Bulletin de la S. M. F.

Laguerre

Sur différentes formes que l'on peut donner à l'intégrale de l'équation d'Euler

Bulletin de la S. M. F., tome 3 (1875), p. 101-103
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__101_1>

Sur différentes formes que l'on peut donner à l'intégrale de l'équation d'Euler, par M. Laguerre.

(Séance du 17 mars 1875.)

1. Soit un polynôme du quatrième degré en x que je représenterai par la forme homogène $U(x,y)$, où y désigne une constante égale à l'unité et introduite pour l'homogénéité des formules, l'équation d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{U(x,y)}} = \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi.\eta)}}$$

a, comme je l'ai montré précédemment (*), pour intégrale générale l'équation suivante

$$6\alpha U_2 + 36H_2 + (3S - \alpha^2)\omega^2 = 0, \tag{1}$$

où α représente une constante arbitraire, ω le déterminant $x\eta - y\xi$, U_2, H_2 les émanants principaux de U et du hessien H de la forme donnée, et S son invariant quadratique.

Cela posé, on a l'identité suivante, que l'on vérifiera facilement,

$$U(x,y)U(\xi,\eta) - U_2^2 = 4H_2\omega^2 + \frac{S}{3}\omega^4; \tag{2}$$

je l'écrirai plus simplement sous la forme suivante

$$UU' - U_2^2 = 4H_2\omega^2 + \frac{S}{3}\omega^4,$$

d'où

$$S\omega^4 + 12H_2\omega^2 = 3UU' - 3U_2^2.$$

(*) *Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie des courbes tracées sur une surface du second ordre.* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. I, p. 35.)

Multiplions maintenant par ω^2 le premier membre de l'équation (1), et remplaçons $S\omega^4 + 12H_2\omega^2$ par sa valeur tirée de la relation précédente, il viendra

$$6\alpha U_2\omega^2 - \alpha^2\omega^4 + 9UU' - 9U_2^2 = 0,$$

ou

$$9UU' = (3U_2 - \alpha\omega^2)^2;$$

ou encore

$$(3) \qquad U_2 - \sqrt{UU'} = \frac{\alpha}{3}\omega^2.$$

2. Cette nouvelle forme de l'équation d'Euler peut elle-même se transformer d'une façon remarquable.

Décomposons U d'une façon quelconque en un produit de deux facteurs du second degré, en posant

$$U = f(x,y)\varphi(x,y),$$

où

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

et

$$\varphi(x,y) = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2.$$

On aura évidemment

$$UU' = f(x,y)\varphi(x,y)f(\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta);$$

d'autre part, en désignant par Δ l'invariant quadratique simultané des deux formes f et φ, $AC' + CA' - 2BB'$, on vérifiera facilement l'identité suivante

$$f(x,y)\varphi(\xi,\eta) + f(\xi,\eta)\varphi(x,y) = 2U_2 + \omega^2\frac{\Delta}{3}.$$

Portons ces valeurs de U_2 et de UU' dans l'équation (3), elle deviendra, en faisant pour abréger $f(\xi,\eta) = f'$ et $\varphi(\xi,\eta) = \varphi'$,

$$f\varphi' + f'\varphi - 2\sqrt{f\varphi f'\varphi'} = \omega^2\left(\frac{2\alpha + \Delta}{3}\right);$$

d'où

$$(4) \qquad \sqrt{f\varphi'} - \sqrt{f'\varphi} = \beta\omega,$$

β désignant une constante arbitraire.

D'où la proposition suivante, où j'ai fait disparaître les quantités auxiliaires y et η :

Si l'on décompose d'une façon quelconque le polynôme du quatrième degré, $F(x)$, *en deux facteurs du second degré* $f(x)$ *et* $\varphi(x)$, *l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = \frac{d\xi}{\sqrt{F(\xi)}}$$

est

$$\frac{\sqrt{f(x)\varphi(\xi)} - \sqrt{f(\xi)\varphi(x)}}{x-\xi} = \text{constante}.$$

J'avais déjà déduit cette proposition de considérations purement géométriques, dans une note *Sur les propriétés des coniques qui se rattachent à l'équation d'Euler*, insérée dans les *Nouv. ann. de math.*, 1872.

Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions ; par M. TCHEBYCHEF.

(Séance du 21 juillet 1875)

Si une fonction entière, entre deux limites quelconques de la variable, s'écarte peu de zéro, et qu'elle ait une valeur considérable en dehors de ces limites; il est certain que la fonction est d'un degré élevé. Quelle est donc la formule qui donne la limite du degré de la fonction entière, d'après ses écarts de zéro, pour des valeurs de la variable comprises entre certaines limites, et sa valeur au delà de ce champ? En cherchant à résoudre ce problème d'après les méthodes exposées dans notre mémoire sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions, nous sommes parvenu à ce théorème très-simple :

THÉORÈME. — Si $f(x)$ est une fonction entière du degré n qui, depuis $x = -l$ jusqu'à $x = +l$, ne sorte pas des limites $-L$ et $+L$, et que, pour toutes les valeurs de x en dehors des limites nommées $x = -l$, $x = +l$, les valeurs de la fonction $f(x)$ soient en dehors des limites $-L$ et $+L$, on aura

$$\left(\frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - l^2}}{\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 - l^2}}\right)^n > \frac{\sqrt{f^2(x)} + \sqrt{f^2(x) - L^2}}{\sqrt{f^2(x)} - \sqrt{f^2(x) - L^2}},$$

en donnant aux radicaux les valeurs positives.
