BULLETIN DE LA S. M. F.

G. VALIRON

Sur le calcul approché de certaines fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 42 (1914), p. 252-264
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914__42__252_1>

SUR LE CALCUL APPROCHÉ DE CERTAINES FONCTIONS ENTIÈRES;

Par M. G. Valiron.

M. P. Dienes [1] a montré l'intérêt que peut présenter, au point de vue de l'étude de l'allure d'une fonction analytique dans le voisinage de certains points singuliers, la connaissance de certaines propriétés asymptotiques des fonctions entières à coefficients positifs réguliers et à variable positive x. L'idée fondamentale qui dirige M. Dienes dans ses calculs est la suivante : sous certaines

[1] P. et V. Dienes, *Recherches nouvelles sur les singularités des fonctions analytiques* (*Annales de l'École Normale*, 1911, p. 389); *voir* aussi P. Dienes, *Leçons sur les singularités des fonctions analytiques*, Chap. III et IV.

conditions de régularité des coefficients, la somme de la série est asymptotiquement équivalente à la somme d'un groupe de termes entourant le terme maximum, le nombre des termes de ce groupe étant égal au produit du rang du terme maximum par un nombre qui tend vers zéro lorsque la variable x croît indéfiniment. Cette idée n'est d'ailleurs pas nouvelle, elle a été utilisée presque simultanément par MM. Borel, Lindelöf et Le Roy (¹), et exprimée explicitement par le second de ces auteurs dans l'étude de certains cas particuliers. Je me propose de donner ici, sous des hypothèses assez larges, une démonstration extrêmement simple de la propriété précédente; j'en indiquerai ensuite quelques conséquences.

1. Nous considérons une fonction entière de la variable positive x, à coefficients positifs

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n x^n, \qquad c_n = e^{-G(n)}; \tag{1}$$

nous supposerons que la fonction $G(x)$ est une fonction continue ayant des dérivées des deux premiers ordres et que la dérivée seconde $G''(x)$ est positive, tout au moins à partir d'une valeur n_0 de x.

Il résulte de là que, pour chaque valeur de x supérieure à un nombre x_0, $f(x)$ possède un terme maximum, sauf pour certains x pour lesquels il y en a deux; le rang de ce terme ou de ces termes est l'un des entiers entre lesquels est comprise la racine ξ de l'équation en y

$$G'(y) = \log x. \tag{2}$$

Nous allons chercher à imposer à $G(y)$ des conditions supplémentaires de façon que, $\varepsilon(x)$ étant un nombre positif tendant vers zéro lorsque x croît indéfiniment, mais assez lentement pour que le produit $x\varepsilon(x)$ ait pour limite $+\infty$, on ait l'égalité

(¹) Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*, Chap. V. — Lindelöf, *Mémoire sur les fonctions entières*, p. 40 (*Acta Societatis scientiarum Fennicæ*, 1902). — Le Roy, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1900, p. 245. La formule asymptotique de M. Le Roy a été retrouvée, sous des hypothèses plus larges, par M. Denjoy dans sa thèse, *Sur les produits canoniques d'ordre infini* (*Journal de Mathématiques*, 1910, p. 89).

asymptotique

$$(3)\qquad f(x) \sim \sum_{n=N_1(x)}^{n=N(x)} c_n x^n \quad (^1),$$

où $N_1(x)$ et $N(x)$ désignent les parties entières de $\xi[1 - \varepsilon(\xi)]$ et $\xi[1+\varepsilon(\xi)]$.

