ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN DUCHON
R. ROBERT

Estimation d'opérateurs intégraux du type de Cauchy dans les échelles d'Ovsjannikov et application

Annales de l'institut Fourier, tome 36, nº 1 (1986), p. 83-95
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_1_83_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 1 (1986), 83 - 95

ESTIMATION D'OPÉRATEURS INTÉGRAUX DU TYPE DE CAUCHY DANS LES ECHELLES D'OVSJANNIKOV ET APPLICATION

par J. DUCHON et R. ROBERT

INTRODUCTION

Nous établissons des inégalités du type

$$\|(\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2)f\|_{\rho',m} \leqslant \frac{c}{\rho - \rho'} \|u_1 - u_2\|_{\rho,m} \, |f|_2$$

pour les intégrales de Cauchy I_1 et I_2 d'une fonction f de L^2 sur les graphes de deux fonctions u_1 et u_2 ; $\|\cdot\|_{\rho,m}$ désignant la norme d'Ovsjannikov $\sum_0^\infty \rho^n/n! \, \|\mathrm{D}^n \cdot\|_m$ relative à l'espace de Sobolev H^m. Ces estimations sont utilisées pour obtenir des résultats d'existence locale en temps de solutions analytiques pour certains problèmes à frontière libre dans le plan (via une version abstraite convenable du théorème de Cauchy-Kowalewski non linéaire [1, 7, 8, 9, 14]). En effet, mis à part le cas des ondes de surface où on peut se ramener à un domaine fixe par les variables de Lagrange [2, 9, 10, 11], lorsqu'il y a glissement relatif de deux fluides le long d'une interface, on est amené à travailler en variables d'Euler et à estimer les noyaux du potentiel associés à l'interface en mouvement. On notera le caractère régularisant de l'opérateur $\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2$; cette propriété permet d'améliorer (voir [5]), en dimension deux, le résultat d'existence de C. et P.L. Sulem [13] sur l'instabilité de Rayleigh-Taylor, résultat basé sur les estimations de C. et P.L. Sulem, U. Frisch, C. Bardos [12] dans d'autres échelles. A titre d'illustration, nous donnons un exemple simple, l'équation du mouvement de l'interface de deux liquides en milieu poreux [3].

Mots-clés : Intégrale singulière de Cauchy – Echelles d'Ovsjannikov – Frontière libre analytique.

I. PRELIMINAIRES

1. Noyaux et intégrale de Cauchy.

Soit $u : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction suffisamment régulière. Nous lui associons les noyaux :

$$p(x\,,y) = \frac{u(x)-u(y)}{x-y}\,,$$

$$Z(x\,,y) = \frac{1}{2\pi}\,\partial_x\,\mathrm{Log}(1+ip) = \frac{i}{2\pi}\,\frac{\partial_x p}{1+ip}\,,$$

$$Z^t(x\,,y) = \frac{1}{2\pi}\,\partial_y\,\mathrm{Log}(1+ip) = Z(y\,,x)\,.$$

L'intégrale de Cauchy d'une fonction $g \in L^2(\mathbf{R})$ sur le graphe de u est donnée par :

$$\mathrm{I}g(x) = v.p.\ \frac{1}{\pi i}\int \frac{1+iu'(y)}{(y-x)+i(u(y)-u(x))}\,g(y)\,dy\,,$$

soit

$$\mathrm{I}g(x) = i\mathrm{H}g(x) - 2i\int Z^t(x\,,y)\,g(y)\,dy\,,$$

où H désigne la transformation de Hilbert :

$$\mathrm{H}g(x) = v.p.\ \frac{1}{\pi}\int\frac{g(y)}{x-y}\,dy\,.$$

2. Les espaces d'Ovsjannikov.

Pour tout espace de Banach B de fonctions sur $\mathbf{R}$ et tout $\rho \geqslant 0$, on définit l'espace d'Ovsjannikov B_ρ, ensemble des $u \in B$ telles que $D^n u \in B$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ $\left(D = \dfrac{d}{dx}\right)$ avec

$$\|u\|_{\rho,B} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}\,\|D^n u\|_B < +\infty\,.$$

B_ρ est un espace de Banach et on a évidemment

$$\|Du\|_{\rho',B} \leqslant \frac{\|u\|_{\rho,B} - \|u\|_{\rho',B}}{\rho - \rho'} \ , \ \text{si } \rho' < \rho \, .$$

