BULLETIN DE LA S. M. F.

BOULIGAND

Sur les équations des petits mouvements de surface des fluides parfaits

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 149-180

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__149_0>

SUR LES ÉQUATIONS DES PETITS MOUVEMENTS DE SURFACE DES FLUIDES PARFAITS;

PAR M. BOULIGAND.

I. — COMMENT SE POSE LE PROBLÈME DES ONDES LIQUIDES [1].

Proposons-nous de rechercher comment se pose le problème des ondes liquides, en nous bornant à l'étude des petits mouvements d'un fluide parfait.

Soit un liquide incompressible, contenu dans un vase à parois fixes. Ce liquide étant d'abord au repos, provoquons son mouvement par une cause agissant pendant un temps très court. Il y aura un potentiel des vitesses. Prenons pour plan xOy le plan de la surface libre au repos, pour axe Oz la verticale ascendante. Soient u, v, w les composantes de la vitesse de la molécule liquide dont les coordonnées sont x, y, z à l'instant t. Il existe une fonction $\varphi(x, y, z, t)$ telle qu'on ait

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

L'équation de continuité s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Soit ρ la densité du liquide, p la pression au point xyz. Nous avons

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -z - \frac{p}{\rho}, \tag{2}$$

en supposant que, dans le système d'unités adopté, on a pris, pour unité d'accélération, l'accélération g de la pesanteur.

---

[1] *Voir* les deux articles de M. HADAMARD, *Sur les ondes liquides* (*Comptes rendus* des 7 et 21 mars 1910).

Montrons alors que, si l'on connaît la forme de la surface libre à chaque instant, on peut en déduire le mouvement intérieur du fluide.

En effet prenons pour inconnue la dérivée ψ par rapport au temps du potentiel des vitesses. ψ est aussi une fonction harmonique

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0. \tag{3}$$

Cherchons la valeur de ψ sur la surface libre (S) du liquide. En négligeant les carrés des vitesses, l'équation (2) nous donnera

$$\psi=-z-\frac{p}{\rho}.$$

Sur la surface (S), la pression est constante : rien n'empêche de la supposer nulle, l'action d'une pression constante s'exerçant en tous les points d'un fluide n'ayant aucune influence sur ses mouvements. Nous pouvons donc écrire

$$\psi_S=-z. \tag{4}$$

D'autre part, les points situés sur la paroi mouillée Σ sont animés de vitesses tangentes à cette paroi. Nous avons donc constamment

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_\Sigma=0,$$

et par suite

$$\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_\Sigma=0. \tag{5}$$

Donc, la surface libre une fois connue à chaque instant, nous pourrons déterminer la fonction ψ comme solution d'un problème mixte dont les données sont l'équation indéfinie (3) et les conditions aux limites (4) et (5).

Pratiquement, nous pouvons regarder un tel problème comme résolu si nous connaissons la fonction de Green correspondante $\mathcal{G}(M,P)$. Soit r la distance MP. Par définition $\mathcal{G}(M,P)$ est une fonction harmonique des coordonnées du point M. En outre, elle devient infinie en P comme $\frac{1}{r}$, elle s'annule sur la surface libre (S) et sa dérivée normale s'annule sur la paroi mouillée (Σ).

Si nous considérons les dénivellations de la surface libre comme infiniment petites et du premier ordre, les variations de cette fonction de Green sont aussi infiniment petites et du premier ordre (comme le montre la formule donnée par M. Hadamard pour calculer la variation de la fonction de Green).

Or calculons la fonction ψ : pour cela entourons le point P d'une sphère s de très petit rayon : en considérant toutes les dérivées normales comme prises suivant la normale intérieure, nous avons

$$\int\int_{\mathrm{S}}\left(\psi\frac{d\mathcal{G}}{dn}-\mathcal{G}\frac{d\psi}{dn}\right)d\mathrm{S}+\int\int_{\Sigma}=\int\int_{s},$$

les trois intégrales portant sur le même élément. En remarquant que le second membre est indépendant du rayon de s et en faisant tendre ce dernier vers zéro, nous avons

$$(6)\qquad \psi(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\int\int_{\mathrm{S}}\psi_{\mathrm{S}}\frac{d\mathcal{G}}{dn}d\mathrm{S}=-\frac{1}{4\pi}\int\int_{\mathrm{S}}z_{\mathrm{M}}\frac{d\mathcal{G}}{dn}d\mathrm{S}_{\mathrm{M}}.$$

De ce qui précède il résulte que la partie principale de $\psi(x,y,z,t)$ peut s'obtenir en remplaçant $\mathcal{G}$ par la fonction de Green $\mathcal{G}_1$ du volume V délimité par (Σ) et le plan de la surface libre au repos, et en remplaçant aussi l'élément de la surface liquide par sa projection sur ce plan. Nous remplaçons ainsi la recherche de ψ par celle d'une fonction remplissant la même équation indéfinie (3) et les mêmes conditions aux limites (4) et (5), sous cette réserve que la condition (5) est portée non plus par la surface mobile de liquide, mais bien par le plan fixe $z=0$ (nous l'appellerons dans la suite le plan S).

Soient M un point du plan S, P un point intérieur au fluide, P' son symétrique par rapport au plan S. Soit d'autre part $\gamma(\mathrm{M},\mathrm{P})$ la fonction de Neumann relative au volume V_1, limité par la surface (Σ) et sa symétrique par rapport au plan S. [Nous supposerons, dans ce qui suivra, que, en tous les points de la courbe (C) d'intersection de (Σ) et du plan (S), les plans tangents à Σ sont verticaux, de la sorte V_1 sera supposé limité par une surface qui n'offre pas de points anguleux.] Nous avons évidemment

$$\mathcal{G}_1(\mathrm{M},\mathrm{P})=\gamma(\mathrm{M},\mathrm{P})-\gamma(\mathrm{M},\mathrm{P}').$$

Nous désignerons par ξ, η, ζ les coordonnées de M (ici $\zeta = 0$) et par x, y, z celles de P.

L'équation (6) peut s'écrire, après ce que nous avons dit,

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int\int_S z_M \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \zeta_{\zeta=0}} dS_M.$$

D'ailleurs

$$\mathcal{G}_1(\xi, \eta, 0, x, y, z) = \gamma(\xi, \eta, 0, x, y, z) - \gamma(\xi, \eta, 0, x, y, -z);$$

en outre la symétrie du volume V_1 nous permet d'écrire

$$\gamma(\xi, \eta, \zeta, x, y, z) \equiv \gamma(\xi, \eta, -\zeta, x, y, -z);$$

d'où, en dérivant par rapport à ζ et en faisant $\zeta = 0$,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \zeta}(\xi, \eta, 0, x, y, z) + \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta}(\xi, \eta, 0, x, y, -z) = 0.$$

Nous en concluons

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \zeta_{\zeta=0}} = 2 \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta_{\zeta=0}},$$

donc

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int\int_S z_M \frac{\partial \gamma}{\delta \zeta_{\zeta=0}} dS_M.$$

Cherchons à exprimer que le point P se trouve sur la surface libre : s'il en est ainsi sa cote z est une fonction de x, y, t et nous avons

$$w = \frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Conformément à l'hypothèse de petits mouvements, négligeons les produits $u \frac{\partial z}{\partial x}$ et $v \frac{\partial z}{\partial y}$. Nous avons

$$w = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

ou, en dérivant par rapport au temps,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{7}$$

ψ au voisinage du plan S se comporte comme un potentiel de double couche. Donc sa dérivée normale $\frac{\partial}{\partial z}$ est continue pour $z = 0$.

