ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

M. ENOCK
J. M. SCHWARTZ

Extension de la catégorie des algèbres de Kac

Annales de l'institut Fourier, tome 36, nº 1 (1986), p. 105-131
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_1_105_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 1 (1986), 105 - 131

EXTENSION DE LA CATÉGORIE DES ALGÈBRES DE KAC

par M. ENOCK & J.M. SCHWARTZ(*)

1. Introduction.

1.1 Soient G un groupe localement compact, λ_G la représentation régulière gauche de G sur l'espace hilbertien $L^2(G)$, $\mathfrak{M}(G)$ l'algèbre de von Neumann engendrée ; comme la représentation $\lambda_G \otimes \lambda_G$ est quasi-équivalente à λ_G, il existe un morphisme injectif de $\mathfrak{M}(G)$ dans $\mathfrak{M}(G) \otimes \mathfrak{M}(G)$, noté Γ^s_G, tel que $\Gamma^s_G(\lambda_G(x)) = \lambda_G(x) \otimes \lambda_G(x)$ pour tout x de G. On a trivialement : $(\Gamma^s_G \otimes i)\Gamma^s_G = (i \otimes \Gamma^s_G)\Gamma^s_G$. Une application Γ vérifiant une égalité semblable s'appelle un coproduit ; depuis les travaux de W.F. Stinespring [10], Γ^s_G joue un rôle central dans l'étude de la dualité des groupes localement compacts. Par transposition, on obtient un produit sur le prédual $\mathfrak{M}(G)_\star$, c'est-à-dire sur l'algèbre de Fourier A(G) définie par P. Eymard [7] et mise en dualité avec $\mathfrak{M}(G)$ par l'accouplement $\langle f, \lambda_G(x)\rangle = f(x^{-1})$, pour tous f de A(G) et x de G.

Suivant alors J. Ernest [6], on considère les algèbres de Hopf-von Neumann co-involutives :

1.2 Definition. – *Ce sont des triplets* (M, Γ, κ) *tels que :*

(i) M *soit une algèbre de von Neumann ;*

(ii) Γ *soit un morphisme normal injectif de* M *dans* $M \otimes M$ *et un coproduit ;*

(iii) κ *soit un antiautomorphisme involutif de* M *;*

(iv) *l'on ait :* $\varsigma\,\Gamma\,\kappa = (\kappa \otimes \kappa)\,\Gamma$.

(*) C.N.R.S., Unité associée n° 747

Mots-clés : Groupes localement compacts – Représentations – Algèbres de Kac – Algèbres de Fourier

Rappelons que si N_1 et N_2 désignent des algèbres de von Neumann, ς est l'isomorphisme de $N_1 \otimes N_2$ sur $N_2 \otimes N_1$ qui, pour tous x_1 de N_1 et x_2 de N_2, applique $x_1 \otimes x_2$ sur $x_2 \otimes x_1$.

De manière équivalente, cela revient à munir le prédual M_* d'une structure d'algèbre de Banach involutive.

1.3 DEFINITION. – *Soient* $(M_1, \Gamma_1, \kappa_1)$ *et* $(M_2, \Gamma_2, \kappa_2)$ *deux algèbres de Hopf-von Neumann co-involutives. On dira que le morphisme normal* α *de* M_1 *dans* M_2 *est un* $\mathcal{H}$*-morphisme si :*

(i) $\alpha(1) = 1$

(ii) $\Gamma_2 = (\alpha \otimes \alpha)\,\Gamma_1$

(iii) $\kappa_2 = \alpha\kappa_1$.

Cela entraîne que le transposé α_* *est un morphisme d'algèbres de Banach involutives de* M_{2*} *dans* M_{1*}.

1.4 On appelle algèbre de Kac un quadruplet $(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ où (M, Γ, κ) est une algèbre de Hopf-von Neumann co-involutive et φ un poids dit poids de Haar, sur M tel que :

(i) φ soit normal, semi-fini et fidèle ;

(ii) $\forall x \in M^+$ on ait $(i \otimes \varphi)\,\Gamma(x) = \varphi(x)\,.\,1$;

(iii) $\forall x, y \in M$ on ait $(i \otimes \varphi)\,((1 \otimes y^*)\,\Gamma(x))$

$$= ((i \otimes \varphi)\,(\Gamma(y^*)\,(1 \otimes x)))\,;$$

(i) $\forall t \in \mathbf{R}$ on ait $\kappa\sigma_t^\varphi = \sigma_{-t}^\varphi\kappa$.

Ces objets, ou des objets équivalents, ont été introduits indépendamment par les auteurs [4], [9] et par G.I. Kac et L.S. Vainerman [11], afin de rendre compte de la dualité des groupes localement compacts. A tout groupe localement compact G on peut en effet associer naturellement deux algèbres de Kac KS(G) et KA(G) dont les algèbres de von Neumann sous-jacentes sont respectivement $\mathcal{M}(G)$ et $L^\infty(G)$ (on se reportera à [4], 8.1.7).

1.5 Soit $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ une algèbre de Kac. On définit une représentation λ, dite représentation de Fourier, de l'algèbre de Banach involutive M_* sur l'espace hilbertien standard H_φ associé au poids φ. On sait alors munir l'algèbre de von Neumann engendrée $\hat{M}$ d'une structure d'algèbre de Kac, notée $\mathbf{K}\hat{} = (\hat{M}, \hat{\Gamma}, \hat{\kappa}, \hat{\varphi})$. On dit que $\mathbf{K}^\wedge$ est l'algèbre de Kac duale de $\mathbf{K}$. Cela est justifié par le fait que l'on a :

(i) $\mathbf{K}^{\wedge\wedge}$ est isomorphe à $\mathbf{K}$

(ii) $\mathrm{KA(G)}^\wedge$ est isomorphe à $\mathrm{KS(G)}$, elle-même isomorphe à $\mathrm{KA}(\hat{\mathrm{G}})$ dans le cas où G est abélien, $\hat{\mathrm{G}}$ désignant alors le groupe abélien dual.

1.6 Afin de munir la classe des algèbres de Kac d'une structure de catégorie, les auteurs ont introduit dans ([4], chap. 5 et 6) la notion de $\mathcal{K}$-morphisme.

1.7 DEFINITION : *Soient*

$$\mathbf{K}_1 = (\mathrm{M}_1 , \Gamma_1 , \kappa_1 , \varphi_1), \mathbf{K}_2 = (\mathrm{M}_2 , \Gamma_2 , \kappa_2 , \varphi_2)$$

deux algèbres de Kac. On dira que $u : \mathrm{M}_1 \longrightarrow \mathrm{M}_2$ *est un* $\mathcal{K}$*-morphisme si (voir* [9], *III.4)*

(i) *c'est un* $\mathcal{H}$*-morphisme de* $(\mathrm{M}_1 , \Gamma_1 , \kappa_1)$ *dans* $(\mathrm{M}_2 , \Gamma_2 , \kappa_2)$;

(ii) *la restriction de* φ_2 *à* $u(\mathrm{M}_1)$ *est semi-finie ;*

(iii) $u(\mathrm{M}_1)$ *est invariant par* $\sigma_t^{\varphi_2}$, *pour tout* t *de* $\mathbf{R}$.

1.8 Les conditions (ii) et (iii), techniquement indispensables pour obtenir une dualité des $\mathcal{K}$-morphismes, sont très restrictives, surtout (ii). Ainsi dans le cas des groupes, on n'obtient que les morphismes stricts à images ouvertes et noyaux compacts. Cela entraîne que, dans la situation des sous-groupes, on ne peut rendre compte que des sous-groupes ouverts, alors que le cas des sous-groupes fermés est fondamental, par exemple pour l'étude des représentations induites.

En s'affranchissant de la condition selon laquelle les morphismes doivent appliquer les algèbres de von Neumann sous-jacentes aux deux algèbres de Kac l'une dans l'autre, nous résolvons ce problème.

1.9 Considérons, en effet, l'algèbre de von Neumann enveloppante de l'algèbre de Banach involutive M_* ; on la note $\mathrm{W}^*(\mathbf{K})$. Grâce aux résultats de E. Kirchberg [8], les auteurs, en collaboration avec J. De Cannière, ont explicité une structure d'algèbre de Hopf-von Neumann co-involutive naturelle sur $\mathrm{W}^*(\mathbf{K})$ ([1], 2.15). Son prédual, noté $\mathrm{B}(\mathbf{K})$, l'algèbre de Fourier-Stieltjes associée à $\mathbf{K}$, devient alors une algèbre de Banach involutive.

Dans le cas des groupes, on trouve $B(KA(G)) = B(G)$ et $B(KS(G)) = M^1(G)$, algèbres qui avaient été largement étudiées et dont certaines similitudes avaient déjà été révélées ([7], [12]). Les résultats usuels se généralisent alors aux algèbres de Kac ; ainsi, d'une part, le fait bien connu que la représentation régulière gauche de G s'étend à $M^1(G)$, et, d'autre part, les théorèmes d'Eymard [7] sur la situation relative des algèbres $A(G)$, $B(G)$ et $L^\infty(G)$ apparaissent comme corollaires d'une unique proposition sur les algèbres de Kac : l'algèbre de Banach involutive $\hat{M}_\star$ se plonge injectivement, de manière canonique, dans $B(\mathbf{K})$; on note $A(\mathbf{K})$ son image, c'est un idéal autoadjoint fermé de $B(\mathbf{K})$; la représentation de Fourier $\hat{\lambda}$ se prolonge à $B(\mathbf{K})$ (elle engendre naturellement l'algèbre de von Neumann M) ([1], 3.6 et 3.7).

1.10 En utilisant les constructions rappelées en 1.9, nous atteignons dans cet article le but fixé en 1.8. Plus précisément, nous munissons la classe des algèbres de Kac d'une autre structure de catégorie en faisant appel à une classe plus vaste de flèches (les $\mathcal{HK}$-flèches) définie de façon "algébrique" :

1.11 DEFINITION. — *Soient* $\mathbf{K}_1$ *et* $\mathbf{K}_2$ *deux algèbres de Kac,* α *un* $\mathcal{H}$*-morphisme de* $W^\star(\hat{\mathbf{K}}_1)$ *dans* $W^\star(\hat{\mathbf{K}}_2)$. *On dira que* α *est une* $\mathcal{HK}$*-flèche de* $\mathbf{K}_1$ *dans* $\mathbf{K}_2$.

La catégorie ainsi construite est stable par dualité ; dans le cas des groupes les $\mathcal{HK}$-flèches se ramènent aux morphismes des groupes continus. Les principaux résultats sont concentrés dans les chapitres 4 et 5. Les chapitres 2 et 3 contiennent essentiellement la préparation technique.

