BULLETIN DE LA S. M. F.

R. PERRIN

Sur les halphéniennes ou expressions différentielles qu'annule l'opérateur caractéristique des covariants (deuxième partie)

Bulletin de la S. M. F., tome 38 (1910), p. 239-257

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1910__38__239_0>

SUR LES HALPHÉNIENNES OU EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES QU'ANNULE L'OPÉRATEUR CARACTÉRISTIQUE DES COVARIANTS

(DEUXIÈME PARTIE);

PAR M. R. PERRIN.

II. — ÉTUDE DES HALPHÉNIENNES UNILETTRES.

13. *Halphéniennes régulières les plus simples.* — En appliquant la transformation rappelée au n° 6 ci-dessus aux invariants et covariants des formes binaires des cinq premiers degrés, on obtiendrait les 24 halphéniennes régulières distinctes dont l'étendue ne dépasse pas 5. Voici l'expression des 7 les plus simples parmi les halphéniennes; les 17 autres sont d'étendue 5 et correspondraient à des invariants ou covariants de la forme quintique. Le Tableau ci-dessous donne ces sept premières halphéniennes classées d'après leur étendue; à côté, on a rappelé les formes invariantes auxquelles elles correspondent respectivement.

Étendue 0.

$H_0 = y$ (forme primitive).

Étendue 2.

$H_1 = myy'' - (m-1)y'^2$ (hessien de cette forme).

Étendue 3.

$$H_2 = m^2y^2y''' - 3m(m-2)yy'y'' + 2(m-1)(m-2)y'^3$$
(jacobien du hessien de la forme primitive).

$$\begin{aligned} H_3 = m^2(m-1)y^2y'''^2 &- 3(m-1)(m-2)^2y'^2y''^2 \\ &- 6m(m-1)(m-2)yy'y''y''' \\ &+ 4(m-1)^2(m-2)y'^3y''' + 4m(m-2)^2yy''^3 \end{aligned}$$
(discriminant de la forme cubique).

Étendue 4.

$$H_4 = m(m-1)yy^{\text{IV}} - 4(m-1)(m-3)y'y''' + 3(m-1)(m-3)y''^2$$

(invariant quadratique S de la forme biquadratique).

$$\begin{aligned}H_5 = {} & m(m-1)(m-2)yy''y^{\text{IV}} + 2(m-1)(m-2)(m-3)y'y''y''' \\ & - m(m-1)(m-3)yy'''^2 - (m-1)^2(m-2)y'^2y^{\text{IV}} \\ & - (m-2)^2(m-3)y''^3\end{aligned}$$

(invariant cubique T de la forme biquadratique).

Étendue 5.

$$\begin{aligned}H_6 = m^2(m-1)y^2y^{\text{V}} & - 5m(m-1)(m-4)yy'y^{\text{IV}} \\ & + 2m(m-3)(m-4)yy''y''' \\ & + 8(m-1)(m-3)(m-4)y'^2y''' \\ & - 6(m-2)(m-3)(m-4)y'y''^2\end{aligned}$$

(covariant le plus simple du cinquième ordre de la forme quintique).

$$\begin{aligned}H_7 = {} & m^2(m-1)^2(m-2)y^2y^{\text{V}2} - 10m(m-1)^2(m-2)(m-4)yy'y^{\text{IV}}y^{\text{V}} \\ & + 4m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)yy''y'''y^{\text{V}} \\ & + 16m(m-1)(m-2)(m-4)^2yy''y^{\text{IV}2} \\ & - 12m(m-1)(m-3)(m-4)^2yy'''^2y^{\text{IV}} \\ & + 16(m-1)^2(m-2)(m-3)(m-4)y'^2y'''y^{\text{V}} \\ & + 9(m-1)^2(m-2)(m-4)^2y'^2y^{\text{IV}2} \\ & - 12(m-1)(m-2)^2(m-3)(m-4)y'y''^2y^{\text{V}} \\ & - 76(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)^2y'y''y'''y^{\text{IV}} \\ & + 48(m-1)(m-3)^2(m-4)^2y'y'''^3 \\ & + 48(m-2)^2(m-3)(m-4)^2y''^3y^{\text{IV}} \\ & - 32(m-2)(m-3)^2(m-4)^2y''^2y'''^2\end{aligned}$$

(invariant biquadratique J de la forme quintique).

Ces sept halphéniennes sont liées par trois relations identiques, correspondant à trois syzygies de la théorie des formes binaires, savoir :

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} & (m-1)H_2^2 + 4(m-2)^2H_1^2 = m^2H_0^2H_3, \\ & (m-3)H_3 = (m-2)H_1H_4 - mH_0H_5, \\ & (m-1)(m-2)H_6^2 = m^2(m-1)H_0^2H_7 - 12m(m-4)^2H_0H_4H_5 \\ & \qquad - 4(m-2)(m-4)^2H_1H_4^2. \end{aligned}\right.$$

De ces sept halphéniennes, deux seulement sont gauches, c'est-à-dire de poids *impair*, savoir H_2 et H_6. Comme le carré de H_2 s'exprime au moyen de la première des relations (52) en fonction des halphéniennes droites (c'est-à-dire de poids pair) H_0, H_1, H_3, on peut énoncer les théorèmes suivants :

A. *Toute équation halphénienne régulière simple (c'est-à-dire dont tous les termes ont le même degré et le même poids) et dont l'étendue ne dépasse pas* 3, *a pour premier membre le produit de facteurs* H_1, H_3, $\alpha H_1^3 + \beta H_0^2 H_3$, *si le poids de ce premier membre est pair; et s'il est impair, un tel produit multiplié par* H_2.