Nous avons d'ailleurs

$$\gamma(M, P) = \frac{1}{MP} + H(M, P),$$

H(M, P) étant une fonction analytique et holomorphe des deux points M et P, même lorsque ceux-ci sont confondus, avec cette restriction que M et P ne s'approchent pas simultanément de la courbe (C). Par suite

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{r} + \frac{\partial H}{\partial \zeta} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} + \frac{\partial H}{\partial \zeta}.$$

Donc, en tout point P intérieur au fluide, nous avons

$$2\pi \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\int_S \frac{z_M}{r}\, dS_M + \int\int_S z_M \frac{\partial^2 H}{\partial z\, \partial \zeta}\, dS_M$$

ou encore

$$2\pi \frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\int\int_S \frac{z_M}{r}\, dS_M + \int\int_S z_M \frac{\partial^2 H}{\partial z\, \partial \zeta}\, dS_M.$$

En exprimant la condition (7) nous voyons que la cote z d'un point de la surface liquide vérifie (au bénéfice de nos approximations) l'équation intégro-différentielle linéaire

$$(8) \quad 2\pi \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\int\int_S \frac{z_M}{r}\, dS_M + \int\int_S z_M \frac{\partial^2 H}{\partial z\, \partial \zeta_{(z=\zeta=0)}}\, dS_M.$$

Nous l'écrirons sous forme plus condensée

$$(9) \qquad 2\pi \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \Delta \int\int_S \frac{z_M}{MP}\, dS_M + \int\int_S z_M\, F(M, P)\, dS_M,$$

en posant

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

et

$$F(M, P) = \frac{\partial^2 H(M, P)}{\partial z\, \partial \zeta_{z=\zeta=0}}.$$

Remarques. — I. Dans le calcul précédent, z a joué deux rôles bien distincts, celui d'une variable indépendante (cote d'un point quelconque à l'intérieur du liquide) et celui d'une fonction de x, y, t (cote d'un point de la surface libre). Le véritable sens à donner à z dans chaque cas est trop apparent pour qu'il soit utile d'insister.

II. L'équation (9) a pour conséquence immédiate

$$\int\int \frac{\partial^2 z_M}{\partial t^2} dS_M = 0, \tag{10}$$

car si nous désignons par $2\pi \frac{\partial \Psi}{\partial z}$ ce que devient son deuxième membre quand on y remplace le point $P(z = 0)$ de la surface libre par un point $P(z$ quelconque) intérieur au volume V, il existe une fonction harmonique Ψ_P dans ce volume qui coïncide avec la fonction ψ précédemment définie. L'équation (9) peut alors s'écrire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial \Psi}{\partial z_{z=0}},$$

le deuxième membre n'est autre que la dérivée normale de Ψ le long du plan S.

La dérivée normale de Ψ sur (Σ) étant nulle, et la fonction Ψ étant régulière dans V, nous devons avoir, quelle que soit la solution z considérée,

$$\int\int_S \frac{\partial \Psi_M}{\partial z_{z=0}} dS_M = 0,$$

ce qui nous conduit immédiatement à (10). Intégrons l'équation (10). Elle donne

$$\int\int_S \frac{\partial z_M}{\partial t} \partial S_M = a,$$

a étant une constante. Cette constante est nulle, car l'équation (9) admet, quel que soit t, la solution $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, $z = \text{const.}$ (cette dernière constante étant nulle lorsque le plan xOy est le plan de la surface libre au repos). Le fait que l'équation (9) admet cette solution conduit à l'identité suivante, qui nous sera utile dans la suite :

$$\Delta \int\int_S \frac{dS_M}{MP} + \int\int_S F(M, P)\, dS_M = 0,$$

laquelle exprime que la fonction harmonique, évidemment constante sur S et dont la dérivée normale est nulle sur Σ, a une dérivée nulle par rapport à z.

II. — Fluide indéfini. Équation de Cauchy.

Nous supposons que le mouvement s'éteint en tout point à l'infini.

Il suffit alors de prendre

$$\gamma(M, P) = \frac{1}{r} = \frac{1}{MP},$$

et l'équation (9) se réduit à

$$(11) \qquad 2\pi \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \Delta \overline{\underline{\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_M}{MP}\, dS_M.$$

Or, Cauchy, dans son Mémoire sur la *Théorie des ondes*, avait formé une équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction $z(x, y, t)$.

On peut retrouver cette équation comme suit ([1]) : rappelons-nous qu'à la surface libre nous avons

$$w = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$-z(x, y, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}_{z=0}.$$

Ceci nous conduit à la condition suivante, pour les points de la surface. Soit $\tau(x, y, z, t)$ la fonction harmonique déterminée par

$$\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Elle est nulle pour $z = 0$, c'est-à-dire sur la surface libre. Elle

([1]) Cette méthode est due à M. Boussinesq (*Applic. des potentiels*, etc., § IV, p. 578).

est nulle à l'infini, le potentiel des vitesses et ses dérivées devant s'éteindre pour des points très éloignés. Donc elle est nulle dans toute la masse du liquide. Nous en déduisons évidemment

$$-\frac{\partial \tau}{\partial z}+\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0,$$

ou, en comparant à l'équation (1),

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0; \tag{12}$$

par suite, en dérivant par rapport au temps et en remplaçant dans ψ la variable indépendante z par zéro, il viendra

$$\frac{\partial^4 z}{\partial t^4}+\Delta z=0. \tag{13}$$

C'est ce que nous appellerons l'équation de Cauchy.

Nous sommes alors amenés à nous poser avec M. Hadamard la question suivante : de l'équation (11) pouvons-nous déduire analytiquement l'équation (13)? Nous allons, dès maintenant, montrer que la chose est possible. Nous retrouverons d'ailleurs ce résultat comme conséquence de l'étude d'un liquide contenu dans un vase de forme quelconque.

Écrivons l'équation (11) sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{1}{2\pi}\Delta\int\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z(\xi,\eta,t)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta. \tag{11 bis}$$

Introduisons une variable auxiliaire indépendante z et posons

$$\psi(x,y,z,t)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z(\xi,\eta,t)}{\sqrt{z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta$$

(ici encore la distinction entre z fonction et z variable indépendante s'aperçoit immédiatement). Calculons ψ : nous reconnaissons qu'il n'est autre que la fonction harmonique de x, y, z qui s'annule à l'infini et prend sur le plan $z=0$ les valeurs $-z(x,y,t)$,

$$\psi(x,y,0,t)=-z(x,y,t).$$

D'autre part, l'équation (11 *bis*) s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial\psi}{\partial z_{z=0}}.$$

Donc en posant

$$\theta = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\partial\psi}{\partial z},$$

θ est une fonction harmonique qui s'annule à la surface libre et à l'infini; donc elle est identiquement nulle. Faisons la combinaison

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0;$$

en vertu de l'équation (3), il vient

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0;$$

en annulant la variable indépendante z, nous trouvons bien l'équation (13). D'ailleurs, ce calcul ayant nécessité une différentiation, l'équation (13) est certainement plus générale que l'équation (11).

Elle admet, comme l'a remarqué M. Hadamard, une foule de solutions étrangères au problème. Tel est tout d'abord le cas de celles qu'on obtient en changeant le signe de l'un des membres de l'équation (11). Mais il y en a une infinité d'autres, puisque dans (13) nous pouvons nous donner arbitrairement z et ses trois dérivées premières par rapport à t pour $t = 0$. Au contraire, pour l'équation (11), la donnée de z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ nous permettra de calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial^3 z}{\partial t^3}$. En somme, l'équation (11) est véritablement celle du problème. On achèvera de le déterminer en se donnant z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ pour $t = 0$, c'est-à-dire la forme initiale de la surface et les vitesses de ses différents points. Dans l'hypothèse où le plan xOy est celui de la surface libre au repos, nous devrons d'ailleurs supposer, afin de donner au problème un sens certain, que les deux intégrales $\overline{\int\int}_{-\infty}^{+\infty} z_M dS_M$ et $\overline{\int\int}_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_M dS_M$ (dont l'élément est connu à l'instant initial) sont absolument convergentes et ont pour valeur commune zéro.

Nous sommes alors amenés à nous demander si cette équation de Cauchy est susceptible de se généraliser pour un liquide contenu dans un vase de forme quelconque. Mais avant d'aborder ce problème, nous allons démontrer quelques théorèmes d'Analyse qui nous seront très utiles.

