

# BULLETIN DE LA S. M. F.

BARRÉ

## Sur quelques surfaces réglées à directrice rectiligne

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 44 (1916), p. 40-44

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1916\\_\\_44\\_\\_40\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1916__44__40_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR QUELQUES SURFACES RÉGLÉES A DIRECTRICE RECTILIGNE :**

PAR M. BARRÉ.

I. La surface réglée la plus générale admettant une directrice rectiligne peut évidemment être représentée, la directrice étant prise pour  $Oz$ , par les équations

$$(1) \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = a(\varphi)\rho + b(\varphi).$$

Les surfaces de vis et les surfaces de vis de seconde espèce <sup>(1)</sup> rentrent dans ce type et l'équation de leurs asymptotiques en termes finis est de la forme

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{\varphi^n}{\rho_0}$$

( $\rho_0, \rho_1 = \text{const.}$ ,  $n = 1$  dans les surfaces de vis,  $n = 2$  dans les surfaces de vis de seconde espèce).

Cette remarque suggère l'idée de rechercher celles des surfaces réglées à directrice rectiligne dont les asymptotiques sont données par l'équation (2) dans laquelle  $n$  a une valeur quelconque, cette étude semblant devoir être particulièrement intéressante pour  $n$  entier. Dans ce dernier cas, on obtiendra une suite dénombrable de surfaces dont les surfaces de vis des deux espèces constitueront les deux premiers termes. Nous commencerons par résoudre un problème un peu plus général.

II. PROBLÈME. — *Déterminer les surfaces réglées à directrice rectiligne dont les asymptotiques aient pour projection orthogonale, sur un plan perpendiculaire à la directrice, des courbes dont l'équation polaire, en prenant pour pôle le pied de la directrice sur le plan de projection, soit*

$$(3) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + f(\varphi),$$

---

<sup>(1)</sup> Nous avons défini antérieurement ces dernières surfaces : ce sont celles pour lesquelles

$$z = h_0(\rho - \rho_0)\varphi \quad (h_0, \rho_0 = \text{const.}).$$

où  $\rho_1$  est une constante dont la valeur caractérise chaque asymptotique et  $f(\varphi)$  une fonction donnée de l'argument  $\varphi$ .

Ce problème peut s'énoncer sous une forme plus géométrique qu'on déduit immédiatement de l'examen de l'équation (3). Il n'est autre que le suivant :

*Déterminer toutes les surfaces réglées à directrice rectiligne dont les asymptotiques aient pour projection orthogonale sur un plan perpendiculaire à la directrice rectiligne la famille de courbes formée par les inverses d'une famille de courbes conchoïdales par rapport au pied de la directrice sur le plan en question.*

On trouve sans peine pour l'équation différentielle du second système d'asymptotiques de la surface

$$(4) \quad \rho[(a + a')\rho + b'] - 2b' \frac{d\rho}{d\varphi} = 0,$$

ou encore, en divisant par  $\rho^2$  l'équation précédente,

$$(4 \text{ bis}) \quad a + a' + \frac{b'}{\rho} + 2b' \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\varphi} = 0.$$

L'équation (4 bis) linéaire en  $\frac{1}{\rho}$  s'intègre immédiatement (1). On pourrait partir de son intégrale générale pour résoudre la question que nous traitons. Il nous paraît préférable d'opérer directement.

Pour que le problème soit résolu, il faut et il suffit dès lors que les fonctions  $a$  et  $b$  satisfassent à l'équation

$$(5) \quad a + a' + b' \left[ \frac{1}{\rho_1} + f(\varphi) \right] + 2b' f'(\varphi) = 0.$$

Mais cette équation doit être vérifiée *quelle que soit* la valeur de  $\rho_1$ , ce qui exige  $b'' = 0$ ; par un choix convenable des coordonnées on voit qu'on ne restreint pas le problème en prenant simplement

$$b = b_0 \varphi \quad (b_0 = \text{const.});$$

---

(1) Il fallait s'attendre à cette réduction de la recherche des asymptotiques à la résolution d'une équation linéaire à cause de la présence de la directrice rectiligne.

en définitive les surfaces cherchées sont déterminées par les conditions

$$(6) \quad b = b_0 \varphi, \quad a + a'' + 2b_0 f'(\varphi) = 0,$$

d'où l'on tire enfin

$$(7) \quad b = b_0 \varphi, \quad a = 2b_0 \left[ \cos \varphi \int^{\varphi} f'(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi - \sin \varphi \int^{\varphi} f'(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi \right];$$

formules dans lesquelles (1) les limites inférieures des intégrales sont intentionnellement laissées indéterminées. On peut à chacune d'elles donner une valeur arbitraire quelconque.

