas général d'après la formule de Taylor.

Soit I_k l'un des indices où le sup est atteint dans (3.7). La fonction g_z suivante est définie dans un voisinage W de l'origine dans $\mathbf{R}^{2(n-k+1)}$, indépendant de $z \in \mathrm{E}'$:

$$g_z\ (y''', \eta''') = \mathrm{M}(z)^{-|\mathrm{I}_k|+1}\ \nu_k^{-2}\, (\mathrm{X}_{\mathrm{I}_k} \circ \theta_z^{k-1})\, (0, \nu_k y''', 0, \nu_k \eta''')$$

On a écrit ν_k pour $\nu_k(z)$. D'après le lemme 1, pour tout $(\alpha, \beta) \in M_k$, on a

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta g_z(y''', \eta''')| \leqslant C_{\alpha\beta}$$

pour tous $(y''', \eta''') \in W$ et $z \in E'$. D'après (3.7), on a

$$|d_{y'''\eta'''} g_z(0, 0)| = 1.$$

Il existe donc un voisinage V de l'origine, (indépendant de $z \in E''$) et une application symplectique $\Psi_z : V \longrightarrow W$, bornée dans $C^\infty(V, W)$ indépendamment de $z \in E''$, telle que $\Psi_z(0, 0) = (0, 0)$ et

$$g_z(\Psi_z(y''', \eta''')) - g_z(0, 0) = \eta_k \tag{3.11}$$

pour tout $(y''', \eta''') \in V$. On définit une application symplectique Φ_z^k par :

$$\Phi_z^k(y''', \eta''') = \nu_k \Psi_z\left(\frac{y'''}{\nu_k}, \frac{\eta'''}{\nu_k}\right).$$

Cette application est définie dans la boule de rayon $a\nu_k(z)$, ($a > 0$ indépendant de z). Distinguons les composantes de Φ_z^k en posant $\Phi^k(y''', \eta''') = (u, v)$. On définit une application symplectique $\widetilde{\Phi}_z^k$ dans un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^{2n}$ en posant

$$\widetilde{\Phi}_z^k(y, \eta) = (y_1, \ldots, y_{k-1}, u(y''', \eta'''), \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}, v(y''', \eta'''))$$

On définit enfin une dilatation h_z^k par :

$$h_z^k(y, \eta) = \left(y_1, \ldots, y_{k-1}, a_k y_k, y'', \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}, \frac{\eta_k}{a_k}, \eta''\right)$$

puis on pose $\theta_z^k = \theta_z^{k-1} \circ \widetilde{\Phi}_z^k \circ h_z^k$. Cette application est bien définie dans un domaine V_z^k du type décrit en A_k. On déduit de (3.11) l'égalité suivante, vérifiée dans $\Sigma_k \cap V_z^k$

$$(X_{I_k} \circ \theta_z^k)(y, \eta) - (X_{I_k} \circ \theta_z^k)(0, 0) = M(z)^{|I_k|} \eta_k. \tag{3.12}$$

Il nous reste à vérifier les points B_k à F_k dans les deux cas ci-dessus. Dans le premier cas, posons $\zeta_z^k = I$, et dans le deuxième cas,

$\zeta_z^k = \widetilde{\Phi}_z^k \circ h_z^k$. Si $\ell < k$, posons $\zeta_z^{\ell,k} = \zeta_z^{\ell+1} \circ \ldots \circ \zeta_z^k$. On a donc $\theta_z^k = \theta_z^{k-1} \circ \zeta_z^k = \theta_z^\ell \circ \theta_z^{\ell,k}$. Soit $W_z^k(a)$ $(a > 0)$ l'ensemble suivant :

$$W_z^k(a) = \{(y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n},\ |y_j| \leqslant a\,M(z) \quad \text{et} \quad |\eta_j| \leqslant a \frac{\nu_k(z)^2}{M(z)}$$

$$\text{si} \quad j \leqslant k-1,\ |(y''', \eta''')| \leqslant a\,\nu_k(z)\}. \tag{3.13}$$

D'après (3.8), il existe a indépendant de z tel que $W_z^k(a)$ soit inclus dans V_z^{k-1}. On utilisera les lemmes suivants, faciles à vérifier.