Nous désignerons par n_0 la partie entière de ξ et par N la partie entière de $\xi\,\frac{\varepsilon(\xi)}{2}$; et nous grouperons les termes dont le rang est supérieur à n_0 de la façon suivante :

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} c_n x^n = \sum_{i=0}^{i=\infty} S_i(x), \qquad S_i(x) = \sum_{n_i+1}^{n_{i+1}} c_n x^n;$$
$$n_{i+1} = n_i + N \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Comparons les termes de rang q dans $S_{i+1}(x)$ et $S_i(x)$ $(i>0)$, on a

$$(4)\qquad \frac{c_{n_{i+1}+q}\, x^{n_{i+1}+q}}{c_{n_i+q}\, x^{n_i+q}} = x^N e^{-G(n_{i+1}+q)+G(n_i+q)};$$

or, d'après les hypothèses faites sur $G(x)$, nous avons

$$\begin{aligned} G(n_{i+1}+q) - G(n_i+q) &= N\,G'(n_i+q) + \frac{N^2}{2} G''(n_i+q+\theta N) \\ &> N\,G'(n_i+q) > N\,G'(n_1) \\ &\quad (0<\theta<1); \end{aligned}$$

le logarithme du rapport (4) est donc inférieur à

$$N \times [\log x - G'(n_1)],$$

ou, en remplaçant $\log x$ par $G'(\xi)$ puis par $G'(n_0+1)$ qui lui est supérieur, on voit que le logarithme du rapport (4) est inférieur à

$$\alpha(x) = -N(N-1)\,G''(N_1), \qquad N_1 = n_0 + 1 + \theta(N-1) \qquad (0<\theta<1).$$

Par suite, $S_{i+1}(x)$ sera inférieur au produit $e^{\alpha(x)} S_i(x)$, et nous aurons

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} c_n x^n < S_0(x) + \frac{S_1(x)}{1-e^{\alpha(x)}} < \frac{S_0(x)+S_1(x)}{1-e^{\alpha(x)}} \leq \frac{\sum_{n_0+1}^{N(x)} c_n x^n}{1-e^{\alpha(x)}}.$$

---

(1) On sait qu'une telle formule signifie que le rapport des deux membres a pour limite *un* lorsque x croît indéfiniment.

Nous devons donc supposer, pour établir la propriété en vue, que $\alpha(x)$ a pour limite $-\infty$ lorsque x croît indéfiniment, ce qui revient à dire que l'on a

$$(a)\qquad \lim_{x=\infty} \varepsilon(x) x \sqrt{G''(x)} = +\infty.$$

Pour que l'on puisse trouver une fonction $\varepsilon(x)$ vérifiant la condition (a), il faut et il suffit que $G''(x)$ vérifie la condition

$$(\mathrm{I})\qquad \lim_{x=\infty} x^2\, G''(x) = \infty;$$

c'est une condition de *régularité*, en ce sens qu'elle ne limite pas la croissance de la fonction $f(x)$. Si $\varepsilon(x)$ vérifie la condition (a), on voit que la somme des termes de rang supérieur à n_0 est asymptotiquement égale à la somme de ceux de ces termes dont le rang est inférieur ou égal à $N(x)$, et nous avons même un renseignement sur la façon dont le rapport de ces deux sommes tend vers 1. De plus le rapport de l'un des termes que l'on peut négliger au terme de rang n_0 et par suite au terme maximum tend vers zéro, et plus exactement est inférieur à $e^{\alpha(x)}$.

On fera un calcul analogue avec les n_0 premiers termes, en ayant soin de mettre à part, s'il y a lieu, les premiers termes pour lesquels $G''(x)$ est négatif, ce qui ne change rien au résultat, ces termes ayant une somme dont le rapport à la somme des n_0 termes est inférieure à $h : n_0$, h étant fini. Nous aurons ainsi le résultat :

I. *Si l'on suppose que, dans la série* (1), *la fonction* $G(n)$ *satisfait à la condition* (I) *écrite ci-dessus, et si l'on désigne par* $\varepsilon(x)$ *une fonction positive tendant vers zéro,* $x\varepsilon(x)$ *tendant vers l'infini, lorsque* x *croît indéfiniment, et vérifiant la condition* (a); *on aura l'égalité asymptotique*

$$(3)\qquad f(x) \sim \sum_{N_1(x)}^{N(x)} c_n x^n;$$

$N(x)$ *et* $N_1(x)$ *étant les nombres définis plus haut. De plus, l'un quelconque des termes négligés au second membre de l'égalité* (3) *est au terme maximum dans un rapport qui tend vers zéro lorsque* x *croît indéfiniment.* Plus exactement le rapport entre le premier et le deuxième membre de l'égalité (3) qui est supérieur à *un* est inférieur à

$$\frac{1}{1-e^{\alpha_1(x)}}, \qquad \alpha_1(x) = -\frac{[\xi\,\varepsilon(\xi)-2]^2}{4}\,G''(\xi_1),$$