B. *Toute équation halphénienne simple dont l'étendue ne dépasse pas* 4, *peut être ramenée à avoir pour premier membre une fonction entière de* H_0, H_1, H_4 et H_5 *si son poids est pair, et une telle fonction multipliée par* H_2 *si son poids est impair.*

14. *Intégration des équations halphéniennes d'étendues* 2 *et* 3. — L'intégration de toute équation halphénienne simple d'étendue au plus égale à 3, se réduit donc à celle des quatre expressions

$$H_1,\quad H_2,\quad H_3,\quad \alpha H_1^3 + \beta H_0^2 H_3.$$

Pour l'obtenir, substituons dans ces expressions $y = x^p$, et déterminons p de manière que x^p soit une intégrale particulière. On trouve

$$(53)\quad \begin{cases} (H_1)_p = p(p-m)x^{2p-2}, \\ (H_2)_p = 2p(p-m)(2p-m)x^{3p-3}, \\ (H_3)_p = 4p^2(p-m)^2(p-1)(p-m+1)x^{4p-6}, \\ \alpha(H_1)_p^3 + \beta(H_0)_p^2(H_3)_p \\ \qquad = p^2(p-m)^2[(\alpha+4\beta)p(p-m)+4(m-1)\beta]x^{6p-6}. \end{cases}$$

Les valeurs de p qui annulent les seconds membres de ces expressions se présentent par couples, sauf dans la seconde; la somme des deux valeurs d'un couple étant m. Nous verrons en effet plus loin que toute halphénienne de poids pair admet $y = u^m$ comme intégrale particulière, et toute halphénienne de poids impair $y = (uv)^{\frac{m}{2}}$, u et v étant deux binomes arbitraires $ax + a'$, $bx + b'$. Ici x^0 ou x^m étant intégrales de $H_1 = 0$, la formule (29) montre que $y = u^m$ est aussi une intégrale, et comme cette expression contient deux constantes arbitraires, c'est l'intégrale générale. De même pour H_2, la valeur $p = \frac{m}{2}$ donne pour l'équation

$$H_2 = 0,$$

par la formule (29), l'intégrale

$$y = u^m \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{m}{2}} = (uv)^{\frac{m}{2}},$$

laquelle, renfermant trois arbitraires, est l'intégrale générale. Pour $H_3 = 0$, les valeurs $p = 1$ et $p = m - 1$ conduisent de même l'une et l'autre à l'intégrale générale

$$y = u^{m-1} v.$$

Et enfin, pour l'équation

$$\alpha H_1^2 + \beta H_0^2 H_2 = 0, \tag{54}$$

on est conduit à l'intégrale générale

$$y = u^{p_1} v^{p_2}, \tag{55}$$

p_1 et p_2 étant les deux valeurs de p qui annulent la parenthèse du second membre dans la dernière des formules (53), savoir

$$\left.\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}\right\} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - 4(m-1)\frac{\beta}{\alpha + 4\beta}}. \tag{56}$$

Ce dernier résultat comprend les précédents comme cas particuliers, correspondant respectivement à

$$\beta = 0, \qquad \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{m^2}{4(m-2)^2}, \qquad \alpha = 0.$$

Toutefois la formule (56) devient illusoire si $\alpha + 4\beta = 0$. Il serait facile d'obtenir le résultat exact en écrivant ainsi l'intégrale (55)

$$y = u^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}} \left(\frac{u}{v}\right)^{\sqrt{\frac{m^2}{4} - 4(m-1)\frac{\beta}{\varepsilon}}},$$

faisant tendre v vers u en même temps que ε vers zéro, et passant à la limite. Mais il est plus simple de faire la substitution $y = e^x$ dans les diverses halphéniennes. On trouve qu'elles deviennent respectivement

$$H_0 = e^x, \qquad H_1 = e^{2x}, \qquad H_2 = 4e^{3x}, \qquad H_3 = 4e^{4x}.$$

L'équation halphénienne

$$H_0^2 H_3 - 4H_1^3 = 0, \tag{57}$$

qui peut encore s'écrire, à cause de la première des identités (52),

$$H_2^2 - 16H_1^3 = 0, \tag{57 bis}$$

admet donc l'intégrale $y = e^x$ et, par suite, en vertu de la formule (29), a pour intégrale générale

$$y = u^m e^{\frac{v}{u}}. \tag{58}$$

Inversement, si l'on veut former l'équation halphénienne d'étendue 3 à laquelle satisfait la fonction $y = u^p v^{m-p}$ où m et p sont donnés, il suffit de déterminer les coefficients α et β de l'équation (54) de manière à annuler la parenthèse du second membre de la quatrième des relations (53), c'est-à-dire de poser