III. — Quelques théorèmes et formules d'Analyse.

Soit une fonction symétrique $\varphi(M, P)$ des deux points M et P, régulière dans l'aire S et telle que

$$(\alpha) \qquad \Delta_P\, \varphi(M, P) \equiv \Delta_M\, \varphi(M, P).$$

Soit aussi U(M) une fonction régulière dans l'aire S et munie de dérivées jusqu'au deuxième ordre inclus. La formule de Green nous donne immédiatement

$$(14) \qquad \Delta \iint_S U(M)\, \varphi(M, P)\, dS_M = \iint_S \Delta\, U(M)\, \varphi(M, P)\, dS_M + \int_S \left[\varphi(P, C)\, \frac{dU}{dn} - U\, \frac{d\varphi}{dn}(P, C)\right] ds.$$

Cette formule se généralise au cas où $\varphi(M, P)$ n'est plus régulière, mais possède quand M tend vers P une singularité de la forme $\frac{1}{MP}$. Il suffit, pour le voir, de démontrer que

$$(15) \qquad \Delta \iint_S \frac{U(M)}{MP}\, dS_M = \iint_S \frac{\Delta\, U(M)}{MP}\, dS_M + \int_C \left(\frac{1}{PC}\, \frac{dU}{dn} - U\, \frac{d}{dn}\, \frac{1}{PC}\right) ds.$$

Cette formule s'établit sans difficulté par différentiation directe après avoir posé

$$(16) \qquad \xi - x = u, \qquad \eta - y = v.$$

De la sorte, les variables x et y n'entrent plus en dénominateur et l'on peut appliquer la règle habituelle (en faisant en sorte de ne pas omettre les termes provenant de la mobilité du contour).

Dans l'équation (14) nous pouvons donc considérer la fonction $\varphi(M, P)$ comme munie d'une singularité de la forme $\frac{1}{MP}$.

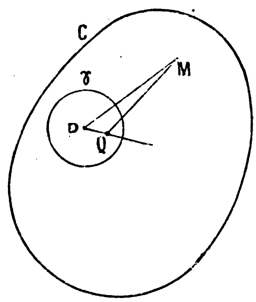
Théorème. — *Soient une aire limitée par un contour* C, P *et* Q *deux points intérieurs à cette aire. On a*

$$\iint_S \frac{dS_M}{\mathrm{MP}\,\mathrm{MQ}} = 2\pi \log \frac{1}{\mathrm{PQ}} + \mathrm{R(P, Q)}, \tag{17}$$

la fonction R(P, Q) *étant une fonction régulière* (¹).

Tout d'abord cette intégrale est finie tant que les points P et Q

Fig. 1.



sont distincts. De plus, elle ne change pas quand on réduit toutes les dimensions de la figure formée par le contour et les deux points fixes dans un rapport donné quelconque. Soit donc P un point intérieur au contour C. Décrivons de P comme centre un cercle de rayon $\lambda \neq 0$, intérieur au contour C. Soit (γ) ce cercle. Si Q est extérieur à (γ), l'intégrale est finie. Supposons que Q soit intérieur à (γ) et puisse se rapprocher indéfiniment du point P. La partie de l'intégrale relative au domaine (C, γ) est régulière. C'est dire que notre intégrale aura les mêmes singularités que si elle était étendue à un cercle ayant pour centre le point P. Calculons-la pour un tel cercle en prenant pour pôle le point P et pour axe polaire la droite PQ. Elle s'écrit

$$\iint_{(\gamma)} \frac{d\rho\, d\omega}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho c \cos\omega + c^2}},$$

(¹) *Voir* Fréchet et Heywood, *L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique;* Note de M. Hadamard, *Sur l'itération des noyaux infinis.*

en désignant par c la longueur PQ, ou encore

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\lambda} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho c \cos\omega + c^2}}.$$

Il nous faut intégrer par rapport à ω entre 0 et 2π la quantité

$$\operatorname{Log}\left[\frac{\lambda - c\cos\omega + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda c\cos\omega + c^2}}{c(1-\cos\omega)}\right],$$

ce qui donnera

$$2\pi \operatorname{Log}\frac{\lambda}{c} + \int_0^{2\pi} \operatorname{Log}\left[\frac{1 - \frac{c}{\lambda}\cos\omega + \sqrt{1 - 2\frac{c}{\lambda}\cos\omega + \frac{c^2}{\lambda^2}}}{1-\cos\omega}\right] d\omega.$$

Le deuxième terme est une fonction holomorphe de $\frac{c}{\lambda}$ pour $c = 0$, ce qui démontre le théorème.

Remarque. — Soient Q et Q′ deux points intérieurs à (γ), c et c' leurs distances au point P. Considérons l'intégrale

$$\iint_{(\gamma)} \left(\frac{1}{\mathrm{MP}\,\mathrm{MQ}} - \frac{1}{\mathrm{MP}\,\mathrm{MQ}'}\right) dS_{\mathrm{M}};$$

sa valeur est, d'après ce qui précède,

$$2\pi \operatorname{Log}\frac{c'}{c} + \int_0^{2\pi} \operatorname{Log}\left[\frac{1 - \frac{c}{\lambda}\cos\omega + \sqrt{1 - 2\frac{c}{\lambda}\cos\omega + \frac{c^2}{\lambda^2}}}{1 - \frac{c'}{\lambda}\cos\omega + \sqrt{1 - 2\frac{c'}{\lambda}\cos\omega + \frac{c'^2}{\lambda^2}}}\right] d\omega.$$

Faisons abstraction du contour C et faisons croître λ indéfiniment. Le deuxième terme tend vers zéro. Donc l'intégrale précédente étendue à tout le plan a pour valeur

$$2\pi \operatorname{Log}\frac{\mathrm{PQ}'}{\mathrm{PQ}}.$$

IV. — Formation de l'équation de surface pour un vase hémisphérique.

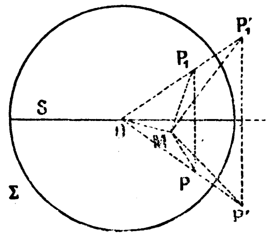
Pour le volume V, limité par la sphère tout entière, la fonction $\gamma(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ a pour expression

$$\frac{1}{r} + \frac{\mathrm{R}}{\delta}\frac{1}{r'} + \frac{1}{\mathrm{R}}\log\frac{2\mathrm{R}^2 \tang\frac{\psi}{2}}{\rho\delta\sin\gamma},$$

en désignant par P' le conjugué de P, et en posant

$$OM = \rho, \qquad OP = \delta, \qquad MP = r, \qquad MP' = r',$$
$$\widehat{MOP} = \gamma, \qquad \widehat{MP'O} = \psi.$$

Fig. 2.



Soient P_1 et P'_1 les symétriques de P et de P' par rapport au plan S. Nous posons

$$MP_1 = r_1, \qquad MP'_1 = r'_1, \qquad \widehat{MOP_1} = \gamma_1, \qquad \widehat{MP'_1O} = \psi_1.$$

Nous aurons

$$\mathcal{G}(M, P) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + \frac{R}{\delta}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r'_1}\right) + \frac{1}{R}\log\frac{\tang\frac{\psi}{2}\sin\gamma_1}{\tang\frac{\psi_1}{2}\sin\gamma}.$$

Les deux triangles OMP' et OMP'_1 nous donnent d'ailleurs

$$\sin\gamma = \frac{r'\sin\psi}{\rho}, \qquad \sin\gamma_1 = \frac{r'_1\sin\psi_1}{\rho},$$

d'où

$$\frac{\tang\frac{\psi}{2}\sin\gamma_1}{\tang\frac{\psi_1}{2}\sin\gamma} = \frac{r'_1\cos^2\frac{\psi_1}{2}}{r'\cos^2\frac{\psi}{2}}.$$

Les mêmes triangles nous donnent

$$\rho^2 = \left(\frac{R^2}{\delta} + r'\right)^2 - 4\frac{R^2}{\delta}r'\cos^2\frac{\psi}{2},$$
$$\rho^2 = \left(\frac{R^2}{\delta} + r'_1\right)^2 - 4\frac{R^2}{\delta}r'_1\cos^2\frac{\psi_1}{2};$$

d'où nous déduisons

$$\frac{r'_1\cos^2\frac{\psi_1}{2}}{r'\cos^2\frac{\psi}{2}} = \frac{\left(\frac{R^2}{\delta} + r'_1\right)^2 - \rho^2}{\left(\frac{R^2}{\delta} + r'\right)^2 - \rho^2}.$$

Finalement,

$$\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + \frac{\mathrm{R}}{\delta}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r'_1}\right) + \frac{1}{\mathrm{R}}\log\frac{\left(\frac{\mathrm{R}}{\delta} + \frac{r'_1}{\mathrm{R}}\right)^2 - \frac{\rho^2}{\mathrm{R}^2}}{\left(\frac{\mathrm{R}}{\delta} + \frac{r'}{\mathrm{R}}\right)^2 - \frac{\rho^2}{\mathrm{R}^2}}.$$