$G''(\xi_1)$ désignant le minimum de $G''(x)$ lorsque x varie entre $N_1(x)$ et $N(x)$.

On remarquera que, dans le cas où $G''(x)$ reste borné pour $x=\infty$, la condition (a) exige expressément que $x\,\varepsilon(x)$ ne soit pas borné; mais si $G''(x)$ a pour limite $+\infty$, on pourra restreindre le nombre des termes dont la somme détermine asymptotiquement $f(x)$, on retrouvera le résultat connu : $f(x)$ est asymptotiquement égal, dans ce cas, à la somme de ses deux plus grands termes. On pourra également rechercher si l'on peut choisir $\varepsilon(x)$ de telle façon que la somme des termes négligés dans le second membre de l'égalité (3) soit au terme maximum dans un rapport tendant vers zéro, on verra que l'on doit resserrer la condition (I).

Enfin il est clair que le résultat énoncé ci-dessus reste vrai si l'on multiplie les coefficients c_n par $(1+\eta_n)$, η_n tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment, car le rapport de $S_{i+1}(x)$ à $S_i(x)$ sera multiplié par une expression de la forme $(1+\varepsilon)$; et il suffira d'autre part de négliger dans la somme des n_0 premiers termes les $\varepsilon(\xi)n_0$ premiers termes.

2. Soit $f(x)$ une fonction entière dont les coefficients sont de la forme $c_n=(1+\eta_n)e^{-G(n)}$, $G(x)$ vérifiant la condition (I), considérons la fonction

$$(5)\qquad F(x)=\sum_0^\infty (1+\eta'_n)\,c_n\,\varphi(n)\,x^n, \qquad \lim_{n=\infty}\eta'_n=0,$$

où $\varphi(x)$ désigne une fonction continue, dérivable deux fois, que nous supposerons d'abord vérifier l'égalité suivante :

$$(6)\quad \log\varphi(x)=\psi(x)=p\log x+A_1(\log_2 x)^{\alpha_1}+\ldots+A_i(\log_{i+1}x)^{\alpha_i}$$

(les constantes α_i étant positives, p et les A_i réels). On voit que l'on a

$$\lim_{x=\infty} x^2\,\psi''(x)=p, \qquad \lim_{x=\infty}\frac{\varphi[x(1+\alpha)]}{\varphi(x)}=(1+\alpha)^p;$$

la première de ces égalités montre que $F(x)$ satisfait comme $f(x)$ aux conditions de l'énoncé (I), la fonction $\varepsilon(x)$ peut être prise la même pour les deux fonctions; la seconde égalité montre que le rang du terme maximum de $F(x)$ est compris entre les nombres que nous avons appelés $N_1(x)$ et $N(x)$; nous aurons donc

$$F(x) \sim \sum_{N'_1(x)}^{N'(x)} c_n \varphi(n)(1+\eta'_n)x^n \sim \varphi(\xi) \sum_{N_1(x)}^{N(x)} (1+\eta_n)c_n x^n \sim \varphi(\xi) f(x).$$

Ainsi, pour toute fonction $F(x)$ où $\varphi(x)$ a la forme (6), $f(x)$ satisfaisant à l'énoncé (I), on a l'égalité asymptotique

$$(7) \qquad F(x) \sim \varphi(\xi) f(x), \qquad G'(\xi) = \log x,$$

qui suffit pour toutes les applications de M. P. Dienes. On pourrait avec la forme (6) de la fonction $\varphi(x)$ obtenir un résultat plus général, mais moins précis en supposant seulement que $x^2 G''(x)$ reste supérieur à un nombre positif (1). Je me bornerai à indiquer la proposition générale que l'on déduit de I.

