BULLETIN DE LA S. M. F.

E. TURRIÈRE

Sur la détermination des surfaces par une relation entre des segments de normales

Bulletin de la S. M. F., tome 45 (1917), p. 8-14
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1917__45__8_1>

SUR LA DÉTERMINATION DES SURFACES PAR UNE RELATION ENTRE DES SEGMENTS DE NORMALES;

Par M. Émile Turrière.

La détermination de courbes planes (C) au moyen d'une relation imposée entre les segments de normale MP et MQ limités au point d'incidence M et aux traces respectives P et Q sur deux axes coordonnés rectangulaires a été effectuée dans quelques cas particuliers :

$\mathrm{MP} - \mathrm{MQ} = 0$: cercle de centre O;

$\mathrm{MP} - \mathrm{MQ} = \text{const.}$: hypocycloïde à quatre rebroussements;

$\mathrm{MP} : \mathrm{MQ} = \text{const.}$: coniques rapportées à leurs axes (¹);

$\mathrm{MP} \times \mathrm{MQ} = \text{const.}$: courbes transcendantes panalgébriques de Collignon (²).

(¹) M. Gino Loria appelle ainsi les courbes transcendantes spéciales qui satisfont à une équation différentielle du premier ordre, algébrique en x, y et y'.

(²) Ed. Collignon, *Problèmes sur les normales aux courbes planes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. I, 1901, p. 481-508). — M. d'Ocagne, *Au*

D'autres cas particuliers peuvent vraisemblablement avoir été considérés; par exemple, le cas de la courbe transcendante et panalgébrique pour laquelle le conjugué harmonique sur la normale du point courant, par rapport à deux axes rectangulaires, décrit une courbe parallèle, courbe qui s'obtient par la relation

$$\frac{1}{\mathrm{MP}} + \frac{1}{\mathrm{MQ}} = \text{const.},$$

doit avoir été signalé (1); de même pour les courbes définies par les relations simples

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 \pm \overline{\mathrm{MQ}}^2 = \text{const.}$$

Au sujet de ce problème qui, de prime abord, ne semble offrir aucun intérêt spécial, j'ai pourtant obtenu récemment (2) un résultat assez curieux, dont je rappellerai l'énoncé :

La détermination des courbes planes, pour lesquelles les segments de normales respectivement limités à deux axes rectangulaires doivent satisfaire à une relation donnée, est équivalente à la quadrature de la courbe figurative précisément représentée par la relation imposée.

Je me propose d'établir une proposition analogue concernant les normales aux surfaces.

L'espace étant rapporté à un système d'axes rectangulaires (Ox, Oy, Oz), la normale à une surface générale (S), en un point quelconque M de cette surface, perce les plans coor-

---

sujet des courbes de M. Collignon (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. II, 1902, p. 137-138). — La construction du centre de courbure des courbes de Collignon indiquée par M. M. d'Ocagne est d'ailleurs caractéristique de ces courbes.

(1) Ces courbes et d'une manière générale toutes les courbes (C) pour lesquelles MP et MQ sont liés involutivement ont d'ailleurs des relations simples avec les courbes de Collignon (par dilatation).

(2) Ce travail doit paraître prochainement au *Periodico di Matematica* de M. G. Lazzeri. D'autre part, M. G. Teixeira publiera incessamment dans les *Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto* un extrait de lettre relatif à cette même proposition et à l'une de ses applications possibles à des familles de courbes algébrico-interscendantes.

donnés Oyz, Ozx et Oxy en trois points qui seront respectivement désignés par X, Y et Z.

La surface (S) est représentée par l'équation

$$(1) \qquad p_1 x + p_2 y + p_3 z = \varpi,$$

de son plan tangent en M; p_1, p_2, p_3 sont les cosinus directeurs de la normale MXYZ. Les segments $MX = X$, $MY = Y$, $MZ = Z$ de cette normale sont algébriquement définis par les relations

$$(2) \qquad x = Xp_1, \qquad y = Yp_2, \qquad z = Zp_3,$$

dans lesquelles (x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes du point d'incidence M de cette normale. L'équation du plan tangent à (S) en M se transforme alors en l'égalité

$$(3) \qquad Xp_1^2 + Yp_2^2 + Zp_3^2 = \varpi;$$

la relation

$$(4) \qquad p_1\,dx + p_2\,dy + p_3\,dz = 0,$$

exprimant que tout déplacement infinitésimal du point (M) sur la surface (S) est normal à la normale (p_1, p_2, p_3) se transforme d'autre part en la relation