1.12 Nous ferons un large usage des notations de la théorie des algèbres de Kac et des constructions liées, relatives à l'analyse harmonique des groupes localements compacts. On se reportera donc à [4], [9], [1].

Rappelons que $G(\mathbf{K})$ désigne le groupe intrinsèque de $\mathbf{K}$ ([9], I.10), W l'opérateur fondamental de $\mathbf{K}$ ([4],4.3.9).

Si μ désigne une représentation de l'algèbre de Banach involutive $M_\star$, on notera toujours $\mathfrak{H}_\mu$ l'espace hilbertien de cette représentation, A_μ l'algèbre de von Neumann engendrée, U_μ

son générateur ([1], 2.10), $\hat{\beta}_\mu$ le morphisme de $\hat{M}$ dans $\hat{M} \otimes A_\mu$ construit grâce à U_μ ([1],2.14). Si ν est une représentation de $\hat{M}_*$, on notera β_ν le morphisme de M dans $M \otimes A_\nu$ défini de manière analogue.

Si μ_1 et μ_2 sont deux représentations de M_*, $\mu_1 \times \mu_2$ désigne le produit de Kronecker de μ_1 et μ_2 ([1].1.5) ; c'est une représentation sur le produit tensoriel $\mathfrak{H}_{\mu_1} \otimes \mathfrak{H}_{\mu_2}$.

On notera π la représentation universelle de M_* dans $W^*(\mathbf{K})$ (et $\hat{\pi}$ celle de $\hat{M}_*$ dans $W^*(\hat{\mathbf{K}})$). Pour toute représentation μ de M_*, on notera s_μ l'application canonique de $W^*(\mathbf{K})$ dans A_μ telle que $s_\mu \circ \pi = \mu$. On a $s_\mu(1) = 1$ si et seulement si μ est non dégénérée (cf. [1], 2.1).

Enfin, rappelons que le coproduit de $W^*(\mathbf{K})$ est fourni par l'application $\varsigma s_{\pi \times \pi}$, et la coïnvolution par $s_{\check{\pi}}$ (où $\check{\pi}$ est l'antireprésentation définie par $\check{\pi}(\omega) = \pi(\omega \circ \kappa)$, pour tout ω de M_*) (cf. [1], 2.15).

2. Couplage de Heisenberg.

Soient G un groupe localement compact abélien, $G\hat{}$ son dual. On sait que G opère sur $L^2(G)$ par $\lambda(g)$ (translation à gauche, associée à g de G), et que $G\hat{}$ opère sur $L^2(G)$ par $\rho(\gamma)$ (multiplication par le caractère γ de $G\hat{}$). Les représentations λ et ρ sont reliées par la relation de commutation de Heisenberg :

$$\lambda(g)\,\rho(\gamma) = \langle g , \gamma \rangle\, \rho(\gamma)\, \lambda(g).$$

Dans [9], théorème 1.11, cette situation avait été généralisée au cas des groupes intrinsèques d'une algèbre de Kac $\mathbf{K}$ et de son dual $\mathbf{K}\hat{}$. Rappelons qu'un élément du groupe intrinsèque de $\mathbf{K}$ (resp. $\mathbf{K}\hat{}$) peut être considéré comme un caractère non nul de M_* (resp. $M\hat{}_*$).

Dans ce qui suit (2.2), on généralise cette relation de commutation aux cas de deux représentations, μ de M_* et ν de $M\hat{}_*$ de dimensions quelconques. On obtient un unitaire $V_{\nu,\mu}$ de $A_\nu \otimes A_\mu$, appelé couplage de Heisenberg des représentations μ et ν. On en démontre la multiplicativité (2.3), la symétrie (2.4) et le caractère fonctoriel (2.5). On retrouve le cas particulier des groupes localement compacts (2.7).

2.1 PROPOSITION. – *Soient* μ (resp. ν) *une représentation de* $M_\star$ (resp. $\hat{M}_\star$) *et* U_μ (resp. U_ν) *son générateur. (On a donc* $U_\mu \in A_\mu \otimes M$ *et* $U_\nu \in A_\nu \otimes \hat{M}$). *Alors, on trouve :*

$$(i \otimes \hat{\beta}_\mu)(U_\nu)(i \otimes \varsigma)(U_\nu^\star \otimes 1) = (1 \otimes U_\mu)(\varsigma \otimes i)(i \otimes \beta_\nu)(U_\mu^\star).$$

Démonstration. – Soient x dans $\hat{M}$ et y dans M ; comme, d'après [1], 2.14, on a, par définition :

$$\hat{\beta}_\mu(x) = U_\mu(1 \otimes x)\, U_\mu^\star$$

et

$$\beta_\nu(y) = U_\nu(1 \otimes y)\, U_\nu^\star,$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}(i \otimes \hat{\beta}_\mu)(U_\nu)(i \otimes \varsigma)(U_\nu^\star \otimes 1) &= \\ &= (1 \otimes U_\mu)(\varsigma \otimes i)(1 \otimes U_\nu)(1 \otimes U_\mu^\star)(i \otimes \varsigma)(U_\nu^\star \otimes 1) \\ &= (1 \otimes U_\mu)(\varsigma \otimes i)((1 \otimes U_\nu)(\varsigma \otimes i)(1 \otimes U_\mu^\star)(1 \otimes U_\nu^\star)) \\ &= (1 \otimes U_\mu)(\varsigma \otimes i)(i \otimes \beta_\nu)(U_\mu^\star)\end{aligned}$$

d'où le résultat.

2.2 COROLLAIRE et DEFINITION. – *Avec les hypothèses précédentes, il existe un unitaire, noté* $V_{\nu,\mu}$, *de* $A_\nu \otimes A_\mu$ *tel que :*

$$(i \otimes \hat{\beta}_\mu)(U_\nu)(i \otimes \varsigma)(U_\nu^\star \otimes 1) = V_{\nu,\mu} \otimes 1.$$

On dira que $V_{\nu,\mu}$ *est le couplage de Heisenberg des représentations* μ *et* ν.

Démonstration. – Par définition de $\hat{\beta}_\mu$, l'unitaire

$$(i \otimes \hat{\beta}_\mu)(U_\nu)(i \otimes \varsigma)(U_\nu^\star \otimes 1)$$

appartient à $A_\nu \otimes A_\mu \otimes \hat{M}$; il résulte de 2.1 qu'il appartient aussi à $A_\nu \otimes A_\mu \otimes M$. Il résulte alors de [9], 1.4 qu'il appartient à $A_\nu \otimes A_\mu \otimes \mathbf{C}$, d'où le résultat.

2.3 PROPOSITION. – *Soient* μ_1 *et* μ_2 *deux représentations de* $M_\star$, ν *une représentation de* $\hat{M}_\star$. *Avec les notations précédentes, on a :*

$$V_{\nu,\mu_1 \times \mu_2} = (i \otimes \varsigma)(V_{\nu,\mu_2} \otimes 1)(V_{\nu,\mu_1} \otimes 1).$$

Démonstration. – Par définition, on a :

$$V_{\nu,\mu_1\times\mu_2}\otimes 1 = (i\otimes\hat\beta_{\mu_1\times\mu_2})(U_\nu)(i\otimes(i\otimes\varsigma)(\varsigma\otimes i))(U_\nu^\star\otimes 1\otimes 1)$$
$$= (i\otimes\varsigma\otimes i)((i\otimes i\otimes\hat\beta_{\mu_1})(i\otimes\hat\beta_{\mu_2})(U_\nu))(i\otimes i\otimes\varsigma)$$
$$(i\otimes\varsigma\otimes i)(U_\nu^\star\otimes 1\otimes 1) \quad \text{d'après [5], 1.5.}$$

Or, nous avons, par ailleurs :

$$(i\otimes i\otimes\hat\beta_{\mu_1})(i\otimes\hat\beta_{\mu_2})(U_\nu) =$$
$$= (i\otimes i\otimes\hat\beta_{\mu_1})((V_{\nu,\mu_2}\otimes 1)(i\otimes\varsigma)(U_\nu\otimes 1)) \quad \text{d'après 2.2}$$
$$= (V_{\nu,\mu_2}\otimes 1\otimes 1)(\varsigma\otimes i\otimes i)(1\otimes(i\otimes\hat\beta_{\mu_1})(U_\nu))$$
$$= (V_{\nu,\mu_2}\otimes 1\otimes 1)(\varsigma\otimes i\otimes i)((1\otimes V_{\nu,\mu_1}\otimes 1)(1\otimes(i\otimes\varsigma)(U_\nu\otimes 1)))$$
$$\text{d'après 2.2}$$
$$= (V_{\nu,\mu_2}\otimes 1\otimes 1)(\varsigma\otimes i\otimes i)(1\otimes V_{\nu,\mu_1}\otimes 1)(\varsigma\otimes i\otimes i)(i\otimes i\otimes\varsigma)$$
$$(1\otimes U_\nu\otimes 1).$$

On en déduit que :

$$V_{\nu,\mu_1\times\mu_2}\otimes 1 =$$
$$= (i\otimes\varsigma\otimes i)((V_{\nu,\mu_2}\otimes 1\otimes 1)(\varsigma\otimes i\otimes i)(1\otimes V_{\nu,\mu_1}\otimes 1)(\varsigma\otimes i\otimes i)$$
$$(i\otimes i\otimes\varsigma)(1\otimes U_\nu\otimes 1))(i\otimes i\otimes\varsigma)(i\otimes\varsigma\otimes i)(U_\nu^\star\otimes 1\otimes 1)$$
$$= ((i\otimes\varsigma)(V_{\nu,\mu_2}\otimes 1)\otimes 1)(V_{\nu,\mu_1}\otimes 1\otimes 1) \quad \text{d'où le résultat.}$$

2.4 Proposition. – *Avec les notations de 2.1, soit* $\hat V_{\nu,\mu}$ *le couplage de Heisenberg des représentations* ν *et* μ *(l'algèbre de Kac de référence étant alors* $\mathbf{K}\hat{}$*). On a :*

$$\hat V_{\mu,\nu} = \varsigma\, V_{\nu,\mu}^\star\, .$$

Démonstration. – On a, par définition :

$$\hat V_{\mu,\nu}\otimes 1 = (i\otimes\beta_\nu)(U_\mu)(i\otimes\varsigma)(U_\mu^\star\otimes 1)$$
$$= ((i\otimes\varsigma)(U_\mu\otimes 1)(i\otimes\beta_\nu)(U_\mu^\star))^\star$$
$$= (\varsigma\otimes i)((1\otimes U_\mu)(\varsigma\otimes i)(i\otimes\beta_\nu)(U_\mu^\star))^\star$$
$$= (\varsigma\otimes i)(V_{\nu,\mu}\otimes 1)^\star \quad \text{d'après 2.1 et 2.2}$$

d'où le résultat.