D'autre part, si la multiplication des fonctions opère de $B' \times B''$ dans B avec $\|uv\|_B \leqslant \|u\|_{B'} \|v\|_{B''}$, on voit très facilement que de même la multiplication est bilinéaire continue de $B'_\rho \times B''_\rho$ dans B_ρ avec $\|uv\|_{\rho,B} \leqslant \|u\|_{\rho,B'} \|v\|_{\rho,B''}$. Soit $H^m = H^m(\mathbf{R})$ l'espace de Sobolev des $u \in L^2$ telles que $D^m u \in L^2$.

Pour $m \geqslant 1$, la norme sur H^m étant choisie convenablement, on aura $\|uv\|_m \leqslant \|u\|_m \|v\|_m$ d'où aussi sur H^m_ρ $\|uv\|_{\rho,m} \leqslant \|u\|_{\rho,m} \|v\|_{\rho,m}$. De même pour $u \in L^\infty_\rho$ et $v \in L^2_\rho$, on a $|uv|_{\rho,2} \leqslant |u|_{\rho,\infty} |v|_{\rho,2}$.

Nous utiliserons également la semi-norme $\|\,.\,\|^\bullet_{\rho,B}$ obtenue en soustrayant à $\|\,.\,\|_{\rho,B}$ le premier terme :

$$\|u\|^\bullet_{\rho,B} = \|u\|_{\rho,B} - \|u\|_B = \sum_{n=1}^\infty \frac{\rho^n}{n!} \|D^n u\|_B \, .$$

On a ainsi

$$\|u\|^\bullet_{\rho,B} \leqslant \frac{\rho}{\rho_0} \|u\|^\bullet_{\rho_0,B} \ \text{ pour } \rho \leqslant \rho_0 \, .$$

3. Normes d'Ovsjannikov pour les noyaux.

Pour des noyaux $K(x, y)$ nous utiliserons des normes d'Ovsjannikov définies de manière analogue en remplaçant D par ∂_x. Ainsi à la norme d'opérateur sur L^2

$$\|K\|_{op} = \sup_{|g|_2 \leqslant 1} |K \cdot g|_2 \, ,$$

où $K \cdot g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y) g(y)\, dy$,

correspond

$$\|K\|_{\rho,op} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\rho^n}{n!} \|\partial_x^n K\|_{op} \, .$$

De même

$$|K|_{\rho,\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} |\partial_x^n K|_{L^\infty(dx\,dy)},$$

$$|K|_{\rho,2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} |\partial_x^n K|_{L^2(dx\,dy)}.$$

Noter que $\|K\|_{\rho,op} \leqslant |K|_{\rho,2}$. D'autre part, on a entre les normes $|\ |_{\rho,2}$ et $|\ |_{\rho,\infty}$ la même inégalité pour le produit ponctuel des noyaux que pour les fonctions d'une variable :

$$|KL|_{\rho,2} \leqslant |K|_{\rho,\infty}\ |L|_{\rho,2}.$$

II. ESTIMATION DES NOYAUX Z, Z^t

Nous noterons Z_1, Z_2 les noyaux associés aux fonctions u_1, u_2. On a alors :

THEOREME 1. – *Soit* $m \geqslant 3$. *Pour tout* $R > 0$, *il existe* $\rho_1 > 0$ *tel que pour tous* $0 < \rho' < \rho \leqslant \rho_1$, *on ait*

$$\|(Z_1 - Z_2) f\|_{\rho',m} \leqslant \frac{c(R, m, 1/\rho')}{\rho - \rho'} \|u_1 - u_2\|_{\rho,m}\ |f|_2,$$

pour toute $f \in L^2$ *et* u_1, u_2 *telles que* $\|u_i'\|_{\rho,m-1} \leqslant R$. *Même résultat en remplaçant* Z *par* Z^t.