$\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ est de la forme $\Gamma(\mathrm{M}, \mathrm{P}) - \Gamma(\mathrm{M}, \mathrm{P}_1)$ en posant

$$\Gamma(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \frac{1}{r} + \frac{\mathrm{R}}{\delta}\frac{1}{r'} - \frac{1}{\mathrm{R}}\log\left[\left(\frac{\mathrm{R}}{\delta} + \frac{r'_1}{\mathrm{R}}\right)^2 - \frac{\rho^2}{\mathrm{R}^2}\right] = \frac{1}{r} + \mathrm{U}(\mathrm{M}, \mathrm{P}).$$

Occupons-nous de $\mathrm{U}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$. Il nous faut prendre $\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial z\,\partial\zeta}$ pour $\zeta = z = 0$. Remarquons immédiatement que

$$\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_{\zeta=0}} = 0.$$

D'autre part,

$$r' = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{R}^2}{\delta^2}x - \xi\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{R}^2}{\delta^2}y - \eta\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{R}^2}{\delta^2}z - \zeta\right)^2};$$

par suite,

$$\left(\frac{\partial r'}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0} = -\frac{\mathrm{R}^2 z}{\delta^2 r'}.$$

Nous trouvons ainsi :

$$\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\zeta_{\zeta=0}} = \frac{\mathrm{R}}{\delta}\frac{z}{r'}\left[\frac{\mathrm{R}^2}{\delta^2}\frac{1}{r'^2} + 2\frac{\mathrm{R}^2 + \delta r'}{(\mathrm{R}^2 + \delta r')^2 - \rho^2\delta^2}\right].$$

Il reste à dériver par rapport à z et à prendre la valeur de cette dérivée pour $z = 0$. Remarquons pour cela que

$$\frac{\partial\delta}{\partial z_{z=0}} = 0.$$

Grâce à ce fait, on constate aisément que $\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial z\,\partial\zeta}$ pour $z = \zeta = 0$ se réduit à

$$(18) \qquad \mathrm{F}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \frac{\mathrm{R}}{\delta r'}\left[\frac{\mathrm{R}^2}{\delta^2 r'^2} + 2\frac{\mathrm{R}^2 + \delta r'}{(\mathrm{R}^2 + \delta r')^2 - \rho^2\delta^2}\right].$$

Somme toute $\mathrm{U}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ joue ici par rapport à $\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ le même rôle que la fonction $\mathrm{H}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ de la première section. L'équation de surface est donc précisément l'équation (9) où $\mathrm{F}(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ doit être remplacée par la valeur donnée par (18).

Nous pouvons d'ailleurs écrire

$$F(M, P) = \frac{R^3}{\overline{OP}^3 . \overline{MP}'^3} + 2 \frac{R}{OP.MP'} \frac{R^2 + OP.MP'}{(R^2 + OP.MP')^2 - \overline{OM}^2 . \overline{OP}^2}.$$

Traçons le grand cercle C d'intersection du plan (S) et du vase. Marquons les points M et P ainsi que leurs conjugués M' et P'. La considération du point M' montre immédiatement que F est symétrique par rapport aux coordonnées des points M et P. Tout d'abord le produit OM.OP jouit évidemment de cette propriété. Quant aux deux produits OP.MP' et OM.M'P, leur égalité est immédiate, eu égard à la similitude des triangles OMP' et OPM'.

Nous remarquerons encore qu'on a, quel que soit le point P,

$$(19) \qquad F(O, P) = F(P, O) = \frac{2}{R^3}.$$

V. — Singularités au voisinage du contour (C).

Les considérations exposées dans la première section nous ont conduit à nous poser le problème des ondes liquides sous la forme suivante :

Considérons un volume V, limité d'une part par une portion de plan (S) et, d'autre part, par une surface (Σ) coupant ce plan à angle droit tout le long du contour (C). Le plan (S) étant pris pour plan xOy, il s'agit de déterminer la fonction harmonique $\psi(x, y, z, t)$ dans le volume V et la fonction $z(x, y, t)$ dans l'aire (S), de manière que l'on ait sur (Σ)

$$(5) \qquad \frac{d\psi}{dn} = 0,$$

et sur S,

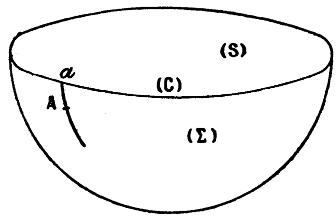
$$(4) \qquad \psi = -z,$$

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Si, à un instant donné, $\frac{dz}{dn}$ est nul en tout point de la courbe (C), il en sera de même de $\frac{d\psi}{dn}$, en vertu de l'équation (4), et grâce aussi à cette circonstance que (Σ) coupe orthogonalement le plan (S) le long du contour (C). Autrement dit, la condition (5) sera alors remplie non seulement sur la paroi (Σ), mais encore en tout point de la courbe (C).

Au contraire, si $\frac{dz}{dn}$ n'est pas nul sur (C), la condition (5) sera remplie à la paroi (Σ) et non sur la courbe (C). De sorte que

Fig. 3.



lorsqu'on passera d'un point A de (Σ) très voisin de (C) au point (a) de (C) le plus rapproché de A, $\frac{d\psi}{dn}$ passera brusquement d'une valeur nulle à une valeur finie et $\neq$ o. Il s'ensuivra forcément pour les dérivées de ψ dans la direction limite de aA (c'est-à-dire par rapport à z) des singularités dans le voisinage du contour (C).

Je dis que $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ calculé en un point P du plan (S) devient logarithmiquement infini quand ce point P tend vers le contour (C). Nous utiliserons pour cela les résultats de la troisième section. Il est à peu près évident qu'à cause de la nature même de ce que nous voulons obtenir, il suffira de vérifier cet énoncé pour une forme particulière de vase.

Nous nous adresserons au vase hémisphérique pour lequel nous avons appris à calculer explicitement $\frac{\partial\psi}{\partial z}$. Nous supposerons qu'à l'instant considéré, z et Δz sont finis dans l'aire (S) et sur le contour (C). Nous pouvons alors écrire

$$2\pi\frac{\partial\psi}{\partial z} = \Delta_{\mathrm{P}}\int\!\!\int_{\mathrm{S}}\frac{z_{\mathrm{M}}}{\mathrm{MP}}\,d\mathrm{S}_{\mathrm{M}} + \frac{\mathrm{R}^3}{\delta^3}\Delta_{\mathrm{P'}}\int\!\!\int_{\mathrm{S}}\frac{z_{\mathrm{M}}}{\mathrm{MP'}}\,d\mathrm{S}_{\mathrm{M}}$$
$$+\,2\frac{\mathrm{R}}{\delta}\int\!\!\int_{\mathrm{S}}\frac{z_{\mathrm{M}}}{r'}\,\frac{\mathrm{R}^2+\delta r'}{(\mathrm{R}^2+\delta r')^2-\rho^2\delta^2}\,d\mathrm{S}_{\mathrm{M}}.$$

D'après une remarque déjà faite, le deuxième membre doit s'annuler quand on considère z_{M} comme une constante, ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{2R}{\delta}\int\int_S \frac{1}{r'}\,\frac{R^2+\delta r'}{(R^2+\delta r')^2-\rho^2\delta^2}\,dS_M=\int_C\left[\frac{d}{dn_c}\,\frac{1}{PC}+\frac{R^3}{\delta^3}\,\frac{d}{dn_c}\,\frac{1}{P'C}\right]ds.$$

D'autre part, en effectuant les différentiations, nous avons

$$2\pi\frac{\partial\psi}{\partial z}=\int\int_S \Delta z_M\left(\frac{1}{r}+\frac{R^3}{\delta^3}\,\frac{1}{r'}\right)dS_M+\int_C\frac{dz}{dn}\left(\frac{1}{r}+\frac{R^3}{\delta^3}\,\frac{1}{r'}\right)ds$$
$$+\frac{2R}{\delta}\int\int_S\frac{z_M}{r'}\,\frac{R^2+\delta r'}{(R^2+\delta r')^2-\rho^2\delta^2}\,dS_M-\int_C z\left[\frac{d}{dn}\,\frac{1}{r}+\frac{R^3}{\delta^3}\,\frac{d}{dn}\,\frac{1}{r'}\right]ds.$$

Occupons-nous d'abord de la deuxième ligne. Nous supposons que le point P tende vers un point a du bord (C). Cette seconde ligne peut s'écrire

$$2\frac{R}{\delta}\int\int_S\frac{z_M-z_a}{r'}\,\frac{R^2+\delta r'}{(R^2+\delta r')^2-\rho^2\delta^2}\,dS_M$$
$$-\int_C(z-z_a)\left(\frac{d}{dn}\,\frac{1}{r}+\frac{R^3}{\delta^3}\,\frac{d}{dn}\,\frac{1}{r'}\right)ds.$$

Nous avons

$$(R^2+\delta r')^2-\rho^2\delta^2=4R^2\delta r'\cos^2\frac{\psi}{2}.$$

L'intégrale double s'écrit donc

$$\frac{1}{2R\delta^2}\int\int_S\frac{z_M-z_a}{r'^2}\,\frac{dS_M}{\cos^2\frac{\psi}{2}}(R^2+\delta r').$$

L'angle ψ étant en valeur absolue $\leqq\frac{\pi}{2}$, $\cos^2\frac{\psi}{2}$ reste compris entre $\frac{1}{2}$ et 1.