LEMME 2. — *Soit* (f_z) $(z \in E')$ *une famille de fonctions, où* f_z *est définie dans* $W_z^k(a)$. *On suppose que, pour tout multi-indice* $(\gamma, \delta) \in M_k$, *il existe* $C_{\gamma\delta} > 0$ *tel que :*

$$|\partial_y^\gamma\, \partial_\eta^\delta\, f_z(y, \eta)| \leqslant C_{\gamma\delta}\, \nu_k(z)^{-|\gamma+\delta|} \qquad \forall z \in E' \tag{3.14}$$

pour tout $(y, \eta) \in W_z^k(a)$, (resp. *pour tout* $(y, \eta) \in W_z^k(a) \cap \Sigma_k$),

(resp. *pour* $y = \eta = 0$). *Alors la fonction* $\varphi_z = f_z \circ \zeta_z^k$ *est définie dans un ensemble* V_z^k *du type décrit en (3.3), et, pour tout multi-indice* $(\gamma, \delta) \in M_k$, *il existe* $C'_{\gamma\delta} > 0$ *tel que l'on ait, dans le deuxième cas distingué ci-dessus :*

$$|\partial_y^\gamma\, \partial_\eta^\delta\, \varphi_z(y, \eta)| \leqslant C'_{\gamma\delta}\, M(z)^{-\gamma_k - \delta_k}\, a_k(z)^{-2\delta_k}\, \nu_k(z)^{-|\gamma'' + \delta''|} \tag{3.15}$$

et dans les deux cas

$$|\partial_y^\gamma\, \partial_\eta^\delta\, \varphi_z(y, \eta)| \leqslant C_{\gamma\delta}\, M(z)^{-\gamma_k - \delta_k}\, \nu_k(z)^{-|\gamma'' + \delta''|} \tag{3.16}$$

pour tout $(y, \eta) \in V_z^k$, (resp. $(y, \eta) \in V_z^k \cap \Sigma_k$) (resp. $y = \eta = 0$)

et pour tout $z \in E'$.

On déduit facilement de ce lemme le suivant :

LEMME 3. — *Soient* ℓ *et* k *deux entiers tels que* $\ell < k$, *et soit* (f_z) $(z \in E')$ *une famille de fonctions définies au voisinage de l'origine. On suppose que, pour tout* $(\gamma, \delta) \in M_{\ell+1}$, *il existe* $C_{\gamma\delta} > 0$, *indépendant de* z, *tel que*

$$|\partial_y^\gamma\, \partial_\eta^\delta\, f_z(0, 0)| \leqslant C_{\gamma\delta}\, \nu_\ell(z)^{-|\gamma+\delta|}. \tag{3.17}$$

Soit $\varphi_z = f_z \circ \zeta_z^{\ell,k}$. *Alors, pour tout* $(\gamma, \delta) \in M_{\ell+1}$, *il existe* $C'_{\gamma\delta} > 0$ *tel que*

$$|\partial_y^\gamma \partial_\eta^\delta \varphi_z(0,0)| \leqslant C_{\gamma\delta} M(z)^{-|\gamma'+\delta'|} \nu_k(z)^{-|\gamma''+\delta''|} \tag{3.18}$$

pour tout $z \in E'$. *On a posé*

$$\gamma' = (\gamma_{\ell+1}, \dots, \gamma_k) \quad \text{et} \quad \gamma'' = (\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n).$$

Pour la vérification des points B_k à F_k, on considère un crochet de Poisson X_I et un multi-indice (α, β), fixés. Jusqu'au point E_k, on désigne par $\widetilde{\alpha}$ le multi-indice $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 0, \dots, 0)$, et de même pour $\widetilde{\beta}$. On pose :

$$F_z(y, \eta) = \partial_y^{\widetilde{\alpha}} \partial_\eta^{\widetilde{\beta}} (X_I \circ \theta_z^{k-1})(y, \eta).$$

Cette fonction est définie dans $W_z^k(a)$, ($a > 0$ indépendant de z).

Point B_k – D'après l'hypothèse de récurrence B_{k-1}, la famille de fonctions

$$f_z = \lambda^{-1} M(z)^{-|\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}|} F_z$$

vérifie dans $W_z^k(a)$ les majorations (3.14) pour tout $(\gamma, \delta) \in M_k$. Le point B_k résulte de (3.16) en choisissant $\gamma = (\alpha_k, \dots, \alpha_n)$ et $\delta = (\beta_k, \dots, \beta_n)$.

Point C_k – D'après le lemme 1, la famille de fonctions

$$f_z = M(z)^{1-|I|} \nu_k(z)^{-2} F_z$$

vérifie dans $\Sigma_k \cap W_z^k(a)$ les majorations (3.14). Le point C_k résulte des inégalités (3.16) vérifiées dans $\Sigma_{k+1} \cap V_z^k$.