Pour $m = 1$ ou 2, on a le résultat local plus faible suivant :

THEOREME 2. – *Soit* $\rho_0 > 0$ *et soit* u_0 *vérifiant* $u_0' \in H^1_{\rho_0}$. *Alors il existe* $\rho_1 > 0$ *et* $\epsilon > 0$ *tels que l'on ait :*

$$\|(Z_1 - Z_2) f\|_{\rho',m} \leqslant \frac{c(1/\rho')}{\rho - \rho'} \|u_1 - u_2\|_{\rho,m}\ |f|_2,\quad m = 1 \text{ ou } 2,$$

pour toute $f \in L^2$, $0 < \rho' < \rho \leqslant \rho_1$ *et* $\|u_i' - u_0'\|_{\rho,1} \leqslant \epsilon$, $i = 1, 2$. *Même résultat en remplaçant* Z *par* Z^t.

De l'expression $I = iH - 2iZ^t$ on déduit immédiatement qu'on a les mêmes estimations pour l'intégrale singulière de Cauchy.

Démontrons le théorème 1 pour le noyau Z, pour cela estimons chacune des dérivées $\partial_x^k (0 \leqslant k \leqslant m)$ de la différence $\frac{\partial_x p_1}{1 + ip_1} - \frac{\partial_x p_2}{1 + ip_2}$, en norme $|\ |_{\rho',2}$, en fonction de R et $\|u_1 - u_2\|_{\rho,m}$.

Tous les termes à estimer sont de la forme

$$\left(\frac{1}{1+ip_1}\right)^{r_0} \left(\frac{1}{1+ip_2}\right)^{s_0} (\partial_x p_1)^{r_1} (\partial_x^2 p_1)^{r_2} \ldots$$
$$\ldots (\partial_x^\alpha p_1)^{r_\alpha} (\partial_x p_2)^{s_1} \ldots (\partial_x^\beta p_2)^{s_\beta} \partial_x^\gamma (p_1 - p_2).$$

Notons $\ell = \max(\alpha, \beta)$ et $(\partial_x^\ell p)^{r_\ell}$ un terme correspondant à ce maximum $(p = p_1$ ou $p_2)$.

Distinguons plusieur cas.

• Si $\ell \geqslant m$, alors forcément $r_\ell = 1$ et pour majorer en norme $|\ |_{\rho',2}$ l'expression ci-dessus, on prendra $|\partial_x^\ell p|_{\rho',2}$ et tous les autres termes en norme $|\ |_{\rho',\infty}$.

• Si $\ell < m$ et $\gamma > 0$, on prendra $|\partial_x^\gamma (p_1 - p_2)|_{\rho',2}$ et tous les autres termes en norme $|\ |_{\rho',\infty}$.

• Si $\ell < m$ et $\gamma = 0$, auquel cas forcément $\ell \geqslant 1$, on prendra $|\partial_x^\ell p|_{\rho',2}$ et tous les autres termes en norme $|\ |_{\rho',\infty}$.

L'inégalité désirée découle alors des quatre lemmes qui suivent.

LEMME 1. – *Soit* u *une fonction telle que* $D^{j+1} u \in L_\rho^\infty$, $\rho > 0$, $j = 0, 1, \ldots$. *Alors on a :*

$$|\partial_x^j p|_{\rho,\infty} \leqslant \frac{1}{\rho} |D^j u|^{\bullet}_{\rho,\infty} \leqslant |D^{j+1} u|_{\rho,\infty}.$$

Démonstration. – On écrit

$$p(x, y) = \int_0^1 u'(\lambda x + (1 - \lambda) y)\, d\lambda,$$

d'où

$$\partial_x^j p = \int_0^1 \lambda^j D^{j+1} u(\lambda x + (1 - \lambda) y)\, d\lambda,$$

et $$|\partial_x^j p|_{\rho,\infty} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \int_0^1 \lambda^{j+n} \, |D^{j+1+n} u|_\infty \, d\lambda$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!(j+n+1)} |D^{j+n+1} u|_\infty$$

$$\leqslant \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} |D^{j+n+1} u|_\infty = \frac{1}{\rho} |D^j u|^{\bullet}_{\rho,\infty} . \quad \square$$

LEMME 2. – *Si* u *est une fonction telle que* $D^j u \in L^2_\rho$ $(j = 1, 2, \ldots)$, *on a :*

$$|\partial_x^j p|_{\rho,2} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) |D^j u|_{\rho,2} .$$