2.5 Proposition. – *Soient* μ, μ_1, μ_2 *des représentations non dégénérées de* $M_\star$, ν *une représentation de* $\hat M_\star$.

(i) *Si* t *est un opérateur d'entrelacement entre* μ_1 *et* μ_2, *on a :*

$$(1 \otimes t)V_{\nu,\mu_1} = V_{\nu,\mu_2}(1 \otimes t)$$

(ii) *Si* Φ *est un morphisme normal de* A_{μ_1} *dans* A_{μ_2}, *tel que* $\Phi(1) = 1$ *et* $\Phi\mu_1 = \mu_2$, *on a :*

$$(i \otimes \Phi)V_{\nu,\mu_1} = V_{\nu,\mu_2}$$

(iii) *En particulier, on a* $(i \otimes s_\mu)(V_{\nu,\pi}) = V_{\nu,\mu}$.

Démonstration. – La preuve de (i) résulte immédiatement de [5], 1.9, celle de (ii) de [5], 1.2 (ii) ; (iii) résulte de (ii) et de [1], 2.1.

2.6 COROLLAIRES. – (i) *Soient* u *dans le groupe intrinsèque de* $\mathbf{K}$ ([9], 1.10) *et* ρ_u *la représentation de dimension* 1 *de* $M_\star$ *associée. Le générateur de* ρ_u *s'identifie à* u, *et pour deux éléments* u_1 *et* u_2 *du groupe intrinsèque, on vérifie sans peine que* $\rho_{u_1 u_2} = \rho_{u_1} \times \rho_{u_2}$. *Soit alors* ν *une représentation de* $\hat{M}_\star$, *par définition, l'unitaire* V_{ν,ρ_u} *appartient à* A_ν ; *de plus, on aura :*

$$\begin{aligned} V_{\nu,\rho_{u_1 u_2}} &= V_{\nu,\rho_{u_1} \times \rho_{u_2}} \\ &= V_{\nu,\rho_{u_1}} V_{\nu,\rho_{u_2}} \qquad \textit{d'après 2.3.} \end{aligned}$$

Il en résulte que l'application $u \longrightarrow V_{\nu,\rho_u}$ *est une représentation unitaire du groupe* $G(\mathbf{K})$ *dans* A_ν ; *on aura donc en particulier* $V_{\nu,\rho_1} = 1$. *Remarquons de plus que* $\hat{V}_{\rho_u,\nu} = V^\star_{\nu,\rho_u} = V_{\nu,\rho_{u^{-1}}}$.

(ii) *Soient* u *dans le groupe intrinsèque de* $\mathbf{K}$ *et* v *dans le groupe intrinsèque de* $\mathbf{K}\hat{}$. *L'unitaire* V_{ρ_v,ρ_u} *est alors un nombre complexe de module* 1. *On trouve, d'après la définition* [9], 1.11 *et* [1], 2.14 (v) *que :*

$$\begin{aligned} V_{\rho_v,\rho_u} &= \beta_u(v)v^\star \\ &= uvu^\star v^\star \\ &= \chi(u, v) . 1 . \end{aligned}$$

On en déduit que $V_{\rho_v,\rho_u} = \chi(u, v)$. *On voit ainsi que le couplage défini en 2.2 généralise la notion introduite en* ([9], I.11), *ce qui justifie la terminologie.*

(iii) *Soient* λ *la représentation de Fourier de* $M_\star$, ν *une* *représentation de* $\hat{\mathrm{M}}_{\star}$. *L'unitaire* $\mathrm{V}_{\nu,\lambda}$ *appartient donc à* $\mathrm{A}_\nu \otimes \hat{\mathrm{M}}$ *; de plus, par définition :*

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_{\nu,\lambda} \otimes 1 &= (i \otimes \hat{\beta}_\lambda)(\mathrm{U}_\nu)(i \otimes \varsigma)(\mathrm{U}_\nu^\star \otimes 1)\\ &= (i \otimes \hat{\Gamma})(\mathrm{U}_\nu)(i \otimes \varsigma)(\mathrm{U}_\nu^\star \otimes 1) \quad \textit{d'après } [1],\ 2.14\ (\mathrm{iv})\\ &= \mathrm{U}_\nu \otimes 1 \qquad \textit{d'après } [1],\ 2.10 \textit{ et } [3],\ 1.6\ (\mathrm{ii}).\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{V}_{\nu,\lambda}$ *est égal au générateur de* ν. *En particulier, on en déduit, pour* v *dans* $\mathrm{G}(\hat{\mathbf{K}})$: $\mathrm{V}_{\rho_v,\lambda} = v$.

Et on déduit de [1], 2.11 (ii) *que* $\mathrm{V}_{\hat{\lambda},\lambda}$ *est égal à l'unitaire fondamental* W. *Enfin, d'après ce qui précède et* 2.5 (iii), *on trouve :* $(i \otimes s_\lambda)(\mathrm{V}_{\nu,\pi}) = \mathrm{U}_\nu$.

2.7 *Cas particulier.* – Si $\mathbf{K} = \mathrm{KA}(\mathrm{G})$, l'algèbre de von Neumann sous-jacente M est égale à $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{G})$, le prédual $\mathrm{M}_\star$ s'identifie à l'algèbre de Banach involutive $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$, l'algèbre de von Neumann $\hat{\mathrm{M}}$ est l'algèbre $\mathcal{M}(\mathrm{G})$ engendrée par la représentation régulière gauche λ_G de G, et son prédual s'identifie canoniquement à l'algèbre de Fourier A(G) ([4], 8.1.7).

Le groupe intrinsèque $\mathrm{G}(\hat{\mathbf{K}})$ est égal au groupe des unitaires $\{\lambda_\mathrm{G}(s), s \in \mathrm{G}\}$; on vérifie facilement que $\beta_{\lambda_\mathrm{G}(s)}$ est l'automorphisme de $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{G})$ qui, à une fonction f, fait correspondre sa translatée à gauche par s^{-1}, notée ${}_{s^{-1}}f$.

A toute représentation μ de $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$, on peut associer une représentation de G qu'on notera encore μ. Le générateur de μ, qui est un unitaire de $\mathrm{A}_\mu \otimes \mathrm{L}^\infty(\mathrm{G})$, peut être identifié à la fonction continue bornée de G dans A_μ qui, à un élément s de G, associe $\mu(s)$ ([1], 4.2). On en déduit aisément que le couplage de Heisenberg $\mathrm{V}_{\mu,\rho_{\lambda(s)}}$ est égal à $\mu(s)$.

Si ν est une représentation de A(G), on peut lui associer une mesure spectrale P_ν sur G, à valeurs dans $\mathfrak{H}_\nu$, telle que pour toute fonction f de A(G), on ait :

$$\nu(f) = \int_\mathrm{G} f(s)\, d\mathrm{P}_\nu(s).$$

On vérifie alors facilement que $\mathrm{V}_{\nu,\mu} = \int_\mathrm{G} \mu(s)\, d\mathrm{P}_\nu(s)$;

on voit en particulier que $\mathrm{W}_\mathrm{G} = \int_\mathrm{G} \lambda(s)\, d\mathrm{P}_{\hat{\lambda}}(s)$.

3. Prolongement des représentations aux algèbres de Fourier-Stieltjes.

Dans [1], à toute algèbre de Kac, on a associé son algèbre de Fourier-Stieltjes. C'est une algèbre de Banach involutive qui, dans le cas des groupes localement compacts, s'identifie soit à $B(G)$ (au sens de [7]), soit à $M^1(G)$.

On sait que les représentations de $L^1(G)$ se prolongent canoniquement à $M^1(G)$; grâce à [7], il en est de même pour $A(G)$ et $B(G)$. Nous démontrons dans ce chapitre que cette propriété est vraie dans le cadre général des algèbres de Kac (3.1).

3.1 THEOREME. – *Soit* ν *une représentation non dégénérée de* $\hat{M}_\star$. *Pour tout* θ *de* $B(\mathbf{K})$ *on pose :*

$$\overline{\nu}(\theta) = (i \otimes \theta)(V_{\nu,\pi})$$

où π *désigne la représentation universelle de* $M_\star$.

Alors $\overline{\nu}$ *est l'unique représentation de* $B(\mathbf{K})$ *sur* $\mathfrak{H}_\nu$ *non dégénérée, telle que* $\overline{\nu}(s_\lambda)_\star = \nu$.

Si on identifie $\hat{M}_\star$ *à* $A(\mathbf{K}) = (s_\lambda)_\star(\hat{M}_\star)$, *(cf. [1], 3.2 (ii)),* $\overline{\nu}$ *prolonge* ν.

Démonstration. – Soient θ_1 *et* θ_2 *dans* $B(\mathbf{K})^+$, *de norme* 1. *On a :*

$$\begin{aligned}
\overline{\nu}(\theta_1 \star \theta_2) &= (i \otimes \theta_2 \otimes \theta_1)(i \otimes s_{\pi\times\pi})(V_{\nu,\pi}) && \textit{d'après [1], 2.16}\\
&= (i \otimes \theta_2 \otimes \theta_1)(V_{\nu,\pi\times\pi}) && \textit{d'après 2.6 (ii)}\\
&= (i \otimes \theta_2 \otimes \theta_1)(i \otimes \varsigma)(V_{\nu,\pi} \otimes 1)(V_{\nu,\pi} \otimes 1) && \textit{d'après 2.3}\\
&= (i \otimes \theta_1)(V_{\nu,\pi}(i \otimes \theta_2 \otimes i)(V_{\nu,\pi} \otimes 1))\\
&= (i \otimes \theta_1)(V_{\nu,\pi}(\overline{\nu}(\theta_2) \otimes 1))\\
&= \overline{\nu}(\theta_1)\,\overline{\nu}(\theta_2)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les propriétés d'espérance conditionnelle de $i \otimes \theta_2 \otimes i$ et $i \otimes \theta_1$. Par linéarité, on en déduit la multiplicativité de $\overline{\nu}$. Soit $\hat{\omega}$ dans $\hat{M}_\star$. On a :

$$\begin{aligned}
\overline{\nu}(s_\lambda)_\star(\hat{\omega}) &= (i \otimes (s_\lambda)_\star(\hat{\omega}))(V_{\nu,\pi}) \\
&= (i \otimes \hat{\omega})(i \otimes s_\lambda)(V_{\nu,\pi}) \\
&= (i \otimes \hat{\omega})(U_\nu) && \text{d'après 2.6 (iii)} \\
&= \nu(\hat{\omega}) && \text{par définition de } U.
\end{aligned}$$

On sait ([1], 3.6) que A(K) est un idéal bilatère de B(K). La restriction de $\overline{\nu}$ à A(K) étant une représentation non dégénérée, il est facile d'en déduire que $\overline{\nu}$ est involutive et non dégénérée.