Point D_k – Dans le cas I, ce n'est qu'une conséquence immédiate de C_k puisque $\nu_k = M$. Pour le cas II, on voit que, si (α, β) est dans Q_k, il y a deux cas possibles :

a) ou bien le multi-indice $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ défini ci-dessus est dans Q_{k-1}.

b) ou bien $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta} = 0$ et $\beta_k \neq 0$.

Dans le cas a) la famille de fonctions suivantes :

$$f_z = M(z)^{|\alpha+\beta|-1-|I|} F_z$$

vérifie les majorations (3.14) pour $y = \eta = 0$, d'après l'hypothèse de récurrence D_{k-1}. Le point D_k résulte alors des majorations (3.16). Dans le cas b), la famille

$$f_z = M(z)^{1-|I|} \nu_k(z)^{-2} F_z$$

vérifie les majorations (3.14) à l'origine, d'après le lemme 1, et le point D_k résulte de (3.15) appliqué à cette fonction et au multi-indice

$$\gamma = (\alpha_k, \ldots, \alpha_n), \delta = (\beta_k, \ldots, \beta_n),$$

en remarquant que $\beta_k \geqslant 1$ et $a_k(z) \geqslant 1$.

Point E_k – On commence par démontrer ce point pour des multi-indices particuliers.

a) Cas où $\alpha = 0$ *et* $\beta = (j)$ $(j \leqslant k)$. On pose alors :

$$g_I = \frac{\partial}{\partial \eta_j} (X_I \circ \theta_z^k) M(z)^{-|I|}.$$

Il n'y a pas de fonction f_{IJ} dans ce cas, et l'égalité (3.4) est bien vérifiée. Pour tout $(\gamma, \delta) \in M_k$, le multi-indice $(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$ est dans Q_k, et les majorations (3.5) résultent du point D_k.

b) Cas où $(\alpha, \beta) \in M^{k-1}$. D'après l'hypothèse de récurrence E_{k-1} on peut écrire, dans $\Sigma_k \cap V_z^{k-1}$

$$\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta (X_I \circ \theta_z^{k-1}) = M(z)^{|I|} \widetilde{g}_I + \sum_J \widetilde{f}_{IJ} M(z)^{|I|-|J|} (X_J \circ \theta_z^{k-1})$$

où les fonctions $\widetilde{f}_{IJ}$ et $\widetilde{g}_I$ vérifient l'analogue de (3.5) au cran $k-1$, ce qui entraîne, d'après (3.8), que les majorations (3.14) sont vérifiées par ces fonctions à l'origine. D'après le lemme 2, les fonctions $f_{IJ} = \widetilde{f}_{IJ} \circ \zeta_z^k$ et $g_I = \widetilde{g}_I \circ \zeta_z^k$ vérifient bien (3.5), et l'égalité (3.4) est vérifiée dans $\Sigma_k \cap V_z^k$.

c) Cas où $\alpha = (k)$ *et* $\beta = 0$. Dans le cas I, on pose

$$g_I = \frac{\partial}{\partial y_k} (X_I \circ \theta_z^k) M(z)^{-|I|}.$$

Il n'y a pas de fonctions f_{IJ}, et les majorations (3.5) sont vérifiées d'après le lemme 1, puisqu'alors $\theta_z^k = \theta_z^{k-1}$ et $\nu_k(z) = M(z)$. Dans le cas II, on déduit de (3.12) l'égalité suivante, vérifiée dans $\Sigma_k \cap V_z^k$

$$\frac{\partial (X_I \circ \theta_z^k)}{\partial y_k} = M(z)^{|I|-|J|} (X_j \circ \theta_z^k) + \sum_{j=1}^{k-1} f_j \frac{\partial (X_I \circ \theta_z^k)}{\partial y_j}$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} M(z)^{|I|-|I_k|} \varphi_j \frac{\partial (X_{I_k} \circ \theta_z^k)}{y_j}$$

où X_J est le crochet de Poisson $X_J = \{X_{I_k}, X_J\}$, et où on a posé

$$f_j = -M(z)^{-|I_k|} \frac{\partial (X_{I_k} \circ \theta_z^k)}{\partial \eta_j} \quad \text{et} \quad \varphi_j = +M(z)^{-|I|} \frac{\partial (X_I \circ \theta_z^k)}{\partial \eta_j} .$$