L'intégrale double à étudier se présente donc sous la forme

$$I=\int\int_S\frac{\varphi(M)}{\overline{MP}'^2}\,dS_M,$$

$\varphi(M)$ étant une fonction régulière dans l'aire S.

Soit a le point de la circonférence vers lequel tendent simultanément P et P'. Prenons pour axe polaire Oa; soient (ρ,ω) les coordonnées d'un point M de l'aire S, (δ',θ) celles du point P'. L'intégrale I peut s'écrire

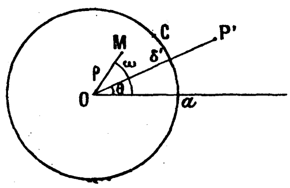
$$I = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\rho, \omega)}{\delta'^2 - 2\delta'\rho\cos(\omega - \theta) + \rho^2} \rho \, d\rho \, \delta\omega.$$

Considérons l'intégrale

$$V(\rho, P') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\rho, \omega)(\delta'^2 - \rho^2)}{\delta'^2 - 2\delta'\rho\cos(\omega - \theta) + \rho^2} d\omega;$$

c'est la fonction harmonique régulière du point P' à l'extérieur du

Fig. 4.



cercle de rayon ρ et qui prend sur ce cercle les valeurs $\varphi(\rho, \omega)$. Nous pourrons écrire dès lors

$$I = 2\pi \int_0^R \frac{V(\rho, P')}{\delta'^2 - \rho^2} \rho \, d\rho,$$

Intégrons par parties : nous aurons

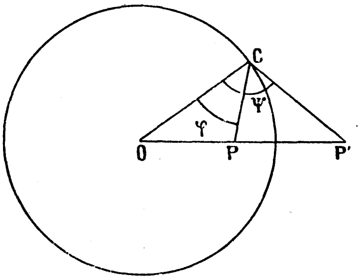
$$I = -\pi V(\rho, P') \operatorname{Log}(\delta'^2 - \rho^2) \Big|_0^R + \pi \int_0^R \operatorname{Log}(\delta'^2 - \rho^2) \frac{\partial V}{\partial \rho}(\rho, P') \, d\rho.$$

Cette dernière intégrale reste finie. Quant au terme tout intégré, que devient-il lorsque P' tend vers a. Remarquons ici que $\varphi(M)$ contenant $z_M - z_a$ en facteur s'annule au point a. Il s'ensuit $V(R, a) = 0$. Cherchons l'ordre infinitésimal de $V(R, P')$, le point P' étant très voisin de a. Comme nous l'avons déjà vu, $V(R, P')$ est la fonction harmonique à l'extérieur du cercle de rayon R et qui prend sur ce cercle des valeurs telles que

$$(z_c - z_a) \psi_1(c),$$

la fonction ψ_1 étant régulière. Par hypothèse z possède dans l'aire S et sur le contour C des dérivées des deux premiers ordres, il nous suffit ici de tabler sur l'existence de ces dérivées pour affirmer que les valeurs prises par $V(R, c)$ sur le contour C au voisinage de a sont de l'ordre de ac : les propriétés générales des fonctions harmoniques nous montrent alors que $V(R, P')$, lorsque

Fig. 5.



P' est très voisin de a, est de l'ordre de aP'. Donc les termes tout intégrés restent également finis.

Prenons maintenant l'intégrale curviligne

$$J = \int_C (z - z_a)\left(\frac{d}{dn}\frac{1}{r} + \frac{R^3}{\delta^3}\frac{d}{dn}\frac{1}{r'}\right) ds;$$

nous avons, puisque le point C est sur la circonférence,

$$\frac{d}{dn}\frac{1}{r} + \frac{R^3}{\delta^3}\frac{d}{dn}\frac{1}{r'} = \frac{1}{\overline{PC}^2}\left(\cos\varphi + \frac{R}{\delta}\cos\psi\right),$$

$$\cos\varphi + \frac{R}{\delta}\cos\psi = \frac{1}{2Rr}\left[R^2 + r^2 - \delta^2 + \frac{R^2}{\delta^2}(\delta^2 + r^2 - R^2)\right].$$

Donc

$$J = \int_C \frac{z - z_a}{2Rr^3}\left[R^2 - \delta^2 + r^2 - \frac{R^2}{\delta^2}(R^2 - \delta^2 - r^2)\right] ds,$$

$$J = \frac{1}{2R\delta^2}\int_C \frac{z - z_a}{r^3}\left[r^2(\delta^2 + R^2) - (R^2 - \delta^2)^2\right] ds,$$

$$= \frac{R^2 + \delta^2}{2R\delta^2}\int_C \frac{z - z_a}{r} ds - \frac{(R^2 - \delta^2)^2}{2R\delta^2}\int_C \frac{z - z_a}{r^3} ds.$$

C'est un résultat bien connu dans la théorie du potentiel newtonien (courbes attirantes), que la première des deux intégrales reste finie quand P tend vers a. En effet le potentiel d'une ligne attirante est logarithmiquement singulier sur cette courbe, sauf aux points où la densité est nulle pour lesquels il est fini. Pour voir comment se comporte la deuxième intégrale, il nous suffit d'étudier

$$(R-\delta)^2 \int_C \frac{z-z_a}{r^3}\,ds,$$

ou

$$\int_C \frac{z-z_a}{r}\,\frac{\overline{aP}^2}{r^2}\,ds\,;$$

le facteur $\frac{\overline{aP}^2}{r^2}$ étant constamment < 1, nous sommes amenés à la même conclusion que pour la première intégrale.

Donc la seconde ligne précédemment considérée reste finie.

Quant à la première, son intégrale double est finie quel que soit le point P.

Son intégrale curviligne s'écrit

$$\int_C \frac{dz}{dn}\left(\frac{1}{r}+\frac{R^3}{\delta^3}\,\frac{1}{r'}\right)ds$$

ou

$$\left(1+\frac{R^2}{\delta^2}\right)\int_C \frac{dz}{dn}\,\frac{1}{r}\,ds\,;$$

C'est un potentiel newtonien de ligne attirante de densité $\frac{dz}{dn}$: il devient donc logarithmiquement infini aux points où $\frac{dz}{dn}$ est $\neq 0$.

Donc nous arrivons avec M. Hadamard à la conclusion suivante :

Si $\frac{dz}{dn}$ *n'est pas nul sur* (C), c'est-à-dire si la condition (5) n'est pas remplie sur la frontière (C) de (Σ), *la valeur de* $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ *calculée en un point du plan* S *devient logarithmiquement infinie quand ce point s'approche du contour* C. *Aux points où* $\frac{dz}{dn}$ *est nulle*, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ *reste finie.*

Resterait à étudier comment se propagent dans le temps les singularités affectées par $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ au voisinage du contour (C), étude rendue très difficile par la nature même de l'équation de surface.