L'unicité de la représentation $\overline{\nu}$ se démontre encore en utilisant le fait que A(K) est un idéal de B(K). Soit ν' un autre prolongement, on aura, pour tout θ de B(K) et $\hat{\omega}$ de A(K) :

$$\begin{aligned}
\nu'(\theta)\,\nu(\hat{\omega}) &= \nu'(\theta \star (s_\lambda)_\star(\hat{\omega})) \\
&= \overline{\nu}(\theta \star (s_\lambda)_\star(\hat{\omega})) && \text{par hypothèse} \\
&= \overline{\nu}(\theta)\,\nu(\hat{\omega})
\end{aligned}$$

d'où le résultat, car ν est non dégénérée.

3.2 *Remarque.* – Le prolongement à B(K) de la représentation $\hat{\lambda}$ est la représentation de Fourier $\kappa\pi_\star$ définie en [1], 3.7.

3.3 *Cas particulier.* – (i) Si $K = KA(G)$, l'algèbre B(K) s'identifie à l'algèbre de Fourier-Stieltjes B(G) ([1], 4.4). De plus, avec les notations de 2.7, il est clair que, pour tout f de B(G), on a :

$$\overline{\nu}(f) = \int_G f(s)\, dP_\nu(s).$$

(ii) Si $K = KS(G)$, $\hat{M}_\star$ s'identifie à $L^1(G)$ et B(K) à l'algèbre de Banach involutive $\hat{M}^1(G)$ (cf. [4], 8.1.7 et [1], 4.7). A toute représentation ν de $L^1(G)$ on associe une représentation de G, notée encore ν telle que pour tout f de $L^1(G)$ on ait $\nu(f) = \int_G f(s)\,\nu(s)\,ds$. Il est alors clair que pour toute mesure μ de $M^1(G)$ on aura :

$$\overline{\nu}(\mu) = \int_G \nu(s)\, d\mu(s).$$

3.4 PROPOSITION. – *Soient* π (resp. $\hat{\pi}$) *la représentation universelle de* M_* (resp. $\hat{M}_*$), $\bar{\pi}$ (resp. $\bar{\hat{\pi}}$) *son prolongement à* $B(\mathbf{K}^\wedge)$ (resp. $B(\mathbf{K})$) *au sens de 3.1,* $\bar{\pi}_*$ (resp. $\bar{\hat{\pi}}_*$) *l'application transposée de cette dernière. On a :*

(i) $s_{\check{\pi}}\, \bar{\hat{\pi}}_* = \bar{\pi}$;

(ii) *les représentations* $\bar{\pi}$ *et* $\bar{\hat{\pi}}$ *sont fidèles ;*

(iii) $s_\lambda\, \bar{\pi} = \hat{\kappa}\, \hat{\pi}_*$.

Démonstration. – Soit θ dans $B(\mathbf{K})$, par définition de $\bar{\hat{\pi}}$, et avec les notations de [1], 2.15, on a, pour tout $\hat{\theta}$ dans $B(\mathbf{K}^\wedge)$:

$$\begin{aligned}
\langle s_{\check{\pi}}\, \bar{\hat{\pi}}_*(\hat{\theta}) , \theta \rangle &= \langle \hat{\theta} , \bar{\hat{\pi}}(\theta \circ s_{\check{\pi}}) \rangle \\
&= \langle \hat{\theta} , \bar{\hat{\pi}}(\theta^\circ \circ s_{\check{\pi}})^* \rangle \\
&= \langle \hat{\theta} , (i \otimes \theta^\circ \circ s_{\check{\pi}})\, (V_{\hat{\pi},\pi})^* \rangle && \text{d'après 3.1} \\
&= \langle \hat{\theta} , (i \otimes \theta)\, (V^*_{\hat{\pi},\pi}) \rangle && \text{d'après [4], 1.2.2.1} \\
&= \langle \theta \otimes \hat{\theta} , \hat{V}_{\pi,\hat{\pi}} \rangle && \text{d'après 2.4} \\
&= \langle \bar{\pi}(\hat{\theta}) , \theta \rangle && \text{d'après 3.1}
\end{aligned}$$

d'où (i).

En transposant l'égalité de 3.1 on trouve :

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_* &= s_\lambda\, (\bar{\hat{\pi}})_* \\
&= s_\lambda\, s_{\check{\pi}}\, \bar{\pi} && \text{d'après (i) ;}
\end{aligned}$$

comme, d'après [1], 2.5 $\hat{\pi}_*$ est fidèle, on en déduit (ii).

En reprenant l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}
\hat{\kappa}\, \hat{\pi}_* &= \hat{\kappa}\, s_\lambda\, (\bar{\hat{\pi}})_* \\
&= s_\lambda\, s_{\check{\pi}}\, (\bar{\hat{\pi}})_* && \text{d'après [1], 2.16} \\
&= s_\lambda\, \bar{\pi} && \text{d'après (i), ce qui achève la démonstration.}
\end{aligned}$$

4. Les $\mathcal{HK}$-flèches.

Ce chapitre contient les résultats essentiels. On y définit cette nouvelle classe de morphismes : les $\mathcal{HK}$-flèches (4.1). On construit alors la dualité dans la nouvelle catégorie (4.2 et 4.3).

Enfin, dans le cas particulier des groupes localement compacts, on explicite (4.4) une correspondance biunivoque entre les morphismes continus d'un groupe G_1 dans un autre groupe G_2 et les $\mathcal{H}$-morphismes de $W^\star(G_1)$ dans $W^\star(G_2)$. Plus précisément, les algèbres de Kac abéliennes (resp. symétriques) sont une catégorie duale (resp. équivalente) à la catégorie usuelle des groupes localement compacts. En particulier, on voit ici que les $\mathcal{H}\mathcal{K}$-flèches répondent au souci de fournir les "bons" morphismes entre algèbres de Kac.

4.1 DEFINITION. – *Soient* $\mathbf{K}_1$ *et* $\mathbf{K}_2$ *deux algèbres de Kac. On appellera* $\mathcal{H}\mathcal{K}$*-flèche de* $\mathbf{K}_1$ *dans* $\mathbf{K}_2$ *un* $\mathcal{H}$*-morphisme* α *de* $W^\star(\hat{\mathbf{K}_1})$ *dans* $W^\star(\hat{\mathbf{K}_2})$.

En transposant, on obtient un morphisme $\alpha_\star$ d'algèbres de Banach involutives de $B(\hat{\mathbf{K}_2})$ dans $B(\hat{\mathbf{K}_1})$.

La classe des algèbres de Kac, munie des $\mathcal{H}\mathcal{K}$-flèches se trouve ainsi pourvue d'une structure de catégorie. On la notera $\mathcal{H}\mathcal{K}$.

4.2 THEOREME (dualité des $\mathcal{H}\mathcal{K}$-flèches). – *Avec les notations précédentes, il existe un unique morphisme normal* $\hat{\alpha}$ *de* $W^\star(\mathbf{K}_2)$ *dans* $W^\star(\mathbf{K}_1)$ *tel que :*

$$\hat{\alpha}\overline{\pi}_2 = \overline{\pi}_1\, \alpha_\star$$

ou encore, de façon équivalente, tel que :

$$(\alpha \otimes i)\,(V_{\hat{\pi}_1, \pi_1}) = (i \otimes \hat{\alpha})\,(V_{\hat{\pi}_2, \pi_2}).$$

De plus $\hat{\alpha}$ *est une* $\mathcal{H}\mathcal{K}$*-flèche de* $\mathbf{K}_{\hat{2}}$ *dans* $\mathbf{K}_{\hat{1}}$. *En itérant le procédé, on trouve :* $\alpha^{\hat{}\,\hat{}} = \alpha$. *On dira que* $\hat{\alpha}$ *est la* $\mathcal{H}\mathcal{K}$*-flèche duale de* α.

Démonstration. – Soit ω_2 dans $M_{2\star}$. D'après 3.1, on a :

$$\begin{aligned}\overline{\pi}_1\, \alpha_\star(s_{\hat{\lambda}_2})_\star\,(\omega_2) &= (i \otimes \alpha_\star(s_{\hat{\lambda}_2})_\star\, \omega_2)\,(V_{\pi_1, \hat{\pi}_1})\\ &= (i \otimes \omega_2)\,(i \otimes s_{\hat{\lambda}_2})\,(i \otimes \alpha)\,(V_{\pi_1, \hat{\pi}_1}).\end{aligned}$$

Comme $\alpha(1) = 1$ et $s_{\hat{\lambda}_2}(1) = 1$, l'opérateur $(i \otimes s_{\hat{\lambda}_2})\,(i \otimes \alpha)(V_{\pi_1, \hat{\pi}_1})$ est un unitaire de $W^\star(\mathbf{K}_1) \otimes M_2$ et, d'après [1], 2.9 (i), est un

$1_{\mathbf{K}_2}^{W^\star(\mathbf{K}_1)}$-cocycle ; il en résulte, grâce à [1], 2.10 que la représentation $\overline{\pi}_1\, \alpha_\star (s_{\hat{\lambda}_2})_\star$ est non dégénérée. Posons donc $\hat{\alpha} = s_{\overline{\pi}_1 \alpha_\star (s_{\hat{\lambda}_2})_\star}$ (cela implique $\hat{\alpha}(1) = 1$). Autrement dit, par définition de $\hat{\alpha}$, le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}_{2\star} \arrow[r, "(s_{\hat{\lambda}_2})_\star"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \mathrm{B}(\check{\mathbf{K}}_2) \arrow[r, "\alpha_\star"] & \mathrm{B}(\check{\mathbf{K}}_1) \arrow[r, "\overline{\pi}_1"] & \mathrm{W}^\star(\mathbf{K}_1) \arrow[dll, "\hat{\alpha}"] \\
& \mathrm{W}^\star(\mathbf{K}_2) & &
\end{tikzcd}$$

On aura :

$$\hat{\alpha}\, \overline{\pi}_2 (s_{\hat{\lambda}_2})_\star (\omega_2) = \hat{\alpha}\, \pi_2 (\omega_2) \qquad \text{d'après 3.1}$$

$$= \overline{\pi}_1\, \alpha_\star (s_{\hat{\lambda}_2})_\star (\omega_2)$$

par définition de $\hat{\alpha}$. On en déduit que $\hat{\alpha}\overline{\pi}_2$ et $\overline{\pi}_1\, \alpha_\star$ coïncident sur $\mathrm{A}(\check{\mathbf{K}}_2)$; comme $\mathrm{A}(\check{\mathbf{K}}_2)$ est un idéal de $\mathrm{B}(\check{\mathbf{K}}_2)$ et que la restriction de $\overline{\pi}_1\, \alpha_\star$ à $\mathrm{A}(\check{\mathbf{K}}_2)$ est non dégénérée, on obtient facilement :

$$\hat{\alpha}\, \overline{\pi}_2 = \overline{\pi}_1\, \alpha_\star . \qquad (\star)$$