II. *Soit* $F(x)$ *une fonction définie par l'égalité* (5), *la fonction* $f(x)$ *correspondant à* $\varphi(x) = 1$ *satisfaisant à l'énoncé* (I) *et* $\varphi(x)$ *vérifiant les conditions suivantes :*

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\psi''(x)}{G''(x)} < 1, \qquad \psi(x) = \log \varphi(x);$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi[x + \theta x \varepsilon(x_1)]}{\varphi(x)} = 1, \qquad \left| \frac{x_1}{x} - 1 \right| \leqq \varepsilon(x) \qquad (0 < \theta < 1),$$

$\varepsilon(x)$ *étant une fonction définie dans* (I); *dès lors on aura encore l'égalité* (7).

C'est évidemment la deuxième des conditions imposées à $\varphi(x)$ qui limite sa croissance; on voit par exemple que si $\varphi(x)$ est de la forme e^{x^α}, il faudra que $\alpha x^{\alpha-1} [G''(x)]^{-\frac{1}{2}}$ tende vers zéro; pour les fonctions d'ordre fini ou infini, il faudra donc que α soit moindre que $\frac{1}{2}$; on peut dire que pour de telles fonctions la méthode s'appli-

(1) M[lle] S. Tillinger a énoncé dans les *C. R. Acad. des Sc.* (10 février 1913) un résultat du genre de celui que l'on obtient ainsi, en supposant que $\varphi(x)$ est un polynome, mais avec la seule hypothèse que les coefficients c_n sont réguliers, ce qui me semble devoir être précisé.

quera à des fonctions $\varphi(x)$ croissant moins vite que $e^{x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$. Mais pour les fonctions d'ordre nul, $\varphi(x)$ pourra croître beaucoup plus vite. Il est d'ailleurs bien évident que la croissance de $\varphi(x)$ (ou sa décroissance) doit satisfaire à certaines conditions pour que l'on ait le droit d'écrire l'égalité (7); ces conditions sont-elles celles que nous avons écrites? Il semble bien que oui; si nous prenons par exemple la fonction de M. Lindelöf

$$f(x) = \mathrm{E}_\sigma(x) = \sum_0^\infty \left(\frac{x}{n^{\frac{1}{\sigma}}}\right)^n,$$

on a

$$\mathrm{G}'(x) = \frac{\log x + 1}{\sigma}, \qquad \mathrm{G}''(x) = \frac{1}{\sigma x}, \qquad \xi = \frac{x^\sigma}{e};$$

on peut donc prendre pour $\varepsilon(x)$ une fonction de la forme $\mathrm{A}(x) : \sqrt{x}$, $\mathrm{A}(x)$ croissant indéfiniment aussi lentement que l'on veut, et par suite nous pourrons avoir $\log\varphi(x) = \frac{\sqrt{x}}{\theta(x)}$, $\theta(x)$ croissant indéfiniment très lentement, par exemple $\theta(x) = \log_p x$, on aura alors

$$\sum_0^\infty e^{\frac{\sqrt{n}}{\log_p n}} \left(\frac{x}{n^{\frac{1}{\sigma}}}\right)^n \sim e^{\frac{\sqrt{\xi}}{\log_p \xi}} \mathrm{E}_\sigma(x), \qquad \xi = \frac{x^\sigma}{e};$$

mais l'égalité que l'on obtiendrait en faisant $\log\varphi(x) = \sqrt{x}$ serait inexacte.

On voit donc quel est le champ d'application de la méthode de M. Dienes, elle ne permettra d'étudier la croissance des moyennes exponentielles, par exemple, que pour des points singuliers où la fonction croît moins vite qu'une fonction entière d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$. Lorsque la fonction croît plus vite il faudra employer la formule asymptotique de M. Le Roy.