D'après l'étape a) ci-dessus, les fonctions f_j et φ_j vérifient les majorations (3.5). D'après l'étape b) les fonctions $\frac{\partial}{\partial y_j} (X_I \circ \theta_z^k)$ et $\frac{\partial}{\partial y_j} (X_{I_k} \circ \theta_z^k)$ admettent elles-mêmes une écriture analogue à (3.4), avec des majorations (3.5) pour les coefficients. Le point E_k est démontré dans ce cas.

d) Cas général d'un multi-indice $(\alpha, \beta) \in M^k$. D'après l'étape b) l'égalité (3.4) est vérifiée si on remplace (α, β) par le multi-indice $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ défini ci-dessus. Puisque cette égalité est vérifiée dans $\Sigma_k \cap V_z^k$,

on peut la dériver par rapport à y_k ou η_k. En utilisant à chaque fois l'étape c) ou a), on en déduit le point E_k dans le cas général.

Point F_k. Si $(\alpha, \beta) \in M^k \backslash P$, il existe un entier $\ell \leqslant k-1$, et deux multi-indices $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \in M^\ell$ et $(\mu, \nu) \in M_{\ell+1}^k$ tels que $(\alpha, \beta) = (\widetilde{\alpha} + \mu, \widetilde{\beta} + \nu)$ et tels qu'on soit dans l'un des deux cas suivants :

a) ou bien $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \notin P$

b) ou bien $(\mu, \nu) \in Q_k$, et $|\mu + \nu| \geqslant 2$.

On applique l'hypothèse de récurrence F_ℓ (dans le cas a) ou E_ℓ (dans le cas b). On peut donc écrire, dans $\Sigma_{\ell+1} \cap V_z^\ell$

$$\partial_y^{\widetilde{\alpha}} \partial_\eta^{\widetilde{\beta}} (X_I \circ \theta_z^\ell) = M(z)^{|I|} \widetilde{g}_I + \sum_J M(z)^{|I|-|J|} \widetilde{f}_{IJ} (X_J \circ \theta_z^\ell).$$

Dans le cas a) les fonctions $M(z) f_{IJ}$ et $M(z)\, \widetilde{g_I}$ vérifient (3.17). D'après le lemme 3, les fonctions $f_{IJ} = \widetilde{f}_{IJ} \circ \zeta_z^{\ell,k}$ et $g_I = \widetilde{g}_I \circ \zeta_z^{\ell,k}$ vérifient après multiplication par $M(z)$, l'inégalité (3.18), et l'on a, dans $\Sigma_{\ell+1} \cap V_z^k$

$$\partial_y^{\widetilde{\alpha}}\, \partial_\eta^{\widetilde{\beta}}\, (X_I \circ \theta_z^k) = M(z)^{|I|}\, g_I + \sum_J M(z)^{|I|-|J|} f_{IJ}\, (X_J \circ \theta_z^k)\,. \qquad (3.19)$$

On peut appliquer aux deux membres l'opérateur $\partial_y^\mu\, \partial_\eta^\nu$. On utilise le point E_k pour majorer ou transformer les différents termes qui apparaissent, et l'on en déduit l'égalité (3.4) avec d'autres fonctions f_{IJ} et g_I qui vérifient (3.6).

Dans le cas b) on procède encore comme ci-dessus, mais cette fois les fonctions f_{IJ} et g_I elles-mêmes, (sans être multipliées par $M(z)$), vérifient l'inégalité (3.18). En appliquant aux deux membres de (3.19) l'opérateur $\partial_y^\mu\, \partial_\eta^\nu$, on utilise ces majorations (3.18) pour f_{IJ} et g_I, ainsi que les points D_k et E_k et le fait que $|\mu + \nu| \geqslant 2$, pour majorer, ou réexprimer, les dérivées des différents termes. Les propositions 4 et 2 sont démontrées.

4. Construction des opérateurs T_z .

L'opérateur T_z^0 associé à la translation θ_z^0 où $z = (x, \xi, \lambda)$ est défini par :

$$(T_z^0 f)(y) = e^{iy\cdot\xi} f(y - x) \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)\,.$$

On a bien $X_j(\lambda)\, T_z^0 f = (X_j \circ \theta_z^0)\, (y, D) f$. Si $\lambda^{1/2} \leqslant M(z)$, on pose $T_z = T_z^0$ et la proposition 3 est alors démontrée. Sinon, on va associer aux applications symplectiques θ_z^k du § 3 des opérateurs T_z^k, puis nous poserons $T_z = T_z^n$. On garde toutes les notations du § 3.