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{p(m-p)}{4(p-1)(p-m+1)},$$

ce qui conduit à l'équation

$$4(p-1)(p-m+1)H_1^3 + p(m-p)H_0^2 H_3 = 0. \tag{59}$$

15. *Intégration de quelques équations halphéniennes d'étendue 4 et au-dessus.* — Par la même substitution $y = x^p$, les autres halphéniennes du Tableau deviennent :

$$(60) \quad \begin{cases} (H_4)_p = 6p\,(p-m)\,(p-1)\,(p-m+1)x^{2p-4}, \\ (H_5)_p = 2p^2(p-m)^2(p-1)\,(p-m+1)x^{3p-6}, \\ (H_6)_p = 24p\,(p-m)\,(p-1)\,(p-m+1)(2p-m)x^{3p-5}, \\ (H_7)_p = 288p^2(p-m)^2(p-1)^2(p-m+1)^2(p-m+2)x^{4p-10}. \end{cases}$$

Ces formules ne fournissent pour les équations halphéniennes correspondantes que des intégrales particulières, à trois constantes.

Toutefois la combinaison

$$(H_1 H_4 - 3 H_0 H_5)_p$$

s'annule identiquement, quel que soit p. On en conclut que l'équation halphénienne d'étendue 4,

$$H_1 H_4 - 3 H_0 H_5 = 0, \tag{61}$$

a pour intégrale générale

$$y = u^p v^{m-p}, \tag{62}$$

où les quatre constantes arbitraires sont p et les trois arbitraires contenues implicitement dans uv.

Au point de vue de la théorie des formes, on conclut de là que toute forme binaire, d'ordre m égal ou supérieur au quatrième, possède un covariant de degré 4 et d'ordre $4(m-3)$, qui s'évanouit identiquement si la forme ne possède que deux facteurs linéaires distants; son expression en fonction de la forme U, de son hessien H et de ses covariants S et T (invariants de la forme biquadratique), est

$$m\mathrm{HS} - 3(m-2)\mathrm{UT}. \tag{63}$$

Pour $m = 3$, ce covariant se réduit naturellement au discriminant; et pour $m = 4$, il coïncide avec le covariant que j'ai étudié ailleurs (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1895) sous le nom de *sous-discriminant* et dont la propriété caractéristique est de s'évanouir identiquement si deux *au moins* des différences des racines de la forme du $m^{\text{ième}}$ ordre sont nulles, ce qui devait être, puisque pour la forme biquadratique, cette condition exige qu'elle n'admette au plus que deux facteurs linéaires distincts, et réciproquement.

16. *Halphéniennes correspondant aux catalecticants.* — La substitution $y = 1 + x^m$ va maintenant nous permettre d'intégrer l'équation halphénienne d'étendue 4

$$H_5 = 0. \tag{64}$$

En effet, cette substitution donne pour y', y'', y''', y^{IV}, les mêmes valeurs que la substitution $y = x^m$, laquelle annule H_5

comme tout autre halphénienne. Il suffit donc d'examiner ce que deviennent les termes qui contiennent y, savoir, d'après l'expression de H_5, les termes

$$m(m-1)y[(m-2)y''y^{\text{IV}}-(m+3)y'''^2].$$

La parenthèse qui multiplie $(m-1)y$ n'est autre chose que l'halphénienne H_4 de y'' pour l'indice $m-2$, elle s'annule donc pour $y''=u^{m-2}$. Mais l'hypothèse $y=1+x^m$ donne précisément

$$y''=m(m-1)x^{m-2}$$

et annule par conséquent séparément les termes en y, en même temps que les autres termes de H_5. L'équation (64) admet donc comme intégrale particulière

$$y=1+x^m,$$

et par suite, comme intégrale générale, à quatre constantes,

$$(65)\qquad y=u^m\left[1+\left(\frac{v}{u}\right)^m\right]=u^m+v^m,$$

u et v étant deux binomes arbitraires.

On arriverait au même résultat en écrivant H_5 sous forme de déterminant, comme l'invariant T auquel il correspond puisqu'on a

$$T=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}.$$

Si l'on remplace $a, b, \ldots, e$ par $y, \frac{y'}{m}, \ldots, \frac{y^{\text{IV}}}{m(m-1)(m-2)(m-3)}$, puis $y, y', \ldots, y^{\text{IV}}$ par

$$1+x^m,\quad mx^{m-1},\quad \ldots,\quad [m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}],$$

le déterminant deviendra

$$H_5=\begin{vmatrix} 1+x^m & x^{m-1} & x^{m-2} \\ x^{m-1} & x^{m-2} & x^{m-3} \\ x^{m-2} & x^{m-3} & x^{m-4} \end{vmatrix}$$

et s'annulera puisque les termes des deux dernières colonnes ne diffèrent que par le facteur x.