VI. — L'ÉQUATION DU QUATRIÈME ORDRE.

Reprenons l'équation

$$(9) \qquad 2\pi \frac{\partial^2 z_P}{\partial t^2} = \Delta \int\int_S \frac{z_M}{MP} dS_M + \int\int_S z_M F(M, P) dS_M.$$

Dans le cas du vase hémisphérique, nous avons montré que, si le point P tend vers le contour (C), $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ est au plus logarithmiquement infini. Admettons-le en général. Il s'ensuit que, si le point P n'est pas sur le contour (C), les expressions

$$\alpha = \Delta \int\int_S 2\pi \frac{\partial^2 z_M}{\partial t^2} \frac{dS_M}{MP},$$

$$\beta = \int\int_S 2\pi \frac{\partial^2 z_M}{\partial t^2} F(M, P) dS_M$$

ont un sens. Nous admettrons qu'en un point P qui n'appartient pas à (C), la somme $\alpha + \beta$ représente, conformément à la règle habituelle de dérivation, la quantité $4\pi^2 \frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4}$.

Nous avons, en tenant compte de (9),

$$\alpha = \Delta \int\int_S \frac{\Delta \int\int_S \frac{z_Q}{MQ} dS_Q + \int\int_S z_Q F(Q, M) dS_Q}{MP} dS_M.$$

Ici, des précautions sont nécessaires : nous ne pouvons immédiatement écarter les deux parties du numérateur au risque d'obtenir séparément deux intégrales infinies. Si nous considérons par exemple l'intégrale

$$\int\int_S \Delta \int\int_S \frac{z_Q}{MQ} dS_Q \frac{dS_M}{MP},$$

la formule (15) nous permet de l'écrire

$$\int\int_S \left[\int\int_S \frac{\Delta z_Q}{MQ} dS_Q + \int_C \left(\frac{dz}{dn} \frac{1}{MC} - z \frac{d}{dn} \frac{1}{MC} \right) ds \right] \frac{dS_M}{MP}.$$

Or l'intégrale

$$\int\int_S \frac{1}{MP} \int_C z \frac{d}{dn} \frac{1}{MC} ds \, dS_M$$

n'a pas de sens, car, lorsque M tend vers (C), la parenthèse devient infinie comme l'inverse de la distance de M au contour (C).

L'intégrale

$$\int\int_S \frac{1}{MP}\int\int_S z_Q\,F(Q, M)\,dS_Q\,dS_M$$

serait aussi dépourvue de sens. En réalité, la nature du problème est telle que les éléments infinis de ces deux intégrales se détruisent et que l'expression totale de α a un sens.

Traçons un contour (C′) intérieur à (C), limitant l'aire S′ et contenant le point P. Nous pouvons écrire

$$\alpha = \Delta\int\int_{S'} 2\pi\frac{\partial^2 z_M}{\partial t^2}\frac{dS_M}{MP} + \Delta\int\int_{(C,C')} 2\pi\frac{\partial^2 z_M}{\partial t^2}\frac{dS_M}{MP},$$

on peut appliquer la règle ordinaire de dérivation à la seconde intégrale qui tendra vers zéro lorsque (C′) tendra vers (C). Nous pouvons donc considérer α comme la limite de α' défini par

$$\alpha' = \Delta\int\int_{S'}\frac{\Delta\int\int_S \frac{z_Q}{MQ}\,dS_Q + \int\int_S z_Q\,F(Q, M)\,dS_Q}{MP}\,dS_M;$$

appliquant l'équation (15), nous aurons

$$\alpha' = \Delta\int\int_{S'}\frac{\int\int_S \frac{\Delta z_Q}{MQ}\,dS_Q + \int_C\left(\frac{dz}{dn}\frac{1}{MC} - z\frac{d}{dn}\frac{1}{MC}\right)ds + \int\int_S z_Q\,F(Q, M)\,dS_Q}{MP}\,dS_M;$$

actuellement, chaque terme donne, pour l'intégrale double sous le Δ, une portion finie.

En changeant l'ordre des intégrations, nous avons

$$\begin{aligned}\alpha' = \Delta\Bigg[&\int\int_S \Delta z_Q\int\int_{S'}\frac{dS_M}{MP.MQ}\,dS_Q\\ &+\int_C \frac{dz}{dn}\int\int_{S'}\frac{dS_M}{MP.MC}\,ds - \int_c z\frac{d}{dn}\int\int_{S'}\frac{dS_M}{MP.MC}\,ds\Bigg]\\ &+\Delta\int\int_S z_Q\int\int_{S'}\frac{F(Q, M)}{MP}\,dS_M\,dS_Q.\end{aligned}$$

Appliquons au crochet la formule de Green dans l'aire comprise entre le contour (C) lui-même et une petite circonférence γ de centre P et de rayon λ. Nous avons, en vertu de (17),

$$(17') \qquad \int\int_{S'} \frac{dS_M}{MP.MQ} = 2\pi \log \frac{1}{PQ} + R'(P, Q),$$

R′ étant une fonction régulière qui tendra vers R (P, Q) quand (C′) tendra vers (C). Lorsque λ tend vers zéro, R′ donne dans α' un terme qui tend aussi vers zéro, et le terme logarithmique donne naissance au résidu $-4\pi^2 z_p$. Il vient donc

$$\alpha' = -4\pi^2 \Delta z_P + \Delta_P \left\{ \int\int_S z_Q \left[\Delta_Q \int\int_{S'} \frac{dS_M}{MP.MQ} + \int\int_{S'} \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M \right] dS_Q \right\};$$

à la limite, quand (C′) tend vers (C), et en remarquant que

$$\Delta_Q \int\int_S \frac{dS_M}{MP.MQ} = \Delta_Q R(P, Q),$$

nous avons

$$\alpha = -4\pi^2 \Delta z_P + \int\int_S z_Q \Delta_P \left[\Delta_Q R(P, Q) + \int\int_S \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M \right] dS_Q.$$

Le crochet, dont il faut prendre le Δ_P, est une fonction parfaitement régulière de deux points P et Q quand ceux-ci sont intérieurs à l'aire S. Supposons que le point Q vienne sur le contour C. Notre crochet s'écrit en général

$$\Delta_Q \int\int_S \frac{dS_M}{MP.MQ} + \int\int_S \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M.$$

Or nous avons montré pour un vase hémisphérique et admis pour un vase quelconque le résultat suivant : soit U(M) une fonction quelconque mais finie des coordonnées du point M ainsi que son Δ. L'expression

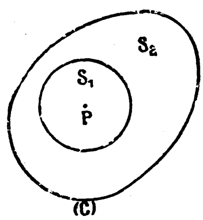
$$\Delta_Q \int\int_S U(M) \frac{dS_M}{MQ} + \int\int_S U(M) F(Q, M) dS_M$$

est au plus logarithmiquement infinie quand Q tend vers le contour (C). Si la fonction $\frac{1}{MP}$ était partout finie, il nous suffirait de poser $U(M) = \frac{1}{MP}$ pour voir que notre crochet est aussi logarithmiquement infini : en réalité la singularité introduite par le point P ne nous gêne pas : nous pouvons toujours entourer le point P d'un cercle de rayon fini ayant pour centre ce point et intérieur à l'aire S. La partie de notre crochet provenant de l'aire de ce cercle est essentiellement finie. Pour la région comprise entre la circonférence et le contour (C), la fonction $\frac{1}{\mathrm{MP}}$ est finie et la remarque précédente s'applique. Nous en concluons que l'intégrale

$$\int\int_S z_Q\left[\Delta_Q R(P, Q) + \int\int_S \frac{F(Q, M)}{MP}\, dS_M\right] dS_Q$$

a un sens. Il faut encore démontrer que son Δ_P a aussi un sens. Désignons par A le crochet. Traçons un cercle de centre P et

Fig. 6.



intérieur à l'aire S, celle-ci se trouvera divisée en deux portions S_1 et S_2 (*fig.* 6). Nous poserons

$$A_1 = \Delta_Q \int\int \frac{dS_M}{MP.MQ} + \int\int_{S_1} \frac{F(Q, M)}{MP}\, dS_M,$$
$$A_2 = \Delta_Q \int\int_{S_2} \frac{dS_M}{MP.MQ} + \int\int_{S_2} \frac{F(Q, M)}{MP}\, dS_M;$$

de la sorte nous aurons

$$A = A_1 + A_2.$$

Considérons d'abord

$$\int\int_S z_Q A_1\, dS_Q.$$

L'opération qui consiste à prendre le Δ_P de cette expression ne soulève pas de difficulté : dans toute l'aire S, la fonction A_1 est régulière quel que soit le point Q. A supposer même que Q soit en P, le terme $\Delta_Q \int\int_{S_1} \frac{dS_M}{MP.MQ}$ est régulier (l'opération Δ_Q faisant disparaître le terme logarithmique de $\int\int_{S_1}\frac{dS_M}{MP.MQ}\Big)$. Quant au terme $\int\int_{S_1}\frac{F(Q,M)}{MP}\,dS_M$, nous avons même appris à former explicitement son Δ_P.