3. Considérons de nouveau une fonction de la forme (1), $\mathrm{G}''(x)$ vérifiant la condition (I); nous avons vu que l'on a

$$f(x) = \frac{1}{1 - \theta e^{\alpha_1(x)}} \sum_{\mathrm{N}_1(x)}^{\mathrm{N}(x)} c_n x^n \qquad (0 < \theta < 1), \tag{8}$$

$\alpha_1(x)$ étant connu en fonction de $\varepsilon(x)$; cette formule suppose que la condition $G''(x) > 0$ est vérifiée dès la valeur 1; dans le cas contraire il faudra ajouter au second membre de l'égalité (8) un polynome. Pour calculer le second membre de (8) on peut former le rapport du terme de rang $n_0 + q$ $[|q| < \xi\varepsilon(\xi)]$ à l'expression

$$T(x) = x^{\xi} e^{-G(\xi)},$$

ce rapport a pour logarithme

$$\beta(q) = -\frac{(q+n_0-\xi)^2}{2} G''[\xi + \theta(q+n_0-\xi)] \qquad (0 < \theta < 1);$$

pour simplifier cette expression, faisons l'hypothèse que, θ_1 *restant compris entre* -1 *et* $+1$, *on a*

$$\text{(II)} \qquad \lim_{x=\infty} \frac{G''[x + \theta_1 x\,\varepsilon(x)]}{G''(x)} = 1,$$

et désignons par $\varepsilon_1(x)$ le maximum de la différence

$$\left| \frac{G''[x + \theta_1 x\,\varepsilon(x)]}{G''(x)} - 1 \right|$$

lorsque θ_1 varie entre -1 et $+1$. On voit que l'on aura

$$h' + 2\sum_{1}^{2N} e^{-q^2[1+\varepsilon_1(\xi)]G''(\xi)} < \frac{\sum_{N_1(x)}^{N(x)} c_n x^n}{T(x)} < h + 2\sum_{1}^{2N} e^{-q^2[1-\varepsilon_1(\xi)]G''(\xi)}$$
$$(h' < 4), \qquad\qquad (h < 4).$$

Or la méthode de groupement des termes du n° 1 montre que l'on a

$$\sum_{1}^{2N} e^{-q^2(1+\eta)G''(\xi)} = (1 - \theta' e^{-\alpha_2(x)}) \sum_{1}^{\infty} e^{-q^2(1+\eta)G''(\xi)} \qquad (0 < \theta' < 1),$$

$$\alpha_2(x) = +\frac{\{(\xi[\varepsilon(\xi)] - 2)^2\}}{8} G''(\xi)(1+\eta);$$

comme enfin

$$\sum_{1}^{\infty} e^{-q^2(1+\eta)G''(\xi)} = h'' + \int_0^{\infty} e^{-x^2(1+\eta)G''(\xi)} = h + \sqrt{\frac{\pi}{2(1+\eta)G''(\xi)}},$$

on voit que l'on obtient une expression asymptotique de $f(x)$ si l'on suppose que $G''(x)$ tend vers zéro, c'est la formule de M. Le Roy qui se trouve complétée par l'introduction de l'infiniment petit $\varepsilon(x)$; l'hypothèse (II) est celle de M. Denjoy, mais sous une forme un peu différente, elle est vérifiée en particulier si $G''(x)$ et $x^2 G''(x)$ sont monotones, ce qui est l'hypothèse de M. Le Roy. En résumé on voit que :

III. *Si* $G''(x)$ *vérifie les conditions* (I), (II) *et tend vers zéro, on a l'égalité*

$$(9) \qquad f(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{G''(\xi)}}\, e^{\xi G'(\xi) - G(\xi)}, \qquad \log x = G'(\xi);$$

et plus exactement le premier membre égale le produit du second par le facteur

$$1 + \theta\left[e^{\frac{\alpha_1(x)}{2}} + 5\sqrt{G''(\xi)} + \varepsilon_1(x)\right] \qquad (-1 < \theta < +1).$$