$$X\,dp_1^2 + Y\,dp_2^2 + Z\,dp_3^2 = -2[p_1^2\,dX + p_2^2\,dY + p_3^2\,dZ],$$

qui permet de réduire l'expression

$$d\varpi = X\,dp_1^2 + Y\,dp_2^2 + Z\,dp_3^2 + p_1^2\,dX + p_2^2\,dY + p_3^2\,dZ$$

de la différentielle de la distance ϖ de l'origine O au plan tangent à la surface (S) aux seuls termes :

$$(5) \qquad d\varpi = -p_1^2\,dX - p_2^2\,dY - p_3^2\,dZ.$$

Soient alors u et v deux paramètres quelconques de représentation de la surface (Σ) représentative de la relation imposée $f(X, Y, Z) = 0$ entre les segments $MX = X$, $MY = Y$, $MZ = Z$ de la normale à (S). En d'autres termes, je suppose que dorénavant X, Y et Z sont des fonctions connues de deux variables u et v admettant les dérivées $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$, ... Moyennant ces notations, on se trouve en présence d'un système de relations :

$$(6)\qquad \begin{cases} p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1, \\ Xp_1^2 + Yp_2^2 + Zp_3^2 = \varpi, \\ \dfrac{\partial X}{\partial u}p_1^2 + \dfrac{\partial Y}{\partial u}p_2^2 + \dfrac{\partial Z}{\partial u}p_3^2 = -\dfrac{\partial \varpi}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial X}{\partial v}p_1^2 + \dfrac{\partial Y}{\partial v}p_2^2 + \dfrac{\partial Z}{\partial v}p_3^2 = -\dfrac{\partial \varpi}{\partial v}; \end{cases}$$

ce sont quatre équations linéaires en p_1^2, p_2^2, p_3^2. L'élimination de ces trois derniers carrés des cosinus directeurs de la normale donne, par conséquent, une condition

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varpi}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \varpi}{\partial v} & \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v} \\ -\varpi & X & Y & Z \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui n'est autre qu'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre définissant la fonction inconnue ϖ des deux variables (u, v). A une intégrale quelconque ϖ de cette équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre correspondra un système linéaire résoluble de quatre équations en p_1^2, p_2^2, p_3^2. La surface cherchée (S) sera dès lors parfaitement déterminée par ses éléments tangentiels. Il résulte des formules (2),

$$x = Xp_1, \qquad y = Yp_2, \qquad z = Zp_3,$$

que la même surface (S) sera aussi très simplement définie au point de vue ponctuel en fonction des paramètres u et v.

La détermination des surfaces (S) *définies par une relation donnée entre les segments* MX, MY et MZ *de normale est donc équivalente à l'intégration de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre* (7).

Cette équation (7) se présente sous une forme assez remarquable. La surface (Σ), représentative de la relation donnée, étant représentée d'une manière générale au moyen de deux paramètres u et v, les coordonnées X, Y, Z d'un point quelconque de (Σ) sont trois fonctions de u et de v définissant une certaine équation linéaire

$$(8) \qquad A\frac{\partial\theta}{\partial u} + B\frac{\partial\theta}{\partial v} + C\theta + D = 0,$$

simultanément satisfaite par X, Y et Z. Les coefficients A, B, C, D sont des fonctions de u, v définies à un facteur arbitraire près par les trois équations du premier degré

$$(9) \qquad \begin{cases} A\dfrac{\partial X}{\partial u} + B\dfrac{\partial X}{\partial v} + CX + D = 0, \\ A\dfrac{\partial Y}{\partial u} + B\dfrac{\partial Y}{\partial v} + CY + D = 0, \\ A\dfrac{\partial Z}{\partial u} + B\dfrac{\partial Z}{\partial v} + CZ + D = 0. \end{cases}$$

Il résulte alors de la structure même du déterminant, premier membre de l'équation (7), que celle-ci n'est autre que l'équation

$$(10) \qquad A\frac{\partial\varpi}{\partial u} + B\frac{\partial\varpi}{\partial v} - C\varpi - D = 0.$$

Aucune hypothèse n'a été jusqu'à présent faite relativement au choix du système de courbes (u, v) de référence sur la surface représentative de la relation imposée. Il est possible de choisir convenablement l'un des systèmes de courbes de référence de manière à annuler l'un des coefficients A ou B de l'équation (8).