Soit $a > 0$ la constante de (3.3). Choisissons une fonction χ_k dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^{2(n-k)})$, à support dans la boule de centre 0 et de rayon a, égale à 1 dans un voisinage de l'origine. Posons :

$$\sigma_z^k(X_j)(y, \eta) = \sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in M^k \\ |\alpha+\beta| \leqslant r}} \partial_y^\alpha\, \partial_\eta^\beta\, (X_j \circ \theta_z^k)(0, y'', 0, \eta'')\, \chi_k\left(\frac{y''}{\nu_k}, \frac{\eta''}{\nu_k}\right) \frac{y'^\alpha\, \eta'^\beta}{\alpha!\, \beta!} \qquad (4.1)$$

et notons aussi $\sigma_z^k(X_j)$ l'opérateur pseudo-différentiel associé. Posons, pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$

$$\mathrm{N}_z^k(f) = \sum_{|\alpha+\beta| \leq r+1} \left(\frac{\mathrm{M}(z)}{\nu_k(z)}\right)^{|\alpha''+\beta''|} \| y^\alpha \mathrm{D}_y^\beta f \| . \tag{4.2}$$

Rappelons que $\alpha'' = (\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$. La proposition suivante énonce une liste de propriétés que possèderont les T_z^k, et que nous allons démontrer par récurrence.

Proposition 5. — *Pour tout* $k \leq n$ *et* $z = (x, \xi, \lambda) \in \mathrm{E}'$, *il existe une application linéaire* T_z^k *dans* $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ *qui possède les propriétés suivantes :*

G_k) *Il existe* $\mathrm{C} > 0$, *indépendant de* z, *tel que*

$$\| \mathrm{T}_z^k f \| \leq \mathrm{C} \| f \| \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n) \qquad \forall z \in \mathrm{E}' \tag{4.3}$$

H_k) *Pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\mathrm{C}(\epsilon) > 0$ *tel que*

$$\| \mathrm{X}_j(\lambda) \mathrm{T}_z^k f \|^2 \leq (1+\epsilon) \| \sigma_z^k(\mathrm{X}_j) f \|^2 + \mathrm{C}(\epsilon) \mathrm{N}_z^k(f)^2 \tag{4.4}$$

$$\| \sigma_z^k(\mathrm{X}_j) f \|^2 \leq (1+\epsilon) \| \mathrm{X}_j(\lambda) \mathrm{T}_z^k f \|^2 + \mathrm{C}(\epsilon) \mathrm{N}_z^k(f)^2 \tag{4.5}$$

et les inégalités analogues où X_j *est remplacé par* L_j, *soient vérifiées pour tous* $z \in \mathrm{E}'$ *et* $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$.

Lorsque cette proposition sera démontrée, la proposition 3 s'en déduira aussitôt en posant $\mathrm{T}_z = \mathrm{T}_z^n$. L'opérateur T_z^0 possède bien les propriétés G_0 et H_0. Supposons construit l'opérateur T_z^{k-1} possédant les propriétés G_{k-1} et H_{k-1}. On considère les deux cas distingués au § 3. Dans le cas I, on pose $\mathrm{T}_z^k = \mathrm{T}_z^{k-1}$, et les propriétés G_k et H_k sont immédiates. Etudions maintenant le cas II.

On dira qu'une famille de fonctions $f_z\ (z \in \mathrm{E}'')$, C^∞ sur $\mathbf{R}^{2(n-k+1)}$ est dans $\mathrm{S}^m\ (m \in \mathbf{R})$, si, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{M}_k$, il existe $\mathrm{C}_{\alpha\beta} > 0$ tel que

$$| \partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta f_z(y''', \eta''') | \leq \mathrm{C}_{\alpha\beta}\, \nu_k(z)^{m - |\alpha+\beta|} \tag{4.6}$$

pour tous $z \in \mathrm{E}''$ et $(y''', \eta''') \in \mathbf{R}^{2(n-k+1)}$. Si $a > 0$, on dira qu'une famille (f_z) est dans $\mathrm{S}^m(a)$ si f_z est définie seulement dans la boule $\mathrm{B}_z^k(a)$ de centre 0 et de rayon $a\,\nu_k(z)$, et si elle y vérifie les inégalités (4.6), avec des $C_{\alpha\beta}$ indépendants de z. On notera $S_o^m(a)$ l'ensemble des familles (f_z) dans S^m telles que le support de f_z soit dans $B_z^k(a)$.