Un calcul tout à fait analogue montre que le catalecticant de

Sylvester (invariant de la forme binaire d'ordre $2m$, s'annulant quand cette forme peut se décomposer en une somme de m puissances $(2m)^{\text{ièmes}}$, $u_1^{2m} + u_2^{2m} + \ldots + u_m^{2m}$) correspond à une halphénienne d'étendue $2m$, dont l'intégrale générale est précisément

$$y = u_1^{2m} + u_2^{2m} + \ldots + u_m^{2m}, \tag{66}$$

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant m binomes arbitraires. Le plus simple des catalecticants est le hessien, le suivant est T, et dans chacun d'eux, le coefficient de a, quand on développe le déterminant, est le catalecticant qui précède immédiatement dans la série, mais où les lettres $a, b, c, d, \ldots$ seraient remplacées par $c, d, e, \ldots$. Par conséquent dans la série d'halphéniennes correspondantes, le coefficient de y n'est autre que l'halphénienne précédente dans la série, mais construite pour y'' au lieu de y, et avec l'indice $2(m-1)$ au lieu de $2m$.

17. *Halphéniennes correspondant aux discriminants.* — L'intégration de cette catégorie d'équations halphéniennes va résulter immédiatement des considérations suivantes. Le discriminant de la forme binaire d'ordre n s'annule si cette forme a un facteur double; comme on peut prendre ce facteur pour une des deux variables homogènes de la forme, le discriminant doit s'annuler si l'on suppose nuls les deux derniers coefficients a_n, a_{n-1}. L'halphénienne correspondante s'annule donc si l'on y suppose $y^{(n-2)} = 0$, $y^{(n)} = 0$, c'est-à-dire si l'on y remplace y par un polynome entier en x, à coefficients arbitraires, d'ordre $n-2$; une intégrale particulière est donc fournie par l'expression

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-2} x^{n-2}, \tag{67}$$

l'intégrale générale sera par conséquent

$$y = u^m \left[a_0 + a_1 \frac{v}{u} + a_2 \left(\frac{v}{u}\right)^2 + \ldots + a_{n-2} \left(\frac{v}{u}\right)^{n-2} \right],$$

c'est-à-dire

$$y = u^{m-n+2} X_{n-2}, \tag{68}$$

expression qui possède bien n constantes arbitraires, u étant un binome arbitraire, et X_{n-2} un polynome en n d'ordre $n-2$, à coefficients arbitraires.

On déduit sans peine de ce qui précède que la condition nécessaîre et suffisante pour qu'une forme binaire d'ordre m admette un facteur linéaire n^{uple}, consiste en ceci : qu'un certain covariant [de degré $2(m-n+1)$ par rapport aux coefficients de la forme, de poids $(m-n+1)(m-n+2)$, et par conséquent d'ordre $2(n-2)(m-n+1)$ par rapport aux variables] s'annule identiquement; ce covariant ayant pour source le discriminant de la forme binaire d'ordre $m-n+2$.

On peut encore dire : le discriminant de la forme binaire d'ordre n est, pour les formes d'ordres croissants $n, n+1, n+2, \ldots, n+p$, la source de covariants d'ordres croissants $0, 2(n-1), 4(n-1), \ldots, 2p(n-1), \ldots$ dont l'évanouissement identique est la condition nécessaire et suffisante pour que la forme correspondante admette un facteur linéaire double, triple, quadruple, ..., $(p+2)^{\text{uple}}$.

Soit demandé, comme application, de former l'équation différentielle halphénienne des courbes définies par l'équation

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{px+q}}, \tag{69}$$

où a, b, c, p, q sont des constantes à éliminer.

Cette expression rentre dans la forme (68), en y faisant $n=4$, $m=\frac{3}{2}$. Le discriminant de la forme biquadratique étant l'invariant S^3-27T^2 qui correspond à l'halphénienne

$$(m-2)H_4^3 - 27(m-3)H_5^2,$$

l'équation demandée sera

$$H_4^3 - 81 H_5^2 = 0, \tag{70}$$

H_4 et H_5 étant calculées par les formules du Tableau, où l'on aura fait $m=\frac{3}{2}$; ce qui donne

$$\begin{aligned}(yy^{\text{IV}} + 4y'y''' + 3y''^2)^3 \\ -3[(y'^2-3yy'')y^{\text{IV}} + 6y'y''y''' + 9yy'''^2 + 3y''^3]^2 = 0.\end{aligned} \tag{71}$$

18. *Intégrales communes à toute une classe d'halphéniennes.*

A. *Toutes les halphéniennes régulières unilettres à l'indice m admettent l'intégrale particulière $y=u^m$; celles qui sont gauches (de poids impair) admettent en outre l'intégrale* $y=(uv)^{\frac{m}{2}}$.