On déterminera $\varepsilon(x)$ de façon à obtenir la meilleure approximation. Par exemple, pour

$$f(x) = \sum e^{A\sqrt{n}} \left(\frac{x}{n^{\frac{1}{\sigma}}}\right)^n,$$

on devra prendre $\varepsilon(x) = h\sqrt{\frac{\log x}{x}}$, et l'on trouvera

$$f(x) = \left(1 + 8\theta\sqrt{\frac{e\sigma^2 \log x}{x}}\right)\sqrt{\frac{2\pi\sigma x^\sigma}{e}}\, e^{\frac{x^\sigma}{e\sigma} + A\sqrt{\frac{x^\sigma}{e}} + \frac{A^2\sigma}{8}},$$

formule qui justifie une remarque faite plus haut. On étendra dans une certaine mesure le résultat au cas où l'on a

$$c_n = (1 + \eta_n)\, e^{-G(n)}.$$

Lorsque $G''(x)$ ne tend pas vers zéro nos calculs ne nous donnent plus de formule asymptotique, mais si l'on suppose que $G''(x)$ a une limite A, on peut encore obtenir un résultat. Dans ce cas, les conditions (I) et (II) sont réalisées ; nous choisirons $\varepsilon(x)$ de la façon suivante : désignons par $\varepsilon_1(x)$ le maximum de $|G''(x') - A|$ pour $x' > \frac{x}{2}$; nous prenons $\varepsilon(x)$ de façon que la condition (a) ait lieu et que $Ax^2[\varepsilon(x)]^2\, \varepsilon_1(x)$ tende vers zéro, par exemple

$$A x^2 [\varepsilon(x)]^2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1(x)}}.$$

Dès lors, le rapport du terme de rang $n_0 + q$ à $T(x)$ sera égal à

$$[1+\eta(x)]e^{-(q+n_0-\xi)^2\frac{A}{2}}, \qquad \lim_{x=\infty}\eta(x)=0,$$

et nous aurons

$$f(x) \sim T(x)e^{-\xi^2\frac{A}{2}}\sum_{N_1(x)}^{N(x)} e^{-\frac{A}{2}n^2}e^{A\xi n};$$

ou enfin, en posant

$$\psi(q,x)=\sum_0^\infty q^{n^2}x^n \qquad (|q|<1),$$

et en appliquant encore une fois le théorème (I), nous obtenons

$$f(x) \sim \psi\left(e^{-\frac{A}{2}}, e^{A\xi}\right)e^{-\frac{A}{2}\xi^2}e^{\xi G'(\xi)-G(\xi)};$$

on peut d'ailleurs remplacer $\psi(q,x)$ par

$$\psi(q,x)+\psi\left(q,\frac{1}{x}\right)-1=S(q,x),$$

le produit

$$S\left(e^{-\frac{A}{2}}, e^{A\xi}\right)e^{-\frac{A}{2}\xi^2}$$

a pour période *un* et se rattache aux fonctions elliptiques θ.

4. Il est clair que la formule asymptotique (9) convient pour d'autres fonctions que celles pour lesquelles elle a été obtenue. Désignons par $\varepsilon_2(x)$ une fonction tendant vers zéro de telle façon que, $\varepsilon(x)$ étant la fonction introduite dans l'énoncé (I), le produit

$$\varepsilon_2(x)\,\varepsilon(x)\,x\sqrt{G''(x)}$$

ait pour limite zéro, et formons la suite de nombres entiers n_p définis par la relation

$$n_{p+1}-n_p \leqq \varepsilon_2(n_p)\,\varepsilon(n_p)\,n_p < n_{p+1}-n_p+1,$$

en supposant que le produit $\varepsilon_2(x)\,\varepsilon(x)\,x$ croît indéfiniment; on voit dès lors, en se reportant aux énoncés (I) et (III), que, $G''(x)$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé III, on aura encore