Les coordonnées des applications symplectiques Φ_z^k construites au § 3 sont dans $S^1(a)$, où $a > 0$ est une constante indépendante de z. Rappelons que $\nu_k(z) \geqslant 1$. Etant donnée une telle famille Φ_z^k $(z \in E'')$ d'applications symplectiques, telles que $\Phi_z^k(0,0) = (0,0)$, on lui associe classiquement une famille U_z^k d'opérateurs intégraux de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{n-k+1})$ qui possèdent les propriétés suivantes :

1) Pour tout entier m, il existe $C_m > 0$, indépendant de $z \in E''$, tel que

$$\sum_{|\alpha+\beta| \leqslant m} \|y^\alpha D_y^\beta (U_z^k f)\| \leqslant C_m \sum_{|\alpha+\beta| \leqslant m} \|y^\alpha D_y^\beta f\| \tag{4.7}$$

pour tous $z \in E''$ et $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{n-k+1})$.

2) Il existe $b > 0$ tel que, pour toute famille (p_z) dans $S_0^0(b)$, on ait :

$$\|(U_z^k (U_z^k)^* - I)\, p_z(y, D) f\|^2 \leqslant C\, \nu_k(z)^{-2}\, \|f\| \tag{4.8}$$

pour tous $z \in E''$ et $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{n-k+1})$ (C est indépendant de z).

3) Pour toute famille (p_z) dans $S_0^0(b)$, on peut écrire :

$$(U_z^k)^*\, p_z(y, D)\, U_z^k = (p_z \circ \Phi_z^k)(y, D) + q_z(y, D) \tag{4.9}$$

où (q_z) est une famille dans S^{-2}. Si $b > 0$ est assez petit, remarquons que $(p_z \circ \Phi_z^k)$ est bien une famille dans S^0.

On peut considérer comme classique la construction des opérateurs U_z^k à partir des applications θ_z^k. On peut aussi considérer U_z^k comme un opérateur dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ n'agissant que sur les variables $y_k, \dots, y_n$. On définit une dilatation H_z^k dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ par

$$(H_z^k f)(y) = a_k(z)^{-1/2} f\left(y_1, \dots, y_{k-1}, \frac{y_k}{a_k(z)}, y_{k+1}, \dots, y_n\right). \tag{4.10}$$

Dans le cas II, on définit T_z^k par

$$T_z^k = T_z^{k-1} \circ U_z^k \circ H_z^k. \tag{4.11}$$

Le point G_k est immédiat à vérifier. Pour le point H_k, posons :

$$\widetilde{N}_z^k(f) = \sum_{|\alpha+\beta|\leqslant r+1} \left(\frac{M(z)}{\nu_k(z)}\right)^{|\alpha'''+\beta'''|} \|y^\alpha D_y^\beta f\| \qquad (4.12)$$

avec toujours $\alpha''' = (\alpha_k, \ldots, \alpha_n)$. Puisque $\nu_k(z) \geqslant M(z)$, on déduit de (4.7) l'inégalité suivante :

$$\widetilde{N}_z^k(U_z^k f) \leqslant C\,\widetilde{N}_z^k(f) \qquad \forall z \in E'' \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n). \quad (4.13)$$

De plus, on a évidemment :

$$N_z^{k-1}(f) \leqslant C\,\widetilde{N}_z^k(f) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{N}_z^k(H_z^k f) \leqslant C\,N_z^k(f) \quad (4.14)$$

et, par conséquent

$$N_z^{k-1}(U_z^k H_z^k f) \leqslant C\,N_z^k(f) \qquad \forall z \in E'' \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n). \quad (4.15)$$

Soit un entier j fixé. Tout ce qui suit resterait vrai si l'on remplaçait X_j par L_j. Nous allons maintenant démontrer les inégalités (4.4) et (4.5).

Soit $b > 0$ un paramètre que l'on choisira plus tard. Soit Ψ une fonction dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^{2(n-k+1)})$, à support dans la boule de rayon b. Posons, pour tout $(\alpha, \beta) \in M^{k-1}$

$$P_{\alpha\beta}(y''', \eta''') = \psi\left(\frac{y'''}{\nu_k}, \frac{\eta'''}{\nu_k}\right) \frac{1}{\alpha!\,\beta!}\,\partial_y^\alpha\,\partial_\eta^\beta\,(X_j \circ \theta_z^{k-1})(0, y''', 0, \eta''')$$

et
$$P(y, \eta) = \sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in M^{k-1}\\ |\alpha+\beta|\leqslant r}} P_{\alpha\beta}(y''', \eta''')\, y^\alpha \eta^\beta.$$

D'après le point B_{k-1} de la proposition 4, il existe $C > 0$, indépendant de z, tel que :

$$\|\sigma_z^{k-1}(X_j)f - P(y, D)f\| \leqslant C\,\widetilde{N}_z^k(f) \qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n), \qquad \forall z \in E''. \quad (4.16)$$

Si le paramètre b est choisi assez petit, on peut appliquer (4.8) et (4.9).