Par définition de $\overline{\pi}_1$ et $\overline{\pi}_2$ l'égalité $(\star)$ peut aussi s'écrire, de manière équivalente :

$$\hat{\alpha}((i \otimes \theta)(\mathrm{V}_{\pi_2, \hat{\pi}_2})) = (i \otimes \theta \circ \alpha)(\mathrm{V}_{\pi_1, \hat{\pi}_1}) \qquad \forall \theta \in \mathrm{B}(\hat{\mathbf{K}}_2)$$

ce qui équivaut encore à :

$$(\hat{\alpha} \otimes i)(\mathrm{V}_{\pi_2, \hat{\pi}_2}) = (i \otimes \alpha)(\mathrm{V}_{\pi_1, \hat{\pi}_1})$$

ou encore, grâce à 2.4 :

$$(i \otimes \hat{\alpha})(\hat{\mathrm{V}}_{\hat{\pi}_2, \pi_2}) = (\alpha \otimes i)(\hat{\mathrm{V}}_{\hat{\pi}_1, \pi_1}) . \qquad (\star\star)$$

Soit β un morphisme normal de $\mathrm{W}^\star(\mathbf{K}_2)$ dans $\mathrm{W}^\star(\mathbf{K}_1)$ tel que $\beta \overline{\pi}_2 = \overline{\pi}_1\, \alpha_\star$. On a, pour tout ω_2 de $\mathrm{M}_{2\star}$:

$$\begin{aligned}\beta\pi_2(\omega_2) &= \beta\overline{\pi}_2\,(s_{\hat{\lambda}_2})_\star\,(\omega_2) && \text{d'après 3.1}\\ &= \overline{\pi}_1\,\alpha_\star\,(s_{\hat{\lambda}_2})_\star\,(\omega_2) && \text{par hypothèse}\\ &= \hat{\alpha}\,\overline{\pi}_2\,(s_{\hat{\lambda}_2})_\star\,(\omega_2) && \text{par définition}\\ &= \hat{\alpha}\,\pi_2(\omega_2) && \text{d'après 3.1}\end{aligned}$$

d'où $\beta = \hat{\alpha}$ et l'unicité annoncée.

Soient $\hat{\alpha}_\star$ la transposée de $\hat{\alpha}$ et $\hat{\theta}_1$ dans $B(\mathbf{K}_1)$. On a :

$$\begin{aligned}\overline{\hat{\pi}}_1(\hat{\alpha}_\star(\hat{\theta}_1)) &= (i\otimes\hat{\alpha}_\star\,\hat{\theta}_1)\,(\hat{V}_{\hat{\pi}_2,\pi_2}) && \text{d'après 3.1}\\ &= (i\otimes\hat{\theta}_1)\,(i\otimes\hat{\alpha})\,(\hat{V}_{\hat{\pi}_2,\pi_2})\\ &= (i\otimes\hat{\theta}_1)\,(\alpha\otimes i)\,(\hat{V}_{\hat{\pi}_1,\pi_1}) && \text{d'après } (\star\star)\\ &= \alpha(i\otimes\hat{\theta}_1)\,(\hat{V}_{\hat{\pi}_1,\pi_1})\\ &= \alpha\,\overline{\hat{\pi}}_1\,(\hat{\theta}_1) && \text{d'après 3.1}\end{aligned}$$

On a donc $\overline{\hat{\pi}}_2\,\hat{\alpha}_\star = \alpha\,\overline{\hat{\pi}}_1$, comme, d'après 3.4 (ii) $\overline{\hat{\pi}}_2$ est fidèle, on en conclut que, comme $\alpha\,\overline{\hat{\pi}}_1$, $\hat{\alpha}_\star$ est un morphisme d'algèbres involutives, en transposant et en rappelant que $\hat{\alpha}(1) = 1$, on en déduit que $\hat{\alpha}$ est une $\mathcal{HK}$-flèche.

Il est clair, enfin, d'après ($\star\star$), que $\alpha^{\wedge\wedge} = \alpha$, ce qui achève la démonstration.

4.3 THEOREME. — *La correspondance qui, à toute algèbre de Kac associe l'algèbre de Kac duale et à toute $\mathcal{HK}$-flèche la $\mathcal{HK}$-flèche duale, est un foncteur de dualité de $\mathcal{HK}$ dans elle-même. On le notera* D.

Démonstration. — Soient $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ et $\mathbf{K}_3$ trois algèbres de Kac, α une $\mathcal{HK}$-flèche de $\mathbf{K}_1$ dans $\mathbf{K}_2$ et β une $\mathcal{HK}$-flèche de $\mathbf{K}_2$ dans $\mathbf{K}_3$. On considère la $\mathcal{HK}$-flèche $\beta\alpha$ de $\mathbf{K}_1$ dans $\mathbf{K}_3$, on a, en faisant un usage répété de 4.2 ($\star\star$) :

$$\begin{aligned}(\beta\alpha\otimes i)\,(V_{\hat{\pi}_1,\pi_1}) &= (\beta\otimes i)\,(i\otimes\hat{\alpha})\,(V_{\hat{\pi}_2,\pi_2})\\ &= (i\otimes\hat{\alpha})\,(\beta\otimes i)\,(V_{\hat{\pi}_2,\pi_2})\\ &= (i\otimes\hat{\alpha}\hat{\beta})\,(V_{\hat{\pi}_3,\pi_3}).\end{aligned}$$

On en déduit $(\beta\alpha)^\wedge = \hat{\alpha}\hat{\beta}$, ce qui, compte tenu des résultats connus, achève la démonstration. Nous verrons plus bas (5.9) que la notation D est cohérente avec la dualité de $\mathcal{K}$.

4.4 THEOREME. – *Soient* G_1 *et* G_2 *deux groupes localement compacts,* m *un morphisme continu de* G_1 *dans* G_2. *Alors :*

(i) *Il existe une unique* $\mathcal{H}\mathcal{K}$*-flèche, notée* $\mathrm{HKA}(m)$ *de* $\mathrm{KA}(G_2)$ *dans* $\mathrm{KA}(G_1)$ *(c'est-à-dire, ici, un* $\mathcal{H}$*-morphisme de* $M^1(G_2)^\star$ *dans* $M^1(G_1)^\star$*) dont la transposée (qui est un morphisme d'algèbres de Banach involutives) est l'application de* $M^1(G_1)$ *dans* $M^1(G_2)$ *qui à toute mesure* μ *de* $M^1(G_1)$ *fait correspondre son image par* m.

(ii) *Il existe une unique* $\mathcal{H}\mathcal{K}$*-flèche, notée* $\mathrm{HKS}(m)$, *de* $\mathrm{KS}(G_1)$ *dans* $\mathrm{KS}(G_2)$ *(c'est-à-dire un* $\mathcal{H}$*-morphisme de* $W^\star(G_1)$ *dans* $W^\star(G_2)$*) tel que :* $\mathrm{HKS}(m)\pi_1(s) = \pi_2(m(s))$ *pour tout* s *de* G *où* π_1 *et* π_2 *sont les représentations universelles de* G_1 *et* G_2.

(iii) *Notons* $\mathcal{H}\mathcal{K}\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{H}\mathcal{K}\mathcal{S}$) *la sous-catégorie pleine de* $\mathcal{H}\mathcal{K}$ *composée des algèbres de Kac abéliennes (resp. symétriques). L'application qui à tout groupe localement compact* G *fait correspondre l'algèbre de Kac* $\mathrm{KA}(G)$) (resp. $\mathrm{KS}(G)$) *et qui à tout morphisme continu des groupes* m *fait correspondre la* $\mathcal{H}\mathcal{K}$*-flèche* $\mathrm{HKA}(m)$ (resp. $\mathrm{HKS}(m)$) *est une dualité (resp. une équivalence) entre la catégorie des groupes localement compacts, munie des morphismes continus, et la catégorie* $\mathcal{H}\mathcal{K}\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{H}\mathcal{K}\mathcal{S}$) *; on la notera* HKA (resp. HKS).

(iv) *On a :* $\mathrm{HKS} = \mathrm{D} \circ \mathrm{HKA}$.

Démonstration. – L'application $s \longrightarrow \pi_2(m(s))$ est une représentation continue de G_1 dans $W^\star(G_2)$; il existe donc un morphisme normal, qu'on notera $\mathrm{HKS}(m)$ de $W^\star(G_1)$ dans $W^\star(G_2)$ tel que : $\mathrm{HKS}(m)\pi_1(s) = \pi_2(m(s))$ pour tout s de G. En particulier, on a $\mathrm{HKS}(m)(1) = 1$; en se reportant à [1], 4.9 on vérifie immédiatement que $\mathrm{HKS}(m)$ est un $\mathcal{H}$-morphisme, l'unicité est évidente, d'où (ii).

La transposée de la $\mathcal{H}\mathcal{K}$-flèche duale $(\mathrm{HKS}(m)\hat{\ })_\star$ est un morphisme d'algèbres de Banach involutives de $M^1(G_1)$ dans $M^1(G_2)$, tel que, d'après 4.2 on ait, pour tout μ de $M^1(G_1)$:

$$\overline{\pi}_2((\mathrm{HKS}(m)\hat{\ })_\star(\mu)) = \mathrm{HKS}(m)(\overline{\pi}_1(\mu))$$
$$= \int_{G_1} \pi_2(m(s))\, d\mu(s)$$

on en déduit immédiatement que $(\mathrm{HKS}(m)\hat{\ })_\star(\mu)$ est la mesure image $m(\mu)$; à partir de cette égalité, en transposant et passant au dual, l'unicité de (ii) entraîne l'unicité de cette $\mathcal{HK}$-flèche $\mathrm{HKA}(m)$, d'où (i).

Soit β une $\mathcal{HK}$-flèche de $\mathrm{KS}(G_1)$ dans $\mathrm{KS}(G_2)$. Il est clair que β appliquera le groupe intrinsèque de $W^\star(G_1)$ dans le groupe intrinsèque de $W^\star(G_2)$ (cf. [1], 2.17).

Comme, d'après [6] ou [1], 4.10, ces groupes sont isomorphes et homéomorphes respectivement à G_1 et G_2, il existe un morphisme continu m de G_1 dans G_2 tel que, pour tout s de G_1, on ait $\pi_1(s) = \pi_2(m(s))$; autrement dit tel que $\beta = \mathrm{HKS}(m)$.

Comme toute algèbre de Kac symétrique est de la forme $\mathrm{KS}(G)$ on voit que HKS est une équivalence entre la catégorie des groupes localement compacts et $\mathcal{HKS}$. La fin de (iii) et (iv) s'obtiennent immédiatement.