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}\varepsilon_2(n_p)\,\varepsilon(n_p)\,n_p e^{-G(n_p)}x^{n_p} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{G''(\xi)}}\,e^{\xi G'(\xi)-G(\xi)}.$$

J'ai fait cette remarque bien simple pour montrer quelle est la nature de l'indétermination du problème qui consisterait à déduire de l'égalité (9) des inégalités pour les coefficients c_n de la fonction $f(x)$; je vais maintenant appliquer à la résolution de ce problème d'inversion la méthode que j'ai indiquée dans ma thèse (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1913, p. 117). Je laisserai au lecteur le soin de vérifier que le résultat ainsi obtenu peut être considéré comme très satisfaisant si l'on tient compte de la remarque précédente. Je m'appuierai sur la proposition suivante (*loc. cit.*, p. 125) que j'énonce dans le cas particulier des coefficients et variable réels. Soit $f(x) = \Sigma c_n x^n$ une fonction entière quelconque, on peut former une suite de nombres positifs $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n, \ldots,$ non décroissants et non bornés, tels que l'on ait

$$c_n \leqq c_0(\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \ldots \mathfrak{R}_n)^{-1},$$

l'égalité ayant lieu lorsque $\mathfrak{R}_n < \mathfrak{R}_{n+1}$, le nombre des quantités $\mathfrak{R}_n$ qui sont inférieures ou égales à x, et que j'appellerai $n(x)$, est le rang du terme maximum de $f(x)$, terme dont le logarithme a par suite pour valeur

$$\int_0^x n(x)\frac{dx}{x} + \log c_0,$$

et l'on a

$$(10) \quad f(x) = \left\{ 1 + 2\theta\, n \left[x + \frac{x}{n(x)} \right] \right\} c_0 e^{\int_0^x n(x)\frac{dx}{x}} \qquad (0 < \theta < 1).$$

La formule (10) donne une valeur approchée de $n(x)$, donc de $\mathfrak{R}_n$ lorsque l'on connaît $f(x)$ ou sa valeur approchée, on en déduira à la fois la limite supérieure de c_n et la densité des valeurs de n pour lesquelles cette limite est atteinte.

Pour ne pas compliquer les calculs, je me bornerai au cas où l'on a

$$(11) \qquad f(x) = e^{\frac{x^\sigma}{e\sigma} + C \log x + h(x)} \qquad [A < h(x) < B],$$

et je supposerai $c_0 = 1$, ce qui ne diminue pas la généralité; une première application de l'égalité (10) donnerait

$$n(x) \sim \frac{x^\sigma}{e},$$

de sorte que (10) et (11) donnent

$$\int_0^x n(x)\frac{dx}{x} = \frac{x^\sigma}{e\sigma} + \mathrm{C}\log x + h(x) - \sigma\,\theta(x)\log x,$$

$\theta(x)$ étant une fonction positive qui reste finie. Nous tirons de là les deux inégalités

$$n(x) < \frac{x'^\sigma - x^\sigma}{\log x' - \log x}\,\frac{1}{e\sigma} + \mathrm{C} + \frac{\sigma\,\theta(x)\log x + \mathrm{B} - h(x)}{\log x' - \log x} \qquad (x' > x),$$

$$n(x) > \frac{x^\sigma - x''^\sigma}{\log x - \log x''}\,\frac{1}{e\sigma} + \mathrm{C} - \frac{\sigma\,\theta(x)\log x + \mathrm{B} - h(x)}{\log x - \log x''} \qquad (x'' < x);$$

nous déterminerons x' et x'' pour que le second membre de la première inégalité soit minimum, celui de la deuxième maximum, et nous trouverons

$$(12) \quad n(x) = \frac{x^\sigma}{e} + \alpha\frac{\sigma}{e}\sqrt{2e\left[\theta(x)\log x + \frac{\mathrm{B} - h(x)}{\sigma}\right]x^\sigma} + \mu\log x,$$
$$-1 < \alpha < +1 \qquad (|\mu| \text{ fini}).$$