Démonstration. – Un rapide calcul par transformation de Fourier (cf. [4]) montre que :

$$|\partial_x^{j+n} p|_{L^2(dx\,dy)} = \sqrt{\frac{\pi}{j+n+\frac{1}{2}}} \, |\Lambda^{j+n+\frac{1}{2}} u|_2 ,$$

où Λ^s est défini par transformation de Fourier

$$\widehat{\Lambda^s f}(\xi) = |2\pi\xi|^s \hat{f}(\xi) .$$

Comme

$$|\Lambda^{j+n+\frac{1}{2}} u|_2 \leqslant |D^{j+n} u|_2^{\frac{1}{2}} \, |D^{j+n+1} u|_2^{\frac{1}{2}} ,$$

il vient

$$|\partial_x^{j+n} p|_{L^2(dx\,dy)} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(|D^{j+n} u|_2 + \frac{1}{j+n+\frac{1}{2}} |D^{j+n+1} u|_2 \right) ,$$

d'où

$$|\partial_x^j p|_{\rho,2} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2} |D^j u|_{\rho,2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} |D^{j+n+1} u|_2$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) |D^j u|_{\rho,2} . \quad \square$$

LEMME 3. – *Soit* u *une fonction* C^∞ *telle que* $|p|_\infty < +\infty$ *et* $|p|^{\bullet}_{\rho,\infty} < 1$, *alors on a :*

$$\left|\frac{1}{1+ip}\right|_{\rho,\infty} \leqslant \frac{1}{1-|p|^{\bullet}_{\rho,\infty}}.$$

Démonstration. – Prenons $M > 0$ et écrivons

$$1 + ip = M\left(1 - \left(1 - \frac{1}{M} - \frac{i}{M}p\right)\right),$$

on a

$$\left|1 - \frac{1}{M} - \frac{i}{M}p\right|_\infty = \left(\left(1 - \frac{1}{M}\right)^2 + \frac{|p|^2_\infty}{M^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et ceci est < 1 pour $M > \dfrac{1 + |p|^2_\infty}{2}$, on a alors

$$\frac{1}{1+ip} = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{M} - \frac{i}{M}p\right)^k, \text{ d'où}$$

$$\left|\frac{1}{1+ip}\right|_{\rho,\infty} \leqslant \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{\infty}\left|1 - \frac{1}{M} - \frac{i}{M}p\right|^k_{\rho,\infty}$$

avec $$\left|1 - \frac{1}{M} - \frac{i}{M}p\right|_{\rho,\infty} = \left|1 - \frac{1}{M} - \frac{i}{M}p\right|_\infty + \frac{1}{M}|p|^{\bullet}_{\rho,\infty}$$

et ceci est < 1 pour M assez grand ; d'où

$$\left|\frac{1}{1+ip}\right|_{\rho,\infty} \leqslant \frac{1}{M - \sqrt{(M-1)^2 + |p|^2_\infty} - |p|^{\bullet}_{\rho,\infty}}.$$

Lorsque M tend vers $+\infty$, $M - \sqrt{(M-1)^2 + |p|^2_\infty}$ tend vers 1 d'où le résultat. □

LEMME 4. – *Pour tout* $R > 0$, *il existe* $\rho_1 > 0$ *tel que* $|p|^{\bullet}_{\rho,\infty} \leqslant \frac{1}{2}$ *pour* $\rho \leqslant \rho_1$ *et* $|u''|_{\rho,\infty} \leqslant R$.

Démonstration. –

$$|p|^{\bullet}_{\rho,\infty} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{(n+1)!}|D^{n+1}u|_\infty \leqslant \rho\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}|D^{k+2}u|_\infty = \rho|u''|_{\rho,\infty},$$

d'où le résultat. □

L'estimation de Z^t peut se faire, par exemple, en remarquant que $Z + Z^t = \widetilde{Z} = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{1+ip}\left(\frac{u'(x)-u'(y)}{x-y}\right)$, l'estimation de $\widetilde{Z}$ se faisant comme celle de Z.

Le cas $m = 1$ ou 2 se traite de la même façon mais en utilisant la variante suivante du Lemme 4.