Posons :

$$Q(y, \eta) = \sum_{\substack{(\alpha \ \beta) \in M^{k-1} \\ |\alpha + \beta| \leqslant r}} (P_{\alpha\beta} \circ \Phi_z^k)(y_z''', \eta''') y^\alpha \eta^\beta .$$

En utilisant les majorations du symbole $P(y, \eta)$ fournies par le lemme 1, on déduit facilement de (4.8) et (4.9) le point suivant : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C(\epsilon) > 0$ tel qu'on ait :

$$\| P(y, D) U_z^k f \|^2 \leqslant (1 + \epsilon) \| Q(y, D) f \|^2 + C(\epsilon) \widetilde{N}_z^k (f)^2 \tag{4.17}$$

$$\| Q(y, D) f \|^2 \leqslant (1 + \epsilon) \| P(y, D) U_z^k f \|^2 + C(\epsilon) \widetilde{N}_z^k (f)^2 \tag{4.18}$$

pour tous $z \in E''$ et $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. On a évidemment :

$$\| Q(y, D) H_z^k f \| = \| (Q \circ h_z^k)(y, D) f \| . \tag{4.19}$$

D'après le point B_k de la proposition 4, il existe $C > 0$ tel que :

$$\| (Q \circ h_z^k)(y, D) f - \sigma_z^k (X_j) f \| \leqslant C\, N_z^k (f) \tag{4.20}$$

pour tous $z \in E''$ et $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. Les inégalités (4.4) et (4.5) se déduisent facilement de l'hypothèse de récurrence H_{k-1} et des inégalités (4.15) à (4.20). Les propositions 5 et 3, et par conséquent le théorème 1, sont démontrés.

5. Problèmes ouverts.

Soient $X_j(x, \xi, \lambda), (1 \leqslant j \leqslant 2p)$ des fonctions réelles comme dans l'introduction. Pour tout $r \geqslant 1$, soit $\mathscr{L}_r$ l'ensemble des systèmes $(Y_1, \ldots, Y_{2p})$ dans S_r tels que, pour tout $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$, il existe des suites (x_ν, ξ_ν) dans $\mathbf{R}^{2n}$, (λ_ν) et (t_ν) dans $\mathbf{R}^+$, pouvant dépendre de (x, ξ), qui vérifient les points a) et b) de la définition 1, et de plus : pour tout commutateur itéré Y_I des opérateurs $Y_1, \ldots, Y_{2p}$, on a

$$t_\nu^{|I|} X_I (x_\nu, \xi_\nu, \lambda_\nu) \longrightarrow i^{-1} Y_I (x, \xi)$$

où $Y_I(x, \xi)$ désigne le symbole du commutateur itéré et X_I le crochet de Poisson itéré des fonctions X_j qui correspond aux mêmes indices.

CONJECTURE 1. – *Soient* $r \geqslant 1$ *et* $C_0 > 0$. *On suppose que, pour tout système* $(Y_1, \ldots, Y_{2p})$ *dans* $\mathscr{L}_r$, *l'inégalité (2.3) est vérifiée, pour tout* $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. *Alors, pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\lambda_0(\epsilon) > 0$ *tel qu'on ait :*

$$\sum_{j=1}^{2p} \| X_j(\lambda) f \|^2 \leqslant (C_0 + \epsilon) \sum_{j=1}^{p} \| L_j(\lambda) f \|^2 + \epsilon \lambda^{2/r} \| f \|^2$$

pour tous $\lambda \geqslant \lambda_0(\epsilon)$ *et* $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$.

On peut énoncer l'hypothèse de cet éventuel théorème de manière plus simple en termes de représentations. L'hypothèse signifie que, pour tout $\ell \in \Gamma_r$, et pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{k(\ell)})$, l'inégalité (1.2) est vérifiée. L'équivalence de ces deux énoncés découle de la proposition 1.

Cette conjecture est démontrée lorsque $r \leqslant 2$, voir [11]. La preuve de la conjecture 1, combinée avec les arguments de [11] fournirait la synthèse des théorèmes classiques d'hypoellipticité mentionnés dans l'introduction, et leur extension aux systèmes surdéterminés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BEALS, P. GREINER, *Pseudodifferential operators associated to hyperplane bundles*, Preprint, 1982.