Soit, en effet, OI l'axe ternaire $X = Y = Z$ de symétrie du trièdre des coordonnées. Je prendrai pour système $v =$ const. les sections [1] de la surface représentative par les plans pivotant autour de cet axe ternaire OI. Il résulte de ce choix des courbes v (les courbes $u =$ const. restant quelconques d'ailleurs) que la relation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u} \\ X & Y & Y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

[1] Le cas où la surface représentative est un plan passant par l'axe ternaire fait exception. Mais alors la relation imposée est homogène et, d'après le résultat énoncé à la fin de cet article, il suffit de prendre pour ϖ une fonction homogène de degré -1 de (X, Y, Y).

est identiquement satisfaite; B est donc nul et l'équation (8) est réduite à une équation de la forme

$$(11) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial u} + M\theta + N = 0.$$

L'équation (10) devient donc

$$(12) \qquad \frac{\partial \varpi}{\partial u} - M\varpi - N = 0;$$

cette équation (12) doit être traitée comme une équation différentielle linéaire du premier ordre entre la fonction ϖ et la variable u, la constante d'intégration étant une fonction arbitraire de v.

Dès maintenant le problème est donc ramené à deux quadratures au plus. Mais le fait que (12) admet pour intégrales particulières X, Y et Z entraîne des simplifications importantes et notamment la suppression d'une des quadratures. Les deux relations

$$\frac{\partial X}{\partial u} + MX + N = 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial u} + MY + N = 0,$$

résolues en M et N donnent

$$M = -\frac{\partial \operatorname{Log}(X - Y)}{\partial u}, \qquad N(X - Y) = Y\frac{\partial X}{\partial u} - X\frac{\partial Y}{\partial u};$$

l'équation sans second membre

$$\frac{\theta}{\partial u} - M\theta = 0$$

admet donc pour intégrale particulière $\frac{1}{X - Y}$. Il en résulte que l'intégrale générale de l'équation (12) est

$$(13) \qquad \varpi = \frac{V + \int \left(Y\frac{\partial X}{\partial u} - X\frac{\partial Y}{\partial u} \right) du}{X - Y},$$

V étant une fonction arbitraire de v. D'où la proposition suivante qui généralise le théorème que j'avais précédemment obtenu pour les courbes planes :

La détermination des surfaces définies par une relation donnée entre les segments MX, MY, MZ *de normale, limités d'une part au point d'incidence de la normale et d'autre part aux traces respectives de cette droite sur les plans coordonnés, ne dépend que d'une quadrature au plus.*

Cette quadrature a une interprétation remarquable : *C'est l'intégrale de quadrature de la section, par un plan quelconque passant par l'axe ternaire de symétrie du trièdre coordonné, de la surface qui représente précisément la relation imposée entre les segments de normale de la surface cherchée.*

Parmi les cas particuliers intéressants, il y a lieu de mentionner d'une manière toute spéciale celui d'une relation homogène entre (X, Y, Z) : c'est une généralisation de la propriété des normales des coniques rapportées à leurs axes.

La surface représentative étant un cône, l'intégrale d'aire considérée est alors nulle et ϖ se réduit au quotient d'une fonction arbitraire de v par X — Y ; ϖ est donc une fonction homogène de degré — 1 des segments X, Y, Z.

On est d'ailleurs conduit à examiner ce cas particulier à l'occasion de l'étude directe de l'équation (10). D est nul et par suite l'équation en ϖ est celle qui admet pour solution une fonction linéaire à coefficients constants des inverses de X, de Y et de Z. Si l'on pose alors

$$\varpi = f(X, Y, Z),$$

on a

$$\begin{aligned} A\frac{\partial\varpi}{\partial u} + B\frac{\partial\varpi}{\partial v} - C\varpi &= \mathop{\mathrm{S}} \frac{\partial f}{\partial X}\left(A\frac{\partial X}{\partial u} + B\frac{\partial X}{\partial v}\right) - C\varpi \\ &= -C\left[X\frac{\partial f}{\partial X} + Y\frac{\partial f}{\partial Y} + Z\frac{\partial f}{\partial Z} + f\right]. \end{aligned}$$

Dans le cas d'une relation homogène entre les segments de normale, la fonction ϖ *est la fonction homogène de degré* — 1 *la plus générale des variables* X, Y, Z.