La première partie de ce théorème est presque évidente, puisque la substitution $y = x^m$ dans une halphénienne d'ordre $g = m\theta - 2\pi$ la réduit à x^3 multipliée par la somme de ses coefficients numériques, laquelle est nulle, puisque ce sont les mêmes que ceux du péninvariant correspondant. Mais on peut aussi faire dans l'halphénienne la substitution

$$y = z^{\frac{m}{n}}, \tag{72}$$

qui doit donner, d'après la première propriété démontrée au n° 7, une halphénienne en z à l'indice n. Le résultat de la substitution contiendra évidemment le facteur $z^{\frac{m\theta}{n} - 2\pi}$ commun à tous les termes; faisons-en abstraction, il restera une halphénienne H′ de poids π, de degré π puisqu'elle contient (ou peut contenir) un terme en z^π, et par suite d'ordre $(n-2)\pi$.

Si, en particulier, on prend $n = 2$, l'ordre sera nul, c'est-à-dire que l'halphénienne correspondra à un invariant de la forme binaire quadratique. En y faisant $y''' = 0$, ainsi que toutes les dérivées d'ordre supérieur, c'est-à-dire en supposant que y soit remplacé par $ax^2 + bx + c$, l'halphénienne devra se réduire à une puissance de H_1, puisque la forme quadratique n'a pas d'autre invariant que son discriminant. Cela ne sera possible que si π est pair, puisque H_1 est de poids pair; et dans ce cas, l'expression $z = ax^2 + bx + c$ ne pourra être une intégrale que si z se réduit à un carré parfait, ce qui donne bien l'intégrale $y = u^m$. Si π est impair, H′ doit s'annuler de lui-même; donc l'expression ci-dessus est une intégrale de H′, ce qui donne pour H l'intégrale

$$y = (ax^2 + bx + c)^{\frac{m}{2}}. \tag{73}$$

On voit de plus que le H_1 de z pouvant s'annuler aussi dans certains cas lorsque π est pair, (73) pourra fournir aussi une intégrale de certaines halphéniennes de poids pair; ce qui s'accorde avec ce fait, que les carrés et les produits deux à deux de covariants gauches sont des covariants droits.

D'ailleurs l'intégrale $y = u^m$ étant un cas particulier de (73), il est exact de dire qu'elle appartient à *toute* halphénienne régulière, droite ou gauche.

On peut conclure incidemment du théorème ci-dessus que si dans le péninvariant, source de n'importe quel covariant *gauche*, on remplace a_0, a_1, a_2, ..., a_n respectivement par

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{m-2}{4(m-1)},\quad \ldots,\quad \frac{(m-2)(m-4)\ldots(m-2n+2)}{2^n(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)},$$

le résultat sera nul, quel que soit m. Et en particulier pour $m=0$, on obtiendra zéro en remplaçant a_0 par 2 et tous les autres a par l'unité, dans n'importe quel péninvariant gauche.

B. *Toute halphénienne, de degré* θ *et de poids* π, *admet l'intégrale*

$$(74)\qquad y = m - r u^{m-r} X_r$$

si r *est un entier inférieur à* $\frac{\pi}{\theta}$.

En effet, un terme quelconque contient *au moins* un facteur de poids $r+1$, c'est-à-dire au moins une des dérivées $y^{(r+1)}$, $y^{(r+2)}$, ...; si donc on remplace y par un polynome X_r d'ordre r, tous les termes s'annuleront; l'halphénienne admet donc l'intégrale

$$y = u\left[a + b\frac{v}{u} + \ldots + h\left(\frac{v}{u}\right)^r\right],$$

ce qui donne bien la forme (74).

La valeur de $\frac{\pi}{\theta}$ est la suivante, pour les halphéniennes du Tableau du n° 13 :

H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7,
0	1	1	$\frac{3}{2}$	2	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$.

Donc H_3, H_4, H_5, H_6 admettent l'intégrale $y = u^{m-1}v$ et H_7 l'intégrale $y = m^{m-2}X_2$; ce sont toujours d'ailleurs des intégrales particulières, excepté pour H_3 où l'on retrouve ainsi l'intégrale générale.

C. *Toute halphénienne singulière pure, c'est-à-dire qui, étant d'indice* m *(entier et positif) en* y, *ne renferme dans son expression ni* y, *ni aucune des dérivées d'ordre inférieur à* $y^{(m+1)}$, *admet l'intégrale*

$$(75)\qquad y = \frac{X_{m+1}}{u}.$$

En effet, on peut la considérer comme une halphénienne régulière en $y^{(m+1)}$ à l'indice $-(m+2)$; on peut donc la déduire d'un péninvariant de la forme binaire d'ordre m en remplaçant respectivement $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots$ par

$$y^{(m+1)}, \quad -\frac{y^{(m+2)}}{m+2}, \quad \frac{y^{(m+3)}}{(m+2)(m+3)}, \quad (-1)^{p+1}\frac{y^{(m+p)}}{(m+2)\ldots(m+p)}, \quad \ldots,$$

mais, si l'on fait $y = x^{-1} + X_m$, on en tire

$$y' = -x^{-2} + X_{m-1}, \qquad y'' = 2x^{-3} + X_{m-2},$$
$$y^{(m)} = (-1)^m . 2.3\ldots m\, x^{-(m+1)} + k,$$
$$y^{(m+1)} = (-1)^{m+1}\, \overline{m+1}\,!\, x^{-(m+2)}, \quad y^{(m+2)} = (-1)^{m+2}(m+2)!\, x^{-(m+3)}\ldots,$$
$$y^{(m+p)} = (-1)^{m+p}(m+p)!\, x^{-(m+p+1)}\ldots.$$

Donc, en définitive, chaque terme du péninvariant se réduira à son coefficient numérique, multiplié par le facteur $(\overline{m+1}\,!)^\theta$ commun à tous les termes; le résultat de la substitution sera donc zéro.