4.5 *Remarque.* – Avec les notations précédentes, identifions $B(\mathrm{KA}(G_i))$ à $B(G_i)$ pour $i = 1, 2$. Alors pour tout f de $B(G_2)$, on vérifie facilement que : $\mathrm{HKS}(m)_\star(f) = f \circ m$.

5. Extension des $\mathcal{K}$-morphismes.

On traite ici (5.4 et 5.10) du lien avec les $\mathcal{K}$-morphismes définis en [4]; ces derniers apparaissent comme un cas particulier dont on donne une caractérisation algébrique. Plus généralement, tout $\mathcal{H}$-morphisme entre deux algèbres de Kac est aussi un cas particulier de $\mathcal{HK}$-flèche (5.2 et 5.6).

On remarquera que cela comprend le cas particulier de l'injection $\mathfrak{M}(H) \longrightarrow \mathfrak{M}(G)$, où H désigne un sous-groupe fermé du groupe localement compact G. Ceci peut laisser espérer une utilisation de cette théorie pour rendre compte des représentations induites.

5.1 LEMME. – *Soient* K_1 *et* K_2 *deux algèbres de Kac,* δ *un* $\mathcal{H}$*-morphisme de* $(M_1, \Gamma_1, \kappa_1)$ *dans* $(M_2, \Gamma_2, \kappa_2)$, μ *une représentation non dégénérée de* $M_{1\star}$. *Alors* $\mu\delta_\star$ *est une représentation non dégénérée de* $M_{2\star}$ *dans* A_μ, *dont le générateur est égal à* $(i \otimes \delta)(U_\mu)$.

Démonstration. – Soit ω_2 dans $M_{2\star}$. Par définition du générateur U_μ, on a :

$$\begin{aligned}\mu\,\delta_\star(\omega_2) &= (i \otimes \omega_2\,\delta)(U_\mu)\\ &= (i \otimes \omega_2)(i \otimes \delta)(U_\mu).\end{aligned}$$

Comme $\delta(1) = 1$ l'opérateur $(i \otimes \delta)(U_\mu)$ est un unitaire de $A_\mu \otimes M_2$; d'après [1], 2.9 c'est un $1_{\mathsf{K}_2}^{A_\mu}$-cocycle ; alors, grâce à [1], 2.10 on voit que $\mu\,\delta_\star$ est une représentation non dégénérée dont $(i \otimes \delta)(U_\mu)$ est le générateur.

5.2 THEOREME. – *Soient* K_1 *et* K_2 *deux algèbres de Kac,* δ *un* $\mathcal{H}$*-morphisme de* $(M_1, \Gamma_1, \kappa_1)$ *dans* $(M_2, \Gamma_2, \kappa_2)$, $\delta_\star$ *le morphisme d'algèbres de Banach involutives de* $M_{2\star}$ *dans* $M_{1\star}$ *obtenu en transposant* δ, $W^\star(\delta_\star)$ *l'homomorphisme de* $W^\star(\mathsf{K}_2)$ *dans* $W^\star(\mathsf{K}_1)$ *obtenu en appliquant le foncteur* $W^\star$ *à* $\delta_\star$ *(i.e. tel que* $W^\star(\delta_\star)\,\pi_2 = \pi_1\,\delta_\star$) ; *alors :*

(i) $W^\star(\delta_\star)$ *est une* $\mathcal{HK}$*-flèche de* $\hat{\mathsf{K}}_2$ *dans* $\hat{\mathsf{K}}_1$.

(ii) *Le morphisme d'algèbres involutives* $W^\star(\delta_\star)_\star$ *de* $B(\mathsf{K}_1)$ *dans* $B(\mathsf{K}_2)$, *obtenue en transposant* $W^\star(\delta_\star)$, *est l'unique morphisme d'espaces de Banach qui rende commutatif le diagramme ci-dessous :*

$$\begin{array}{ccc} B(\mathsf{K}_1) & \xrightarrow{\;W^\star(\delta_\star)_\star\;} & B(\mathsf{K}_2)\\ {\scriptstyle \kappa_1\pi_{1\star}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_2\pi_{2\star}}\\ M_1 & \xrightarrow{\;\delta\;} & M_2 \end{array}$$

où π_i *désigne la représentation universelle de* $M_{i\star}$ *et* $\kappa_i\pi_{i\star}$ *la représentation de Fourier de* $B(\mathsf{K}_i)$ *au sens de* [1], *3.7* $(i = 1, 2)$.

(iii) *L'application* $W^\star(\delta_\star)\hat{}$ *est l'unique* $\mathcal{HK}$*-flèche de* K_1 *dans* K_2 *qui rende commutatif le diagramme ci-après :*

$$\begin{tikzcd} W^\star(K_1^\wedge) \arrow[r, "W^\star(\delta_\star)^\wedge"] \arrow[d, "s_{\hat\lambda_1}"'] & W^\star(K_2^\wedge) \arrow[d, "s_{\hat\lambda_2}"] \\ M_1 \arrow[r, "\delta"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Démonstration. – Par définition, $W^\star(\delta_\star)$ est un morphisme normal de $W^\star(K_2)$ dans $W^\star(K_1)$ tel que :

$$W^\star(\delta_\star)\,\pi_2 = \pi_1\,\delta_\star . \qquad (\star)$$

Comme, d'après 5.1, $\pi_1\,\delta_\star$ est non dégénérée, on trouve $W^\star(\delta_\star)(1) = 1$. En transposant $(\star)$, on obtient :

$$\pi_{2\star}\,W^\star(\delta_\star)_\star = \delta\,\pi_{1\star} .$$

On en déduit :

$$\kappa_2\,\pi_{2\star}\,W^\star(\delta_\star)_\star = \delta\,\kappa_1\,\pi_{1\star} \qquad \text{par hypothèse.}$$

Comme, d'après [1], 3.7 $\kappa_2\,\pi_{2\star}$ est fidèle, on en déduit l'unicité de $W^\star(\delta_\star)_\star$; on montre, de même, que $W^\star(\delta_\star)_\star$ est un morphisme d'algèbres de Banach involutives ; en transposant, on montre enfin que $W^\star(\delta_\star)$ est une $\mathcal{HK}$-flèche, d'où (i) et (ii).

Soit $\hat\omega_1$ dans $\hat M_{1\star}$. On a :

$$\begin{aligned}
s_{\hat\lambda_2}\,W^\star(\delta_\star)^\wedge\hat\pi_1(\hat\omega_1) &= s_{\hat\lambda_2}\,W^\star(\delta_\star)^\wedge\bar{\hat\pi}_1\,(s_{\lambda_1})_\star(\hat\omega_1) && \text{d'après 3.1}\\
&= s_{\hat\lambda_2}\,\bar{\hat\pi}_2\,W^\star(\delta_\star)_\star\,(s_{\lambda_1})_\star(\hat\omega_1) && \text{d'après 4.2}\\
&= \kappa_2\,\pi_{2\star}\,W^\star(\delta_\star)_\star\,(s_{\lambda_1})_\star(\hat\omega_1) && \text{d'après 3.4(iii)}\\
&= \delta\,\kappa_1\,\pi_{1\star}(s_{\lambda_1})_\star(\hat\omega_1) && \text{d'après (ii)}\\
&= \delta\,\hat\lambda_1\,(\hat\omega_1) && \text{d'après [1], 3.7(i)}\\
&= \delta\,s_{\hat\lambda_1}\,\hat\pi_1(\hat\omega_1).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$s_{\hat\lambda_2}\,W^\star(\delta_\star)^\wedge = \delta\,s_{\hat\lambda_1} .$$

Réciproquement, soit α une $\mathcal{HK}$-flèche de K_1 dans K_2 telle que $s_{\hat\lambda_2}\,\alpha = \delta\,s_{\hat\lambda_1}$; en transposant, cela s'écrit

$$\alpha_\star(s_{\hat\lambda_2})_\star = (s_{\hat\lambda_1})_\star\,\delta_\star = (W^\star(\delta_\star)^\wedge)_\star\,(s_{\hat\lambda_2})_\star .$$

On en déduit que $\alpha_\star$ et $(W^\star(\delta_\star)^\wedge)$ coïncident sur $A(K_2^\wedge)$;

comme $A(\mathbf{K}_2^{\hat{}})$ est un idéal de $B(\mathbf{K}_2^{\hat{}})$ et que la restriction de $(W^\star(\delta_\star)^{\hat{}})_\star$ est non dégénérée, on obtient l'unicité, d'où (iii).

5.3 DÉFINITION. – *Avec les notations précédentes, on dira que la* $\mathcal{HK}$*-flèche* $W^\star(\delta_\star)^{\hat{}}$ *de* $\mathbf{K}_1$ *dans* $\mathbf{K}_2$ *est l'extension du* $\mathcal{H}$*-morphisme* δ *; on le notera* $\overline{\delta}$.

On appellera coextension de δ la $\mathcal{HK}$-flèche duale $W^\star(\delta_\star)$ de $\hat{\mathbf{K}}_2$ dans $\hat{\mathbf{K}}_1$.

Le $\mathcal{H}$-morphisme δ étant donné, les $\mathcal{HK}$-flèches $\overline{\delta}$ et $\overline{\delta}^{\hat{}}$ sont respectivement caractérisées par les égalités :

$$s_{\hat{\lambda}_2}\,\overline{\delta} = \delta s_{\hat{\lambda}_1}$$
$$\overline{\delta}^{\hat{}}\,\pi_2 = \pi_1\,\delta_\star\,.$$

5.4 PROPOSITION. – (i) *L'application qui, à toute algèbre de Kac, associe elle-même, et à tout* $\mathcal{K}$*-morphisme associe son extension est un foncteur covariant de* $\mathcal{K}$ *dans* $\mathcal{HK}$.

(ii) *Ce foncteur met les isomorphismes de* $\mathcal{K}$ *et* $\mathcal{HK}$ *en bijection.*

Démonstration. – La preuve de (i) est immédiate. Si u est un $\mathcal{K}$-isomorphisme de $\mathbf{K}_1$ sur $\mathbf{K}_2$, on vérifie aisément que $\overline{u}$ et $\overline{u^{-1}}$ sont des $\mathcal{HK}$-flèches inverses l'une de l'autre. Réciproquement, soit α un $\mathcal{HK}$-isomorphisme de $\mathbf{K}_1$ sur $\mathbf{K}_2$, c'est-à-dire un $\mathcal{H}$-isomorphisme de $W^\star(\mathbf{K}_1^{\hat{}})$ sur $W^\star(\mathbf{K}_2^{\hat{}})$, il résulte de [2], 3.13 qu'il existe un $\mathcal{K}$-isomorphisme v de $\mathbf{K}_2^{\hat{}}$ sur $\mathbf{K}_1^{\hat{}}$ tel que $\alpha = \overline{v}$, d'où (ii).