LEMME 5. – *Soit* $\rho_0 > 0$ *et* $u_0' \in L^\infty_{\rho_0}$. *Il existe* $\rho_1 > 0$ *et* $\epsilon > 0$ *tels que l'on ait*

$$|p|^{\bullet}_{\rho,\infty} \leqslant \frac{1}{2} \textit{ dès que } \rho \leqslant \rho_1 \textit{ et } |u' - u_0'|_{\rho,\infty} \leqslant \epsilon .$$

Démonstration. – On écrit

$$|p|^{\bullet}_{\rho,\infty} \leqslant |p_0|^{\bullet}_{\rho,\infty} + |p - p_0|^{\bullet}_{\rho,\infty} ,$$

or
$$|p_0|^{\bullet}_{\rho,\infty} \leqslant \frac{\rho}{\rho_0} |p_0|^{\bullet}_{\rho_0,\infty} \leqslant \frac{\rho}{\rho_0} |u_0'|_{\rho_0,\infty}$$

et $|p - p_0|^{\bullet}_{\rho,\infty} \leqslant |u' - u_0'|_{\rho,\infty} \leqslant \epsilon$. Il suffit alors de prendre ρ_1 et ϵ assez petits pour que

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} |u_0'|_{\rho_0,\infty} + \epsilon \leqslant \frac{1}{2} . \qquad \square$$

III. APPLICATION

Nous utiliserons un résultat très rustique et de démonstration simple sur l'existence de solution pour une équation différentielle $\frac{du}{dt} = F(u)$, $u(0) = u_0$, dans une échelle d'espaces de Banach. Pour des résultats plus élaborés dans le cas où $F(t, u)$ dépend explicitement du temps, voir [1], [7], [8], [9], [14].

Soit B_ρ, $0 < \rho \leqslant \rho_0$, une échelle d'espaces de Banach ; c'est-à-dire pour $\rho' \leqslant \rho$ on a $B_\rho \subset B_{\rho'}$ avec $\| . \|_{\rho'} \leqslant \| . \|_\rho$.

PROPOSITION. – *Soit* $u_0 \in B_{\rho_0}$ *et* $R > 0$. *Soit* F *une application telle que pour* $0 < \rho' < \rho \leqslant \rho_0$,

$$F : \{u \in B_\rho \mid \|u - u_0\|_\rho \leqslant R\} \longrightarrow B_{\rho'}$$

vérifiant en outre :

(i) $\|F(u) - F(v)\|_{\rho'} \leqslant c \dfrac{\|u - v\|_\rho}{\rho - \rho'}$ *chaque fois que* $0 < \rho' < \rho \leqslant \rho_0$ *et* $\|u - u_0\|_\rho \leqslant R$, $\|v - u_0\|_\rho \leqslant R$,

(ii) $\|F(u_0)\|_\rho \leqslant \dfrac{c'}{\rho_0 - \rho}$.

Alors il existe $a > 0$ *et une fonction* u *unique telle que pour tout* ρ, $0 < \rho < \rho_0$, u *soit continûment dérivable de l'intervalle* $|t| \leqslant a(\rho_0 - \rho)$ *dans* B_ρ, *avec* $\|u(t) - u_0\|_\rho \leqslant R$ *et*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = F(u(t)), \ |t| \leqslant a(\rho_0 - \rho), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Nous allons appliquer ce résultat à l'équation d'évolution vérifiée par l'interface de deux liquides incompressibles non miscibles en milieu poreux.

Nous traiterons le problème en dimension deux, dans un plan vertical. Nous supposerons l'interface Γ_t donnée à l'instant t par l'équation $y = u(t, x)$ dans le plan de coordonnées (x, y). On notera $\Omega_1 = \{(x, y) \mid y > u(t, x)\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) \mid y < u(t, x)\}$, τ le vecteur unitaire tangent à Γ_t, dirigé dans le sens des x croissants, ν le vecteur normal qui s'en déduit par une rotation de $+\pi/2$. Soit $V(t, x, y)$ le champ des vitesses des particules des fluides à l'instant t. Les deux fluides étant incompressibles on a $\operatorname{div} V = 0$ dans chaque Ω_i. De plus, dans un milieu poreux, sous l'action de la seule pesanteur, le mouvement est irrotationnel (cf. [3]), on a donc $\operatorname{rot} V = 0$ dans chaque Ω_i.

Ecrivons la condition cinématique à l'interface :

$$V_1 \cdot \nu = V_2 \cdot \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x u)^2}} \, \partial_t u,$$

où V_1, V_2 désignent les valeurs limites de V sur l'interface prises à partir de Ω_1 et Ω_2 respectivement.