Dès lors, de l'intégrale particulière $y = X_m + \frac{1}{x}$, on déduit une intégrale à $m+3$ arbitraires, savoir

$$y = u^m\left[a + b\frac{v}{u} + \ldots + h\left(\frac{v}{u}\right)^m + \frac{u}{v}\right],$$

qui n'est autre que (75).

19. *Intégration des halphéniennes singulières pures.* — L'expression (75) contenant implicitement $m+3$ constantes arbitraires fournit l'intégrale générale des équations halphéniennes singulières pures à l'indice m en y et d'étendre $m+3$ au plus, c'est-à-dire qui se déduisent de H_1, en y remplaçant y par $y^{(m+1)}$, et m par $-(m+2)$: ce sont celles dont le premier membre a été précédemment défini par la formule (15), je désignerai par J_1, J_2, J_3, ..., les halphéniennes singulières pures qui correspondent ainsi à H_1, H_2, H_3, ..., du Tableau du n° 13. D'ailleurs u_m étant un cas particulier de $\frac{X_{m+1}}{u}$, la première partie du théorème A du n° 18 est vraie pour toutes les halphéniennes singulières pures comme pour toutes les régulières.

Pour obtenir l'intégrale de $J_2 = 0$, il suffit de remarquer que

J_2 étant le H_2 de $y^{(m+1)}$ pour l'indice $-(m+2)$, on obtient une intégrale troisième en écrivant

$$y^{(m+1)} = \overline{uv}^{-\frac{m+2}{2}},$$

et une intégrale troisième particulière en posant

$$y^{(m+1)} = x^{-\frac{m}{2}-1},$$

d'où, en intégrant $m+1$ fois, si m est impair,

$$y = x^{\frac{m}{2}} + X_m.$$

Mais, J_2 étant aussi une halphénienne en y à l'indice m, cette intégrale particulière donne l'intégrale générale

$$y = u^m\left[\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{m}{2}} + V_m\right],$$

en appelant V_m un polynome en $\frac{v}{u}$, d'ordre m et à coefficients arbitraires, c'est-à-dire en définitive

$$y = X_2^{\frac{m}{2}} + X_m, \tag{76}$$

X_2 et X_m étant deux polynomes en x, d'ordre 2 et m respectivement, à coefficients arbitraires, d'où $m+4$ constantes arbitraires d'intégration, comme cela devait être.

Si m est pair, $X_2^{\frac{m}{2}}$ se confond avec une partie de X_m et la formule (76) ne donne plus qu'une intégrale particulière. D'ailleurs le procédé des quadratures successives employé ci-dessus introduit $l(x)$ à la $\left(\frac{m}{2}+1\right)^{\text{ième}}$ opération, et l'on trouve facilement pour l'intégrale générale

$$y = u^{\frac{m}{2}}\, l\left(\frac{v}{u}\right) + X_m. \tag{77}$$

Les intégrales de J_3 et J_5 peuvent s'obtenir de la même manière en partant de celles de H_3 et H_5. Ainsi pour J_3 on a d'abord

$$y^{(m+1)} = x,$$

d'où

$$y = x^{m+2} + X_m,$$

et par suite

$$y = u^m \left[\left(\frac{v}{u} \right)^{m+2} + V_m \right],$$

et enfin

(78)
$$y = \frac{X_{m+2}}{u^2}.$$

De même pour J_2, en partant de

$$y^{(m+1)} = 1 + x^{-m-2},$$

on obtient

$$y = X_{m+1} + x^{-1},$$

d'où

$$y = u^m \left(V_{m+1} + \frac{u}{v} \right),$$

et enfin

(79)
$$y = \frac{X_{m+2}}{X_2}.$$

Pour l'équation halphénienne singulière pure la plus générale d'étendue $m + 4$,

(80)
$$\alpha J_1^3 + \beta J_0^2 J_3 = 0,$$

on est conduit, en partant des formules (55) et (56) obtenues pour l'équation (54), à poser

$$y^{(m+1)} = x^q,$$

q ayant la valeur

$$q = -\frac{m+2}{2} \pm \sqrt{\frac{(m+2)^2}{4} + 4(m+3)\frac{\beta}{\alpha + 4\beta}},$$

d'où l'on tire

$$y = x^{q+m+1} + X_m,$$

puis

$$y = u^m \left[\left(\frac{v}{u} \right)^{q+m+1} + V_m \right]$$

et finalement

(81)
$$y = X_m + u^r v^{m-r},$$

r ayant la valeur

(82)
$$r = +\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{(m+2)^2}{4} + 4(m+3)\frac{\beta}{\alpha + 4\beta}}.$$