5.5 *Remarque.* – Si G_1 et G_2 désignent deux groupes localement compacts, et m un morphisme strict de G_1 dans G_2, à image ouverte et noyau compact, on vérifie aisément que l'extension de $\mathcal{K}$-morphisme $KA(m)$ (resp. $KS(m)$) (cf. [4], 8.1.4) est la $\mathcal{HK}$-flèche $HKA(m)$ (resp.$HKS(m)$) définie en 4.4.

5.6 PROPOSITION. – *Soit* α *une* $\mathcal{HK}$*-flèche de* $\mathbf{K}_1$ *dans* $\mathbf{K}_2$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La représentation de* $\hat{M}_{1*}$ *dans* M_2 *définie par* $s_{\hat{\lambda}_2}\alpha\hat{\pi}_1$ *est quasi-équivalente à une sous-représentation de la représentation de Fourier* $\hat{\lambda}_1$ *;*

(ii) *Il existe un* $\mathcal{H}$*-morphisme* δ *de* $(M_1, \Gamma_1, \kappa_1)$ *dans* $(M_2, \Gamma_2, \kappa_2)$ *tel que* α *soit l'extension de* δ *(i.e. tel que* $\alpha = \bar{\delta}$*). Le* $\mathcal{H}$ *morphisme* δ *est alors unique.*

Démonstration. – Supposons (i) ; cela signifie qu'il existe un morphisme normal δ de M_1 dans M_2 tel que $\delta(1) = 1$ et :

$$\begin{aligned} s_{\hat{\lambda}_2}\alpha\hat{\pi}_1 &= \delta\hat{\lambda}_1 \\ &= \delta s_{\hat{\lambda}_1}\hat{\pi}_1 \end{aligned}$$

d'où :

$$s_{\hat{\lambda}_2}\alpha = \delta s_{\hat{\lambda}_1}.$$

Grâce à [1], 2.16 on vérifie facilement que δ est un $\mathcal{H}$-morphisme, l'usage des 5.2, (iii) permet d'obtenir (ii).

Supposons (ii) ; d'après 5.2, (iii) et 5.3 cela implique

$$s_{\hat{\lambda}_2}\alpha = \delta s_{\hat{\lambda}_1}$$

d'où

$$s_{\hat{\lambda}_2}\alpha\hat{\pi}_1 = \delta\hat{\lambda}_1, \text{ c'est-à-dire (i).}$$

5.7 PROPOSITION. – *Soit* α *une* $\mathcal{H}\mathcal{K}$*-flèche de* $\mathbf{K}_1$ *dans* $\mathbf{K}_2$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La représentation de* M_{2*} *dans* $\hat{M}_1$ *définie par* $\hat{\kappa}_1\hat{\pi}_{1*}\alpha_*(s_{\hat{\lambda}_2})_*$ *est quasi-équivalente à une sous-représentation de la représentation de Fourier* λ_2 *;*

(ii) *Il existe un* $\mathcal{H}$*-morphisme* δ *de* $(\hat{M}_2, \hat{\Gamma}_2, \hat{\kappa}_2)$ *dans* $(\hat{M}_1, \hat{\Gamma}_1, \hat{\kappa}_1)$ *tel que* α *soit la coextension de* δ *(i.e. tel que* $\alpha = \bar{\delta}\hat{\ }$*). Le* $\mathcal{H}$*-morphisme* δ *est alors unique.*

Démonstration. – Supposons (i) ; cela signifie qu'il existe un morphisme normal δ de $\hat{M}_2$ dans $\hat{M}_1$, tel que $\delta(1) = 1$, et

$$\begin{aligned}
\delta \lambda_2 &= \hat{\kappa}_1 \, \hat{\pi}_{1*} \, \alpha_* \, (s_{\hat{\lambda}_2})_* & \\
&= s_{\hat{\lambda}_1} \, \overline{\pi}_1 \, \alpha_* \, (s_{\hat{\lambda}_2})_* & \text{d'après 3.4 (iii)} \\
&= s_{\lambda_1} \, \hat{\alpha} \, \overline{\pi}_2 \, (s_{\hat{\lambda}_2})_* & \text{d'après 4.2} \\
&= s_{\lambda_1} \, \hat{\alpha} \, \pi_2 & \text{d'après 3.1.}
\end{aligned}$$

Grâce à 5.6, on voit alors que δ est un $\mathcal{H}$-morphisme de $(\hat{M}_2, \hat{\Gamma}_2, \hat{\kappa}_2)$ dans $(\hat{M}_1, \hat{\Gamma}_1, \hat{\kappa}_1)$ tel que $\hat{\alpha} = \overline{\delta}$; d'où (ii).

Supposons (ii). D'après 5.2 (ii), on a :

$$\hat{\kappa}_1 \, \hat{\pi}_{1*} \, \alpha_* = \delta \, \hat{\kappa}_2 \, \hat{\pi}_{2*}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\hat{\kappa}_1 \, \hat{\pi}_{1*} \, \alpha_* \, (s_{\hat{\lambda}_2}) &= \delta \, \hat{\kappa}_2 \, \hat{\pi}_{2*} \, (s_{\hat{\lambda}_2})_* & \\
&= \delta \, \lambda_2 & \text{d'après [1], 3.7}
\end{aligned}$$

d'où (i).

5.8 LEMME. – *Soient* $\mathbf{K}_1$ *et* $\mathbf{K}_2$ *deux algèbres de Kac,* δ (resp. γ) *un* $\mathcal{H}$*-morphisme de* $\mathbf{K}_1$ *dans* $\mathbf{K}_2$ (resp. $\hat{\mathbf{K}}_2$ *dans* $\hat{\mathbf{K}}_1$) *tels que l'on ait :*

$$\gamma \lambda_2 = \lambda_1 \, \delta_* . \qquad (\star)$$

Alors δ *et* γ *sont des* $\mathcal{K}$*-morphismes et* $\hat{\delta} = \gamma$.

Démonstration. – En transposant $(\star)$ on obtient successivement, par équivalence :

$$\begin{aligned}
\delta \, \lambda_{1*} &= \lambda_{2*} \, \gamma_* & \\
\kappa_2 \, \delta \, \lambda_{1*} &= \kappa_2 \, \lambda_{2*} \, \gamma_* & \\
\delta \, \kappa_1 \, \lambda_{1*} &= \kappa_2 \, \lambda_{2*} \, \gamma_* & \text{par hypothèse} \\
\delta \, \hat{\lambda}_1 &= \hat{\lambda}_2 \, \gamma_* & \text{d'après [4], 4.1.4(b).} \quad (\star\star)
\end{aligned}$$

Supposons que δ soit surjectif, il résulte de [9], 1.1.1.4) que c'est un $\mathcal{K}$-morphisme, alors grâce à [4], 6.2.4 et $(\star)$ on obtient le résultat. Supposons que δ soit injectif, il résulte alors de $(\star\star)$ que γ_* est injectif, cela implique que γ est surjectif et ramène par dualité au cas précédent.

Dans le cas général, grâce à [4], 5.1.4 et 5.2.3, on peut décomposer δ de la façon suivante :

Soit $1 - R$ le projecteur du centre de M_1 qui engendre Ker δ, l'algèbre réduite M_{1R} peut être canoniquement munie d'une structure d'algèbre de Kac et la réduction $r : M_1 \longrightarrow M_{1R}$ est un $\mathcal{K}$-morphisme. Soit alors j l'injection canonique de M_{1R} dans M_2, on a : $\delta = j \circ r$. Il est clair que j est un $\mathcal{K}$-morphisme.

Soit $\hat{\lambda}_{1R}$ la représentation de Fourier de $M_{1R}\hat{}$. Comme r est un $\mathcal{K}$-morphisme surjectif, $\hat{r}$ est un $\mathcal{K}$-morphisme injectif de $(\mathbf{K}_{1R})\hat{}$ dans $\mathbf{K}_1\hat{}$ (cf. [4], 6.3.3 (a)). D'après [4], 5.4.3 (e), on peut donc identifier $(\mathbf{K}_{1R})\hat{}$ à $\hat{r}((\mathbf{K}_{1R})\hat{})$ qui est une sous-algèbre de Kac de $\mathbf{K}_1\hat{}$. Soient $\tilde{\varphi}$ le poids de Haar sur cette sous-algèbre de Kac et $\tilde{I}$ l'injection canonique de $H_{\tilde{\varphi}}$ dans $H_{\hat{\varphi}_1}$. Pour tous γ et α de $H_{\tilde{\varphi}}$, en utilisant [4], 5.3.2 (g), on trouve $\omega_{\gamma,\alpha} = \hat{r}_*(\omega_{\tilde{I}\gamma,\tilde{I}\alpha})$; on en déduit que $\hat{r}_*$ est surjectif.

On a, par définition de $r\hat{}\,\hat{} = r$:

$$\begin{aligned} j\hat{\lambda}_{1R}\,\hat{r}_* &= jr\hat{\lambda}_1 \\ &= \delta\hat{\lambda}_1 \end{aligned}$$

d'où, d'après (★★) :

$$j\hat{\lambda}_{1R}\,\hat{r}_* = \hat{\lambda}_2\,\gamma_*. \tag{★★★}$$

Il en résulte, par transposition que :

$$\hat{r}\,\hat{\lambda}_{1R*}\,j_* = \gamma\,\hat{\lambda}_{2*}$$

comme $\hat{r}$ est un homomorphisme injectif d'algèbres de von Neumann, on en déduit, pour tout ω_2 de M_{2*} :

$$\begin{aligned} \|\hat{\lambda}_{1R*}\,j_*\,(\omega_2)\| &= \|\hat{r}\,\hat{\lambda}_{1R*}\,j_*\,(\omega_2)\| \\ &= \|\gamma\,\hat{\lambda}_{2*}\,(\omega_2)\|. \end{aligned} \tag{★★★★}$$

Soit $\hat{\omega}_1$ dans $\hat{M}_{1*}$. On a, grâce au théorème de Kaplanski :

$\|\gamma_*\,(\hat{\omega}_1)\| =$

$= \sup\{|\langle\gamma_*(\hat{\omega}_1), \hat{\lambda}_{2*}(\omega_2)\rangle|, \omega_2 \in M_{2*}, \|\hat{\lambda}_{2*}(\omega_2)\| \leqslant 1\}$

$= \sup\{|\langle\hat{\lambda}_2\,(\gamma_*(\hat{\omega}_1)), \omega_2\rangle|, \omega_2 \in M_{2*}, \|\hat{\lambda}_{2*}(\omega_2)\| \leqslant 1\}$

$= \sup\{|\langle j\hat{\lambda}_{1R}\,\hat{r}_*(\hat{\omega}_1), \omega_2\rangle|, \omega_2 \in M_{2*}, \|\hat{\lambda}_{2*}(\omega_2)\| \leqslant 1\}$ d'après (★★★)

$= \sup\{|\langle\hat{r}_*(\hat{\omega}_1), \hat{\lambda}_{1R*}j_*(\omega_2)\rangle|, \omega_2 \in M_{2*}, \|\hat{\lambda}_{2*}(\omega_2)\| \leqslant 1\}$

$\leqslant \|\hat{r}_*\,(\hat{\omega}_1)\| \sup\{\|\hat{\lambda}_{1R*}\,j_*\,(\omega_2)\|, \omega_2 \in M_{2*}, \|\hat{\lambda}_{2*}(\omega_2)\| \leqslant 1\}$

$\leqslant \|\hat{r}_*\,(\hat{\omega}_1)\|$ d'après (★★★★).