Nous tirons d'abord de là l'égalité

$$x^\sigma = e\left[n(x) + \lambda\sqrt{n(x)\log n(x)}\right] \qquad (\lambda \text{ fini}),$$

qui montre que, lorsqu'on change n en $n + k\sqrt{n\log n}$, k étant un certain nombre fixe, $\mathfrak{R}_n$ augmente et que par suite l'égalité

$$c_n = (\mathfrak{R}_1\,\mathfrak{R}_2\,\ldots\,\mathfrak{R}_n)^{-1}$$

a lieu une fois au moins entre deux telles valeurs de n. En s'appuyant sur ce résultat et en procédant à un groupement des termes [groupes de $k\sqrt{n(x)\log n(x)}$ termes à partir du terme maximum], on verra que, dans l'égalité (10), on peut remplacer $n\left(x + \frac{x}{n(x)}\right)$ par $k'\sqrt{n(x)\log n(x)}$, ce qui montre que l'on aura

$$\theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sigma}\,\frac{\log_2 x}{\log x} + \frac{\lambda'}{\log x} \qquad (\lambda' \text{ fini}).$$

Il reste à calculer le produit $(\mathfrak{R}_1\,\mathfrak{R}_2\ldots\mathfrak{R}_n)^{-1}$ que j'appellerai e^{-G_n}. On a

$$n(x)\log x - G_{n(x)} = \int_0^x n(x)\frac{dx}{x} = \frac{x^\sigma}{e\sigma} + \mathrm{C}\log x + h(x) - \sigma\,\theta(x)\log x,$$

et G_n sera donné par l'égalité

$$G_n = n \log x - \frac{x^\sigma}{e\sigma} - C \log x - h(x) + \sigma\,\theta(x) \log x,$$

où x est calculé en fonction de $n = n(x)$ par l'égalité (12). Après des calculs bien simples, on trouvera

$$\begin{aligned} G_n = {} & \frac{n \log n}{\sigma} - \theta(x)(\alpha^2 - 1)(\log n + 1) - \alpha^2[B - h(x)] \\ & - h(x) - C\frac{\log n + 1}{\sigma} + \varepsilon(n) \end{aligned}$$
$$[\lim_{n=\infty} \varepsilon(n) = 0,\ n = n(x)],$$

et en remplaçant $\theta(x)$ par sa valeur et en prenant $\alpha = 1$ et $\alpha = 0$ pour avoir le minimum et le maximum de G_n, on obtiendra

$$-G_n < -\frac{n \log n}{\sigma} + C\frac{\log n + 1}{\sigma} + B + \varepsilon(n),$$
$$-G_n > -\frac{n \log n}{\sigma} + C\frac{\log n + 1}{\sigma} - \frac{\log n}{2} - \frac{\log_2 n}{2} - D,$$

D étant un nombre fini, dont on pourrait d'ailleurs préciser la valeur. En passant aux coefficients c_n, on a les inégalités

$$c_n < (1 + \varepsilon_n)\, n^{-\frac{n}{\sigma}} (ne)^{\frac{C}{\sigma}} e^{B} \qquad (n > n_0),$$
$$c_n > n^{-\frac{n}{\sigma}} (ne)^{\frac{C}{\sigma}} \frac{1}{e^{D}\sqrt{n \log n}} \qquad (n = n_p,\ n_{p+1} < n_p + k\sqrt{n_p \log n_p}),$$

qui permettent de distinguer les coefficients de deux fonctions satisfaisant à l'égalité (11) et pour lesquelles les valeurs de C diffèrent de plus de $\frac{1}{2}$.

On étendra facilement ce résultat à des fonctions plus compliquées que celle considérée ci-dessus et à des fonctions de croissance plus rapide; c'est l'ordre de grandeur de $[G''(x)]^{-\frac{1}{2}}$ qui jouera le rôle du nombre $\frac{1}{2}$.

FIN DU TOME XLII.