Lorsque $\alpha + 4\beta = 0$, ce qui rend illusoire la formule (82), on trouve sans difficulté, pour l'intégrale générale de l'expression

$$(83) \qquad 4J_1^3 - J_0^2 J_3 = 0,$$

$$(84) \qquad y = u^m e^{\frac{v}{u}} + X_m.$$

Et inversement, pour l'équation différentielle halphénienne des courbes comprises dans la formule

$$(85) \qquad y + \alpha x + \beta = u^p v^{m-p},$$

où m et p sont donnés :

$$4(m+3)J_1^3 - [2(m-2) + p(m-p)]J_0^2 J_3 = 0,$$

J_1 et J_3 étant construits avec $y^{(m+1)}$ à l'indice $-(m+2)$.

Comme application, pour $m = 1$ et $p = \frac{1}{3}$, on trouve

$$9J_1^3 + J_0^2 J_3 = 0$$

pour l'équation différentielle (d'étendue 5) des cubiques de la forme

$$(y + \alpha x + \beta)^3 = (ax + a')(bx + b'),$$

a, b, a', b', α, β étant les arbitraires à éliminer; les valeurs de J_1 et J_3 sont d'ailleurs ici

$$J_1 = -3y''y^{\text{IV}} + 4y'''^2,$$
$$J_3 = -36y''^2 y^{\text{VI}} + 300y'''^2 y^{\text{IV}2} + 360y''y'''y^{\text{IV}}y^{\text{V}} - 320y'''^3 y^{\text{V}} - 300y''y^{\text{IV}3}.$$

Par des procédés tout à fait semblables, sur le détail desquels il est sans intérêt d'insister, on arrive aux résultats suivants :

A. L'équation obtenue en égalant à zéro l'halphénienne singulière pure qui se déduit du catalecticant de la forme binaire d'ordre $2n$, en remplaçant a_0, a_1, a_2, ..., a_{2n} respectivement par

$$y^{(m+1)}, \quad \frac{y^{(m+2)}}{m+2}, \quad \frac{y^{(m+3)}}{(m+2)(m+3)}, \quad \ldots, \quad \frac{y^{(m+2n+1)}}{(m+2)\ldots(m+2n+1)},$$

admet pour intégrale générale l'expression

$$(86) \qquad y = \frac{X_{m+1}}{X_n},$$

X_p désignant toujours un polynome en x d'ordre p, à coefficients arbitraires.

B. L'équation obtenue en égalant à zéro l'halphénienne singulière pure qui se déduit du discriminant de la forme binaire d'ordre n par la même substitution que ci-dessus, admet pour intégrale générale l'expression

$$y = \frac{X_{m+n-1}}{X_1^{n-1}}. \tag{87}$$

Les formules (75), (78), trouvées plus haut, sont d'ailleurs des cas particuliers des formules (86) et (87).

20. *Intégration des équations halphéniennes composées.* — Je désigne ainsi les équations dont le premier membre est un agrégat d'halphéniennes de même ordre (et aux mêmes indices), mais de poids différents.

On a vu ci-dessus, au n° **12**, un exemple d'intégration d'équations de cette nature. En voici un autre très simple : soit donnée l'équation différentielle du second ordre

$$\alpha y y'' + \beta y'^2 + \gamma y^k = 0. \tag{88}$$

Les deux premiers termes forment une halphénienne, si l'on prend comme indice pour y le nombre m tel que

$$\frac{m}{\alpha} = -\frac{m-1}{\beta},$$

c'est-à-dire

$$m = \frac{\alpha}{\alpha+\beta};$$

l'ordre de cette halphénienne est alors $2m-4$, c'est-à-dire $-2\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}$. Pour que y^k soit une halphénienne du même ordre, il faut que

$$mk = 2m - 4,$$

d'où

$$k = 2 - \frac{4}{m} = -2\frac{\alpha+2\beta}{\alpha}.$$

Faisons maintenant $y = x^p$, et déterminons p de manière à annuler, quel que soit x, le premier membre de (88), modifié en multipliant chaque halphénienne par D^π, π étant son poids. La condition à remplir devient

$$D^2[\alpha p(p-1)+\beta p^2]x^{2p-2}+\gamma x^{kp}=0,$$

ce qui exige d'abord

$$kp=2p-2, \qquad \text{d'où} \qquad p=\frac{2}{2-k}=\frac{m}{2};$$

et aussi

$$m^2 D^2=4\gamma.$$

Ainsi l'équation halphénienne composée

$$D^2(\alpha yy''+\beta y'^2)+\gamma y^k=0$$

admet l'intégrale particulière

$$y=x^{\frac{m}{2}},$$

où

$$m=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

pourvu que

$$k=-2-4\frac{\beta}{\alpha}$$

et que

$$\gamma=\frac{\alpha^2 D^2}{4(\alpha+\beta)}.$$

On en conclut, d'après la théorie exposée au nº 8, que l'équation

$$\alpha yy''+\beta y'^2+\gamma y^{-2-4\frac{\beta}{\alpha}}=0 \tag{89}$$

admet l'intégrale

$$y=(uv)^{\frac{\alpha}{2(\alpha+\beta)}}, \tag{90}$$

u et v étant deux binomes en x, dont le résultant a pour valeur

$$D=\pm\frac{2\sqrt{(\alpha+\beta)\gamma}}{\alpha}.$$

D s'annule si $\gamma=0$, auquel cas on retombe sur un résultat connu, ou encore si $\alpha+\beta=0$; mais alors m devient infini et l'expression algébrique (90) se change en une exponentielle