Comme $\hat{r}_\star$ est surjective, on peut alors définir une application linéaire continue ϵ de $\hat{\mathrm{M}}_{1\mathrm{R}\star}$ dans $\hat{\mathrm{M}}_{2\mathrm{R}\star}$ telle que $\epsilon\hat{r}_\star = \gamma_\star$. Il est aisé de prouver qu'il s'agit d'un morphisme d'algèbres de Banach involutives.

Par transposition on obtient un $\mathcal{H}$-morphisme $\epsilon^\star$ tel que : $\hat{r}\epsilon^\star = \gamma$.

Comme $\hat{r}$ est injectif, on voit que $\epsilon^\star(1) = 1$, de plus, il résulte du calcul ci-dessus que :

$$j\hat{\lambda}_{1\mathrm{R}} = \hat{\lambda}_2\,\epsilon$$

comme j est injectif, cela implique qu'il en est de même de ϵ qui, d'après le second cas particulier ci-dessus, est donc un $\mathcal{K}$-morphisme de $\mathbf{K}_2\hat{}$ dans $\mathbf{K}_{1\mathrm{R}}\hat{}$; en composant avec $\hat{r}$ on voit que $\epsilon\hat{r} = \delta$ est un $\mathcal{K}$-morphisme et qu'il résulte de ($\star$) et [4], 6.2.2 que γ est le $\mathcal{K}$-morphisme dual de δ, ce qui achève la démonstration.

5.9 THEOREME. – *Soient* $\mathbf{K}_1$ *et* $\mathbf{K}_2$ *deux algèbres de Kac,* α *un* $\mathcal{K}$*-morphisme de* $\mathbf{K}_1$ *dans* $\mathbf{K}_2$, $\overline{\alpha}$ *et* $\overline{\alpha}\hat{}$ *l'extension et la coextension de* α *au sens de 5.3. Alors* $\overline{\alpha}\hat{}$ *est l'extension du* $\mathcal{K}$*-morphisme dual* $\hat{\alpha}$ *; autrement dit :* $\overline{\alpha}\hat{} = \overline{\hat{\alpha}}$.

Cela justifie le maintien de la notation D pour le foncteur de dualité sur $\mathcal{H}\mathcal{K}$

Démonstration. – On a : $\hat{\alpha} s_{\lambda_2}\pi_2 = \hat{\alpha}\lambda_2$

$$\begin{aligned} &= \lambda_1\,\alpha_\star && \text{d'après [4],6.2.2} \\ &= s_{\lambda_1}\pi_1\,\alpha_\star && \\ &= s_{\lambda_1}\overline{\alpha}\hat{}\,\pi_2 && \text{d'après 5.2(ii) }(\star). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\hat{\alpha} s_{\lambda_2} = s_{\lambda_1}\overline{\alpha}\hat{}$$

d'où le résultat, grâce à 5.2(iii).

5.10 THEOREME. – *Soient* $\mathbf{K}_1$ *et* $\mathbf{K}_2$ *deux algèbres de Kac. Une* $\mathcal{H}\mathcal{K}$*-flèche* α *de* $\mathbf{K}_1$ *dans* $\mathbf{K}_2$ *est l'extension d'un* $\mathcal{K}$*-morphisme de* $\mathbf{K}_1$ *dans* $\mathbf{K}_2$ *si et seulement si* α *est à la fois une extension et une coextension de* $\mathcal{H}$*-morphisme.*

Démonstration. – La nécessité résulte de 5.9. Supposons qu'il existe un $\mathcal{H}$-morphisme δ (resp. γ) de $\mathbf{K}_1$ dans $\mathbf{K}_2$ (resp. $\mathbf{K}_2$ dans $\mathbf{K}_1$) tel que l'on ait : $\alpha = \overline{\delta}$ (resp. $\alpha = \overline{\gamma}\hat{}$). On a :

$$\begin{aligned} \lambda_1\, \delta_\star &= s_{\lambda_1}\, \pi_1\, \delta_\star & \\ &= s_{\lambda_1}\, \overline{\delta}\hat{}\, \pi_2 & \text{d'après 5.2(ii) } (\star) \\ &= s_{\lambda_1}\, \hat{\alpha}\pi_2 & \text{par hypothèse} \\ &= s_{\lambda_1}\, \overline{\gamma}\pi_2 & \text{par hypothèse} \\ &= \gamma s_{\lambda_2}\, \pi_2 & \text{d'après 5.2(iii)} \\ &= \gamma\, \lambda_2 & \end{aligned}$$

alors, 5.8 permet de conclure.

5.11 *Remarque.* – Il résulte des théorèmes précédents que l'on peut désormais considérer $\mathcal{K}$ comme une sous-catégorie de $\mathcal{H}\mathcal{K}$, stable par dualité.

5.12 PROPOSITION. – *Soient* G_1 *et* G_2 *deux groupes localement compacts,* m *un morphisme continu de* G_1 *dans* G_2, HKA(m) *et* HKS(m) *les* $\mathcal{H}\mathcal{K}$*-flèches définies en 4.4. Alors :*

(a) *Les propositions* = (i) HKA(m) *est une extension ;*

(ii) HKS(m) *est une coextension ;*

(iii) *l'image par* m *de la mesure de Haar à gauche de* G_1 *est absolument continue par rapport à la mesure de Haar à gauche de* G_2 *;*

sont équivalentes.

(b) *Les propositions :* (i) HKS(m) *est une extension ;*

(ii) HKA(m) *est une coextension ;*

(iii) *la représentation* $\lambda_{G_2} \circ m$ *de* G_1 *est quasi-sous-équivalente à la représentation* λ_{G_1} ;

sont équivalentes.

Démonstration. – Par dualité, il est clair que (a) (i) et (ii) (resp. (b) (i) et (ii)) sont équivalentes.

Supposons (a) (i), il résulte de 5.7 qu'il existe un $\mathcal{H}$-morphisme δ de $L^\infty(G_2)$ dans $L^\infty(G_1)$ tel que $\delta(f) = f \circ m$ pour tout f de $B(G_2)$; cette identité s'étend, par continuité normique sur $\mathcal{C}_b(G_2)$, à tout f de $\mathcal{C}_b(G_2)$. Notons φ_i le poids de Haar sur

$L^\infty(G_i)$, $(i = 1, 2)$. Il est clair que $\varphi_1 \circ \delta$ est une trace normale et semi-finie sur $L^\infty(G_2)$; il existe donc un élément g positif affilié à $L^\infty(G_2)$ tel que $\varphi_1(f \circ m) = \varphi_2(fg)$ pour tout f de $L^\infty(G_2)$ d'où (a) (iii).

Réciproquement, supposons (a) (iii), il est alors clair que l'application de $L^\infty(G_2)$ dans $L^\infty(G_1)$ qui associe $f \circ m$ à tout f de $L^\infty(G_2)$ est un morphisme normal ; on vérifie sans peine que c'est un $\mathcal{H}$-morphisme dont $HKA(m)$ est l'extension ; cela achève la démonstration de (a). Il est clair que (b) est un corollaire de 5.6.

5.13 PROPOSITION. – *Soient* G_1 *et* G_2 *deux groupes localement compacts,* m *un morphisme continu de* G_1 *dans* G_2. *Les assertions :*

(i) m *est un morphisme strict à image ouverte et noyau compact ;*

et

(ii) *l'image par* m *de la mesure de Haar à gauche de* G_1 *est absolument continue par rapport à la mesure de Haar de* G_2 *et la représentation* $\lambda_{G_2} \circ m$ *de* G_1 *est quasi-équivalente à une sous-représentation de la représentation régulière gauche de* G_1 *;*

sont équivalentes.

Démonstration. – Cela résulte de 5.10 et 5.12.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. DE CANNIERE, M. ENOCK, J.-M. SCHWARTZ, Algèbres de Fourier associées à une algèbre de Kac, *Math. Ann.*, 245 (1979), 1-22.

[2] J. DE CANNIERE, M. ENOCK, J.-M. SCHWARTZ, Sur deux résultats d'analyse harmonique : une application de la théorie des algèbres de Kac, *J. Operator Theory*, 5 (1981), 171-194.

[3] M. ENOCK, Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac, *J. Funct. Anal.*, 26 (1977), 16-47.

[4] M. ENOCK, J.-M. SCHWARTZ, Une dualité dans les algèbres de von Neumann, *Bull. Soc. Math. France*, Supp. Mémoire n° 44 (1975), 1-144.

[5] M. Enock, J.-M. Schwartz, Systèmes dynamiques généralisés et correspondances, *J. Operator Theory,* 11 (1984), 273-303.

[6] J. Ernest, Hopf-von Neumann algebras, Proc. Conf. Funct. Anal. (Irvine, Calif.), Academic Press, New York (1967), 165-215.

[7] P. Eymard, L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France,* 92 (1964), 181-236.

[8] E. Kirchberg, Darstellungen coinvolutiver Hopf-W*-algebren und ihre Anwendung in der nicht-abelschen Dualitätstheorie lokalkompakter Gruppen, Berlin, Adademie der Wissencshaften der DDR (1977).

[9] J.-M. Schwartz, Sur la structure des algèbres de Kac, I, *J. Funct. Anal.,* 34 (1979), 370-406.

[10] W.F. Stinespring, Integration theorems for gauges and duality for unimodular locally compact groups, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 90 (1959), 15-56.

[11] L.I. Vainerman, G.I. Kac, Non unimodular ring-groups and Hopf-von Neumann algebras, *Math. USSR, Sbornik,* 23 (1974), 185-214. Traduction de *Mat. Sbornik,* 94 (136) (1974), 194-225.

[12] M.E. Walter, W*-algebras and non Abelian harmonic analysis, *J. Funct. Anal.,* 11 (1972), 17-38.

Manuscrit reçu le 19 janvier 1984
révisé le 7 février 1985.

M. Enock & J.-M. Schwartz,
Laboratoire de Mathématiques Fondamentales
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05.