La continuité de la composante normale de la vitesse à la traversée de l'interface implique qu'il existe une fonction de courant $\psi(t, x, y)$ continue sur $\mathbf{R}^2$ et telle que $V = \operatorname{rot} \psi$ sur chaque Ω_i. Le mouvement étant irrotationnel, on a $\Delta \psi = 0$ sur chaque Ω_i et donc au sens des distributions :

$$\Delta \psi = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \nu}\right) d\sigma = (V_1 \cdot \tau - V_2 \cdot \tau)\, d\sigma ,$$

où $d\sigma$ désigne l'élément de longueur sur Γ_t.

Introduisons maintenant la loi régissant le glissement relatif des fluides à l'interface sous l'action de la gravité (le moins dense glisse sur le plus dense), on doit avoir (cf. [3]) :

$$V_1 \cdot \tau - V_2 \cdot \tau = c \frac{\partial_x u}{\sqrt{1 + (\partial_x u)^2}} = c \sin \alpha \ \text{ si } \tau = e^{i\alpha} ,$$

où c est une constante.

En introduisant $E(x, y) = \dfrac{1}{2\pi} \operatorname{Log}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ la solution élémentaire du Laplacien sur $\mathbf{R}^2$, on écrit :

$$\psi = E * \Delta \psi ,$$

et donc

$$\psi(t, x, u(t, x)) = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Log}[(x-y)^2 + (u(t, x) - u(t, y))^2]\, \partial_x u(t, y)\, dy ,$$

et en dérivant cette expression par rapport à x il vient

$$\frac{d}{dx} \psi(t, x, u(t, x)) = \sqrt{1 + (\partial_x u)^2}\ \nabla\psi \cdot \tau = -\partial_t u ,$$

d'où l'équation d'évolution :

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} \partial_t u + \dfrac{c}{4\pi} \displaystyle\int \partial_x u(t, y)\, \partial_x \operatorname{Log}[(x-y)^2 + (u(t, x) - u(t, y))^2]\, dy = 0 , \quad t \geqslant 0 , x \in \mathbf{R} , \\ u(0, x) = u_0(x) . \end{cases}$$

On notera $X(x, y) = \frac{1}{4\pi} \partial_x \operatorname{Log}(1 + p^2)$, on voit facilement que $X = \operatorname{Re} Z$, avec les notations du § I.

D'où l'équation (E) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -c/2(\mathrm{H}\,\mathrm{D}u + 2\mathrm{X}\,\mathrm{D}u) = \mathrm{F}(u), \\ u(0) = u_0 . \end{cases}$$

On a alors le résultat d'existence suivant.

THEOREME 3. – *Soit* $u_0 \in \mathrm{H}^3_{\rho_0}$ *pour un* $\rho_0 > 0$. *Alors il existe* $\rho > 0$, $\tau > 0$ *et* u *continûment dérivable de* $[0, \tau]$ *dans* H^3_ρ *vérifiant*

$$\frac{du}{dt} = \mathrm{F}(u)\,, u(0) = u_0 .$$

Démonstration. – On a

$$\mathrm{F}(u_1) - \mathrm{F}(u_2) = -c/2\,\mathrm{H}\,\mathrm{D}(u_1 - u_2) - c(\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2)\,\mathrm{D}u_1 - c\mathrm{X}_2(\mathrm{D}u_1 - \mathrm{D}u_2),$$

or

$$\|\mathrm{HD}(u_1 - u_2)\|_{\rho', 3} = \|\mathrm{D}(u_1 - u_2)\|_{\rho', 3} \leqslant \frac{1}{\rho - \rho'} \|u_1 - u_2\|_{\rho, 3},$$

$$\|(\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2)\,\mathrm{D}u_1\|_{\rho', 3} \leqslant \|(\mathrm{Z}_1 - \mathrm{Z}_2)\,\mathrm{D}u_1\|_{\rho', 3},$$

$$\|\mathrm{X}_2\,(\mathrm{D}u_1 - \mathrm{D}u_2)\|_{\rho', 3} \leqslant \|\mathrm{Z}_2(\mathrm{D}u_1 - \mathrm{D}u_2)\|_{\rho', 3} .$$