Considérons maintenant

$$\int\int_S z_Q A_2\,dS_Q.$$

L'étude est délicate et je n'ai pu la pousser à fond. On peut voir que $\Delta_P A_2$ est logarithmiquement infini quand Q vient sur (C), ce qui assure un sens à l'intégrale

$$\int\int_S z_Q \Delta_P A_2\,dS_Q.$$

En effet, nous avons

$$\Delta_P A_2 = \Delta_Q \int\int_{S_2}\frac{dS_M}{\overline{MP}^3.MQ} + \int\int_{S_2}\frac{F(M,Q)}{\overline{MP}^3}\,dS_M;$$

ceci représente l'accélération au point Q $\left(\text{au facteur } \frac{1}{2\pi} \text{ près}\right)$ quand la dénivellation à l'instant considéré est zéro en tout point de l'aire S_1 et $\frac{1}{\overline{PQ}^3}$ en tout point Q de l'aire S_2. Donc $\Delta_P A_2$ est bien logarithmiquement infini quand Q tend vers le contour (C). Il résulte que l'intégrale $\int\int_S z_Q \Delta_P A_2\,dS_Q$ a un sens. Mais il n'est pas absolument certain [1] qu'elle représente le Δ_P de $\int\int z_Q A_2\,dS_Q$.

---

[1] On peut cependant, dans le cas de l'hémisphère, donner une idée de cette dernière démonstration. Il résulte des considérations exposées dans la cinquième section qu'on peut écrire

$$A_2 = U(P,Q) + 2\int_{(C)}\frac{1}{CQ}\frac{d}{dn}\frac{1}{CP}\,ds,$$

la fonction $U(P,Q)$ étant finie quand le point Q vient sur le contour C. Nous en tirons

$$\Delta_P A_2 = \Delta_P U(P,Q) + 2\int_{(C)}\frac{1}{CQ}\frac{d}{dn}\frac{1}{\overline{CP}^3}\,ds;$$

Reste à calculer le terme β :

$$\beta = \int\int_S 2\pi \frac{\partial^2 z_M}{\partial t^2} F(M, P)\, dS_M;$$

P étant intérieur à l'aire S, F(M, P) sera toujours finie. Seulement, ici encore, nous ne pourrons sans précautions remplacer $2\pi \frac{\partial^2 z_M}{\partial t^2}$ par sa valeur tirée de (9) et séparer les intégrales obtenues sous peine d'obtenir des termes infinis. Il faudra alors recourir à l'artifice du contour (C') et de l'aire (S') et prouver que les intégrales obtenues à la limite ont un sens : il n'est du reste pas nécessaire de reprendre tous les calculs, ils se déduisent des précédents en en substituant F(M, P) à $\frac{1}{MP}$. Seulement ici, pour appliquer la formule de Green, il sera inutile d'isoler le point P : nous trouverons seulement

$$\beta = \int\int_S z_Q \left[\Delta_Q \int\int_S \frac{F(M, P)}{MQ} dS_M + \int\int_S F(M, P) F(Q, M)\, dS_M\right] dS_Q,$$

---

mais si nous nous reportons à l'expression précédente de $\Delta_P A_2$, nous avons aussi

$$\Delta_P A_2 = V(P, Q) + 2\int_{(C)} \frac{1}{CQ} \frac{d}{dn} \frac{1}{\overline{CP}^3}\, ds,$$

la fonction V(P, Q) étant finie. Il s'ensuit que la fonction $\Delta_P U(P, Q)$ est identique à V(P, Q). Elle est donc elle-même finie, quel que soit le point Q. De sorte que l'expression

$$\int\int_S z_Q \Delta_P U(P, Q)\, dS_Q$$

est certainement le Δ_P de

$$\int\int_S z_Q U(P, Q)\, dS_Q.$$

Finalement, nous sommes ramenés à montrer qu'on a bien

$$\Delta_P \int\int_S z_Q \int_C \frac{1}{CQ} \frac{d}{dn} \frac{1}{CP}\, ds\, dS_Q = \int\int_S z_Q \int_C \frac{1}{CQ} \frac{d}{dn} \frac{1}{\overline{CP}^3}\, ds\, dS_Q.$$

Pour cela, il suffira d'abord de vérifier qu'on a bien

$$\int\int_S z_Q \int_C \frac{1}{CQ} \frac{d}{dn} \frac{1}{CP}\, ds\, dS_Q = \int_C \frac{d}{dn} \frac{1}{CP} \int\int \frac{z_Q}{CQ}\, dS_Q\, ds.$$

Puis, sous cette dernière forme donnée à l'intégrale, on constatera que la démonstration s'achève sans difficulté.

en posant $U(M) = F(M,P)$ et en remarquant que U et ΔU sont finis tant que P est intérieur à l'aire S, nous voyons que le coefficient de z_Q est au plus logarithmiquement infini au voisinage de (C). Donc β a un sens, ce qui permet notre passage à la limite.

Finalement, nous déduisons de l'équation (9) l'équation

$$(20) \qquad 4\pi^2\left(\frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4} + \Delta z_P\right) = \int\int_S z_Q \, K(P, Q) \, dS_Q,$$

en posant

$$(21) \quad K(P, Q) = \Delta_P \Delta_Q \int\int_S \frac{dS_M}{MP.MQ} + \Delta_P \int\int_S \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M + \Delta_Q \int\int_S \frac{F(M, P)}{MQ} dS_M + \int\int_S F(M, P) \, F(Q, M) \, dS_M;$$

$F(M,P)$ étant symétrique en M et P, l'expression précédente nous montre que la fonction $K(P,Q)$ est symétrique en P et Q. D'où le résultat suivant, dû à M. Hadamard :

Conclusion. — A moins que la fonction $K(P,Q)$ ne soit identiquement nulle, le calcul précédent nous montre qu'on ne peut déduire de l'équation (9) celle de Cauchy. Donc en général *l'équation de Cauchy n'est pas vérifiée par les petits mouvements de surface contenu dans un vase de forme quelconque.*

Il faut bien remarquer que l'équation (20) n'a été obtenue que pour un point P différent du contour (C), et que, pour un point du bord, la méthode de calcul que nous avons donnée est complètement en défaut.

Du reste, il est bien certain que toutes les fois que $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ est singulier sur (C), il en sera de même de $\frac{\partial^4 z}{\partial t^4}$, et les singularités de $\frac{\partial^4 z}{\partial t^4}$ seront d'ordre plus élevé que celles de $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ lui-même.

Remarque. — Considérons deux solutions $u(M, P, t)$ et $v(M, P, t)$ de l'équation (9) telles qu'on ait

$$u(M, P, 0) = \frac{1}{MP} = u_0, \qquad v(M, P, 0) = F(M, P) = v_0.$$

L'équation (9) s'écrit de la sorte :

$$2\pi \frac{\partial^2 z_P}{\partial t^2} = \Delta_P \int\int_S z_M u_0 \, dS_M + \int\int_S z_M v_0 \, dS_M,$$

et l'équation (20) que nous en avons déduite pourra se mettre sous une forme assez frappante. Nous avons en effet

$$2\pi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{t=0} = \Delta_Q \int\int_S \frac{dS_M}{\mathrm{MP.MQ}} + \int\int_S \frac{F(Q, M)}{\mathrm{MP}} dS_M,$$

$$2\pi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_{t=0} = \Delta_Q \int\int_S \frac{F(M, P)}{\mathrm{MQ}} dS_M + \int\int_S F(M, P)\, F(Q, M)\, dS_M.$$

Mais dans ces conditions l'équation (20) s'écrit

$$2\pi \left(\frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4} + \Delta z_P\right) = \Delta_P \int\int_S z_M \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dS_M + \int\int_S z_M \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} dS_M.$$

Cas du fluide indéfini. — L'équation de surface est alors

$$2\pi \frac{\partial^2 z_P}{\partial t^2} = \Delta_P \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_M}{\mathrm{MP}} dS_M.$$

Nous faisons l'hypothèse suivante : c'est que les deux intégrales

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} z_M \, dS_M \qquad \text{et} \qquad \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial z_M}{\partial t} dS_M$$

sont absolument convergentes. (Nous avons dit qu'on était amené à les considérer comme nulles.) Dans ces conditions on peut écrire

$$\Delta_P \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_M}{\mathrm{MP}} dS_M = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta z_M}{\mathrm{MP}} \text{'K}\mathrm{S}p$$

nous avons donc

$$4\pi^2 \frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\displaystyle\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta\Delta z_Q}{\mathrm{MQ}} dS_Q}{\mathrm{MP}} dS_M.$$

Considérons un deuxième point P'. Écrivons l'égalité analogue et retranchons membre à membre les deux équations obtenues.