Avant d'aller plus loin, nous ferons observer que les formules (6) sont susceptibles d'une interprétation géométrique intéressante; pour la première, c'est évident : *l'ascension le long de la directrice du point d'appui de la génératrice est proportionnelle à l'azimut de celle-ci.*

De la seconde on tire immédiatement la conclusion suivante :

Si  $[a]$  est une solution de cette équation, la solution générale est

$$(8) \quad a = m \cos \varphi + n \sin \varphi + [a] \quad (m, n = \text{const.}).$$

En portant ces valeurs dans les équations (1), on en conclut que si  $[z]$  correspond à la surface définie par  $[a]$ , la solution générale sera donnée par

$$(9) \quad z = [z] + mx + ny.$$

Comme  $m$  et  $n$  sont des constantes quelconques, on obtient ainsi un mode immédiat de génération de toutes les surfaces correspondant à une même fonction  $f$ , en supposant connue l'une d'elles : *on obtient l'une quelconque des surfaces cherchées en ajoutant sur chaque ordonnée de l'une d'elles la valeur de l'ordonnée correspondante d'un plan absolument quelconque* (2);

(1) L'intégration par parties permet d'écrire aussi pour la seconde

$$(7 \text{ bis}) \quad a = -2b \left[ \cos \varphi \int^{\varphi} f \cos \varphi \, d\varphi + \sin \varphi \int^{\varphi} f \sin \varphi \, d\varphi \right].$$

(2) Il semblerait, d'après la formule, qu'il faille ajouter : passant par l'origine, la suppression de cette restriction est sans importance. On obtient des surfaces qui ne diffèrent que par un déplacement de translation d'ensemble.

le lieu des points obtenus est une surface solution de la question et, en prenant tous les plans possibles passant par un point fixe quelconque, on trouve toutes les solutions.

III. Revenons maintenant au problème posé au début de cette étude. La fonction  $f(\varphi)$  se réduit à  $\frac{\varphi^n}{\rho_0}$  et la seconde équation (6) devient

$$(6 \text{ bis}) \quad a + a' + \frac{2nb_0}{\rho_0} \varphi^{n-1} = 0.$$

Lorsque  $n$  est entier et positif, on a immédiatement une solution particulière de cette équation

$$[a] = -\frac{2nb_0}{\rho_0} [\varphi^{n-1} - (n-1)(n-2)\varphi^{n-3} + \dots + (-1)^p(n-1)(n-2)\dots(n-2p+1)(n-2p)\varphi^{n-2p-1} + \dots],$$

et par suite la surface la plus générale répondant à la question est définie par les équations

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = \rho \left\{ \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi - 2n \frac{b_0}{\rho_0} \right. \\ \quad \times [\varphi^{n-1} - (n-1)(n-2)\varphi^{n-3} + \dots + (-1)^p \\ \quad \times (n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-2p+1)(n-2p)\varphi^{n-2p-1} + \dots] \left. \right\} + b_0 \varphi. \end{array} \right.$$

Lorsque l'exposant  $n$  n'est plus un entier positif, les formules d'intégration (7) résolvent toujours théoriquement le problème, mais on ne trouve plus de solution particulière simple comme dans le cas précédent. Arrêtons-nous par exemple au cas où  $n = -1$ .

On trouve, en appliquant la formule (7 bis),

$$a = \frac{2b_0}{\rho_0} \left[ \sin \varphi \int^{\varphi} \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi + \cos \varphi \int^{\varphi} \frac{\cos \varphi}{\varphi} d\varphi \right].$$

Les intégrales du crochet sont, comme on sait, irréductibles aux fonctions élémentaires. On pourra expliciter les constantes d'inté-

gration en écrivant la formule précédente

$$a = \frac{2b_0}{\rho_0} \left[ \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi + \sin \varphi \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi + \cos \varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^\varphi \frac{\cos \varphi}{\varphi} d\varphi \right].$$

IV. Un cas tout à fait intéressant du problème général étudié au paragraphe II est celui où

$$f(\varphi) = \frac{1}{m} \cos \varphi \quad (m = \text{const.}).$$

Alors

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{m} \cos \varphi,$$

formule qu'on peut écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} [1 + e \cos \varphi] \quad \left( e = \frac{\rho_1}{m} \right).$$

Ces courbes sont des coniques confocales de même axe focal. La formule générale (7 bis) donne ici

$$a = \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi - \frac{b_0}{m} \left( \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right).$$

Conformément à ce qui a été dit plus haut, il suffit d'étudier la surface particulière représentée par l'équation

$$z = -\frac{b_0}{m} \left( \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right) \rho + b_0 \varphi.$$

V. La considération du problème II suggère immédiatement celle du suivant : *Trouver les surfaces réglées à directrice rectiligne dont la seconde famille d'asymptotiques ait pour projection orthogonale sur un plan perpendiculaire à la directrice, une famille de courbes conchoïdales par rapport au pied de la directrice sur ce plan.*

Mais ici on ne trouve, en dehors de la solution sans intérêt constituée par des plans, que l'hélicoïde gauche à plan directeur et les surfaces qui en dérivent comme il est indiqué à la fin du paragraphe II. Les conchoïdes se réduisent alors à des cercles concentriques.

---