En appliquant le théorème 1 et les inégalités :

$$|\mathrm{D}u_1|_2 \leqslant \|u_1\|_{\rho, 3}, \quad |\mathrm{D}u_1 - \mathrm{D}u_2|_2 \leqslant \|u_1 - u_2\|_{\rho, 3},$$

on obtient que F vérifie :

pour tout $\mathrm{R} > 0$, il existe $\rho_1 > 0$ tel que pour $0 < \rho' < \rho \leqslant \rho_1$ et $\|u_i\|_{\rho, 3} \leqslant \mathrm{R}$ on ait :

$$\|\mathrm{F}(u_1) - \mathrm{F}(u_2)\|_{\rho', 3} \leqslant \frac{c(\mathrm{R}, 1/\rho')}{\rho - \rho'} \|u_1 - u_2\|_{\rho, 3} .$$

L'application de la proposition donne alors trivialement le théorème 3. □

Remarque. – Le choix de cette application pour illustrer nos estimations répond à un souci de simplicité, le seul opérateur intervenant étant donné directement par le noyau X.

Ce problème nous a été signalé par D. Hilhorst, il modélise l'interface eau douce – eau salée dans une nappe aquifère [3].

L'équation linéarisée au voisinage de $u = 0$ est $du/dt = - c/2\, \mathrm{H D} u$; pour $c > 0$ c'est une équation parabolique bien posée, mais pour $c < 0$, ce qui correspond au cas où le fluide le plus lourd est initialement situé au dessus, le problème est mal posé dans tout espace de fonctions de régularité finie et même C^∞. On a traité ici le cas où les deux fluides ont la même viscosité dynamique ; dans le cas contraire, l'équation est un peu plus délicate à traiter et nécessite quelques intermédiaires techniques [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. Baouendi, C. Goulaouic, Remark on the abstract form of nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem, *Comm. Part. Diff. Eq.*, 2 (1977), 1151-1162.

[2] Bui an ton On a free boundary problem for an inviscid incompressible fluid, *Nonlinear anal. Theory Meth. and appl.*, 6 (1982), 335-347.

[3] J.R. Chan hong, D. Hilhorst, C.J. Van duyn, J. Van kester, Numerical study of simultaneous flow of salt and fresh ground water in horizontally extended aquifers, à paraître.

[4] J. Duchon, R. Robert Evolution d'une interface par capillarité et diffusion de volume I. Existence locale en temps, *Ann. Inst. Henri Poincaré,* Analyse non linéaire, 1 (1984), 361-378.

[5] J. Duchon, R. Robert Sur quelques problèmes à frontière libre analytique dans le plan, *Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer 1984-1985,* exposé n° X.

[6] V.I. Nalimov A priori estimates of the solutions of elliptic equations with application to Cauchy-Poisson problem, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR,* 189 (1969), 45-48.

[7] L. NIRENBERG An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem, *J. Diff. Geometry*, 6 (1972), 561-576.

[8] T. NISHIDA On the Nirenberg's abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem, *J. Diff. Geometry*, 12 (1977), 629-633.

[9] L.V. OVSJANNIKOV A nonlinear Cauchy problem in a scale of Banach spaces, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 200 (1971), 789-792.

[10] J. REEDER, M. SHINBROT The initial value problem for surface waves under gravity, II the simplest three-dimensional case, *Indiana Univ. Math. J.*, 25 (1976), 1049-1071.

[11] M. SHINBROT The initial value problem for surface waves under gravity, I the simplest case, *Indiana Univ. Math. J.*, 25 (1976), 281-300.

[12] C. SULEM, P.L. SULEM, C. BARDOS, U. FRISCH, Finite time analyticity for the two and three dimensional Kelvin-Helmholtz instability, *Comm. Math. Phys.*, 80 (1981), 485-516.

[13] C. SULEM, P.L. SULEM Finite time analyticity for the two and three dimensional Rayleigh-Taylor instability, A paraître *Trans. Amer. Math. Soc.*

[14] J.F. TREVES An abstract nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 150 (1970) 77-92.

Manuscrit reçu le 22 novembre 1984
révisé le 14 février 1985.

J. DUCHON,
La Plaine Saint-Sauveur
38160 Saint-Marcellin.
&
R. ROBERT,
21, Avenue Plaine Fleurie
38240 Meylan.