Nous avons

$$4\pi^2\left(\frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4}-\frac{\partial^4 z_{P'}}{\partial t^4}\right)=\overline{\int\int}_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{\int\int}_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta\Delta z_Q}{MQ}\,dS_Q}{MP}\,dS_M-\overline{\int\int}_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{\int\int}_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta\Delta z_Q}{MQ}\,dS_Q}{MP'}\,dS_M.$$

D'ailleurs l'intégrale

$$\overline{\int\int}_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{MP.MQ}-\frac{1}{MP'.MQ}\right)dS_M$$

est bien définie et égale à $2\pi\log\frac{P'Q}{PQ}\cdot$ Appliquons alors la formule de Green au deuxième membre dans l'aire comprise entre un cercle de rayon très grand et deux autres très petits de centres P et P', et passons à la limite, il vient

$$\frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4}-\frac{\partial^4 z_{P'}}{\partial t^4}+\Delta z_P-\Delta z_{P'}=0,$$

quels que soient les points P et P'. Donc

$$\frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4}+\Delta z_P=\text{fonction du temps.}$$

Cette équation doit admettre la solution $z=0$. Donc le deuxième membre est identiquement nul et nous retrouvons l'équation de Cauchy

$$\frac{\partial^4 z}{\partial t^4}+\Delta z=0.$$

La fonction K(P, Q) *n'est pas en général identiquement nulle.* — Nous allons vérifier ce résultat dans le cas de l'hémisphère en calculant la valeur de cette fonction quand P et Q sont au centre.

Souvenons-nous que si l'un des points M ou P vient au centre, la fonction F(M, P) se réduit à la constante $\frac{2}{R^3}\cdot$ D'autre part

$$K(P,Q)=\Delta_P\Delta_Q\int\int_S\frac{dS_M}{MP.MQ}+\Delta_P\int\int_S\frac{F(M,Q)}{MP}\,dS_M+\Delta_Q\int\int_S\frac{F(M,P)}{MQ}\,dS_M+\int\int_S F(M,P)\,F(M,Q)\,dS_M.$$

La dernière intégrale au centre donnera $\frac{4\pi}{R^4}$. La seconde et la troisième donneront des résultats égaux. Prenons la seconde en supposant Q en O,

$$\Delta_P \int\int_S \frac{F(M, O)}{MP} dS_M = \frac{2}{R^3} \Delta_P \int\int_S \frac{dS_M}{MP} = -\frac{2}{R^3} \int_c \frac{d}{dn} \frac{1}{PC} ds;$$

quand P est en O, cela donne $-\frac{4\pi}{R^4}$. Donc

$$K(O, O) = \left(\Delta_P \Delta_Q \int\int_S \frac{dS_M}{MP.MQ} \right)_{0,0} - \frac{4\pi}{R^4}.$$

Nous avons d'ailleurs

$$\Delta_Q \int\int_S \frac{dS_M}{MP.MQ} = \Delta_P \int\int_S \frac{dS_M}{MP.MQ} + \int_C \left(\frac{1}{QC} \frac{d}{dn} \frac{1}{PC} - \frac{1}{PC} \frac{d}{dn} \frac{1}{QC} \right) ds,$$

Si Q est en O, nous déduisons de cette formule

$$\Delta_Q \int\int_S \frac{dS_M}{MP.MO} = \Delta_P \int\int_S \frac{dS_M}{MP.MO} + \int_C \left(\frac{1}{R} \frac{d}{dn} \frac{1}{PC} - \frac{1}{R^2} \frac{1}{PC} \right) ds.$$

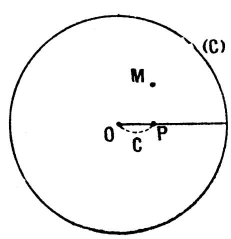
Donc

$$\Delta_P \Delta_Q \int\int_S \frac{dS_M}{MP.MO} = \Delta_P \Delta_P \int\int_S \frac{dS_M}{MP.MO} + \int_C \left(\frac{1}{R} \frac{d}{dn} \frac{1}{PC^3} - \frac{1}{R^2} \frac{1}{PC^3} \right) ds.$$

Quand P est en O, l'intégrale curviligne donne $\frac{4\pi}{R^4}$. Donc

$$K(O, O) = \lim_{P \to 0} \Delta_P \Delta_P \int\int_S \frac{dS_M}{MP.MO}.$$

Fig. 7.



Il suffit de montrer que cette expression n'est pas nulle.

L'intégrale à différentier s'écrit

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{R} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho c \cos\omega + c^2}}$$

ou

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}\left[\frac{R - c\cos\omega + \sqrt{R^2 - 2Rc\cos\omega + c^2}}{c(1-\cos\omega)}\right] d\omega.$$

La partie intéressante de l'élément différentiel est

$$\operatorname{Log}\left[1 - \frac{c}{R}\cos\omega + \sqrt{1 - 2\frac{c}{R}\cos\omega + \frac{c^2}{R^2}}\right]$$
$$= \operatorname{Log} 2 + a_1 c + a_2 c^2 + a_3 c^3 + \ldots,$$

et il faut lui faire subir l'opération

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial c^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(2)} = \frac{\partial^4}{\partial c^4} + \frac{2}{c}\frac{\partial^3}{\partial c^3} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial c^2} + \frac{1}{c^3}\frac{\partial}{\partial c},$$

ce qui donne

$$\frac{qa_3}{c} + 64 a_4 + \ldots,$$

nous devons donc trouver

$$\int_0^{2\pi} a_3\, d\omega = 0,$$

pour assurer la continuité du $\Delta\Delta$, et pour notre objet même nous devons vérifier

$$\int_0^{2\pi} a_4\, d\omega = 0.$$

Posons

$$\frac{c}{R} = x,$$

nous avons

$$\sqrt{1 - 2x\cos\omega + x^2} = 1 - x\cos\omega + \frac{x^2}{2}\sin^2\omega + \frac{2x^3}{4}\sin^2\omega\cos\omega$$
$$- \frac{x^4}{8}(1 - 6\cos^2\omega + 5\cos^4\omega)\ldots.$$

Soit $2A$ la quantité sous le logarithme

$$A = 1 - x\cos\omega + \frac{x^2}{4}\sin^2\omega + \frac{x^3}{4}\sin^2\omega\cos\omega$$
$$- \frac{x^4}{16}(1 - 6\cos^2\omega + 5\cos^4\omega) + \ldots.$$

Le développement de $\log A$, changé de signe, nous donne

$$x\cos\omega - \frac{x^2}{4}\sin^2\omega - \frac{x^3}{4}\sin^2\omega\cos\omega + \frac{x^4}{16}(1 - 6\cos^2\omega + 5\cos^4\omega) + \dots$$
$$+ \frac{x^2}{2}\cos^2\omega - \frac{x^3}{4}\sin^2\omega\cos\omega + \frac{x^4}{32}(\sin^4\omega - 8\sin^2\omega\cos^2\omega) + \dots$$
$$+ \frac{x^3}{3}\cos^3\omega \qquad - \frac{x^4}{4}\sin^2\omega\cos^3\omega + \dots$$
$$+ \frac{x^4}{4}\cos^4\omega + \dots.$$

On voit immédiatement que

$$\int_0^{2\pi} a_3\, d\omega = 0.$$

D'autre part, nous avons

$$-32a_4 = 2 - 28\cos^2\omega + 34\cos^4\omega + \sin^4\omega,$$
$$-32\int_0^{2\pi} a_4\, d\omega = \left(-24 + \frac{105}{4}\right)\pi.$$

Le résultat est $\neq 0$. Donc la vérification est faite.