$$y=e^{\lambda x^2+\mu x+\nu}. \tag{91}$$

qui fournit l'intégrale de l'équation

$$yy'' - y'^2 - 2\lambda y^2 = 0. \tag{92}$$

21. *Halphéniennes limites.* — Lorsqu'on fait croître indéfiniment l'indice m affecté à y dans une halphénienne, on est amené à envisager, à la limite, des expressions différentielles, qu'on peut appeler *halphéniennes-limites*, et qui se déduisent des covariants et invariants des formes binaires en substituant $y, y', \ldots, y^{(n)}$, respectivement à $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans l'invariant ou dans la source du covariant. Ces expressions jouissent encore, les unes par rapport aux autres, de la propriété établie au n° 7 ci-dessus; elles ne jouissent plus de celle établie au n° 8, mais d'une propriété analogue qu'on peut énoncer comme suit :

Si $y = f(x)$ est une intégrale satisfaisant à l'équation obtenue en égalant à zéro une halphénienne-limite, il en sera de même de $y = e^u f(v)$, où u et v sont deux binomes linéaires à coefficients arbitraires.

Ceci résulte immédiatement d'une propriété énoncée pour ces halphéniennes-limites par M. Stephanos, dans sa Note au Congrès de Rome que j'ai mentionnée dans la note au début du présent Mémoire.

L'étude des halphéniennes-limites prête à des développements intéressants dont je me propose de faire le sujet d'un autre travail. Je me bornerai ici à mentionner que, si l'on appelle K_1, K_2, K_3, ... les halphéniennes-limites correspondant respectivement aux halphéniennes H_1, H_2, H_3, ... du Tableau du n° 13, et qu'on y remplace y par e^z, les équations $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, ... conduisent à des équations où ne figurent ni z ni z', en sorte qu'on peut abaisser de deux unités l'ordre de ces équations en écrivant v, v', ..., au lieu de z'', z''', ... Mais il semble préférable de conserver la notation en z'', z''', ..., parce que les premiers membres des équations, bien que non homogènes, restent ainsi isobariques (par rapport à la somme des ordres de dérivation).

Dans le Tableau ci-après, la seconde colonne donne, pour chacune des halphéniennes-limites figurant dans la première colonne, le premier membre de l'équation en z qui correspond à l'annulation de l'halphénienne, et à la troisième colonne figure l'expression en $u, v, w, \ldots$ (binomes linéaires à coefficients arbitraires) de la valeur y de l'intégrale générale de cette équation halphénienne-limite :

$$
(93)\qquad \left\{
\begin{array}{lcl}
K_1 & z'' & e^{u}, \\
K_2 & z''' & e^{uv}, \\
K_3 & z'''^2 + 4z''^3 & ue^{v}, \\
4K_1^3 + \lambda K_2^2 & \lambda z'''^2 + 4z''^3 & u^{\lambda} e^{v}, \\
K_4 & z^{\text{IV}} + 6z''^2 & e^{u}\sigma_1(v), \\
K_5 & z'' z^{\text{IV}} + 2z''^3 - z'''^2 & e^{u} + e^{v}, \\
K_6 & z^{\text{V}} + 12z'' z''' & e^{u}\sigma(v), \\
K_7 & z^{\text{V}2} + 24z'' z''' z^{\text{V}} + 16z'' z^{\text{IV}2} & \\
 & \quad + 12(12z''^3 - z'''^2) z^{\text{IV}} & \\
 & \quad + 72z''^2(z'''^2 + 4z''^3) & ? \\
K_8 & z^{\text{IV}} + 30z'' z^{\text{IV}} + 60z''^3 & ?
\end{array}
\right.
$$

Dans ce Tableau, $\sigma(v)$ est la fonction elliptique de Weierstrass, dont les deux invariants g_2 et g_3 comptent pour deux des constantes arbitraires d'intégration; $\sigma_1(v)$ est la même fonction, mais avec l'invariant g_2 nul. Quant à K_8, c'est l'halphénienne-limite qui correspond à l'invariant quadratique de la forme binaire de sixième ordre; l'équation en z qui lui correspond est analogue à celle que donnerait, par deux différentiations en vue d'éliminer x, l'une des équations considérées par M. Painlevé parmi les types auxquels il a ramené les équations différentielles du second ordre; ou, plus exactement, cette équation de M. Painlevé équivaut à la suivante :

$$
(94)\qquad y^2 K_8 - 12 y K_5 - 6 K_3 = 0,
$$

dont le premier membre est une halphénienne-limite.