[2] P. BOLLEY, J. CAMUS, B. HELFFER, Remarques sur l'hypoellipticité, *C. R. A. S.*, 283 (1976), 979-982.

[3] P. BOLLEY, J. CAMUS, J. NOURRIGAT, La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudodifférentiels, *Comm. in P.D.E.*, (2) (1982), 197-221.

[4] L. BOUTET DE MONVEL, A. GRIGIS, B. HELFFER, Paramétrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples, *Astérisque*, 34-35 (1976).

[5] Y. EGOROV, Subelliptic operators, *Russian Math. Survey*, 30 (2) (1975), 59-118 et 30 (3) (1975), 55-105.

[6] C.L. FEFFERMAN, D.H. PHONG, The uncertainty principle and sharp Gärding inequality, *C.P.A.M.*, 34 (3) (1981), 285-331.

[7] G.B. FOLLAND, E.M. STEIN, Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group, *C.P.A.M.*, 27 (1974), 429-522.

[8] V.V. GRUSHIN, On a class of hypoelliptic operators, *Math. Sbornik*, 83 (125) (1970), 456-473.

[9] B. HELFFER, J. NOURRIGAT, Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes, invariants à gauche sur un groupe de Lie nilpotent gradué, *Comm. in P.D.E.*, 3 (8) (1978), 643-743, et 4 (8) (1979), 899-958.

[10] B. HELFFER, J. NOURRIGAT, Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs, *C.R.A.S.*, 289 (1979), 775-778.

[11] B. HELFFER, J. NOURRIGAT, Livre à paraître (Birkhauser) (même titre que [10]).

[12] L. HORMANDER, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.*, 119 (1967), 147-171.

[13] L. HORMANDER, Pseudodifferential operators and non elliptic boundary value problems, *Ann. of Math.*, 83 (1966), 129-269.

[14] L. HORMANDER, Hypoelliptic operators with double characteristics, *Math. Annalen*, 217 (2) (1975), 165-188.

[15] L. HORMANDER, Subelliptic operators, dans Seminar on singularities of solutions of linear partial differential equations, *Annals of Math. studies*, 91, Princeton, 1978.

[16] L. HORMANDER, Subelliptic test estimates, *C.P.A.M.*, 33 (3) (1980), 339-363.

[17] A. A. KIRILLOV, Unitary representations of nilpotent Lie groups, *Russian Math. Survey*, 17 (1962), 53-104.

[18] A. MELIN, Parametrix constructions for some classes of right invariant differential operators on the Heisenberg group, *Comm. in P.D.E.*, 6 (12) (1981), 1363-1405.

[19] A. MELIN, Parametrix constructions for right invariant differential operators on nilpotent groups, Preprint, 1981, To appear in *Annals of Global analysis and geometry.*

[20] A. MELIN, *Lie filtrations and pseudodifferential operators,* Preprint (1982).

[21] G. METIVIER, Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'opérateurs non elliptiques, *Comm. in P.D.E.*, 1 (1976), 467-519.

[22] K.G. MILLER, Parametrix for hypoelliptic operators on step two nilpotent Lie groups, *Comm. in P.D.E.*, 5 (11) (1980), 1153-1184.

[23] A. MOHAMED, Etude spectrale d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples, *Ann. Inst. Fourier*, 32 - 3 (1982), 39-90.

[24] J. NOURRIGAT, Hypoellipticité maximale pour le système de Cauchy-Riemann induit, *Sem. Goulaouic-Schwartz, 1981-82*, exposé X.

[25] C. ROCKLAND, Hypoellipticity on the Heisenberg group, representation theoretic criteria, *Trans. A.M.S.*, 240 (1978), 1-52.

[26] L.P. ROTHSCHILD, E.M. STEIN, Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, *Acta Math.*, 137 (1976), 247-320.

[27] L.P. ROTHSCHILD, A criterion for hypoellipticity of operators constructed form vector fields, *Comm. in P.D.E.*, 4 (6) (1979), 546-699.

[28] M. TAYLOR, *Non commutative microlocal analysis (I)*, Preprint, 1983.

[29] J. NOURRIGAT, *Réduction microlocale des systèmes d'opérateurs pseudo-différentiels*, Preprint (version initiale).

Manuscrit reçu le 1er octobre 1984
révisé le 19 avril 1985.

Jean NOURRIGAT,
Université de Rennes I
U.E.R. de Mathématiques & Informatique
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex.