BULLETIN DE LA S. M. F.

BOHL

Sur certaines équations différentielles d'un type général utilisables en mécanique

Bulletin de la S. M. F., tome 38 (1910), p. 5-138

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1910__38__5_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'UN TYPE GÉNÉRAL UTILISABLES EN MÉCANIQUE;

PAR M. P. BOHL (1).

INTRODUCTION.

Les méthodes de détermination des solutions périodiques ont été notablement perfectionnées, ces derniers temps, grâce surtout aux travaux bien connus de M. Poincaré. On ne peut pas en dire autant, à ce qu'il semble, des solutions trigonométriques plus générales.

Abstraction faite des cas où, par une intégration immédiate, le problème se ramène à l'inversion des intégrales et de ceux où il revient à la considération de fonctions périodiques, je ne puis indiquer qu'un seul exemple se rapportant à notre question : c'est l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha x = \mu f(x, t, \mu),$$

où f est développable en série suivant les puissances entières et positives des quantités μ et x et contient t sous forme trigonométrique. M. Poincaré a étudié cette équation (2) et a trouvé une solution trigonométrique pour le cas $\alpha > 0$, si $|\mu|$ est suffisamment petit. Le cas $\alpha < 0$ n'est considéré que lorsque f est une fonction périodique de t; on a alors une solution périodique, de sorte que ce cas ne se rapporte pas à ce qui nous intéresse ici.

En commençant le présent travail, j'ai voulu seulement prouver l'existence des solutions trigonométriques pour des équations plus générales, me servant pour cela des théorèmes établis dans mon

(1) Dorpat, 1900; traduit du russe par M^lle^ Tarnarider.

(2) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. II, p. 311.

travail sur les séries trigonométriques [1], en les complétant suivant les circonstances. En faisant des recherches auxiliaires, j'ai trouvé différents théorèmes ayant un lien étroit avec l'objet qui nous intéresse, quoiqu'ils ne soient pas indispensables pour notre but immédiat. Enfin, il s'est trouvé que, grâce aux théorèmes découverts, la démonstration de l'existence des solutions trigonométriques pouvait se faire sans avoir recours aux résultats de mon travail mentionné ci-dessus. Les hypothèses prennent alors une autre forme; mais cette modification n'a probablement pas grande importance.

Mon travail contient donc l'étude d'un système très général d'équations différentielles et surtout l'étude du cas où ce système admet des solutions trigonométriques.

J'ai laissé de côté les compléments dont j'ai parlé plus haut aux théorèmes de mon Ouvrage sur les séries trigonométriques, car ces recherches ne se trouvent pas maintenant en rapport étroit avec l'objet principal du présent travail. Le Chapitre IV contient quelques applications.

Pour mettre le lecteur au courant, dans une certaine mesure, de l'objet du présent travail j'indiquerai quelques résultats auxquels j'ai été conduit [2].

Soit donné le système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + X_i \qquad (i = 1, 2 \ldots, n)$$

où les quantités a sont des constantes au sujet desquelles nous supposerons seulement que l'équation caractéristique

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\omega & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\omega & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0$$

n'a pas de racines dont la partie réelle soit nulle.

---

(1) *Ueber die Darstellung von Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten;* Dorpat, 1893.

(2) Nous supposerons toujours, sauf en quelques cas qui n'exigent pas d'indications spéciales, que les quantités considérées sont finies et réelles et que les fonctions sont uniformes.

Les X_i sont des fonctions de $t, x_1, \ldots, x_n$ que nous supposerons données pour les valeurs de x satisfaisant à des conditions (A) du type : $a_i < x_i < b_i$ (ou bien $a_i < x_i$, ou bien $x_i < b_i$ ou bien x_i *arbitraire*) et pour les valeurs de t satisfaisant aux conditions $t > \mathbf{t}$ (Cas α) ou bien $t < \mathbf{t}$ (Cas β) ou bien t *arbitraire* (Cas γ). Nous supposerons que les X_i ont des dérivées premières par rapport à $x_1, \ldots, x_n$, lesquelles, ainsi que les fonctions X_i, sont des fonctions continues de $t, x_1, \ldots, x_n$.

Enfin, nous ferons l'importante hypothèse suivante : on peut choisir un nombre $\gamma > 0$, tel que les x dont les valeurs absolues ne sont pas supérieures à γ satisfassent aux conditions (A) et tel que, pour

$$-\gamma < x_i < +\gamma,$$

les inégalités

$$\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right| < \Delta_1, \qquad |X_i|_0 < \Delta_2 \gamma$$

soient vérifiées. Dans ces inégalités, $|X_i|_0$ désigne la valeur de $|X_i|$ pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$; Δ_1, Δ_2 sont certains nombres positifs qu'on peut déterminer quand le tableau de coefficients a est donné. Leur mode de calcul résulte de ce qui va suivre.

Avant d'exposer les conséquences qui découlent de ces hypothèses, remarquons que ces dernières sont vérifiées, par exemple, pour le système

$$(3) \qquad \frac{dy_i}{dt} = Y_i + \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

si les conditions suivantes sont remplies.

Pour les valeurs des y satisfaisant aux conditions (B)

$$\alpha_i < y_i < \beta_i \qquad (\alpha_i < 0, \ \beta_i > 0),$$

les Y_i sont des fonctions des y qui s'annulent pour $y_1 = \ldots = y_n = 0$. Les $\frac{\partial Y_i}{\partial y_k}$ existent pour des valeurs des y répondant aux conditions (B) et sont continues pour ces valeurs des y. L'équation (2) n'a pas de racines dont la partie réelle soit nulle, si les a_{ik} désignent les valeurs des $\frac{\partial Y_i}{\partial y_k}$ pour $y_1 = \ldots = y_n = 0$. Les η_i sont des fonctions données de $t, y_1, \ldots, y_n$ pour les y répondant aux conditions (B) et pour toutes les valeurs de t. Ces fonctions ont des dérivées $\frac{\partial \eta_i}{\partial y_k}$ finies et continues, ainsi que les η_i, pour les valeurs considérées des y et de t. De plus, on a le droit d'assigner aux quantités $|\eta|$ et $\left|\frac{\partial \eta}{\partial y}\right|$ un certain degré de petitesse, ce degré pouvant être déterminé suivant la nature des fonctions Y_i.

Revenons maintenant aux équations (1). Dans mon travail, j'introduis à l'aide d'une substitution linéaire, fort connue d'ailleurs, à coefficients constants et dont le déterminant n'est pas nul, n formes y linéaires par rapport aux x. Les quantités y se divisent en deux groupes $p_1, \ldots, p_k$ et $q_1, \ldots, q_l$, les éléments du groupe p correspondant aux racines de l'équation (2) dont la partie réelle est positive, et ceux du groupe q aux racines à la partie réelle négative. Il peut d'ailleurs arriver qu'on n'ait qu'un seul groupe [1].

Nous restreindrons ensuite les systèmes p et les systèmes q à l'aide des conditions

$$(4) \qquad \text{I.}\ \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \leqq \delta\gamma^2 \qquad \text{II.}\ \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 \geqq -\delta\gamma^2,$$

où les quantités $d > 0$, $f < 0$, ainsi que $\delta > 0$, sont certaines constantes qui ne dépendent que du tableau des coefficients a. A chaque système p, q répondant aux conditions (4) correspond un système x répondant aux conditions

$$-\gamma < x_i < \gamma \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Désignons par P, Q les systèmes de quantités p et q caractérisées par les conditions (4, I) et (4, II).

Nous avons alors les théorèmes suivants :

I. Cas α. — *Soient t_0 l'une quelconque des valeurs considérées de t et $[q]$ l'un quelconque des systèmes* Q. *Au système $[q]$ correspond un système* P *parfaitement déterminé, que nous désignerons par $[p]$, tel que la solution des équations* (1) *cor-*

---

(1) Les modifications que les théorèmes cités ici subissent dans ce cas résulteront de ce qui va suivre.

respondant aux valeurs initiales $[p]$, $[q]$ *pour* $t = t_0$, *satisfasse aux conditions* (4) *pour toutes les valeurs de* $t > t_0$. *Deux solutions de cette nature, arbitrairement choisies, tendent asymptotiquement l'une vers l'autre pour* $t = +\infty$.

II. Cas β. — *Soient* t_0 *l'une quelconque des valeurs considérées de* t *et* $[p]$ *l'un quelconque des systèmes* P. *Au système* $[p]$ *correspond un système* Q *parfaitement déterminé, que nous désignerons par* $[q]$, *tel que la solution des équations* (1) *correspondant aux valeurs initiales* $[p]$ *et* $[q]$ *pour* $t = t_0$, *satisfasse aux conditions* (4) *pour toutes les valeurs de* $t > t_0$. *Deux solutions de cette nature, arbitrairement choisies, tendent asymptotiquement l'une vers l'autre pour* $t = -\infty$.

III. Cas γ. — Les théorèmes ci-dessus sont exacts simultanément. En outre : *Il existe une solution déterminée des équations* (1) *satisfaisant aux conditions* (4) *pour toutes les valeurs de* t. *Une solution satisfaisant aux conditions* (4) *pour des valeurs assez grandes de* t *tend asymptotiquement vers cette solution pour* $t = \infty$. *Une solution, satisfaisant aux conditions* (4) *pour des valeurs assez petites de* t, *tend asymptotiquement vers cette solution pour* $t = -\infty$.

Considérons le cas où toutes les valeurs de t sont admissibles et supposons de plus que t entre dans les X_i sous forme trigonométrique. Voici ce que nous entendons par là : les X_i (du moins pour les valeurs des x satisfaisant à la condition $-\gamma < x_i < \gamma$ et pour toutes les valeurs de t) se déduisent de certaines fonctions $\rho_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)$ par la substitution

$$u_1 = \frac{t}{\alpha_1}, \quad \ldots, \quad u_m = \frac{t}{\alpha_m},$$

les ρ étant, pour des valeurs des x répondant aux conditions $-\gamma < x_i < \gamma$ et pour toutes les valeurs des u, des fonctions continues des x et des u et périodiques par rapport aux u, de périodes égales à l'unité. Les α sont des quantités non nulles et telles qu'entre leurs inverses il n'existe point d'équations linéaires homogènes à coefficients entiers non tous nuls.

Des hypothèses faites il résulte alors que les éléments de la solution sus-indiquée, qui satisfait aux conditions (4) pour toutes les valeurs de t, sont développables en séries trigonométriques uniformément convergentes pour toutes les valeurs de t,

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \tag{5}$$

où chaque terme u_ν est une expression entière et rationnelle en

$$\cos\frac{2\pi t}{\alpha_\mu}, \quad \sin\frac{2\pi t}{\alpha_\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m),$$

à coefficients constants.

Si les fonctions ρ admettent des dérivées continues par rapport aux x et u jusqu'à l'ordre S inclusivement et si S est $\geqq 2m$, les éléments de la solution sus-indiquée sont développables en séries trigonométriques absolument et uniformément convergentes pour toutes les valeurs de t, le type de ces séries correspondant aux séries ordinaires de Fourier. Cela veut dire que chaque terme des séries qui représentent la solution contient, en outre du coefficient constant, le produit de quantités qui ont la forme de cosinus et de sinus des multiples entiers de $2\pi t : \alpha_\mu$.

Pour le reste du travail, je me borne à renvoyer au résumé qui suit cette introduction.

Les exemples que j'ai cités ont un caractère mécanique. En dehors de ces exemples, le lecteur ne trouvera dans cette étude que des recherches rigoureusement analytiques. Les démonstrations de caractère géométrique ou même mécanique n'y sont pas admises, ce qui n'exclut cependant pas l'emploi de la terminologie empruntée à la Géométrie [1]. En choisissant les exemples, je ne cherchais d'ailleurs pas à examiner les cas les plus généraux possibles. J'ai voulu seulement indiquer certaines directions dans lesquelles on pourra trouver autant qu'on voudra de problèmes de Mécanique correspondant à nos recherches.

---

[1] Dans le présent travail les expressions : *point* (lieu), *domaine*, *voisinage ou région d'un point* (d'un lieu) *point d'accumulation* ont le même sens que les expressions : *Stelle, Gebiet, Umgebung einer Stelle, Haufungsstelle,* employées par les auteurs allemands.

RÉSUMÉ DU MÉMOIRE.

CHAPITRE I.

PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES (¹).

1. *Lemme.* — Le théorème suivant permet souvent d'assigner des limites aux différences des éléments de solution d'équations différentielles.

Soient $2n$ fonctions x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ satisfaisant aux équations

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t) + \xi_i(t),$$
$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(t) + \rho_i(t),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

pour les valeurs de la variable t comprises dans un certain intervalle, les fonctions f, F, ξ, ρ ayant des valeurs bien déterminées pour chaque valeur de t de l'intervalle considéré. Soient A et B les limites de cet intervalle, ces limites pouvant elles-mêmes appartenir à l'intervalle.

Supposons que les fonctions f, F, ξ, ρ satisfassent aux condi-

---

(¹) On a supprimé, avec l'assentiment de l'auteur, le texte de ce premier Chapitre, dont on fait simplement connaître les conclusions principales. En effet, le théorème du n° 1, bien qu'important en lui-même, fait surtout office de lemme. Les nᵒˢ 2, 3, 4, ont cessé d'être indispensables, parce que les propositions fondamentales qu'ils contiennent ont reçu, à l'heure actuelle, plusieurs démonstrations bien connues, auxquelles il est facile de se reporter. Pour la plus importante d'entre elles, celle du n° 4, on consultera en particulier une Note insérée par M. E. Picard, dans les *Leçons sur la théorie des surfaces*, de M. Darboux (t. IV) et deux Notes publiées dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, par M. I. Bendixson (t. XXIV, p. 222) et par M. Hadamard (t. XXVIII, p. 64).

Les nᵒˢ 5, 6, 7 conduisent, au contraire, à des vues entièrement nouvelles, d'une grande importance pour la théorie des équations différentielles. Mais l'auteur ne les a pas employées dans le Mémoire actuel, faute de leur avoir donné, au moment où il le rédigeait, leur forme définitive et entièrement générale. Le lecteur les trouvera sous cette forme dans un travail ultérieur de M. Bohl, *Ueber die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. CXXVII, 1904, p. 179), et il pourra se convaincre qu'elles fournissent une seconde démonstration pour plusieurs des résultats développés dans ce qui va suivre.

tions suivantes

$$|f_i(t) - F_i(t)| \overline{\gtrless} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} A_\mu |x_\mu - y_\mu|,$$
$$|\xi_i(t) - \rho_i(t)| < d,$$

où A_μ et d sont des constantes positives. Posons

$$x_i - y_i = \eta_i,$$
$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} A_\mu |\eta_\mu(\tau)| = h; \qquad \sum A_\mu = k,$$

τ étant une valeur quelconque de t dans l'intervalle considéré.

Nous aurons alors, pour toutes les valeurs de $t \gtrless \tau$ de notre intervalle,

$$x_i(t) - y_i(t) = x_i(\tau) - y_i(\tau) + \varepsilon_i(d+h)\,\frac{e^{w(t-\tau)} - 1}{w},$$

où w est égal à $\pm k$ suivant que t est $\gtrless \tau$ et $|\varepsilon_i| < 1$.

On trouvera une application de cette proposition au n° 11, Néanmoins, les raisonnements qui vont suivre peuvent être établis sans son intervention.

2. *Du prolongement des solutions des équations différentielles.* — Soit un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les seconds membres f_i vérifient les conditions classiques (condition de Lipschitz) pour les valeurs de t comprises dans un certain intervalle $a < t < b$ et pour les valeurs des x comprises dans le domaine (G) défini par les inégalités

$$a_1 < x_1 < b_1; \qquad a_2 < x_2 < b_2; \qquad \ldots; \qquad a_n < x_n < b_n,$$

ou du moins, pour les valeurs des x comprises dans un domaine quelconque strictement intérieur à (G). Considérons une solution déterminée, définie à partir d'une valeur initiale de t intérieure à l'intervalle (a, b). Si cette solution ne peut être prolongée ni jusqu'à $t = +\infty$ ni jusqu'à $t = -\infty$, il doit exister une valeur maxima T et une valeur minima θ telles que $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ représentent la solution pour les valeurs de t comprises dans l'intervalle $\theta < t < T$, tandis que, pour $t < \theta$ ou $t > T$, les conditions d'existence de la solution ne sont plus remplies.

Si T *n'est pas égal à* b, $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ *prennent, entre autres, des valeurs aussi voisines qu'on voudra des limites de notre domaine pour des valeurs de* t *différant de* T *aussi peu qu'on voudra.* (Cela signifie qu'une au moins des quantités $b_1 - x_1|$, $|a_1 - x_1|$, $\ldots$, $|b_n - x_n|$, $|a_n - x_n|$ devient aussi petite qu'on veut.)

3. *Équations différentielles contenant des paramètres.* — Si les seconds membres f_i des équations différentielles considérées contiennent des paramètres α_1, α_2, ... et satisfont à des conditions de continuité convenables par rapport à ces paramètres, les solutions, supposées définies par des conditions initiales déterminées, sont également continues en α_1, α_2, ...

4. *Des dérivées des solutions des équations différentielles par rapport aux paramètres et aux valeurs initiales.* — Les solutions admettent également des dérivées par rapport aux paramètres, et aussi par rapport aux valeurs initiales, pourvu que les fonctions f_i, qui constituent les seconds membres des équations données, satisfassent à certaines conditions.

5. *Lemme.* — Détermination, par voie de continuité, d'une branche uniforme d'une fonction à plusieurs valeurs.

6. *Conséquences du lemme précédent; théorème fondamental de l'Algèbre.* — Application aux variations d'argument et, par suite, à l'existence d'un système de deux fonctions implicites définies par deux équations. Le théorème fondamental de l'Algèbre peut être regardé comme une conséquence de ces considérations. Mais celles-ci conduisent, en outre, au théorème suivant :

Il ne peut exister deux fonctions ξ, η *de* x *et de* y, *continues dans le domaine* $x^2 + y^2 < r^2$, *satisfaisant identiquement à la relation* $\xi^2 + \eta^2 = r^2$ *et prenant sur la circonférence* $x^2 + y^2 = r^2$ *les valeurs* $\xi = x$, $\eta = y$.

7. *Applications à la théorie des équations différentielles.* — La conclusion obtenue concerne le cas où, relativement à deux des fonctions inconnues, désignées ici par x et y, le système vérifie, pour $t \geqq t_0$, les conditions suivantes :

1° Pour $x^2+y^2=r^2$, on a, en vertu des équations différentielles, $\frac{d}{dt}(x^2+y^2)>0$;

2° La solution est certainement prolongeable pour t croissant tant qu'on n'a pas eu $x^2+y^2>r^2$.

S'il en est ainsi, *il existe une solution prolongeable de* $t=t_0$ *jusqu'à* $t=+\infty$ *et vérifiant dans tout cet intervalle, l'inégalité* $x^2+y^2+<r^2$ (¹).

CHAPITRE II.

ÉTUDE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'UN TYPE GÉNÉRAL.

8. *Le système d'équations différentielles considéré; hypothèses faites. Transformation linéaire. Introduction des grandeurs p et q.* — Considérons le système suivant d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt}=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n+\xi_i, \tag{1}$$

où les ξ_i sont fonctions de t et x données pour les valeurs des x du domaine $\alpha_i<x_i<\beta_i$ renfermant le point o...o, et pour les valeurs de t satisfaisant à la condition $t>\tau$ (ou $t<\tau$ ou *t arbitraire*), τ étant une constante. Supposons que, pour ces valeurs de t et des x, les dérivées $\frac{\partial \xi_i}{\partial x}$ existent et soient, ainsi que les ξ_i, des fonctions continues de t et des x. Supposons en outre qu'on puisse déterminer un domaine $-\gamma<x_i<\gamma$ $(\gamma>0)$ $(x_i=\pm\gamma$ apparte-

(¹) Pour appliquer cette proposition à tous les cas envisagés dans le présent Mémoire, il faudrait la généraliser et, pour cela, étendre à plus de deux variables celle qui est indiquée à la fin du numéro précédent. C'est ce qui est fait dans le Mémoire du *Journal für die Mathematik* auquel renvoie la note placée en tête du Chapitre.

nant au domaine précédent) tel que les quantités $\left|\frac{\partial\xi_i}{\partial x}\right|$ et $\frac{|\xi_i|}{\gamma}$ aient, les premières pour les valeurs des x prises dans leur nouveau domaine et pour toutes les valeurs admises de t, les secondes pour ces mêmes valeurs de t et pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, un certain degré de petitesse, que nous pourrons choisir arbitrairement mais de façon qu'il ne dépende que des quantités a (¹), ces dernières étant des constantes satisfaisant à la seule restriction que l'équation

$$\begin{vmatrix} a_{11}-u & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-u & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-u \end{vmatrix} = 0$$

n'ait pas de racines dont la partie réelle soit nulle.

Nous allons maintenant nous servir du théorème suivant de la théorie des substitutions linéaires (²) : *Soit le système*

$$x'_i = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} a_{i\mu} x_\mu \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

où les x_μ sont complètement arbitraires. En faisant la substitution

$$y'_i = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \beta_{i\mu} x'_\mu, \qquad y_i = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \beta_{i\mu} x_\mu,$$

où le déterminant $|\beta_{i\mu}|$ est $\gtrless 0$, on obtient des équations du type $y'_i =$ fonction linéaire des y_i. On peut choisir les quantités β

(¹) Nous rencontrerons plus loin une suite de quantités au sujet desquelles nous dirons qu'elles ne dépendent que des quantités a. Cela signifie qu'à tout tableau des quantités a on peut associer un système correspondant des premières quantités. D'après nos hypothèses, nous avons le droit d'introduire plus loin un nombre fini d'inégalités du type $\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right| < \Delta_1$, $\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right| < \Delta_2$, ... et $\left|\frac{\xi}{\gamma}\right|$ (pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$) inférieurs à D_1, D_2, ..., où Δ_1, Δ_2, ..., D_1, D_2, ... sont des nombres positifs dépendant des quantités a seulement.

(²) Ce théorème intervient dans la théorie des équations différentielles linéaires. *Voir* Jordan, *Sur la résolution des équations*, etc. (*Comptes rendus*, t. LXXII, 1871). — Weierstrass, *Bemerkungen zur Integration*, etc. (*Werke*, Bd. II). — Liapounoff, *Sur la stabilité du mouvement*, p. 61. Kharkoff, 1892.

réelles de telle façon que ces équations se partagent en systèmes du type

I.

$$\begin{aligned}
z'_1 &= \lambda z_1,\\
z'_2 &= z_1 + \lambda z_2,\\
z'_3 &= z_2 + \lambda z_3,\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
z'_\nu &= z_{\nu-1} + \lambda z_\nu.
\end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned}
u'_1 &= gu_1 - hv_1, & v'_1 &= gv_1 + hu_1,\\
u'_2 &= u_1 + gu_2 - hv_2, & v'_2 &= v_1 + gv_2 + hu_2,\\
u'_3 &= u_2 + gu_3 - hv_3, & v'_3 &= v_2 + gv_3 + hu_3,\\
&\dots\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots\dots,\\
u'_\rho &= u_{\rho-1} + gu_\rho - hv_\rho, & v'_\rho &= v_{\rho-1} + gv_\rho + hu_\rho,
\end{aligned}$$

où λ désigne une racine réelle et $g \pm hi$ un couple de racines imaginaires conjuguées de l'équation

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - u & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - u & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - u \end{vmatrix} = 0.$$

Le nombre d'équations correspondant à λ et se partageant par conséquent en systèmes du type I est égal au degré de multiplicité de la racine λ. Le nombre d'équations correspondant à $g \pm hi$ et se partageant par conséquent en systèmes du type II est égal au double du degré de multiplicité de la racine $g + hi$ (ou $g - hi$, ce qui revient au même). Dans ces équations, z', u', v' désignent des quantités y' et z, u, v des quantités y.

Appliquons ce théorème à notre cas. Posons à cet effet

$$y_i = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \beta_{i\mu} x_\mu.$$

On peut alors choisir les quantités réelles $\beta_{i\mu}$ de telle façon que le déterminant $|\beta_{i\mu}|$ soit $\gtrless 0$ et que les équations (1) transformées se partagent en les deux systèmes suivants :

I.

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda z_1 + \zeta_1,$$

$$\frac{dz_2}{dt} = z_1 + \lambda z_2 + \zeta_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{dz_\nu}{dt} = z_{\nu-1} + \lambda z_\nu + \zeta_\nu.$$

II.

$$\frac{du_1}{dt} = gu_1 - hv_1 + \eta_1, \qquad \frac{dv_1}{dt} = gv_1 + hu_1 + \vartheta_1,$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_1 + gu_2 - hv_2 + \eta_2, \qquad \frac{dv_2}{dt} = v_1 + gv_2 + hu_2 + \vartheta_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{du_\rho}{dt} = u_{\rho-1} + gu_\rho - hv_\rho + \eta_\rho, \qquad \frac{dv_\rho}{dt} = v_{\rho-1} + gv_\rho + hu_\rho + \vartheta_\rho,$$

où λ, g, h ont la même signification et le nombre d'équations correspondant est le même que dans le théorème précité et ζ, η, ϑ sont des expressions linéaires et homogènes en ξ dont les coefficients ne dépendent que des quantités a. Formons maintenant pour chaque système I la quantité

$$G = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} \lambda^{2\alpha-1} z_\alpha^2.$$

Nous aurons

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} \lambda^{2\alpha-1} z_\alpha^2 = 2\lambda^2 z_1^2 + \sum_{\alpha=2}^{\alpha=\nu} 2\lambda^{2\alpha-1} z_\alpha(z_{\alpha-1} + \lambda z_\alpha) + Z,$$

où Z désigne une forme bilinéaire des quantités z et ζ dont les coefficients ne dépendent que des quantités a. Par conséquent

$$(2) \quad \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} \lambda^{2\alpha-1} z_\alpha^2 = \lambda^2 z_1^2 + \lambda^{2\nu} z_\nu^2 + \sum_{\alpha=2}^{\alpha=\nu} (\lambda^\alpha z_\alpha + \lambda^{\alpha-1} z_{\alpha-1})^2 + Z.$$

Pour chaque système II nous poserons de même

$$H = \sum_{\beta=1}^{\beta=\rho} g^{2\beta-1}(u_\beta^2 + v_\beta^2),$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\sum_{\beta=1}^{\beta=\rho} g^{2\beta-1}(u_\beta^2+v_\beta^2)$$
$$= 2g\,[u_1(gu_1-hv_1)+v_1(gv_1+hu_1)]$$
$$+\sum_{\beta=2}^{\beta=\rho} 2g^{2\beta-1}[u_\beta(u_{\beta-1}+gu_\beta-hv_\beta)+v_\beta(v_{\beta-1}+gv_\beta+hu_\beta)]+\mathbf{H},$$

où $\mathbf{H}$ est une forme bilinéaire des quantités u, v d'une part et des quantités η, ϑ d'autre part, les coefficients de cette forme ne dépendant que des quantités a. Par conséquent

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\sum_{\beta=1}^{\beta=\rho} g^{2\beta-1}(u_\beta^2+v_\beta^2)\\ &= g^2(u_1^2+v_1^2)+g^{2\rho}(u_\rho^2+v_\rho^2)\\ &\quad+\sum_{\beta=1}^{\beta=\rho}[(g^\rho u_\beta+g^{\beta-1}u_{\beta-1})^2+(g^\beta v_\beta+g^{\beta-1}v_{\beta-1})^2]+\mathbf{H}.\end{aligned}\right.$$

Partageons maintenant les quantités y en deux groupes. Soient $p_1, p_2, \ldots, p_k$ celles des quantités y qui correspondent aux racines à partie réelle positive de l'équation $D=0$ et $q_1, q_2, \ldots, q_l$ celles qui correspondent aux racines à partie réelle négative de la même équation. (Il peut arriver, bien entendu, que les quantités d'un de ces groupes n'existent pas.) En ajoutant pour chacun de ces groupes les quantités G et H formées plus haut, nous aurons les deux sommes suivantes

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=k} d_\mu p_\mu^2 \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=l} f_\nu q_\nu^2,$$

où les quantités positives d et les quantités négatives f ne dépendent que des quantités a. Il résulte alors de ce qui précède

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{\mu=k} d_\mu p_\mu^2 \gtreqless P_1\sum_{\mu=1}^{\mu=k} p_\mu^2 - P_2\sqrt{\sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2},\\ &\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{\nu=l} f_\nu q_\nu^2 \gtreqless Q_1\sum_{\nu=1}^{\nu=l} q_\nu^2 - Q_2\sqrt{\sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2},\end{aligned}\right.$$

où P et Q sont des nombres ne dépendant que des quantités a, P_1 et Q_1 étant positifs. On déduit les relations (4) des relations (2) et (3) en remarquant que les seconds membres des équations (2) ou (3) sont, abstraction faite de Z et **H**, des formes quadratiques définies positives relativement aux quantités $z_1, \ldots, z_\nu$ ou $u_1, \ldots, u_\rho$, $v_1, \ldots, v_\rho$.

9. *Introduction d'un certain domaine pour les grandeurs p et q. Propositions préliminaires.* — Entre les deux systèmes d'équations différentielles en x et y il existe évidemment une dépendance bien simple. Si le domaine de variabilité des quantités x est déterminé à l'aide d'inégalités du type $\alpha_i < x_i < \beta_i$, celui des quantités y est déterminé par les mêmes inégalités quand on substitue aux x les fonctions linéaires correspondantes des y. D'une solution du système en x résulte une solution du système en y pour le même intervalle de valeurs de t et inversement. Les valeurs initiales sont liées par les mêmes relations que celles qui lient les x et les y.

En appliquant au système d'équations en x la suite de théorèmes du précédent Chapitre, on peut établir les théorèmes correspondants relatifs au système en y. On pourrait aussi les établir directement. Si, par exemple, la solution du système en y s'étend à l'intervalle de $t = t_0$ à $t = T$ (T exclu) et pas plus loin, T appartenant aux valeurs admises pour t, la solution doit prendre entre autres, des positions aussi voisines qu'on veut des limites du domaine pour des valeurs de t aussi voisines qu'on veut de T.

Si les fonctions ξ admettent des dérivées par rapport aux x jusqu'à l'ordre M et si ces dernières sont des fonctions continues de t et des x pour toutes les valeurs admises, les x admettent des dérivées par rapport aux valeurs initiales jusqu'à l'ordre M. Elles sont continues par rapport aux valeurs initiales (dans un certain domaine renfermant un système particulier de valeurs initiales) et par rapport à t et satisfont à des équations différentielles qu'on obtient en formant les dérivées par rapport aux valeurs initiales des deux membres des équations différentielles données. Il s'ensuit qu'on peut en outre différentier par rapport à t ces dérivées des x et l'on obtient des fonctions continues des valeurs initiales et de t. Par conséquent, les y ont évidemment aussi des dérivées par rapport aux valeurs initiales jusqu'à l'ordre M. Elles sont continues par rapport aux valeurs initiales (dans un domaine renfermant un système déterminé de valeurs initiales) et par rapport à t. On peut les différentier encore une fois par rapport à t et l'on obtient des fonctions continues. Il en résulte que les dérivées par rapport aux valeurs initiales des y satisfont aussi à certaines équations différentielles qu'on obtient à l'aide des équations différentielles données, car on peut modifier l'ordre de différentiation des quantités y par rapport aux valeurs initiales et par rapport à t, grâce à la continuité des fonctions correspondantes.

Introduisons maintenant le domaine suivant pour les quantités y (¹)

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=k} d_\mu p_\mu^2 \leqq \delta\gamma^2, \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=l} f_\nu q_\nu^2 \geqq -\delta\gamma^2 \qquad (\delta > 0). \tag{1}$$

Choisissons le nombre δ (dépendant des quantités a seules) suffisamment petit pour que les quantités p, q appartenant au domaine (1) soient à l'intérieur du domaine qui est indirectement assigné aux quantités y par les inégalités $-\gamma < x_i < \gamma$.

Soient maintenant $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, deux nombres positifs ne dépendant que des quantités a et satisfaisant aux conditions (²)

$$\left\{ \begin{aligned} &|P_2|\, n(\Delta_2 + \Delta_1 n) < \sqrt{\frac{\delta}{d_0}}\, P_1, \\ &|Q_2|\, n(\Delta_2 + \Delta_1 n) < \sqrt{\frac{\delta}{|f_0|}}\, Q_1. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

La signification de P_1, P_2, Q_1, Q_2 résulte des équations (4) du n° 8; d_0 et $|f_0|$ sont les plus grandes parmi les quantités d_μ et $|f_\nu|$.

Conformément à nos hypothèses, nous supposons que dans le domaine $-\gamma < x_i < \gamma$ ont lieu les inégalités $\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right| < \Delta_1$, $\left|\frac{\xi_0}{\gamma}\right| < \Delta_2$ où ξ_0 est la valeur de ξ pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$. On a alors, pour

(¹) Nous supposons d'abord que les deux groupes p et q existent. Le cas plus simple où l'on n'a qu'un seul groupe est traité plus loin.

(²) Les notations dont il est fait usage ici sont indépendantes de celles employées dans l'introduction ainsi que de celles qu'on rencontrera plus loin.

les valeurs des x prises dans le domaine $-\gamma < x_i < \gamma$,

$$\xi_i = \xi_{i0} + \sum_{\mu=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\mu} \right\} x_\mu \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\mu} \right\}$ désigne la valeur de $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\mu}$ pour un certain système de valeurs des x pris dans le domaine $-\gamma < x_i < \gamma$. Il s'ensuit que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} \overline{\overline{<}} \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| < n\,\Delta_2\gamma + n^2\Delta_1\gamma$$

et, en vertu de (2),

$$(3) \qquad |P_2| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} < \sqrt{\frac{\delta}{d_0}}\, P_1\gamma, \qquad |Q_2| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} < \sqrt{\frac{\delta}{|f_0|}}\, Q_1\gamma,$$

Envisageons maintenant, en premier lieu, le cas où les coordonnées p, q de la solution satisfont, pour une certaine valeur de t, aux conditions

$$(4) \qquad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 = \delta\gamma^2, \qquad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 \overline{\overline{>}} -\delta\gamma^2.$$

La première des relations (4) du n° 8 nous donne alors, en vertu de (3) et de l'inégalité

$$\sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2 \overline{\overline{>}} \frac{\delta}{d_0}\gamma^2$$

résultant de (4),

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \overline{\overline{>}} \sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2 \left(P_1 - \frac{|P_2| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2}} \right) > \sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2 \left(P_1 - \frac{\sqrt{\frac{\delta}{d_0}}\, P_1\gamma}{\sqrt{\frac{\delta}{d_0}}\,\gamma} \right).$$

Nous avons, par conséquent, dans le cas (4),

$$(5) \qquad \frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > 0.$$

En second lieu, considérons le cas où, pour une certaine valeur de t, on a simultanément

$$(6) \qquad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \leqq \delta\gamma^2, \qquad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 = -\delta\gamma^2.$$

Nous avons alors, en vertu de la seconde inégalité (4) du n° 8, de la relation (3) et de l'inégalité

$$\sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2 \geqq \frac{\delta}{|f_0|}\gamma^2$$

résultant de (6),

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 \geqq \sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2 \left(Q_1 - \frac{|Q_2|\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2}} \right) > \sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2 \left(Q_1 - \frac{\sqrt{\frac{\delta}{|f_0|}}\, Q_1\gamma}{\sqrt{\frac{\delta}{|f_0|}}\,\gamma} \right).$$

Donc, dans le cas (6), on a

$$(7) \qquad \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 > 0.$$

10. *De l'existence de certaines solutions d'un type particulier.* — Supposons que l'intervalle donné de t contienne toutes les valeurs réelles de t, ou bien soit défini par l'inégalité $t > \tau$ et considérons le domaine

$$(1) \qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=k} d_\mu p_\mu^2 \leqq \delta\gamma^2, \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=l} f_\nu q_\nu^2 \geqq -\delta\gamma^2,$$

défini précédemment. Des propositions du précédent paragraphe s'exprimant à l'aide des relations (4), (5), (6), (7), il résulte que si les coordonnées p, q de la solution se trouvent, pour une certaine valeur de t, par exemple $t = \tau_1$, dans le domaine (1), on peut trouver un intervalle de valeurs de t commençant par la valeur τ_1 et s'étendant au delà de $t = \tau_1$ pour lequel p, q restent dans le domaine (1), sauf dans le cas où, pour $t = \tau$,

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 = \delta\gamma^2.$$

Dans ce cas, il n'existe point d'intervalle commençant par τ_1 et s'étendant au delà de $t = \tau_1$, pour lequel p, q restent dans le domaine (1).

Choisissons maintenant un système quelconque de valeurs des q satisfaisant à la seconde des conditions (1), pour système de valeurs initiales des coordonnées q de la solution correspondant à une valeur initiale arbitrairement choisie T_0 de t. Deux cas peuvent alors se présenter : ou bien, on peut associer à ce système de valeurs initiales des q un système de valeurs initiales des p satisfaisant à (1) et tel que la solution correspondante reste pour toutes les valeurs de $t \geqq T_0$ dans le domaine (1), ou bien cela n'est pas possible.

Admettons que, pour un certain choix particulier, le second cas puisse se présenter. Alors, quelle que soit la façon de compléter le système de valeurs initiales des q par un système de valeurs des p, appartenant à notre domaine, la solution correspondante ne restera pas pour toutes les valeurs de $t \geqq T_0$ dans notre domaine.

Si le système complémentaire de quantités p satisfait à l'équation

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 = \delta\gamma^2,$$

on ne peut, d'après ce qui précède, trouver un intervalle (commençant par T_0, et s'étendant au delà de T_0), pour lequel notre solution reste à l'intérieur du domaine (1). Par contre, dans tout autre cas, un pareil intervalle existe. Mais puisque, par hypothèse, la solution ne reste pas toujours dans notre domaine, il existe évidemment un nombre positif déterminé T tel que, pour les valeurs de t appartenant à l'intervalle $T_0 \leqq t < T_0 + T$, la solution reste dans notre domaine, tandis que cela n'a plus lieu pour l'intervalle $T_0 \leqq t < T_0 + T + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, mais d'ailleurs arbitraire). Nous avons alors évidemment, pour $t = T_0 + T$,

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 = \delta\gamma^2.$$

A chaque système de valeurs des p prises dans le domaine

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta\gamma^2$$

correspond ainsi une quantité déterminée T. Soit $T = 0$ la valeur correspondant aux quantités p satisfaisant à la condition

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 = \delta\gamma^2.$$

Alors, comme nous allons le prouver, T est une fonction continue des quantités p dans le domaine

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_2^\mu \leqq \delta\gamma^2.$$

Choisissons d'abord un système de quantités p satisfaisant à l'inégalité

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta\gamma^2.$$

Désignons-le par $[p_0]$ et déterminons pour l'intervalle T_0, $T_0 + T$ la solution correspondante susceptible d'être prolongée au delà de cet intervalle. On a évidemment, pour $T_0 \leqq t < T_0 + T$,

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta\gamma^2.$$

De plus, en vertu des propositions du précédent paragraphe, on a, pour $t > T_0 + T$,

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \delta\gamma^2,$$

si $t - T_0 - T$ est suffisamment petit.

Choisissons maintenant un nombre positif Δ aussi petit qu'on voudra et considérons l'intervalle des valeurs de t défini par les inégalités $t_0 \leqq t - T_0 \leqq t_1$ $(0 < t_0 < T < t_1)$, les différences $T - t_0$, $t_1 - T$ étant supposées inférieures à Δ et la différence $t_1 - T$ assez petite pour qu'on ait

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \delta\gamma^2$$

dans l'intervalle $T < t - T_0 \leqq t_1$. Nous aurons, par conséquent,

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta\gamma^2$$

pour $t - T_0 = t_0$ et

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \delta\gamma^2$$

pour $t - T_0 = t_1$.

D'après le précédent Chapitre, nous pouvons maintenant déterminer, dans le domaine

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta\gamma^2,$$

une région autour du système $[p_0]$ telle que toutes les solutions correspondantes soient déterminées dans l'intervalle $0 \overline{\gtrless} t - T_0 \overline{\gtrless} t_1$ et diffèrent dans cet intervalle d'aussi peu qu'on voudra de la solution correspondant au système $[p_0]$. Puisque pour cette dernière solution, la différence

$$\delta\gamma^2 - \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2$$

reste, dans l'intervalle $0 \overline{\gtrless} t - T_0 \overline{\gtrless} t_0$, supérieure à un certain nombre positif, on peut choisir la région en question suffisamment petite pour que cette différence reste positive, dans le même intervalle, pour toutes les solutions correspondant aux points p de cette région et qu'en même temps on ait, pour $t - T_0 = t_1$,

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \delta\gamma^2;$$

il s'ensuit que, pour les systèmes p de la région ainsi déterminée, T reste compris entre t_0 et t_1 et diffère de moins de Δ de la valeur T correspondant au système $[p_0]$. Donc T est continue au point $[p_0]$.

Considérons, en second lieu, un système $[p_0]$ satisfaisant à l'égalité

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 = \delta\gamma^2.$$

T est alors nul pour $[p_0]$. Étant donné le nombre positif Δ, choisissons t_1 positif et inférieur à Δ de telle façon que la solution soit déterminée dans l'intervalle $0 < t - T_0 \leqq t_1$ et qu'on ait toujours

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \delta\gamma^2.$$

On aura donc

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \delta\gamma^2,$$

pour $t - T_0 = t_1$. On peut alors définir un voisinage du point $[p_0]$ tel que les solutions correspondant aux points de cette région soient déterminées dans l'intervalle $0 \leqq t - T_0 \leqq t_1$ et y diffèrent d'aussi peu qu'on voudra de la solution précédente et, par conséquent, tel que l'on ait

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \delta\gamma^2$$

pour $t - T_0 = t_1$. Pour $t - T_0 = 0$ nous avons

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \leqq \delta\gamma^2.$$

Les valeurs de T correspondant aux points de la région considérée, satisfont donc aux inégalités $0 \leqq T < t_1$. Donc $T < \Delta$.

La continuité de T dans le domaine

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \leqq \delta\gamma^2$$

est ainsi prouvée. Par conséquent, T prend en un point au moins de ce domaine sa plus grande valeur.

Soit $[p_0]$ ce point, et désignons par θ cette plus grande valeur de T. En ce point, on a évidemment

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta\gamma^2.$$

On peut déterminer autour de ce point une région intérieure au domaine

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta\gamma^2$$

et telle que toutes les solutions correspondant aux points de cette région soient déterminées dans un intervalle allant plus loin que $T_0 + \theta$. On peut prendre cette région suffisamment petite pour que toutes ces solutions soient, dans l'intervalle allant jusqu'à $t = T_0 + \theta$, aussi voisines qu'on veut de la solution correspondant à $[p_0]$ et aussi telle que les valeurs de T soient pour cette région aussi voisines qu'on veut de θ. Par un choix convenable de la région, on peut donc obtenir que les solutions en question soient, dans l'intervalle $T_0 + T$, $T_0 + \theta$, aussi voisines qu'on veut de la position à l'instant $t = T_0 + \theta$ de la solution correspondant au système $[p_0]$. On peut obtenir que les quantités T soient aussi voisines qu'on veut de θ; elles sont $\lesseqgtr \theta$.

Pour $t = T_0 + \theta$ on a, pour la solution qui nous intéresse,

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > 0,$$

comme nous le savons. Soient $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_k^0, q_1^0, \ldots, q_l^0$, les valeurs des p et q pour $t = T_0 + \theta$. On peut alors choisir deux nombres $d > 0$ et $e > 0$, tels qu'on ait pour une solution quelconque

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > 0,$$

si p, q diffèrent de $p_1^0, \ldots, p_k^0, q_1^0, \ldots, q_l^0$ de moins de d, t différant en même temps de $T_0 + \theta$ de moins de e. Cela résulte de ce que l'expression

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2$$

est une fonction continue des quantités p, q, t à l'intérieur d'un certain domaine, comme cela ressort des équations différentielles.

On peut donc, d'après ce qui précède, choisir une région autour du point $[p_0]$ suffisamment petite pour qu'on ait, pour toutes les solutions correspondant à cette région,

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > 0,$$

dans l'intervalle $T_0 + T$, $T_0 + \theta$. Il s'ensuit que, dans cet intervalle,

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \gtreqless \delta\gamma^2.$$

Donc pour $t = T_0 + \theta$, on a

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 = \delta\gamma^2,$$

pour la solution correspondant à $[p_0]$ et

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \gtreqless \delta\gamma^2,$$

pour les solutions correspondant aux autres points de la région.

Par conséquent, cette somme formée pour $t = T_0 + \theta$ dans un certain voisinage du point $[p_0]$ prend sa plus petite valeur en $[p_0]$.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ les coordonnées du point $[p_0]$ et désignons par $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k$ celles des points situés dans le voisinage de $[p_0]$ et considérées comme valeurs initiales pour $t = T_0$. Les fonctions p correspondant aux valeurs initiales α' ont, comme nous le savons, des dérivées partielles premières par rapport aux α' finies dans un certain voisinage du point $[p_0]$. La même chose a donc lieu pour

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2.$$

Mais pour $t = T_0 + \theta$ les dérivées de cette dernière quantité sont nulles au point $[p_0]$, puisqu'elle y prend une valeur minima pour une certaine région autour de $[p_0]$. Ceci donne k équations linéaires et homogènes par rapport aux quantités $d_\mu p_\mu$ où il faut prendre les valeurs des fonctions p_μ au point $[p_0]$ et pour $t = T_0 + \theta$. Comme on a en même temps

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 = \delta\gamma^2,$$

tous les $d_\mu p_\mu$ ne sont pas nuls simultanément. Par conséquent, en désignant par $\left[\frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_\rho}\right]$ la valeur de $\frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha'_\rho}$ pour

$$\alpha'_1 = \alpha_1, \;\ldots,\; \alpha'_k = \alpha_k,\; t = T_0 + \theta,$$

on a

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \left[\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1}\right] & \left[\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1}\right] & \cdots & \left[\frac{\partial p_k}{\partial \alpha_1}\right] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left[\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_k}\right] & \left[\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_k}\right] & \cdots & \left[\frac{\partial p_k}{\partial \alpha_k}\right] \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons par $[q_0]$ le point initial des quantités q pour $t = T_0$ qui jusqu'ici avait une position fixe. On peut déterminer autour de $[p_0]$, $[q_0]$ une région telle qu'à chacun de ses points, pris comme point initial pour $t = T_0$, corresponde une solution p, q définie dans l'intervalle $T_0 \lesseqgtr t \lesseqgtr T_0 + \theta$. On peut de plus choisir cette région de façon que les quantités p, q considérées, dans cet intervalle de valeurs de t, comme fonctions de valeurs initiales et de t aient des dérivées premières finies et continues par rapport aux valeurs initiales. Cela résulte de ce que nous avons dit au n° 9 en nous basant sur les théorèmes auxiliaires du Chapitre précédent. Ces dérivées satisfont aux équations différentielles, qu'on déduit des équations en p et q, c'est-à-dire des équations (I) et (II) du n° 8, en formant les dérivées par rapport aux valeurs initiales des deux membres de chaque équation. Pour plus de clarté écrivons comme il suit les équations (I) et (II) du n° 8 en les séparant en deux groupes, selon que le premier membre se rapporte aux quantités p ou aux quantités q :

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp_\mu}{dt} = L_\mu(p) + \Pi_\mu & (\mu = 1, 2, \ldots, k), \\[2ex] \dfrac{dq_\nu}{dt} = I_\nu(q) + K_\nu & (\nu = 1, 2, \ldots, l), \end{cases}$$

où L et I sont des expressions linéaires et homogènes par rapport aux quantités p ou q ; Π et K, des sommes de termes du type

$$c\xi(c = \text{const.}),$$

ces sommes pouvant être exprimées avec des coefficients c connus lorsque le tableau des quantités a est donné. Si nous formons l'expression

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2,$$

à l'aide des équations différentielles (3), les $L_\mu(p)$ donnent une forme quadratique positive définie par rapport aux quantités p, comme nous l'avons montré au n° 8 ; de même dans l'expression

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2,$$

les $I_\nu(q)$ donnent une forme quadratique positive définie par rapport aux quantités q.

Si maintenant β désigne une quelconque des valeurs initiales des quantités p ou q, on a

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial p_\mu}{\partial\beta}\right) = L_\mu\left(\dfrac{\partial p}{\partial\beta}\right) + \displaystyle\sum_{\rho=1}^{k}\dfrac{\partial\Pi_\mu}{\partial p_\rho}\dfrac{\partial p_\rho}{\partial\beta} + \sum_{\sigma=1}^{l}\dfrac{\partial\Pi_\mu}{\partial q_\sigma}\dfrac{\partial q_\sigma}{\partial\beta} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial q_\nu}{\partial\beta}\right) = I_\nu\left(\dfrac{\partial q}{\partial\beta}\right) + \displaystyle\sum_{\rho=1}^{k}\dfrac{\partial K_\nu}{\partial p_\rho}\dfrac{\partial p_\rho}{\partial\beta} + \sum_{\sigma=1}^{l}\dfrac{\partial K_\nu}{\partial q_\sigma}\dfrac{\partial q_\sigma}{\partial\beta} \\ \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k;\ \nu = 1, 2, \ldots, l). \end{array}\right.$$

Les coefficients de $\frac{\partial p}{\partial\beta}$, $\frac{\partial q}{\partial\beta}$ sous les signes $\sum$ aux seconds membres peuvent être considérés comme fonctions des valeurs initiales et de t. Pour notre but, il suffit de former ces équations pour les dérivées par rapport aux valeurs initiales des quantités p. De plus, nous examinerons seulement le cas particulier où les valeurs initiales sont les coordonnées du point $[p_0]$, $[q_0]$. Alors, d'après ce qui précède, $\frac{\partial p}{\partial\beta}$, $\frac{\partial q}{\partial\beta}$ satisfont à un système d'équations différentielles linéaires indépendant de la valeur particulière de β.

Remarque importante. — Les coefficients de $\frac{\partial p}{\partial \beta}$ et $\frac{\partial q}{\partial \beta}$ sous les signes $\sum$ aux seconds membres ont, d'après ce qui précède, la forme $\sum e \frac{\partial \xi}{\partial x}$, ces formes linéaires et homogènes des quantités $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ pouvant être obtenues formellement avec des coefficients e déterminés si le tableau des quantités a est donné. $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ s'obtient comme fonction de t en exprimant p, q en fonction de t et en considérant ensuite les x comme fonctions des p, q. Mais puisque les p, q, correspondant au point initial $[p_0]$, $[q_0]$ pour $t = T_0$, restent dans le domaine

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \leqq \delta\gamma^2, \qquad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 \geqq -\delta\gamma^2$$

pour les valeurs de t de l'intervalle $T_0 \leqq t \leqq T_0 + \theta$, les valeurs correspondantes des x restent, d'après le n° 9, dans le domaine $-\gamma < x < \gamma$. Or, nous nous sommes réservé le droit d'introduire, pour ce domaine, des inégalités du type $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| < \Delta > 0$ où Δ ne dépend que du tableau des quantités a; nous pouvons donc introduire cette hypothèse que les coefficients de $\frac{\partial p}{\partial \beta}$, $\frac{\partial q}{\partial \beta}$ sous les signes $\sum$ aux seconds membres sont inférieurs à un certain nombre $D > 0$ ne dépendant que du tableau des quantités a. Nous utiliserons plus tard cette possibilité.

Pour le moment, remarquons que les expressions

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = c_1 \dfrac{\partial p_1}{\partial \beta_1} + c_2 \dfrac{\partial p_1}{\partial \beta_2} + \ldots + c_k \dfrac{\partial p_1}{\partial \beta_k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_k = c_1 \dfrac{\partial p_k}{\partial \beta_1} + c_2 \dfrac{\partial p_k}{\partial \beta_2} + \ldots + c_k \dfrac{\partial p_k}{\partial \beta_k}; \\ s_1 = c_1 \dfrac{\partial q_1}{\partial \beta_1} + c_2 \dfrac{\partial q_1}{\partial \beta_2} + \ldots + c_k \dfrac{\partial q_1}{\partial \beta_k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_l = c_1 \dfrac{\partial q_l}{\partial \beta_1} + c_2 \dfrac{\partial q_l}{\partial \beta_2} + \ldots + c_k \dfrac{\partial q_l}{\partial \beta_k}, \end{array} \right.$$

où $c_1, \ldots, c_k$ sont des constantes arbitraires, satisfont aux équations

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt} r_\mu &= L_\mu(r) + \sum_{\rho=1}^{k} \frac{\partial \Pi_\mu}{\partial p_\rho} r_\rho + \sum_{\sigma=1}^{l} \frac{\partial \Pi_\mu}{\partial q_\sigma} s_\sigma, \\ \frac{d}{dt} s_\nu &= I_\nu(s) + \sum_{\rho=1}^{k} \frac{\partial K_\nu}{\partial p_\rho} r_\rho + \sum_{\sigma=1}^{l} \frac{\partial K_\nu}{\partial q_\sigma} s_\sigma. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients de r, s sous les signes $\sum$ dans les seconds membres sont les fonctions de t que nous avons déjà caractérisées et qu'on peut, comme nous l'avons déjà dit, assujettir à la condition d'avoir un certain degré de petitesse dépendant du tableau des quantités a. Formons maintenant, à l'aide des équations (6), l'expression

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu r_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu s_\nu^2\right].$$

L et I donnent, d'après ce qui précède, une forme quadratique positive définie des quantités r, s. Les autres termes des seconds membres des équations (6) donnent une forme quadratique des quantités r, s, ayant des coefficients auxquels on peut assigner, d'après ce qui précède, tout degré de petitesse dépendant du tableau des quantités a ([1]). Nous avons donc la relation

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu r_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu s_\nu^2\right] \gtreqless P\left(\sum_{\mu=1}^{k} r_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} s_\nu^2\right) - Q\left(\sum_{\mu=1}^{k} r_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} s_\nu^2\right)$$

où P est $>$ o et ne dépend que du tableau des quantités a, tandis qu'on peut attribuer à $Q \geqq 0$ tout degré de petitesse dépendant du tableau des quantités a.

Choisissons maintenant ce degré de petitesse dont nous pouvons disposer de façon qu'on ait $Q < P$. Nous aurons alors

$$(7)\qquad \frac{d}{dt}\left(\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu r_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu s_\nu^2\right) \gtreqless 0,$$

([1]) *Voir* Chap. II, § 8, note 1 de la page 16.

l'égalité ayant lieu pour

$$r_1 = \ldots = r_k = s_1 = \ldots = s_l = 0$$

seulement.

On peut maintenant, en vertu de la relation (2), choisir les quantités c non toutes nulles de telle façon que les quantités r définies par les relations (5) s'annulent pour $t = T_0 + \theta$. Remarquons de plus que, pour $t = T_0$,

$$\frac{\partial p_1}{\partial \beta_1} = \frac{\partial p_2}{\partial \beta_2} = \ldots = \frac{\partial p_k}{\partial \beta_k} = 1,$$

tandis que toutes les autres dérivées $\frac{\partial p}{\partial \beta}$, $\frac{\partial q}{\partial \beta}$ sont nulles. Par conséquent, si l'on choisit les quantités c, comme il vient d'être dit, on a, pour $t = T_0$,

$$r_1 = c_1, \qquad \ldots, \qquad r_k = c_k, \qquad s_1 = \ldots = s_l = 0$$

et, pour $t = T_0 + \theta$,

$$r_1 = \ldots = r_k = 0.$$

Cela étant, la somme

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu r_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu s_\nu^2 \tag{8}$$

est > 0 pour $t = T_0$ tandis qu'elle ne l'est pas pour $t = T_0 + \theta$. Cela est évident en tenant compte des signes des quantités d et f. Il existe, par conséquent, une valeur de t comprise entre T_0 et $T_0 + \theta$ pour laquelle

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu r_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu s_\nu^2\right) < 0,$$

ce qui est contraire à la relation (7).

Nous aboutissons donc à une contradiction et nous devons abandonner l'hypothèse faite au début de ce paragraphe. Nous avons donc démontré le théorème suivant :

Si le degré de petitesse dont il a été question est convenablement choisi, on peut associer, à tout système de quantités q

appartenant au domaine

$$\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 \overline{\overline{>}} -\delta\gamma^2$$

et à chacune des valeurs admises de t, un système au moins de quantités p appartenant au domaine

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta\gamma^2$$

et tel que ces quantités p, q, t, prises pour valeurs initiales, déterminent une solution qui reste pour toutes les valeurs supérieures de t dans le domaine

$$\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 > -\delta\gamma^2, \qquad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta\gamma^2.$$

Nous montrerons plus loin que, si le degré de petitesse en question est convenablement choisi, à tout système de quantités q et à toute valeur de t ne peut être associé qu'un seul système correspondant de quantités p.

Théorème analogue lorsque l'intervalle de valeurs de t est donné par $t < \tau$ *ou t arbitraire;* les rôles de p et q sont alors intervertis.

Jusqu'ici nous avons supposé qu'aucun des groupes ne disparaissait. Dans le cas contraire, on peut utiliser des considérations analogues à celles qui précèdent. Introduisant, dans le cas où le groupe q n'existe pas, le domaine

$$(9) \qquad \sum_{\mu=1}^{n} d_\mu p_\mu^2 \overline{\overline{<}} \delta\gamma^2$$

et dans le cas où le groupe p fait défaut le domaine

$$(10) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu q_\nu^2 \overline{\overline{>}} -\delta\gamma^2$$

nous avons les deux théorèmes préliminaires suivants :

1° *Le groupe q n'existe pas.* Si

$$\sum_{\mu=1}^{n} d_\mu p_\mu^2 = \delta\gamma^2,$$

on a

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{n} d_\mu p_\mu^2 > 0.$$

Si l'intervalle admis de valeurs de t est défini pour les conditions $t > \tau$ ou t *arbitraire,* il existe pour chaque valeur admise de t, $t = t_0$, une solution qui reste dans le domaine (9) pour $t \gtreqless t_0$. Si l'intervalle admis de valeurs de t est défini par les conditions $t < \tau$ ou t *arbitraire*, toute solution qui, pour une valeur de t, se trouve dans le domaine (9), reste dans ce domaine pour toutes les valeurs inférieures de t.

2° *Le groupe p n'existe pas.* Si

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu q_\nu^2 = -\delta\gamma^2,$$

on a

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu q_\nu^2 > 0.$$

Si l'intervalle admis de valeurs de t est défini par les conditions $t > \tau$ ou t *arbitraire,* toute solution se trouvant pour une valeur quelconque de t dans le domaine (10) y reste pour toutes les valeurs supérieures de t. Si l'intervalle admis de valeurs de t est défini par les conditions $t < \tau$ ou t *arbitraire*, il existe pour chaque valeur admise t_0 de t une solution qui reste dans le domaine (10) pour les valeurs inférieures de t.

$\delta > 0$ désigne ici un nombre qui ne dépend que des quantités a et est choisi de façon que les quantités p (ou q) du domaine (9) [ou (10)] conduisent à des valeurs des x satisfaisant aux inégalités $|x| < \gamma$. *De plus il est supposé que le degré de petitesse que nous avons, par hypothèse, le droit de choisir, est déterminé convenablement.*

Nous pourrions d'ailleurs simplifier les recherches dans les cas précédents, mais nous ne nous en préoccuperons pas ici.

11. *Lemme.* — Démontrons d'abord un théorème auxiliaire dont il sera souvent fait usage dans la suite.

Soient données n fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *satisfaisant pour toutes les valeurs de* $t > \tau$ (*ou* $t < \tau$, *ou t arbitraire*) [1] *au système suivant d'équations*

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \mathrm{L}_i(x) + \xi_{i0} + \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les L *désignent les mêmes expressions linéaires des x qui figurent dans les équations* (1) *au début du présent Chapitre; les* ξ_0, ξ *sont des fontions de t satisfaisant aux inégalités*

$$|\xi_{i0}| < d; \qquad |\xi_i| \leqq \varkappa \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

la quantité $d > 0$ *étant une constante quelconque, et* $\varkappa > 0$ *une constante que nous nous réservons le droit de choisir arbitrairement avec cette seule restriction que* $\varkappa$ *ne dépende que du tableau des quantités a. Soient de plus y, p, q les mêmes expressions linéaires des x et* d_μ, f_ν *les mêmes constantes que celles considérées précédemment.*

Nous introduirons en outre une nouvelle hypothèse que nous énoncerons cependant plus loin. Pour le moment, disons seulement qu'elle est remplie en particulier dans le cas où tous les x restent entre des limites finies pour l'intervalle considéré de t.

Posons

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}, \qquad s = \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 \ (^2)$$

---

(1) Pour distinguer entre elles ces trois hypothèses, nous désignerons par I le cas où les valeurs admises de t sont définies par l'inégalité $t > \tau$, par II celui où t doit rester $< \tau$ et enfin par III celui où t est arbitraire.

(2) Si l'un des groupes p ou q n'existe pas, nous posons

$$s = \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 \qquad \text{ou} \qquad s = \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2.$$

et formons $\frac{ds}{dt}$ à l'aide des équations (1). Les termes L donnent alors, comme nous l'avons déjà fait remarquer, une forme quadratique positive définie des y qui est par conséquent $\overline{\gtrless} \varkappa_1 \sigma^2$, la quantité $\varkappa_1 > 0$ ne dépendant que du tableau des quantités a. Les termes ξ_{i0} donnent une expression dont la valeur absolue est $\overline{\lessgtr} \varkappa_3 d\sigma$ où $\varkappa_3 \geqq 0$ peut être considérée comme une quantité ne dépendant que du tableau des quantités a. Enfin les ξ_i donnent un terme qui est numériquement $\leqq \varkappa_2 \varkappa \sigma^2$, où la quantité $\varkappa_2 \overline{\gtrless} 0$ ne dépend que des quantités a.

Nous avons donc

$$\frac{ds}{dt} \geqq \varkappa_1 \sigma^2 - \varkappa\varkappa_2 \sigma^2 - \varkappa_3 d\sigma.$$

Choisissons maintenant d'une façon quelconque le nombre $\varkappa > 0$ ne dépendant que du tableau des quantités a et tel qu'on ait

$$r = \varkappa_1 - \varkappa\varkappa_2 > 0.$$

Nous aurons alors

$$(2) \qquad \frac{ds}{dt} \geqq r\sigma^2 - \varkappa_3 d\sigma,$$

où les quantités $r > 0$ et $\varkappa_3 \overline{\gtrless} 0$ ne dépendent que des quantités a.

De plus, on a, comme il est facile de le voir,

$$(3) \qquad \left|\frac{d\sigma^2}{dt}\right| \overline{\lessgtr} r_0 \sigma^2 + r_1 d\sigma,$$

où les quantités $r_0 > 0$ et $r_1 > 0$ peuvent être considérées comme se déterminant à l'aide du tableau des quantités a.

Introduisons maintenant la quantité

$$\sigma_0 = \frac{\varkappa_3 + \varepsilon_0}{r} d,$$

où ε_0 est une quantité > 0 ne dépendant que des quantités a mais d'ailleurs arbitrairement choisie.

Si maintenant, pour une certaine valeur de t, $\sigma \overline{\gtrless} \sigma_0$, il en résultera

$$(4) \qquad \frac{ds}{dt} \overline{\gtrless} \sigma(r\sigma - \varkappa_3 d) \overline{\gtrless} \sigma_0 \varepsilon_0 d.$$

Ajoutons maintenant l'hypothèse supplémentaire dont nous avons fait mention au début de ce paragraphe. Cette hypothèse a pour but d'exclure le cas où l'on aurait $\sigma \overline{\gtrless} \sigma_0$ pour toutes les valeurs de t de l'intervalle $t > t'$ dans les cas I, III (ou $t < t'$ dans les cas II, III), où t' est une quelconque des valeurs admises de t. Il suffirait évidemment de supposer que les x restent entre des limites finies. Car si (4) a lieu pour toutes les valeurs de t de l'intervalle $t > t'$ (ou $t < t'$), s ne reste pas entre des limites finies. C'est l'hypothèse que nous avons indiquée au début de ce paragraphe. Plus générale serait l'hypothèse suivante : (A). *Il existe une fonction φ dans les cas* I, III (*ou une fonction ψ dans les cas* II, III) *qui est donnée pour des valeurs suffisamment grandes* (*ou petites*) *de t et admet pour celles-ci des dérivées finies φ'* (*ou ψ'*). *De plus elle satisfait aux conditions suivantes :*

$$\varphi > 0 \,(\text{ou } \psi < 0), \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} \geqq -\frac{r}{c}\left(\text{ou } \frac{\psi'}{\psi} \leqq \frac{r}{c}\right),$$
$$\lim_{t=\infty}(\varphi s) = 0 \left[\text{ou } \lim_{t=-\infty}(\psi s) = 0\right],$$

c désignant la plus grande des quantités $d_\mu \, |f_\nu|$ de sorte qu'on ait, par conséquent, toujours

$$|s| \overline{\gtrless} c\sigma^2. \tag{5}$$

Supposons cette hypothèse réalisée, les conditions entre parenthèses se rapportant aux cas II, III, les autres aux cas I, III. Cette hypothèse est d'ordre plus général que celle en vertu de laquelle les x seraient compris entre des limites finies : car dans ce dernier cas on aurait

$$\lim_{t=\infty}\left[e^{-\frac{r}{2c}t} x\right] = 0 \left[\text{ou } \lim_{t=-\infty}\left(e^{\frac{r}{2r}t} x\right) = 0\right],$$

de sorte que $e^{-\frac{r}{c}t}\left(\text{ou } -e^{\frac{r}{c}t}\right)$, seraient les fonctions φ (ou ψ) caractérisées ci-dessus.

Nous devons montrer maintenant que l'hypothèse (A) est bien suffisante pour notre but. Supposons qn'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire supposons qu'on ait $\sigma \overline{\gtrless} \sigma_0$ pour toutes les valeurs de $t > t'$ (ou $t < t'$), ce qui aurait pour conséquence la relation (4). Alors, pour des valeurs de t suffisamment grandes (ou petites), s serait > 0 (ou < 0) et comme $r\sigma - \varkappa_3 d$ est > 0 puisque $\sigma \gtreqless \sigma_0$ nous aurions

$$(6) \qquad \frac{ds}{dt} \gtreqless |s| \left(\frac{r}{c} - \frac{\varkappa_3 d}{\sqrt{|s|c}}\right).$$

Soit maintenant ε une quantité auxiliaire satisfaisant à la condition $0 < \varepsilon < \frac{r}{c}$. Puisque, pour des valeurs suffisamment grandes (ou petites) de t, $|s|$ prend des valeurs aussi grandes qu'on veut, on a, pour ces valeurs de t, $\frac{ds}{dt} > |s|\varepsilon$. Par conséquent, pour des valeurs suffisamment grandes (ou petites) de t, on a

$$\frac{d}{dt}[\log(se^{-\varepsilon t})] > 0 \left[\text{ou } \frac{d}{dt}[\log(-se^{\varepsilon t})] < 0\right].$$

Il existe donc un nombre K (ou K_0) tel que, pour des valeurs suffisamment grandes (ou petites) de t, on a

$$s > e^{K} e^{\varepsilon t} (\text{ou } -s > e^{K_0} e^{-\varepsilon t}),$$

d'où il résulte que

$$(7) \qquad \frac{1}{\sqrt{s}} < e^{-\frac{K}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \left(\text{ou } \frac{1}{\sqrt{-s}} < e^{-\frac{K_0}{2}} e^{\frac{\varepsilon}{2}t}\right).$$

Or de (6) nous déduisons

$$\frac{d}{dt}(\log s) - \frac{r}{c} + \frac{\varkappa_3 d}{\sqrt{sc}} \gtreqless 0,$$

ou

$$\frac{d}{dt}[\log(-s)] + \frac{r}{c} - \frac{\varkappa_3 d}{\sqrt{-sc}} \lesseqgtr 0,$$

ou, en tenant compte de la relation (7) et de l'hypothèse (A) pour des valeurs suffisamment grandes (ou petites) de t,

$$\frac{d}{dt}\left[\log(\varphi s) - \frac{2\varkappa_3 d}{\varepsilon\sqrt{c}} e^{-\frac{K}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}\right] \gtreqless 0,$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left[\log(\psi s) - \frac{2\varkappa_3 d}{\varepsilon\sqrt{c}} e^{-\frac{K_0}{2}} e^{\frac{\varepsilon}{2}t}\right] \lesseqgtr 0.$$

Il existe donc un nombre K_2 (ou K_3) tel que, pour des valeurs suffisamment grandes (ou petites) de t, l'on a

$$(8)\qquad \begin{cases} \log(\varphi s) - \dfrac{2\varkappa_3 d}{\varepsilon\sqrt{c}}\, e^{-\frac{K}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} > K_2, \\ \text{ou} \\ \log(\psi s) - \dfrac{2\varkappa_3 d}{\varepsilon\sqrt{c}}\, e^{-\frac{K_0}{2}} e^{\frac{\varepsilon}{2}t} > K_3. \end{cases}$$

Par conséquent, on ne peut avoir $\lim\limits_{t=\infty}(\varphi s) = 0$ [ou $\lim\limits_{t=-\infty}(\psi s) = 0$], car dans ce cas les premiers membres de (8) devraient prendre des valeurs infiniment petites pour $t = \infty$ (ou $t = -\infty$). Nous aboutissons ainsi à une contradiction avec l'hypothèse (A) et devons abandonner l'hypothèse admise à titre d'essai. Par conséquent, l'hypothèse (A) est bien suffisante pour le but que nous avons en vue.

Donc, dans tout intervalle défini par $t > t'$ (ou $t < t'$) il doit exister des valeurs $\sigma < \sigma_0$. Mais quand σ est $\geqq \sigma_0$ on a, d'après (4), $\dfrac{ds}{dt} > 0$.

Pour $\sigma \leqq \sigma_0$ on a, d'après (5), $|s| \leqq c\sigma_0^2$. Il s'ensuit que *si l'intervalle considéré est défini par $t > \tau$, on a toujours $s \leqq c\sigma_0^2$*; car si, pour une certaine valeur de t, σ était $> \sigma_0$, il existerait, d'après ce qui précède, une valeur plus grande de t pour laquelle $\sigma = \sigma_0$. Or dans cet intervalle, s croît avec t, donc on a bien $s \leqq c\sigma_0^2$. De même, *si l'intervalle considéré de valeurs de t est défini par l'inégalité $t < \tau$, on a $s \geqq -c\sigma_0^2$ et si l'intervalle considéré contient toutes les valeurs de t, on a toujours $|s| \leqq c\sigma_0^2$.*

Soit maintenant $\Sigma \geqq \sigma_0$, la valeur de σ pour une certaine valeur de t. Si pour une valeur ϑ de t plus grande que la précédente dans les cas I, III (ou plus petite que la valeur précédente de t dans les cas II, III) σ est $> \Sigma$, on peut enfermer cette valeur ϑ de t entre deux autres telles que, pour ces dernières, on ait $\sigma = \Sigma$, tandis qu'entre elles σ reste $> \Sigma$. Cela résulte de ce que nous avons vu précédemment. A l'intérieur de l'intervalle limité par ces deux valeurs de t, on a évidemment $\dfrac{ds}{dt} > 0$ et par conséquent $|s| \leqq c\Sigma^2$.

D'après le théorème de Cauchy on a maintenant

$$\frac{\sigma^2 - \Sigma^2}{s - \mathbf{s}} = \left\{ \frac{\frac{d\sigma^2}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\}$$

où $\mathbf{s}$ désigne la valeur de s pour la limite inférieure de l'intervalle en question, s et σ les valeurs correspondant à $t = \mathfrak{I}$, et les accolades du second membre indiquent qu'il faut prendre la valeur du quotient pour une valeur θ de t intérieure à l'intervalle. Par conséquent, d'après (2) et (3), on a

$$\left| \frac{\sigma^2 - \Sigma^2}{s - \mathbf{s}} \right| \overline{\overline{<}} \frac{r_0 + r_1 \frac{d}{\sigma_1}}{r - x_3 \frac{d}{\sigma_1}} \qquad [\sigma_1 = \sigma(\theta)]$$

ou bien, puisque $\sigma_1 > \sigma_0$,

$$\left| \frac{\sigma^2 - \Sigma^2}{s - \mathbf{s}} \right| < \frac{r_0 + \frac{r_1 r}{x_3 + \varepsilon_0}}{r\left(1 - \frac{x_3}{x_3 + \varepsilon_0}\right)}.$$

En outre $|s - \mathbf{s}| \leqq 2c\Sigma^2$ et, par conséquent,

$$\left(\frac{\sigma}{\Sigma}\right)^2 < \frac{r_0 + \frac{r_1 r}{x_3 + \varepsilon_0}}{r\left(1 - \frac{x_3}{x_3 + \varepsilon_0}\right)} 2c + 1.$$

On peut, par conséquent, trouver un nombre $g > 1$ ne dépendant que des quantités a et tel qu'on ait $\sigma < g\Sigma$. Supposons g choisi de cette façon. Nous avons alors le théorème suivant :

Cas I. — *Si, pour une valeur quelconque de t, σ est $= \Sigma \overline{\overline{>}} \sigma_0$, on a, pour toutes les valeurs supérieures de t, $\sigma < g\Sigma$;*

Cas II. — *Si, pour une valeur quelconque de t, σ est $= \Sigma \overline{\overline{>}} \sigma_0$, on a, pour toutes les valeurs inférieures de t, $\sigma < g\Sigma$;*

Cas III. — *Si jamais σ est $= \Sigma \overline{\overline{>}} \sigma_0$, on a, pour toutes les valeurs de t, $\sigma < g\Sigma$.*

Dans cet énoncé le nombre $g > 1$ ne dépend que du tableau des quantités a.

De ce qui précède il résulte aussi que *dans le cas* III, *c'est-à-dire lorsque l'intervalle considéré de t contient toutes les valeurs de t, on a toujours $\sigma < g\sigma_0$*, car si l'on n'a pas toujours $\sigma < \sigma_0$ (dans le cas contraire l'inégalité $\sigma < g\sigma_0$ serait toujours vérifiée) σ doit prendre, entre autres, la valeur σ_0, d'où il résulte, d'après ce qui précède, que σ reste $< g\sigma_0$ pour toutes les valeurs de t.

Dans le cas où l'intervalle de valeurs de t est défini par l'inégalité $t > \tau$ (ou $t < \tau$) l'inégalité $\sigma < g\sigma_0$ est vérifiée pour des valeurs suffisamment grandes (ou petites) de t; cela a certainement lieu à partir de la valeur de t pour laquelle on a $\sigma \overline{\gtrless} \sigma_0$.

Remarquons encore que σ_0 est le produit de d par une quantité qui ne dépend que du tableau des quantités a.

Examinons enfin le cas particulier où tous les ξ_{i0} sont nuls, toutes les hypothèses faites au sujet des fonctions L_i, ξ_i subsistant ainsi que celles au sujet de $x_1, \ldots, x_n$.

Il résulte tout d'abord de ce qui précède que

$$\frac{ds}{dt} \overline{\gtrless} r\sigma^2, \tag{8}$$

$$\left|\frac{d\sigma^2}{dt}\right| \overline{\gtrless} r_0\sigma^2. \tag{9}$$

Cela découle des relations (2) et (3) indépendamment de la façon dont ces dernières ont été établies, car on peut maintenant prendre arbitrairement la quantité $d > 0$ et r, r_0, $\varkappa_3$, r_1 ne dépendent que des quantités a. Nous voyons ensuite que, dans le cas III, σ est toujours $= 0$, car σ doit rester $< g\sigma_0$ et la quantité d peut être choisie arbitrairement. *Donc, dans le cas* III, *tous les x sont nuls.* Reste donc à examiner les cas I et II. *Dans le cas* I, *on a toujours $s \leqq c\sigma_0^2$; d'où, dans le cas actuel, $s \leqq 0$.* De plus, pour des valeurs suffisamment grandes de t, $\sigma < g\sigma_0$; donc $\lim\limits_{t=\infty} \sigma^2 = 0$. *Ainsi, tous les x, et par conséquent aussi les s, tendent vers* 0 *quand t croît indéfiniment. De même, dans le cas* II, *on a $s \geqq 0$ et tous les x, ainsi que les σ et les s, tendent vers* 0 *quand t décroît indéfiniment.*

Si jamais, pour $t = t_0$ par exemple, $\sigma = 0$, c'est-à-dire

$$x_1 = \ldots = x_n = 0,$$

ces relations subsistent toujours. Cela résulte du théorème auxiliaire du n° 1 du précédent Chapitre. Ce théorème contient, en effet, comme cas particulier la proposition suivante :

Soient données n fonctions $x_1, \ldots, x_n$ dans un intervalle limité par les valeurs $t = \tau$, $t = \mathrm{T}$ (les limites appartenant à l'intervalle). Supposons qu'elles aient, dans cet intervalle, des dérivées finies satisfaisant aux équations

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Supposons qu'on ait de plus

$$[f_i(t)] \overline{\gtrless} \sum_{\mu=1}^{n} \mathrm{A}_\mu |x_\mu|,$$

où les A *sont des constantes positives. Enfin, supposons que les x prennent la valeur* 0 *pour $t = \tau$. Alors ils sont nuls pour toutes les valeurs de t de l'intervalle considéré.*

Pour prouver que cette proposition est bien un cas particulier du théorème mentionné, posons, en employant les notations du n° 1,

$$\xi_i(t) = 0, \qquad y_i = 0, \qquad \mathrm{F}_i(t) = \rho_i(t) = 0,$$

et soit $d > 0$ une quantité arbitraire. Alors, en vertu du théorème en question, on a, pour une valeur quelconque de t de l'intervalle donné,

$$|x_i| \overline{\gtrless} d \left| \frac{e^{w(t-\tau)} - 1}{w} \right|.$$

Mais puisque la quantité $d > 0$ peut être prise arbitrairement, tous les x sont bien nuls.

Au lieu de nous servir du théorème du n° 1, nous aurions pu aussi appliquer la relation (9).

Si la quantité s s'annule pour une valeur de t, tous les x sont nuls pour toutes les valeurs de t. En effet, si s s'annule, σ s'annule aussi, car si jamais on avait simultanément $s = 0$,

$\sigma > 0$, on aurait, d'après (8), $\frac{ds}{dt} > 0$; par conséquent, s prendrait des valeurs positives et négatives, ce qui est contraire à ce qui précède. Par conséquent, de $s = 0$ résulte $\sigma = 0$ pour une certaine valeur de t et par conséquent pour toutes les valeurs de t.

Il reste à examiner le cas où s ne s'annule pas. Alors, $\frac{ds}{dt}$ est toujours > 0. Nous avons donc, d'après le théorème de Cauchy,

$$\frac{\sigma(t)^2 - \sigma(\mathfrak{T})^2}{s(t) - s(\mathfrak{T})} = \left[\frac{\frac{d}{dt}\sigma^2}{\frac{d}{dt}s}\right]_{t=\theta},$$

où θ est une valeur de t comprise entre t et $\mathfrak{T}$. Il en résulte ensuite, en tenant compte de (8) et de (9),

$$\left|\frac{\sigma^2(t) - \sigma^2(\mathfrak{T})}{s(t) - s(\mathfrak{T})}\right| \leqq \frac{r_0}{r}, \tag{10}$$

où $\mathfrak{T}$ et t sont deux valeurs quelconques de t appartenant à l'intervalle considéré. Convenons cependant de prendre $t < \mathfrak{T}$ ou $t > \mathfrak{T}$ selon qu'on se place, dans le cas I ou le cas II. Imaginons maintenant que $\mathfrak{T}$ croisse indéfiniment dans le cas I, ou décroisse indéfiniment dans le cas II, t gardant une valeur fixe. Alors $\sigma^2(\mathfrak{T})$ et $s(\mathfrak{T})$ tendent vers zéro. Nous aurons donc

$$\left|\frac{\sigma^2(t)}{s(t)}\right| \leqq \frac{r_0}{r}, \tag{11}$$

pour toutes les valeurs admises de t.

La relation (8) donne maintenant $\frac{ds}{dt} \geqq \frac{r}{c}|s|$. Par conséquent, dans le cas I (où s est < 0), on a

$$\frac{d}{dt}\log\left(-se^{\frac{r}{c}t}\right) \leqq 0.$$

Ainsi, pour toutes les valeurs de t de chaque intervalle particulier défini par la relation $t \geqq t_0$ ($t_0 > \tau$), a lieu l'inégalité du type

$$\log\left(-se^{\frac{r}{c}t}\right) < \mathfrak{K} \qquad (\mathfrak{K} = \text{const.})$$

ou

$$|s| < e^{\mathfrak{K}} e^{-\frac{r}{c}t}.$$

De même, on trouve dans le cas II, pour l'intervalle $t \lesseqgtr t_1$ $(t_1 < \tau)$, $|s| < e^{\mathfrak{K}_1} e^{\frac{r}{c}t}$ ($\mathfrak{K}_1 =$ const.). En tenant maintenant compte de (11), on obtient des inégalités analogues pour σ^2. D'où le théorème suivant :

Dans le cas I, *les produits* $xe^{\frac{1}{2}\frac{r}{c}t}$ *restent compris entre des limites finies pour toutes les valeurs de* t *de l'intervalle* $t \geqq t_0$ $(t_0 > \tau)$.

Dans le cas II, *les produits* $xe^{-\frac{1}{2}\frac{r}{c}t}$ *restent entre des limites finies pour toutes les valeurs de* t *de l'intervalle* $t \lesseqgtr t_1$ $(t_1 < \tau)$.

Il est d'ailleurs facile de voir que σ^2 reste entre des limites finies dans l'intervalle $\tau < t < t_0$ dans le cas I, ou dans l'intervalle $t_1 < t < \tau$ dans le cas II. On peut déduire cela facilement du théorème auxiliaire du n° 1 ou bien s'en rendre compte de la façon suivante :

D'après la relation (9), on a

$$\left|\frac{d}{dt}\log\sigma^2\right| \lesseqgtr r_0.$$

S'il existait des valeurs aussi grandes qu'on veut de σ^2 dans les intervalles ci-dessus, il devrait y avoir aussi des valeurs aussi grandes qu'on veut de $\left|\frac{d}{dt}\log\sigma^2\right|$, ce qui est contraire à ce qui précède. D'où le théorème suivant :

Dans le cas I, *les produits* $xe^{\frac{1}{2}\frac{r}{c}t}$ *et dans le cas* II, *les produits* $xe^{-\frac{1}{2}\frac{r}{c}t}$ *restent entre des limites finies pour toutes les valeurs admises de* t.

12. *Application au système considéré. Introduction d'une solution d'un type particulier. Énoncé d'un théorème fondamental.* — Supposons maintenant données deux solutions des équations (1) (*voir* le commencement du présent Chapitre), ces deux solutions restant dans le domaine $-\gamma < x_i < +\gamma$ pour $t > t_0$ (ou $t < t_0$, ou pour toutes les valeurs de t). En désignant ces solutions par x et $x + z$ nous aurons des équations du type

$$\frac{dz}{dt} = \mathrm{L}(z) + \xi(x + z, t) - \xi(x, t),$$

où les expressions L (z) sont les mêmes formes linéaires et homogènes en z que celles en x dans les seconds membres des équations (1).

En assignant aux quantités $\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|$ un degré convenable de petitesse dépendant des quantités a, les hypothèses du paragraphe précédent seront remplies relativement à z et, comme dans ce cas $\xi_{i0} = 0$, on peut utiliser les derniers résultats du précédent paragraphe.

Pour abréger, désignons par I le cas où l'intervalle de t est défini par $t > t_0$, par II celui où $t < t_0$ et par III celui où t est arbitraire.

D'après les résultats obtenus dans le précédent paragraphe, on voit que toutes les quantités z sont nulles dans le cas III tandis que $\lim\limits_{t=\infty} z = 0$ dans le cas I et $\lim\limits_{t=-\infty} z = 0$ dans le cas II. Par conséquent *dans le cas* I *les deux solutions tendent asymptotiquement l'une vers l'autre quand t croît indéfiniment; dans le cas* II *la même circonstance se présente quand t décroît indéfiniment et dans le cas* III *les deux solutions coïncident.*

Soient maintenant $\pi_1, \ldots, \pi_k, \rho_1, \ldots, \rho_l$ les quantités formées à l'aide des z de la même façon que les quantités $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l$ sont formés à l'aide des x. Posons, de plus,

$$s = \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \pi_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \rho_\nu^2,$$

ou $s = \sum\limits_{\mu=1}^{k} d_\mu \pi_\mu^2$, $s = \sum\limits_{\nu=1}^{l} f_\nu \rho_\nu^2$ si l'un des groupes ρ ou π n'existe pas. Nous aurons alors, d'après le paragraphe précédent, $s \overline{\gtrless} 0$ dans le cas I et $s \overline{\gtrless} 0$ dans le cas II.

Par conséquent, si jamais, dans le cas I, $\rho_1 = \ldots = \rho_l = 0$ ou si le groupe ρ n'existe pas, on a, si le groupe π existe,

$$s = \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \pi_\mu^2 \overline{\gtrless} 0$$

d'où

$$\pi_1 = \ldots = \pi_k = 0;$$

s s'annule donc au moins une fois, par conséquent tous les z sont nuls pour toutes les valeurs admises de t et les deux solutions coïncident. *Ainsi, les deux solutions conïcident si pour une valeur quelconque de t elles fournissent les mêmes valeurs des q ou si le groupe q n'existe pas*, car les quantités ρ ne sont autres choses que les différences des quantités q correspondant aux deux solutions.

De même si jamais, dans le cas II, $\pi_1 = \ldots = \pi_k = 0$ ou si le groupe π n'existe pas, on a, si le groupe ρ existe,

$$s = \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \rho_\nu^2 \gtreqless 0$$

d'où

$$\rho_1 = \rho_2 \ldots = \rho_l = 0,$$

et puisque s s'annule ainsi au moins une fois, tous les z disparaissent pour toutes les valeurs admises de t et les deux solutions coïncident.

Donc, les deux solutions coïncident si pour une valeur quelconque de t les valeurs des p coïncident ou si le groupe p n'existe pas.

Avant d'énoncer les résultats les plus importants obtenus jusqu'ici pour les équations (1) du n° 8, complétons-les par un théorème relatif au cas où les hypothèses faites au n° 8 subsistent ponr toutes les valeurs réelles de t.

Nous avons, dans ce qui précède, introduit le domaine

$$(1) \qquad (1_a) \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \leqq \delta\gamma_2 \qquad (1_b) \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 \geqq -\delta\gamma^2$$

(dans le cas où l'un des groupes p ou q n'existe pas il ne faut garder qu'une des inégalités).

Après un choix convenable du degré de petitesse dont nous avons parlé en formulant les hypothèses, nous avons trouvé qu'étant donnée une valeur arbitraire T_0 de t il existe, en tout cas, une solution au moins restant dans le domaine (1) pour $t \geqq T_0$.

Soit maintenant τ une valeur déterminée arbitrairement choisie de t. Choisissons ensuite pour T_0 des valeurs $T_0^{(1)}$, $T_0^{(2)}$, $T_0^{(3)}$, ..., successivement, ces dernières (supposées $< \tau$) formant une suite de quantités décroissant indéfiniment, et à chaque valeur $T_0^{(\mu)}$ faisons correspondre une solution qui reste dans le domaine (1) pour $t \gtreqless T_0^{(\mu)}$. Désignons par $[y]_\mu$ le système de valeurs que prennent les éléments y de la $\mu^{\text{ième}}$ solution pour $t < \tau$. Puisque les $[y]_\mu$ restent tous dans le domaine (1) ils ont évidemment au moins un point d'accumulation dans ce domaine. Soit $[Y]$ un tel point.

Envisageons maintenant la solution dont les éléments prennent les valeurs $[Y]$ pour $t = \tau$. *Cette solution reste toujours dans le domaine* (1).

Pour le prouver, supposons qu'il n'en soit pas ainsi pour toutes les valeurs de $t > \tau$. On peut alors trouver une valeur θ de t ($\theta > \tau$) telle que la solution existe dans l'intervalle τ, θ et pour $t = \theta$ ne soit pas dans le domaine (1). Or, parmi les solutions correspondant à $T_0^{(1)}$ etc. il en est qui, pour $t = \tau$, sont aussi voisines qu'on veut de $[Y]$.

Par conséquent, parmi ces solutions on pourrait en trouver qui pour $t = \theta$ soient aussi en dehors du domaine (1) ce qui est contraire aux hypothèses.

Supposons ensuite que la solution qui nous intéresse ne reste pas dans le domaine (1) pour toutes les valeurs de $t < \tau$. On pourrait alors déterminer un intervalle θ_1, τ ($\theta_1 < \tau$) tel que notre solution soit déterminée dans cet intervalle et soit pour $t = \theta_1$ en dehors du domaine (1). Mais alors, parmi les solutions correspondant à $T_0^{(1)}$, etc. il y en aurait qui, pour $t = \tau$, seraient aussi voisines qu'on voudrait de $[Y]$ et en même temps correspondraient à des valeurs $T_0^{(m)}$ différant d'autant qu'on voudra de τ, par exemple différant de τ plus que θ_1. Parmi ces solutions il y en aurait donc qui, pour $t = \theta_1$, seraient en dehors du domaine (1), ce qui est contraire aux hypothèses.

Nous avons donc prouvé l'existence d'au moins une solution restant toujours dans le domaine (1). Le fait qu'il ne peut exister qu'une solution de cette nature (si l'on choisit convenablement le degré de petitesse dont nous avons parlé en introduisant les hypothèses) a été établi au début du présent paragraphe.

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

Soient données n équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où les a sont des constantes telles que l'équation

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - u & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - u & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - u \end{vmatrix} = 0$$

n'ait pas de racines dont la partie réelle soit nulle; les ξ_i *sont données comme fonctions des* x *et de* t *pour toutes les valeurs des* x *appartenant au domaine* $a_i < x_i < b_i$ *et pour toutes les valeurs de* t *ou pour celles qui satisfont à l'une des inégalités* $t > \tau$ *ou* $t < \tau$. *De plus les fonctions* ξ *sont supposées admettre des dérivées* $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ *qui sont, ainsi que les* ξ, *des fonctions continues des* x *et de* t *dans le domaine qui vient d'être indiqué. Enfin, on suppose qu'il existe un domaine* $-\gamma < x < +\gamma \, (\gamma > 0)$ *(dont les limites se trouvent à l'intérieur du précédent) où les quantités* $\frac{\xi}{\gamma}$ *pour* $x_1 = \dots = x_n = 0$ *et les quantités* $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|$ *sont inférieures à certains nombres* (¹) $\Delta_1 > 0$ *ou* $\Delta_2 > 0$ *qui peuvent être déterminés quand le tableau des quantités* a *est donné.*

Introduisons maintenant certaines fonctions linéaires et homogènes des quantités x que nous désignons par y, dont les coefficients ne dépendent que du tableau des quantités a et ont un déterminant non nul. Séparons ces quantités y en deux groupes p et q, le premier correspondant aux racines de l'équation $D = 0$ à partie réelle positive et le second à celles des racines dont la partie réelle est négative, le nombre de quantités y appartenant à chaque groupe étant égal au nombre de racines correspondantes (une racine multiple d'ordre m comptant pour m racines). Il peut se faire que l'un des groupes n'existe pas.

Introduisons ensuite le domaine défini par les inégalités suivantes :

$$(G) \qquad (G_a) \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \lesseqgtr \delta\gamma^2, \qquad (G_b) \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 \gtreqless -\delta\gamma^2,$$

(¹) Nous ne nous sommes pas préoccupés de la détermination la plus avantageuse de ces nombres.

où les quantités $\delta > 0$, $d_\mu > 0$, $f_\nu < 0$ sont des constantes qu'on peut déterminer quand le tableau des quantités a est donné. Si l'un des groupes p ou q n'existe pas, il ne faut garder qu'une des inégalités précédentes (G_b) ou (G_a). Cela posé on a les théorèmes suivants :

1° Supposons que les valeurs admises de t soient définies par l'inégalité $t > \tau$.

A chaque système de valeurs $[q]$ *des quantités q appartenant au domaine* (G_b) *et à chacune des valeurs admises* T_0 *de* t, *correspond un système et un seul de valeurs* $[p]$ *des quantités p appartenant au domaine* (G_a) *tel que la solution déterminée par le système initial* $[p]$, $[q]$ *pour* $t = T_0$ *reste pour toutes les valeurs* $t > T_0$ *dans le domaine* (G).

Si l'équation $D = 0$ *n'admet pas de racines à partie réelle positive, c'est-à-dire si les quantités p n'existent pas, toute solution qui pour une valeur de t est dans le domaine* (G) *reste dans ce domaine pour toutes les valeurs supérieures de t.*

Si l'équation $D = 0$ *n'admet pas de racines à partie réelle négative, c'est-à-dire si les quantités q n'existent pas, il y a une solution et une seule restant dans le domaine* (G).

Enfin, deux solutions quelconques restant dans le domaine (G) *tendent asymptotiquement l'une vers l'autre quand* $t = \infty$.

2° Dans le cas où les valeurs admises de t sont définies par l'inégalité $t < \tau$ on a des théorèmes analogues qu'on énoncera en intervertissant, dans les énoncés précédents, les rôles de p et q et en remplaçant $t = \infty$ par $t = -\infty$, $t > T_0$ par $t < T_0$, valeurs supérieures de t par valeurs inférieures de t.

3° t est arbitraire. Dans ce cas, les théorèmes 1° et 2° subsistent simultanément. De plus, on a le théorème suivant :

Il existe une solution et une seule restant dans le domaine (G) *pour toutes les valeurs de t. Toute autre solution restant finalement dans le domaine* G *pour* $t = \pm\infty$ *s'approche asymptotiquement de la solution précédente.*

13. *Introduction des fonctions* $[p]$ *et* $[q]$; *leurs propriétés.*

— Dans le présent paragraphe nous supposerons que les groupes p et q existent tous les deux. Nous désignerons par I le cas où les hypothèses du n° 8 se rapportent ou bien à des valeurs arbitraires de t ou bien à celles répondant à la restriction $t > \tau$; le cas où ces hypothèses se rapportent aux valeurs de $t < \tau$ ou arbitraires sera désigné pour II. Enfin supposons que le degré de petitesse dont il a été question dans l'introduction des hypothèses soit choisi de façon que le théorème énoncé à la fin du précédent paragraphe soit vrai; en particulier, supposons réalisées les hypothèses faites, au début du précédent paragraphe, au sujet de ce degré de petitesse.

Nous savons que, dans le cas I, à toute valeur admise t_0 de t et à tout système de valeurs Q des quantités q appartenant au domaine G_b (*voir* le précédent numéro) correspond un système déterminé de valeurs P des quantités p appartenant au domaine (G_a) et tel que P et Q étant prises comme valeurs initiales pour $t = t_0$ la solution correspondante reste dans le domaine G pour toutes les valeurs de $t \geqq t_0$. Le système P doit cependant appartenir au domaine

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta\gamma^2,$$

car si, pour $t = t_0$,

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2$$

était égal à $\delta\lambda^2$ il s'ensuivrait

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > 0,$$

ce qui est impossible pour la solution restant dans le domaine G pour $t \geqq t_0$. Nous avons, d'ailleurs, déjà signalé cette circonstance. Soient $[p_1], \ldots, [p_k]$ les coordonnées du point [P]. Au point de vue où nous nous plaçons, ces quantités sont des fonctions uniformes des quantités $q_1, \ldots, q_l$ et du paramètre t (ce dernier désignant la valeur de t pour laquelle nous associons le système de valeurs p au système de valeurs q).

De même, dans le cas II, à un système de valeurs P_1 des quantités p appartenant au domaine G_a et à une valeur admise t_1 de t correspond un système déterminé de valeurs Q_1 des quantités q appartenant au domaine

$$\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 > -\delta\gamma^2,$$

et tel que les systèmes P_1, Q_1 pris comme valeurs initiales pour $t = t_1$ fournissent une solution qui reste dans le domaine G pour toutes les valeurs de $t \leqq t_1$. Les coordonnées $[q_1]$, ..., $[q_l]$ du point Q_1 peuvent être considérées comme fonctions de $p_1, \ldots, p_k$ et du paramètre t.

Je dis que *pour une valeur de t arbitrairement choisie, les* $[p]$ *sont fonctions continues des quantités q dans le domaine* G_b *et les* $[q)$ *sont fonctions continues des quantités p dans le domaine* G_a.

Avant de démontrer cette proposition précisons les expressions suivantes dont nous ferons usage pour la suite : *solution correspondant à* $q_1, \ldots, q_l$ et t_0 ou *solution correspondant* à $p_1, \ldots, p_k$ et T_0. La première s'emploie dans le cas I et désigne la solution dont les éléments prennent pour $t = t_0$ les valeurs $q_1, \ldots, q_l$ $[p_1], \ldots, [p_k]$ où les $[p]$ sont les valeurs des p correspondant à $t_0, q_1, \ldots, q_l$. La seconde expression s'emploie dans le cas II et désigne la solution dont les éléments prennent pour $t = T_0$ les valeurs $p_1, \ldots, p_k$, $[q_1], \ldots, [q_l]$ où les $[q]$ sont des valeurs des q correspondant à $T_0, p_1, \ldots, p_k$.

Soient maintenant $\{q\}_1$, $\{q\}_2$ deux systèmes arbitraires de valeurs des q appartenant au domaine G_b, $\{p\}_1$, $\{p\}_2$ deux systèmes quelconques de valeurs des p appartenant au domaine G_a, t_0 ou T_0 une des valeurs admises de t dans les cas I ou II respectivement. Envisageons les solutions correspondant à $\{q\}_1\, t_0$ et $\{q\}_2\, t_0$ ou $\{p\}_1\, T_0$ et $\{p\}_2\, T_0$. Les deux premières restent dans le domaine G pour $t \overline{\gtrless} t_0$ et par conséquent aussi dans le domaine $-\gamma < x < \gamma$ pour les valeurs de t d'un certain intervalle $t > t_1$ ($t_1 < t_0$). Les deux autres solutions restent dans le domaine G pour les valeurs de $t \overline{\lessgtr} T_0$ et par conséquent dans le domaine $-\gamma < x < \gamma$ pour les valeurs de t d'un certain intervalle $t < T_1$ ($T_1 > T_0$). Nous pouvons donc appliquer à ces solutions les résultats obtenus au début du précédent paragraphe et ceux de la fin du n° 11. Désignons par π, ρ les différences des quantités p, q pour les mêmes valeurs de t. Nous employons aussi la notation

$$s = \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \pi_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \rho_\nu^2.$$

De plus, posons

$$\sum_{\mu=1}^{k} \pi_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} \rho_\nu^2 = \sigma^2,$$

et soient $\pi_1^0, \ldots, \pi_k^0, \rho_1^0, \ldots, \rho_l^0$ les valeurs des π et ρ pour $t = t_0$ (ou $t = T_0$).

Si les solutions de chaque couple considéré sont différentes, on a, dans le cas I, pour $t > t_1$, $s < 0$, $\frac{dt}{ds} > 0$, $\left|\frac{\sigma^2}{s}\right| \overline{\overline{<}} \frac{r_0}{r}$ [*voir* les équations (11) du n° 11] et, dans le cas II, pour $t < T$,

$$s > 0, \quad \frac{ds}{dt} > 0, \quad \left|\frac{\sigma^2}{s}\right| \overline{\overline{<}} \frac{r_0}{r}.$$

En désignant maintenant par s_0 la valeur de s pour $t = t_0$ (ou $t = T_0$), on a dans le cas I :

(1) $$|s_0| \overline{\overline{<}} |F| \sum_{\nu=1}^{l} (\rho_\nu^0)^2,$$

et dans le cas II,

(2) $$|s_0| \overline{\overline{<}} D \sum_{\mu=1}^{k} (\pi_\mu^0)^2,$$

comme cela résulte immédiatement des inégalités $s_0 < 0$ (dans le cas I) ou $s_0 > 0$ (dans le cas II). $|F|$ et D désignent dans ces relations les plus grandes valeurs parmi les $|f|$ et les d respectivement. Comme pour $t \overline{\overline{>}} t_0$ (ou $t \overline{\overline{<}} T_0$), on a

$$|s| \overline{\overline{<}} |s_0|;$$

on a aussi, pour ces mêmes valeurs de t,

$$\frac{\sigma^2}{|s_0|} \overline{\overline{<}} \frac{r_0}{r}$$

et, par conséquent, d'après (1) et (2), on a dans le cas I, pour $t \gtreqless t_0$,

$$\sigma^2 \lesseqgtr \frac{r_0}{r} |F| \sum_{\nu=1}^{l} (\rho_\nu^0)^2, \tag{3}$$

et dans le cas II, pour $t \lesseqgtr T_0$,

$$\sigma^2 \lesseqgtr \frac{r_0}{r} D \sum_{\mu=1}^{k} (\pi_\mu^0)^2, \tag{4}$$

ces relations étant encore vraies dans le cas où les solutions d'un couple coïncident. Les relations (3) et (4), écrites pour $t = t_0$ $t = T_0$, prouvent la continuité des fonctions $[p]$ ou $[q]$, pour $t = t_0$ ou $t = T_0$.

Nous aurions pu démontrer plus simplement la continuité, mais les relations (3) et (4) expriment un résultat plus général qui nous sera utile par la suite. Remarquons encore que les quantités $\frac{r_0}{r}|F|$ et $\frac{r_0}{r} D$ sont des nombres positifs ne dépendant que du tableau des quantités a.

Précisons maintenant, avant de continuer, quelques notations dont nous nous servirons, pour abréger, dans la suite.

Soit donné un système d'équations différentielles

$$\frac{du_i}{dt} = U_i(u_1, \ldots, u_n t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

et choisissons une solution de ces équations. Nous dirons alors que les équations différentielles

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial u_\mu} v_\mu \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

où, dans $\frac{\partial U}{\partial u}$, on remplace $u_1, \ldots, u_n$ par les éléments de la solution en question, sont *les équations aux variations* relatives à cette solution. Ensuite nous dirons que les équations

$$\frac{dw_i}{dt} = U_i(u_1 + w_1, \ldots, u_n + w_n, t) - U_i(u_1, \ldots, u_n, t) \tag{7}$$

où l'on remplace toujours dans les seconds membres $u_1, \ldots, u_n$, par les éléments de la solution des équations (5), sont *les équations aux différences* correspondant à cette solution.

Bien entendu, ces transformations formelles doivent avoir un sens déterminé dans chaque cas particulier. Reprenons maintenant les équations différentielles en p, q (*voir* n° 10), à savoir

$$(8) \qquad \frac{dp_\mu}{dt} = L_\mu(p) + \Pi_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k),$$

$$(9) \qquad \frac{dq_\nu}{dt} = I_\nu(q) + K_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, l).$$

Des remarques faites dans le n° 10, au sujet de la formation des expression Π, K, il résulte que, par hypothèse, nous avons le droit d'assigner aux quantités $\left|\frac{\partial \Pi}{\partial p}\right|$, $\left|\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right|$, $\left|\frac{\partial K}{\partial p}\right|$, $\left|\frac{\partial K}{\partial q}\right|$, un degré de petitesse arbitrairement choisi, mais ne dépendant que du tableau des quantités a. Il est sous-entendu que les quantités $\left|\frac{\partial \Pi}{\partial p}\right|$, etc. sont formées pour une valeur admise de t et pour un système de valeurs p, q appartenant au domaine imposé indirectement aux quantités p, q par les relations $-\gamma < x < \gamma$. *Désignons ce domaine par* Y *pour abréger.*

Choisissons maintenant, dans le cas I, une valeur arbitraire t_0, parmi les valeurs admises de t et un système arbitraire $\{q\}$ des quantités q appartenant au domaine

$$(10) \qquad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 < -\delta\gamma^2.$$

De même soit, dans le cas II, T_0 une quelconque des valeurs admises de t et $\{p\}$ un système quelconque appartenant au domaine

$$(11) \qquad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta\gamma^2.$$

Considérons maintenant les solutions correspondant à t_0, $\{q\}$ (ou T_0, $\{p\}$). Elles s'étendent à l'intervalle $t \gtreqless t_0$ ou $t \lesseqgtr T_0$, mais on peut aussi les prolonger dans l'intervalle $t_1 < t < t_0$ ou $T_1 > T > T_0$ de telle façon qu'elles restent dans le domaine Y pourvu que t_1 et T_1 soient choisies convenablement.

Formons les équations aux variations relatives à ces solutions. Nous aurons les équations différentielles linéaires suivantes :

$$(12) \qquad \frac{d\mathfrak{p}_\mu}{dt} = \mathrm{L}_\mu(\mathfrak{p}) + \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\partial \Pi_\mu}{\partial p_\lambda} \mathfrak{p}_\lambda + \sum_{\sigma=1}^{l} \frac{\partial \Pi_\mu}{\partial q_\sigma} \mathfrak{q}_\sigma;$$

$$(13) \qquad \frac{d\mathfrak{q}_\nu}{dt} = \mathrm{I}_\nu(\mathfrak{q}) + \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\partial \mathrm{K}_\nu}{\partial p_\lambda} \mathfrak{p}_\lambda + \sum_{\sigma=1}^{l} \frac{\partial \mathrm{K}_\nu}{\partial q_\sigma} \mathfrak{q}_\sigma$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, k; \qquad \nu = 1, 2, \ldots, l),$$

où les coefficients de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sous les signes $\sum$ dans les seconds membres sont des fonctions continues de t données pour $t > t_1$ ou $t < \mathrm{T}_1$. D'après ce qui précède, nous avons le droit d'assigner aux valeurs absolues de ces coefficients un degré de petitesse arbitrairement choisi ne dépendant que du tableau des quantités a. Les $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sont les nouvelles variables dépendantes.

Étant donnés une valeur de t arbitrairement choisie dans l'intervalle $t > t_1$ ou $t < \mathrm{T}_1$ et un système arbitraire de valeurs des $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, il existe une solution des équations (12), (13) d'un caractère déterminé, dont les éléments prennent ces valeurs $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ pour la valeur choisie de t et qui s'étend à l'intervalle $t > t_1$ ou $t < \mathrm{T}_1$. (Si cette remarque n'est peut-être pas connue dans la théorie générale des équations différentielles, on s'assurera facilement de son exactitude à l'aide des considérations du premier Chapitre.)

Des équations (12), (13) il résulte qu'on a

$$(14) \qquad \frac{d}{dt}\left[\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \mathfrak{p}_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \mathfrak{q}_\nu^2\right] = \mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2,$$

où Q_1 et Q_2 sont des formes quadratiques par rapport aux quantités $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ dont la première s'obtient à l'aide de $\mathrm{L}_\mu(\mathfrak{p})$, $\mathrm{I}_\nu(\mathfrak{q})$ et la seconde à l'aide des autres termes. La forme Q_1 a des coefficients ne dépendant que du tableau des quantités a et est une forme définie positive (*voir* les discussions correspondantes, n° 10). Quant aux coefficients de la forme Q_2, nous pouvons assigner à leurs valeurs absolues un certain degré de petitesse ne dépendant que du tableau des quantités a mais d'ailleurs arbitraire. *En nous* *servant convenablement de cette possibilité,* nous aurons

$$(15)\qquad \frac{d}{dt}\left(\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2\right) \overline{\gtrless} R\left(\sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2\right),$$

où l'on peut considérer la quantité $R > 0$ comme ne dépendant que du tableau des quantités a. En posant maintenant

$$S = \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2$$

et en tenant compte de la relation

$$(16)\qquad |S| \overline{\lessgtr} c\left(\sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2\right),$$

où $c > 0$ est la plus grande parmi les quantités d et $|f|$, nous déduirons de (15),

$$(17)\qquad \frac{dS}{dt} \geqq \frac{R}{c}|S|.$$

(Nous avons déjà rencontré des considérations analogues dans ce qui précède.)

De la relation (17) il résulte que *deux solutions des équations* (12), (13) *restant entre des limites finies pour* $t \overline{\gtrless} t_0$ *dans le cas* I, *ou pour* $t \leqq T_0$ *dans le cas* II, *et ayant pour* $t = t_0$ (*ou* $t = T_0$) *mêmes valeurs des* q (*ou des* p) *coïncident.*

En effet, si nous formons les différences des coordonnées de ces deux solutions, nous obtenons encore une solution des équations (12), (13). Cette nouvelle solution reste, pour $t \overline{\gtrless} t_0$ (ou $t \leqq T_0$), entre des limites finies et l'on a dans le cas I pour $t = t_0$, $q_1 = \ldots = q_l = 0$ et dans le cas II pour $t = T_0$, $p_1 = \ldots = p_k = 0$. Si donc nos deux solutions ne coïncidaient pas, la quantité S relative à la nouvelle solution serait positive pour $t = t_0$ dans le cas I ou négative pour $t = T_0$ dans le cas II, et, par conséquent, d'après la relation (17), S croîtrait indéfiniment avec t dans le cas I et dans le cas II, S décroîtrait indéfiniment avec t, ce qui est en contradiction avec ce fait que les coordonnées de la nouvelle solution restent entre des limites finies pour $t \overline{\gtrless} t_0$ (ou $t \overline{\lessgtr} T_0$). Notre remarque est ainsi démontrée.

Considérons maintenant en plus du point $\{q\}$ ou $\{p\}$ un second point du domaine (10) ou du domaine (11) que nous désignerons par (q) ou (p). Supposons, en outre, que les coordonnées des points $\{q\}$ et (q) [ou celles de $\{p\}$ et (p)] coïncident à l'exception de l'une d'entre elles, celle par exemple correspondant à l'indice g (ou h).

Soient ensuite $\pi_1, \ldots, \pi_k, \rho_1, \ldots, \rho_l$ les différences qu'on obtient en retranchant des coordonnées de la solution correspondant à $\{q\}$, t_0 ou $\{p\}$, T_0 les coordonnées de la solution correspondant à (q), t_0 ou (p), T_0 pour la même valeur de t. Par hypothèse, tous les ρ à l'exception de ρ_g sont nuls pour $t = t_0$ dans le cas I, tous les π à l'exception de π_h sont nuls de même, pour $t = T_0$ dans le cas II. Soient ρ_0 et π_0 les valeurs respectives de ρ_g pour $t = t_0$ et de π_h pour $t = T_0$, ρ_0 et π_0 étant, par hypothèse, différents de zéro.

Des relations (3), (4) il résulte que, dans le cas I, les quantités $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ restent, pour toutes les valeurs de $t \geqq t_0$, entre des limites finies ne dépendant que du tableau des quantités a; de même, dans le cas II, les quantités $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\pi_0}$ restent, pour toutes les valeurs de $t \leqq T_0$, entre des limites finies ne dépendant que du tableau des quantités a. De plus, pour $t \geqq t_0$ ou $t \leqq T_0$ les quantités π, ρ satisfont aux équations

$$(18)\quad \frac{d\pi_\mu}{dt} = L_\mu(\pi) + \Pi_\mu(p+\pi, q+\rho, t) - \Pi_\mu(p, q, t) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k),$$

$$(19)\quad \frac{d\rho_\nu}{dt} = I_\nu(\rho) + K_\nu(p+\pi, q+\rho, t) - K_\nu(p, q, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, l),$$

c'est-à-dire aux équations aux différences correspondant à la solution que nous considérons.

Ce que nous avons dit plus haut se rapporte à des valeurs arbitraires de $\rho_0 \gtrless 0$ et $\pi_0 \gtrless 0$, pourvu que $|\rho_0|$ et $|\pi_0|$ soient suffisamment petits. Donnons à ρ_0 et π_0 une suite de valeurs suffisamment petites numériquement et tendant vers zéro. Soient $\rho_0^{(1)}, \rho_0^{(2)}, \ldots$ et $\pi_0^{(1)}, \pi_0^{(2)}, \ldots$ ces deux suites que nous désignerons par A et B respectivement. Formons, dans le cas I, les valeurs de $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ pour les valeurs ρ_0 de la suite A et pour $t = t_0$. Les quotients $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ sont tous nuls à l'exception de $\frac{\rho_g}{\rho_0}$ qui est $= 1$ et les quotients $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$ restent entre des limites finies ne dépendant que du tableau des quantités a, comme nous l'avons montré plus haut. Par conséquent, les systèmes $\frac{\pi_1}{\rho_0}, \ldots, \frac{\pi_k}{\rho_0}, \frac{\rho_1}{\rho_0}, \ldots, \frac{\rho_l}{\rho_0}$ formés pour $t = t_0$ et les différentes valeurs de ρ_0 ont au moins un point d'accumulation. Soient $P_1, \ldots, P_k, R_1, \ldots, R_l$ les coordonnées d'un tel point. Tous les R sont nuls à l'exception de $R_g = 1$. De même, dans le cas II, en formant les quotients $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}, \frac{\rho_\nu}{\pi_0}$ pour les valeurs π_0 de la suite B et $t = T_0$, on verra que les systèmes $\frac{\pi_1}{\pi_0}, \ldots, \frac{\pi_k}{\pi_0}, \frac{\rho_1}{\pi_0}, \ldots, \frac{\rho_l}{\pi_0}$ ont au moins un point d'accumulation. Soient $P'_1, \ldots, P'_k, R'_1, \ldots, R'_l$ les coordonnées d'un tel point. Tous les P' sont nuls à l'exception de $P'_h = 1$.

Considérons maintenant la solution (η) des équations aux variations (12), (13) pour laquelle on a pour $t = t_0$,

$$(\text{cas I})\quad p_1 = P_1, \quad \ldots, \quad p_k = P_k, \quad q_1 = R_1, \quad \ldots, \quad q_l = R_l$$

ou pour $t = T_0$,

$$(\text{cas II})\quad p_1 = P'_1, \quad \ldots, \quad p_k = P'_k, \quad q_1 = R'_1, \quad \ldots, \quad q_l = R'_l.$$

Nous allons prouver que les coordonnées $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l$ de la solution (η) ne se trouvent jamais pour $t \gtreqq t_0$ (ou $t \lesseqq T_0$) en dehors des limites qui existent, d'après ce qui précède, pour $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}, \frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ ou $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}, \frac{\rho_\nu}{\pi_0}$.

Pour cela remarquons d'abord que les quantités $\frac{\partial \Pi_\mu}{\partial p}, \frac{\partial \Pi_\mu}{\partial q}, \frac{\partial K_\nu}{\partial p}, \frac{\partial K_\nu}{\partial q}$ sont, dans le domaine Y et dans chaque intervalle particulier $t' \leqq t \leqq t''$ (où t' et t'' sont des valeurs admises de t), des fonctions uniformément continues de t, p, q, comme cela résulte immédiatement des hypothèses. De plus, remarquons aussi que nous pouvons rendre les quantités $\pi_\mu\ \rho_\nu$ numériquement aussi petites que nous voudrons pour toutes les valeurs $t \gtreqq t_0$ ou $t \lesseqq T_0$ pourvu que $|\rho_0|$ et $|\pi_0|$ soient suffisamment petits.

Divisons maintenant les deux membres des équations (18), par ρ_0 dans le cas I, et par π_0 dans le cas II.

Dans le cas I, nous aurons alors, aux seconds membres des termes du type

$$\frac{1}{\rho_0}\left[\Pi_\mu(p+\pi,\ q+\rho,\ t)-\Pi_\mu(p,\ q,\ t)\right],$$

$$\frac{1}{\rho_0}\left[\mathrm{K}_\nu(p+\pi,\ q+\rho,\ t)-\mathrm{K}_\nu(p,\ q,\ t)\right],$$

et dans le cas II, des termes différant des précédents par le facteur $\frac{1}{\pi_0}$ à la place de $\frac{1}{\rho_0}$.

Ces termes peuvent s'écrire, dans le cas I, de la façon suivante

$$\frac{1}{\rho_0}\left[\Pi_\mu(p+\pi,\ q+\rho,\ t)-\Pi_\mu(p,\ q,\ t)\right]=\sum_{\lambda=1}^{k}\left\{\frac{\partial\Pi_\mu}{\partial p_\lambda}\right\}\frac{\pi_\lambda}{\rho_0}+\sum_{\sigma=1}^{l}\left\{\frac{\partial\Pi_\mu}{\partial q_\sigma}\right\}\frac{\rho_\sigma}{\rho_0},$$

les quantités entre accolades devant être prises pour

$$p_1+\theta_\mu\pi_1,\quad \ldots,\quad p_k+\theta_\mu\pi_k,\quad q_1+\theta_\mu\rho_1,\quad \ldots,\quad q_l+\theta_\mu\rho_l$$

$(0<\theta<1)$; ces dernières valeurs appartiennent évidemment au domaine Y. On peut rendre les quantités $|\theta_\mu\pi_1|$, ..., $|\theta_\mu\pi_k|$, $|\theta_\mu\rho_1|$, ..., $|\theta_\mu\rho_l|$ aussi petites qu'on voudra pour toutes les valeurs de $t \gtreqless t_0$ en se bornant à des valeurs suffisamment petites de $|\rho_0|$. Étant donné par conséquent un intervalle $t_0 \lesseqgtr t \lesseqgtr t'_0$ ($t'_0 > t_0$ mais d'ailleurs arbitraire) on peut obtenir que, dans cet intervalle, les quantités $\left\{\frac{\partial\Pi_\mu}{\partial p_\lambda}\right\}$ et $\left\{\frac{\partial\Pi_\mu}{\partial q_\sigma}\right\}$ diffèrent respectivement de $\frac{\partial\Pi_\mu}{\partial p_\lambda}$ et $\frac{\partial\Pi_\mu}{\partial q_\sigma}$ d'aussi peu qu'on voudra, pourvu que $|\rho_0|$ soit suffisamment petit. Et comme, de plus, les quantités $\frac{\pi_\lambda}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\sigma}{\rho_0}$ restent, pour toutes les valeurs de $t \gtreqless t_0$, entre des limites finies ne dépendant que du tableau des quantités a, on voit que par un choix convenable du degré de petitesse de $|\rho_0|$ la différence entre

$$\frac{1}{\rho_0}\left[\Pi_\mu(p+\pi,\ q+\rho,\ t)-\Pi_\mu(p,\ q,\ t)\right]$$

et

$$\left[\sum_{\lambda=}^{k}\frac{\partial\Pi_\mu}{\partial p_\lambda}\frac{\pi_\lambda}{\rho_0}+\sum_{\sigma=1}^{l}\frac{\partial\Pi_\mu}{\partial q_\sigma}\frac{\rho_\sigma}{\rho_0}\right]$$

peut être rendue aussi petite qu'on voudra dans l'intervalle $t_0 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t'_0$.

Conclusion analogue, bien entendu, pour les quantités analogues à

$$\frac{1}{\rho_0}\left[\Pi_\mu(p+\pi, q+\rho, t)-\Pi_\mu(p, q, t)\right]$$

dont nous avons parlé plus haut.

D'où le résultat suivant : En vertu des équations (8), (9) nous avons, dans le cas I,

$$(20) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\pi_\mu}{\rho_0} = \mathrm{L}_\mu\left(\frac{\pi}{\rho_0}\right)+\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\partial \Pi_\mu}{\partial p_\lambda}\frac{\pi_\lambda}{\rho_0}+\sum_{\sigma=1}^{l}\frac{\partial \Pi_\mu}{\partial q_\sigma}\frac{\rho_\sigma}{\rho_0}+\mathrm{A}_\mu,$$

$$(21) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\rho_\nu}{\rho_0} = \mathrm{I}_\nu\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)+\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\partial \mathrm{K}_\nu}{\partial p_\lambda}\frac{\pi_\lambda}{\rho_0}+\sum_{\sigma=1}^{l}\frac{\partial \mathrm{K}_\nu}{\partial q_\sigma}\frac{\rho_\sigma}{\rho_0}+\mathrm{B}_\nu,$$

et dans le cas II,

$$(22) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\pi_\mu}{\pi_0} = \mathrm{L}_\mu\left(\frac{\pi}{\pi_0}\right)+\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\partial \Pi_\mu}{\partial p_\lambda}\frac{\pi_\lambda}{\pi_0}+\sum_{\sigma=1}^{l}\frac{\partial \Pi_\mu}{\partial q_\sigma}\frac{\rho_\sigma}{\pi_0}+\mathrm{C}_\mu,$$

$$(23) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\rho_\nu}{\pi_0} = \mathrm{I}_\nu\left(\frac{\rho}{\pi_0}\right)+\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\partial \mathrm{K}_\nu}{\partial p_\lambda}\frac{\pi_\lambda}{\pi_0}+\sum_{\sigma=1}^{l}\frac{\partial \mathrm{K}_\nu}{\partial q_\sigma}\frac{\rho_\sigma}{\pi_0}+\mathrm{D}_\nu$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, k;\ \nu = 1, 2, \ldots, l),$$

où $|\mathrm{A}_\mu|$, $|\mathrm{B}_\nu|$, $|\mathrm{C}_\mu|$, $|\mathrm{D}_\nu|$ peuvent être rendus aussi petits qu'on voudra dans tout intervalle arbitrairement choisi $t_0 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t'_0$ (cas I) ou $\mathrm{T}'_0 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} \mathrm{T}_0$ (cas II) à condition d'assigner à $|\rho_0|$ et $|\pi_0|$ un degré suffisant de petitesse.

Comparons maintenant les équations (20), (21) ou (22), (23) aux équations aux variations (12), (13) en supposant qu'on remplace dans ces dernières les quantités $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ par les éléments de la solution (η).

Dans la suite A ou B, on peut, d'après ce qui précède, trouver des valeurs ρ_0 ou π_0 telles que pour $t = t_0$ ou $t = \mathrm{T}_0$ les quantités $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ ou $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\pi_0}$ soient aussi voisines qu'on veut de $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_k$, $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_l$ ou de $\mathrm{P}'_1, \ldots, \mathrm{P}'_k$, $\mathrm{R}'_1, \ldots, \mathrm{R}'_l$. On peut de plus fixer ce choix de telle façon que, dans un intervalle arbitrairement choisi $t_0 \leqq t \leqq t'_0$ ou $\mathrm{T}'_0 \leqq t \leqq \mathrm{T}_0$, les quantités $|\mathrm{A}_\mu|$, $|\mathrm{B}_\nu|$ ou $|\mathrm{C}_\mu|$, $|\mathrm{D}_\nu|$ soient aussi petites qu'on voudra. Il s'ensuit qu'en vertu du théorème auxiliaire du n° 1 du précédent Chapitre, on peut choisir la valeur de ρ_0 ou celle de π_0 de telle façon que, dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq t'_0$ ou $T_0 \geqq t \geqq T'_0$, les éléments de la solution (η) diffèrent d'aussi peu qu'on voudra des quantités $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ ou $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\pi_0}$. Or, ces dernières quantités restent entre des limites finies qui ne dépendent que du tableau des quantités a. Par conséquent, si pour une valeur de t de l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq t'_0$ ou $T_0 \geqq t \geqq T'_0$, un élément quelconque de la solution (η) était en dehors des limites existant pour celle des quantités $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ ou $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\pi_0}$ qui lui correspond, on pourrait choisir ρ_0 et π_0 de façon que cette quantité prenne elle aussi des valeurs en dehors des limites qui lui sont assignées, car on peut obtenir que, dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq t'_0$ ou $T_0 \geqq t \geqq T'_0$, $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ ou $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\pi_0}$ soient aussi voisins qu'on veut des éléments correspondants de la solution (η), d'où contradiction. Il s'ensuit donc que *les éléments de la solution* (η) *restent, pour toutes les valeurs de* $t \geqq t_0$ *ou* $t \leqq T_0$, *entre des limites finies, qui ne dépendent que du tableau des quantités* a.

Parmi les coordonnées $P_1, \ldots, P_k, R_1, \ldots, R_l$, ou $P'_1, \ldots, P'_k, R'_1, \ldots, R'_l$ du point d'accumulation, $R_1, \ldots, R_l$ ou $P'_1, \ldots, P'_k$ sont connues dès le début, tous les R étant en effet nuls, à l'exception de $R_g = 1$ ou tous les P' nuls à l'exception de $P'_h = 1$. De plus, comme nous l'avons montré, $P_1, \ldots, P_k$ ou $R'_1, \ldots, R'_l$ jouissent de cette propriété que les éléments de la solution (η) des équations (12), (13) qui prennent les valeurs initiales $P_1, \ldots, P_k$, $R_1, \ldots, R_l$ pour $t = t_0$ ou $P'_1, \ldots, P'_k, R'_1, \ldots, R'_l$ pour $t = T_0$, restent entre des limites finies pour toutes les valeurs de $t \geqq t_0$ ou $t \leqq T_0$. Or, nous avons montré qu'étant donné un système de valeurs initiales $P_1, \ldots, P_k$ ou $R'_1 \ldots, R'_l$ on ne peut lui associer qu'un système et un seul $R_1, \ldots, R_k$ ou $P'_1, \ldots, P'_l$ jouissant de cette propriété. Il en résulte que les valeurs données de $R_1, \ldots, R_l$ ou $P'_1, \ldots, P'_k$ déterminent complètement les autres coordonnées du point d'accumulation. Il existe donc un point d'accumulation et un seul qui est d'ailleurs le même quelle que soit la façon de choisir les suites A ou B. Par conséquent, les quotients $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ ou

$\frac{\pi_\mu}{\pi_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\pi_0}$ formés pour $t = t_0$ ou $t = T_0$ tendent vers $P_1, \ldots, P_k$, $R_1, \ldots, R_l$ ou $P'_1, \ldots, P'_k$, $R'_1, \ldots, R'_l$ si ρ_0 ou π_0 tend vers zéro. Nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

Dans le domaine défini par l'inégalité (10) *ou* (11), *les fonctions* $[p_1], \ldots, [p_k]$ *ou* $[q_1], \ldots, [q_l]$ *ont des dérivées premières par rapport à q ou p. Ces dérivées sont comprises entre certaines limites finies qui ne dépendent que du tableau des quantités a. Pour calculer les quantités* $\frac{\partial [p]}{\partial q_g}$ *ou* $\frac{\partial [q]}{\partial p_h}$ *pour* $t = t_0$ *ou* $t = T_0$ *et* $q_1^0, \ldots, q_l^0$ *ou* $p_1^0, \ldots, p_k^0$, *on forme des équations aux variations* (12), (13) *pour la solution correspondant à* $q_1^0, \ldots, q_l^0, t_0$ *ou* $p_1^0, \ldots, p_k^0, T_0$. *Il existe alors une solution de ces équations aux variations et une seule dont les éléments prennent pour* $t = t_0$ *ou* $t = T_0$, *les valeurs* $\mathfrak{q}_g = 1$, $\mathfrak{q}_\nu = 0 (\nu \gtrless g)$ *ou* $\mathfrak{p}_h = 1$, $\mathfrak{p}_\mu = 0 (\mu \gtrless h)$ *et restent entre des limites finies* (¹) *pour* $t \geqq t_0$ *ou* $t \leqq T_0$. *Les valeurs pour* $t = t_0$ *ou* $t = T_0$ *des éléments* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ *ou* $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_l$ *de cette solution sont précisément celles des dérivées cherchées* $\frac{\partial [p_1]}{\partial q_g}, \ldots, \frac{\partial [p_k]}{\partial q_g}$ *ou* $\frac{\partial [q_1]}{\partial p_h}, \ldots, \frac{\partial [q_l]}{\partial p_h}$ *pour* $q_1^0, \ldots, q_l^0, t_0$ *ou* $p_1^0, \ldots, p_k^0, T_0$.

Démontrons maintenant encore la continuité de ces dérivées.

Choisissons à cet effet un point $\{q_0\}$ appartenant au domaine (10) et une valeur admise t_0 de t dans le cas I, ou un point $\{p_0\}$ appartenant au domaine (11) et une valeur admise T_0 de t dans le cas II. Formons les équations aux variations (12), (13) pour les solutions (η_1) correspondant à ces systèmes et à ces valeurs de t. De même, considérons les points $\{q_0 + \rho_0\}$ ou $\{p_0 + \pi_0\}$, appartenant au domaine (10) ou (11), et dont les coordonnées diffèrent de $\rho_1^0, \ldots, \rho_l^0$ ou $\pi_1^0, \ldots, \pi_k^0$ de celles des points $\{q_0\}$ ou $\{p_0\}$. Soient (η_2) les solutions correspondant à ces points et à $t = t_0$ ou $t = T_0$, solutions pour lesquelles nous formons aussi les équations aux variations. Désignons enfin par π_μ, ρ_ν les différences des éléments des solutions (η_2) et (η_1) pour la même valeur de t.

(¹) On peut considérer ces limites comme ne dépendant que du tableau des quantités a.

On peut, comme nous le savons, rendre $|\pi_\mu|$ et $|\rho_\nu|$ aussi petits qu'on voudra dans l'intervalle $t \gtreqless t_0$ ou $t \lesseqgtr T_0$, à condition de choisir $\rho_1^0, \ldots, \rho_l^0$ ou $\pi_1^0, \ldots, \pi_k^0$ suffisamment petits numériquement [*voir* les équations (3), (4)]. Il résulte ensuite de ce qui vient d'être dit et de ce que nous savons au sujet de la continuité de $\frac{\partial \Pi_\mu}{\partial p}, \frac{\partial \Pi_\mu}{\partial q}, \frac{\partial K_\nu}{\partial p}, \frac{\partial K_\nu}{\partial q}$ qu'on peut obtenir que, dans un intervalle arbitrairement choisi $t_0' \geqq t \gtreqless t_0$ ou $T_0' \lesseqgtr t \lesseqgtr T_0$, les coefficients des équations aux variations correspondant à la solution (η_2) soient aussi voisins qu'on voudra des coefficients correspondant des équations aux variations relatives à la solution (η_1) pourvu qu'on assigne aux quantités $|\rho_1^0|, \ldots, |\rho_l^0|$ ou $|\pi_1^0|, \ldots, |\pi_k^0|$ un degré suffisant de petitesse.

Revenons maintenant aux dérivées $\frac{\partial [p]}{\partial q_g}$ ou $\frac{\partial [q]}{\partial p_h}$. Pour les calculer au point $\{ q_0 + \rho_0 \}$ ou $\{ p_0 + \pi_0 \}$ et pour $t = t_0$ ou $t = T_0$, il faut chercher la solution des équations aux variations relatives à (η_2) pour laquelle on ait, pour $t = t_0$ ou $t = T_0$, $\mathfrak{q}_g = 1$, $\mathfrak{q}_\nu = 0$ $(\nu \gtrless g)$ ou $\mathfrak{p}_h = 1$, $\mathfrak{p}_\mu = 0$ $(\mu \gtrless h)$ et qui reste entre des limites finies pour $t \gtreqless t_0$ ou $t \lesseqgtr T_0$. Pour plus de clarté, nous emploierons les lettres $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ au lieu de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, quand il s'agira d'une telle solution. Les quantités $\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_k'$ pour $t = t_0$, ou $\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_l'$ pour $t = T_0$ donnent les dérivées cherchées.

D'après ce qui précède, nous savons que la solution $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ reste, pour $t \gtreqless t_0$ ou $t \lesseqgtr T_0$, entre des limites finies qui ne dépendent que du tableau des quantités a. Considérons maintenant la suite des systèmes $(\rho_1^0, \ldots, \rho_l^0)$ ou $(\pi_1^0, \ldots, \pi_k^0)$ dont les termes tendent vers zéro; les valeurs correspondantes de $\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_k'$, formées pour $t = t_0$, ou celles de $\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_l'$, formées pour $t = T_0$, doivent avoir au moins un point d'accumulation $P_1, \ldots, P_k$ ou $Q_1', \ldots, Q_l'$. Déterminons alors la solution (v) des équations aux variations relatives à (η_1) dont les éléments soient, pour $t = t_0$ ou $t = T_0$, égaux à $P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_l$ ou $P_1', \ldots, P_k', Q_1', \ldots, Q_l'$, avec $Q_g = 1$, $Q_\nu = 0$ $(\nu \gtrless g)$ ou $P_h' = 1$, $P_\mu' = 0$ $(\mu \gtrless h)$.

Étant donné un intervalle quelconque $t_0' \geqq t \geqq t_0$ ou $T_0' \leqq t \leqq T_0$, parmi les solutions $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ que nous venons de considérer, il y en a dont les éléments diffèrent d'aussi peu qu'on voudra de $P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_l$ ou $P_1', \ldots, P_k', Q_1', \ldots, Q_l'$ pour $t = t_0$ ou $t = T_0$ et qui satisfont à des équations aux variations dont les coefficients diffèrent, dans l'intervalle $t'_0 \gtreqless t \gtreqless t_0$ ou $T'_0 \leqq t \leqq T_0$, d'aussi peu qu'on voudra de ceux des équations aux variations relatives à (η_1). En remarquant de plus que les quantités $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ restent pour $t \geqq t_0$ ou $t \leqq T_0$ entre des limites finies qui ne dépendent que du tableau des quantités a, nous conclurons, en vertu du théorème du n° 1, Chap. I, que parmi les solutions $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ on peut en trouver qui soient, dans l'intervalle $t'_0 \geqq t \geqq t_0$ ou $T'_0 \leqq t \lesseqgtr T_0$, aussi voisines qu'on veut de la solution (ν). Il s'ensuit que, dans cet intervalle, la solution (ν) ne peut être en dehors des limites dont il a été question tout à l'heure. Or les valeurs de $t'_0 > t_0$ et $T'_0 < T_0$ peuvent être choisies arbitrairement, la même conclusion est donc valable pour toutes les valeurs $t \geqq t_0$ ou $t \leqq T_0$.

Ainsi (ν) est précisément la solution des équations aux variations relatives à (η_1) qui donne les dérivées $\frac{\partial[p]}{\partial q_g}$ ou $\frac{\partial[q]}{\partial p_h}$ au point $\{q_0\}$ et pour $t = t_0$, ou au point $\{p_0\}$ et pour $t = T_0$. Par conséquent, $P_1, \ldots, P_k$ ou $Q'_1, \ldots, Q'_l$ sont déterminés par $Q_1, \ldots, Q_l$ ou $P'_1, \ldots, P'_k$, c'est-à-dire par les indices g ou h si l'on considère $\{q_0\}$, t_0 ou $\{p_0\}$, T_0 comme quantités données.

Il s'ensuit que $P_1, \ldots, P_k$ ou $Q'_1, \ldots, Q'_l$ est l'unique point d'accumulation des systèmes $\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_k$ formés pour $t = t_0$ et pour la suite de systèmes $(\rho_1^0, \ldots, \rho_l^0)$ [ou des systèmes $\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_l$ formés pour $t = T_0$ et la suite de systèmes $(\pi_1^0, \ldots, \pi_k^0)$]. Le point d'accumulation est d'ailleurs le même quel que soit le choix de la suite en question. Par conséquent, les quantités $\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_k$ formées pour $t = t_0$ ou $\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_l$ formées pour $t = T_0$ tendent vers $P_1, \ldots, P_k$ ou $Q'_1, \ldots, Q'_l$ si les coordonnées des points $\{q_0 + \rho_0\}$ ou $\{p_0 + \pi_0\}$ tendent vers celles des points $\{q_0\}$ ou $\{p_0\}$. En d'autres termes : les valeurs des dérivées $\frac{\partial[p_1]}{\partial q_g}, \ldots, \frac{\partial[p_k]}{\partial q_g}$ au point $\{q_0 + \rho_0\}$ et pour $t = t_0$ ou celles des dérivées $\frac{\partial[q_1]}{\partial p_h}, \ldots, \frac{\partial[q_l]}{\partial p_h}$ au point $\{p_0 + \pi_0\}$ et pour $t = T_0$ tendent vers les valeurs de ces mêmes dérivées au point $\{q_0\}$ pour $t = t_0$ ou vers celles au point $\{p_0\}$ pour $t = T_0$ si les coordonnées du point $\{q_0 + \rho_0\}$ ou celles du point $\{p_0 + \pi_0\}$ tendent vers les coordonnées du point $\{q_0\}$ ou $\{p_0\}$. Cela prouve la continuité de ces dérivées dans le domaine (10) ou (11) pour une valeur arbitrairement choisie de t.

Démontrons enfin que les quantités $\left|\frac{\partial[p]}{\partial q}\right|$ ou $\left|\frac{\partial[q]}{\partial p}\right|$ peuvent prendre tout degré de petitesse dépendant du tableau des quantités a, si l'on attribue à $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|$ dans le domaine $-\gamma > x < \gamma$ un degré correspondant de petitesse dépendant du tableau des quantités a.

En effet, les valeurs pour $t = t_0$ ou $t = T_0$ (où t_0 et T_0 sont des valeurs quelconques admises de t) des quantités $\frac{\partial [p]}{\partial q}$ ou $\frac{\partial [q]}{\partial p}$ sont données par certaines solutions [d'équations aux variations du type (12), (13)] restant pour $t \gtreqless t_0$ ou $t \lesseqgtr T_0$ entre des limites finies qui ne dépendent que du tableau des quantités a. Rappelons de plus que, dans les équations aux variations (12), (13), on peut, pour toutes les valeurs $t \gtreqless t_0$ ou $t \lesseqgtr T_0$, assigner aux valeurs absolues de ceux des coefficients des $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ qui figurent sous les signes $\sum$ dans les seconds membres un degré arbitraire de petitesse ne dépendant que du tableau des quantités a, à condition de donner aux quantités $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|$ dans le domaine $-\gamma < x < \gamma$ un degré convenable de petitesse ne dépendant que du tableau des quantités a.

Formons maintenant à l'aide des équations (12), (13) l'expression

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \mathfrak{p}_\mu^2$$

ou

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \mathfrak{q}_\nu^2.$$

Les fonctions L_μ ou I_ν donneront alors des formes quadratiques positives définies en $\mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{q}$ que nous désignerons par $\mathbf{P}$ ou $\mathbf{Q}$ et dont les coefficients ne dépendent que du tableau des quantités a. Nous aurons, par conséquent,

$$\mathbf{P} \gtreqless G \sum_{\mu=1}^{k} \mathfrak{p}_\mu^2$$

ou

$$\mathbf{Q} \gtreqless H \sum_{\nu=1}^{l} \mathfrak{q}_\nu^2,$$

où les quantités $G > 0$ et $H > 0$ ne dépendent que du tableau des quantités a. Les autres termes donneront des formes quadratiques $\mathbf{P}'$ ou $\mathbf{Q}'$ en $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ avec des coefficients aux valeurs absolues desquels nous pouvons assigner un degré arbitraire de petitesse ne dépendant que du tableau des quantités a, et ceci pour toutes les valeurs de $t \gtreqqless t_0$ ou $t \lesseqqgtr T_0$, à condition de choisir convenablement le degré de petitesse (mentionné plusieurs fois déjà) des quantités $\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|$ dans le domaine $-\gamma < x < \gamma$.

Si maintenant $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ représentent les solutions servant à déterminer les valeurs de certaines dérivées $\frac{\partial[p]}{\partial q}$ ou $\frac{\partial[q]}{\partial p}$ pour $t = t_0$ ou $t = T_0$, ces quantités $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ restent pour $t \gtreqqless t_0$ ou $t \lesseqqgtr T_0$ entre des limites dont il a été question plus haut et qui ne dépendent que du tableau des quantités a. Par conséquent, dans ce cas, on peut attribuer à $|\mathbf{P}'|$ ou $|\mathbf{Q}'|$ un degré arbitraire de petitesse ne dépendant que du tableau des quantités a à condition toujours de choisir convenablement le degré de petitesse des quantités $\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|$ dans le domaine $-\gamma < x < \gamma$. Ceci fait, on a, par conséquent,

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \mathfrak{p}_\mu^2 > G\sum_{\mu=1}^{k}\mathfrak{p}_\mu^2 - P'$$

ou

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \mathfrak{q}_\nu^2 > H\sum_{\nu=1}^{l}\mathfrak{q}_\nu^2 - Q',$$

où nous pouvons considérer les quantités $P' > 0$, $Q' > 0$ comme dépendant d'une façon arbitrairement choisie du tableau des quantités a. En posant

$$S = \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \mathfrak{p}_\mu^2$$

ou

$$T = \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \mathfrak{q}_\nu^2,$$

nous aurons

$$\frac{dS}{dt} > \frac{G}{D}S - P'$$

ou

$$\frac{dT}{dt} > \frac{H}{|F|}|T| - Q',$$

où D et $|F|$ sont respectivement les plus grandes parmi les quantités d_μ et $|f_\nu|$. Il en résulte

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\frac{G}{D}t}\left(S - \frac{D}{G}P'\right)\right] > 0$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{H}{|F|}t}\left(T + \frac{|F|}{H}Q'\right)\right] > 0.$$

Par conséquent, si jamais on avait $S \overline{\gtrless} \frac{D}{G}P'$ ou $|T| \overline{\gtrless} \frac{|F|}{H}Q'$, il en résulterait que, dans le cas I, S croîtrait indéfiniment avec t et, dans le cas II, T décroîtrait indéfiniment avec t. Or cela est en contradiction avec la nature des solutions $\mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{q}$. Donc pour $t \overline{\gtrless} t_0$ ou $t \overline{\lessgtr} T_0$, on a toujours $S < \frac{D}{G}P'$ ou $|T| < \frac{|F|}{H}Q'$. Il s'ensuit que pour toutes ces valeurs de t et, par conséquent, aussi pour $t = t_0$ ou $t = T_0$, on a $\mathfrak{p}_\mu^2 < \frac{D}{dG}P'$ ou $\mathfrak{q}_\nu^2 < \frac{|F|}{|f|H}Q'$ où d et $|f|$ sont respectivement les plus petites parmi les quantités d_μ ou $|f_\nu|$.

Les quantités $\frac{D}{dG}$ et $\frac{|F|}{|f|H}$ ne dépendant que du tableau des quantités a et étant indépendantes de P' ou Q', il s'ensuit que les quantités $\frac{D}{dG}P'$ ou $\frac{|F|}{|f|H}Q'$ peuvent, par un choix convenable de P' ou Q', prendre telle valeur positive dépendant du tableau des quantités a qu'on voudra. Or les quantités $\mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{q}$ donnent précisément pour $t = t_0$ ou $t = T_0$ les valeurs des dérivées en question; notre théorème est donc démontré.

14. *Quelques compléments.* — Supposons l'intervalle de valeurs de t défini par les inégalités $t > \tau$ ou $t < \tau$ ou *t arbitraire*. Dans le domaine (G) défini par les inégalités

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \overline{\lessgtr} \delta\gamma^2, \qquad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 \overline{\gtrless} -\delta\gamma^2,$$

nous avons (*voir* n° 8)

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \overline{\lessgtr} D_1 \sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2 - \Delta\gamma^2, \qquad \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 \overline{\gtrless} F_1 \sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2 - \Delta\gamma^2,$$

où D_1 et F_1 sont positifs et ne dépendent que du tableau des quantités a, et la quantité $\Delta > 0$ peut prendre toute valeur positive dépendant des quantités a, si le degré de petitesse dont il a été question, quand nous avons introduit les hypothèses, est déterminé convenablement. Nous avons évidemment aussi

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \gtreqless D_0 \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 - \Delta\gamma^2, \qquad \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 \gtreqless - F_0 \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 - \Delta\gamma^2,$$

où les quantités positives D_0 et F_0 ne dépendent que des quantités a.

Soient maintenant deux domaines de variabilité des quantités p et q définies par les inégalités suivantes

$$\text{(I)} \qquad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \varepsilon\gamma^2,$$

$$\text{(II)} \qquad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 > -\eta\gamma^2,$$

où les quantités $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ sont choisies arbitrairement et ne dépendent que du tableau des quantités a. Si le degré de petitesse dont nous venons de parler est déterminé convenablement, on peut poser $\frac{\Delta}{D_0} < \varepsilon$, $\frac{\Delta}{F_0} < \eta$. Nous aurons alors les propositions suivantes :

1° *Si la solution reste pour toutes les valeurs de* $t > T_0$ (¹) *dans le domaine* (G) *les quantités p doivent rester dans le domaine* I.

En effet, supposons qu'à un moment quelconque on ait

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \geqq \varepsilon\gamma^2$$

(¹) T_0 est une des valeurs admises de t. Il s'agit bien entendu du cas où l'intervalle de t est défini par l'inégalité $t > \tau$ ou t arbitraire.

et par conséquent

$$\text{(III)} \qquad \frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \geq \gamma^2(\mathrm{D}_0\varepsilon - \Delta).$$

La quantité entre parenthèses étant positive il en résulterait que, pour la valeur considérée de t, la quantité

$$\sum_{\mu=1}^{\mu} d_\mu p_\mu^2$$

croîtrait avec t. Par conséquent, la relation (III) serait vérifiée pour toutes les valeurs plus grandes de t et la quantité

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2$$

croîtrait indéfiniment, ce qui est impossible.

Remarquons encore que si, en même temps, les quantités q se trouvent à un moment quelconque dans le domaine II, elles y restent pour les valeurs plus grandes de t. En effet, dans le cas contraire on aurait, pour une certaine valeur de t,

$$\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 = -\eta\gamma^2,$$

alors que pour des valeurs inférieures et suffisamment voisines de celle-ci

$$\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2$$

serait $> -\eta\gamma^2$. Mais alors nous aurions pour la valeur de t en question

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 \overline{\gtrless} \mathrm{F}_0\eta\gamma^2 - \Delta\gamma^2 > 0,$$

ce qui est en contradiction avec ce qui précède.

2° *Si la solution reste pour toutes les valeurs de* $t < \mathrm{T}_0$ *dans* *le domaine* (G), *les quantités q doivent rester dans le domaine* II. *Si, en même temps, les quantités p se trouvent pour une valeur de t dans le domaine* I, *elles y restent pour toutes les valeurs inférieures de t.* Démonstration analogue à la précédente.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les groupes p et q existent tous les deux. Dans le cas contraire, il faut omettre, dans ces raisonnements, tout ce qui se rapporte au groupe qui n'existe pas.

15. *De la représentation des solutions considérées.* — Nous ferons, dans ce paragraphe, quelques remarques au sujet de l'expression des solutions considérées précédemment. On peut se borner au cas où l'intervalle de valeurs de t est défini par $t > \tau$ ou *t arbitraire*, car l'examen du cas où t est défini par l'inégalité $t < \tau$ ne donnerait au fond aucun résultat nouveau. De plus, pour abréger, nous n'examinerons pas les cas où l'un des groupes p ou q n'existe pas.

Afin de ne pas interrompre plus tard la suite des raisonnements nous indiquerons d'abord quelques propositions simples, dont nous ferons usage plus loin.

Soit donné un système d'équations différentielles linéaires

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \mathrm{L}_i(x) + \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les L_i sont des expressions linéaires et homogènes, par rapport aux x du même type que celles qui figurent dans les équations (1) du n° 8, et les ξ_i sont des fonctions continues de t, pour toutes les valeurs de $t > t_0$ ou pour *t arbitraire* et restent entre des limites finies pour toutes ces valeurs de t.

On peut considérer les équations (1) comme cas particulier des équations (1) du n° 8; il suffit seulement de choisir γ assez grand. Par conséquent étant données une quelconque des valeurs admises de t, soit t_1, et un système arbitraire $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_l^0$, il existe évidemment une solution des équations (1) qui reste, pour toutes les valeurs de $t \geqq t_1$, entre des limites finies et qui pour $t = t_1$ satisfait aux conditions $q = q_1^0, \ldots, q_l = q_l^0$ (nous désignons par la lettre q les mêmes fonctions linéaires en x que précédemment). Cette solution est d'ailleurs l'unique solution de cette nature.

Dans le cas où t est arbitraire, il existe une et une seule solution qui reste entre des limites finies pour toutes les valeurs de t.

Pour représenter ces solutions formons les équations en p et q. Elles se partagent en systèmes du type

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda z_1 + \zeta_1,$$
$$\frac{dz_2}{dt} = z_1 + \lambda z_2 + \zeta_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dz_\nu}{dt} = z_{\nu-1} + \lambda z_\nu + \zeta_\nu,$$

ou

$$\frac{du_1}{dt} = gu_1 - hv_1 + \psi_1, \qquad \frac{dv_1}{dt} = gv_1 + hu_1 + \varphi_1,$$
$$\frac{du_2}{dt} = u_1 + gu_2 - hv_2 + \psi_2, \qquad \frac{dv_2}{dt} = v_1 + gv_2 + hu_2 + \varphi_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{du_\rho}{dt} = u_{\rho-1} + gu_\rho - hv_\rho + \psi_\rho, \qquad \frac{dv_\rho}{dt} = v_{\rho-1} + gv_\rho + hu_\rho + \varphi_\rho,$$

les quantités p correspondant aux valeurs positives de λ et g, et les quantités q aux valeurs négatives de λ et g; ζ, ψ et φ sont des fonctions continues de t restant entre des limites finies pour $t > t_0$ ou t arbitraire.

S'il s'agit de représenter la solution des équations (1) qui reste entre des limites finies pour toutes les valeurs de $t \geqq t_1$ et qui pour $t = t_1$ satisfait aux conditions $q = q_1^0, \ldots, q_l = q_l^0$, les fonctions q se trouvent complètement déterminées grâce aux valeurs initiales $q_1^0, \ldots, q_l^0$ données. Pour ce qui est des fonctions p, le problème se ramène à l'intégration des équations du type

$$\text{(I)} \qquad \frac{dz}{dt} = \lambda z + \zeta,$$

ou

$$\text{(II)} \qquad \frac{du}{dt} = gu - hv + \psi, \qquad \frac{dv}{dt} = gv + hu + \varphi,$$

où λ et g sont positifs, ζ ou ψ, φ sont des fonctions de t qui restent, pour toutes les valeurs de $t \geqq t_1$, entre des limites finies, la solution cherchée devant rester entre des limites finies pour toutes les valeurs de $t \geqq t_1$.

Nous aurons alors, pour le cas (I),

$$z = -e^{\lambda t}\int_t^\infty e^{-\lambda t}\zeta\, dt,$$

et, pour (II),

$$u = -\int_t^\infty e^{-g(y-t)}[\psi(y)\cos h(y-t) + \varphi(y)\sin h(y-t)]\, dy,$$

$$v = +\int_t^\infty e^{-g(y-t)}[\psi(y)\sin h(y-t) - \varphi(y)\cos h(y-t)]\, dy.$$

S'il s'agit de la solution des équations (1) restant entre des limites finies pour toutes les valeurs de t le problème se ramène aussi à l'intégration des équations (I) et (II) où λ et g peuvent, cette fois, être aussi négatifs. Les fonctions ζ, ψ et φ restent entre des limites finies pour toutes les valeurs de t et l'on impose la même condition à la solution. Les éléments de la solution correspondant à λ ou g positifs seront encore donnés par les intégrales ci-dessus et pour ceux qui correspondent aux valeurs négatives de λ ou g il faut remplacer $\int_t^\infty$ par $\int_t^{-\infty}$

Nous allons maintenant compléter les résultats obtenus dans la première moitié du n° **11**. Nous reprenons les hypothèses et notations que nous y avons employées [1] et nous allons examiner le cas où, pour une certaine valeur T_0 de t, on a

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_l = 0.$$

Nous aurons alors, pour $t = T_0$,

$$s = \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \leqq c\sigma_0^2$$

(*voir* au n° **11** la signification de c). D'où, pour $t = T_0$, $\sigma^2 \leqq \frac{c}{d_0}\sigma_0^2$, où d_0 est la plus petite parmi les quantités d_μ. Des théorèmes du n° **11** ainsi que de la signification de la quantité σ et du fait que

---

[1] Nos considérations se rapportent au cas où $t > \tau$ ou t arbitraire. Nous supposons que les deux groupes p et q existent (*voir* la remarque au début du présent paragraphe).

la quantité positive $\frac{c}{d_0}$ ne dépend que du tableau des quantités a, nous concluons que pour $t \gtreqless T_0$, σ est $< h_0 d$ où la quantité positive h_0 ne dépend que du tableau des quantités a. (*Voir* au n° 11 la signification de la quantité d.) Il en résulte ensuite que, pour $\tau \gtreqless T_0$, $|x_i| < ed$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, où la quantité positive e ne dépend elle aussi que du tableau des quantités a.

Nous désignerons par (X) le domaine

$$-\gamma < x_i < \gamma \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

que nous rencontrerons souvent dans ce qui suit.

Considérons maintenant la solution des équations différentielles (1) du n° 8 qui, pour $t > \tau_0$ (τ_0 désigne une des valeurs admises de t), reste dans le domaine (X), De plus, soit donnée une solution approchée de ces mêmes équations dont les éléments restent pour $t > \tau_0$ dans le domaine (X), admettent des dérivées finies et continues pour ces valeurs de t et satisfont aux équations (1) du n° 8 avec une erreur numériquement inférieure à un certain nombre positif d. Supposons de plus que les éléments q de cette solution approchée aient pour une certaine valeur T_0 de t les mêmes valeurs que les éléments correspondants de la solution exacte indiquée plus haut.

Si nous désignons maintenant les éléments de la solution approchée par x_0 et ceux de la solution exacte par $x_0 + z$, les équations (1) du n° 8 nous donnent

$$(2) \quad \frac{dz_i}{dt} = L_i(z) + \xi_i(x_0 + z) - \xi_i(x_0) + r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les L_i sont les mêmes fonctions linéaires que celles qui figurent dans les équations (1) du n° 8 et $|r_i| < d$.

Si l'on attribue aux quantités $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|$ un degré suffisant de petitesse conformément aux hypothèses (*voir* n° 8), le théorème auxiliaire du n° 11 est applicable aux fonctions z. Par conséquent, en désignant par $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, les quantités dépendant des z de la même façon que les quantités p et q dépendent des x et en tenant compte du fait que, pour $t = T_0$, $\sum_{\nu=1}^{l} \mathfrak{q}_\nu^2 = 0$, on trouve, pour $t \gtreqless T_0$, $|z| < ed$

où la quantité positive e ne dépend que du tableau des quantités a.

Cette proposition permet de juger de l'approximation atteinte. Étant donné le domaine

$$(3) \qquad \text{III.} \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta_1 \gamma^2 \qquad \text{IV.} \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 > -\delta_2 \gamma^2$$

où δ_1 et δ_2 sont deux quantités ne dépendant que du tableau des quantités a et d'ailleurs arbitrairement choisies, on peut (*voir* n° **14**) choisir le degré de petitesse dont nous avons parlé en introduisant les hypothèses de telle façon que la proposition suivante soit vérifiée : *A tout système de quantités q pris dans le domaine* IV *et à toute valeur* T_0 *prise dans l'intervalle admis de t correspond un système de quantités p et un seul appartenant au domaine* III *et tel que la solution dont les éléments prennent pour* $t = T_0$ *ces valeurs p, q, reste pour* $t \gtreqless T_0$, *dans le domaine* (3).

Choisissons δ_1 et δ_2 conformément aux conditions qui viennent d'être indiquées et de plus de telle façon que toutes les quantités $|x|$ correspondant au système p, q, du domaine (3) soient inférieures à $\frac{\gamma}{2}$. Partant de ces valeurs δ_1 et δ_2, choisissons le degré de petitesse dont il a été souvent question de façon que la proposition précédente soit vérifiée. Ce choix ne se rapporte cependant qu'au présent paragraphe.

Soient donnés maintenant un système de valeurs $(q)_0$ des quantités q appartenant au domaine IV et une des valeurs admises de t, T_0. Considérons la solution qui reste dans le domaine (3) pour $t \gtreqless T_0$ et dont les coordonnées q deviennent $(q)_0$ pour $t = T_0$. On peut prolonger cette solution pour $t < T_0$ de telle façon qu'elle reste dans le domaine (X) à condition de nous borner à des valeurs de t suffisamment voisines de T_0. De plus soit donnée pour $t > \tau_0$ une solution approchée (dans le même sens que précédemment), τ_0 étant suffisamment voisin de T_0 pour que la solution exacte avec son prolongement dont il vient d'être parlé ait un sens déterminé pour $t > \tau_0$. Supposons de plus d suffisamment petit pour qu'on ait $ed < \frac{\gamma}{4}$ ou $d < \frac{\gamma}{4e}$. Pour $t \gtreqless T_0$ nous avons, d'après ce qui précède,

$$|x_0 + z| < \frac{\gamma}{2}; \quad |z| < ed < \frac{\gamma}{4},$$

d'où

$$|x_0| < \frac{3}{4}\gamma.$$

Formons maintenant les équations

$$(4) \qquad \frac{d\mathbf{z}_i}{dt} = \mathrm{L}_i(\mathbf{z}) + r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et déterminons-en la solution qui pour $t = \mathrm{T}_0$ satisfait aux conditions $\mathfrak{q}'_1 = \ldots = \mathfrak{q}'_l = 0$ (les quantités $\mathfrak{q}'$ étant formées à l'aide des z comme les quantités q à l'aide des x) et qui reste pour $t \lesseqgtr \mathrm{T}_0$ entre des limites finies. Puisque pour $t > \tau_0$, $|r_i|$ reste $< d$, on a, en vertu du théorème auxiliaire démontré au début du présent paragraphe, $|\mathbf{z}| < ed$ pour $t \lesseqgtr \mathrm{T}_0$ et par conséquent aussi $|\mathbf{z}| < \frac{\gamma}{4}$, d'où $|x_0 + \mathbf{z}| < \gamma$. Cette dernière inégalité ainsi que l'inégalité $|\mathbf{z}| < ed$ sont évidemment encore vérifiées dans un certain intervalle $\tau_0 < \tau_1 < t < \mathrm{T}_0$.

Prenons maintenant $x_0 + \mathbf{z}$ comme solution approchée pour $t > \tau_1$. Cela peut se faire, puisque les quantités $x_0 + \mathbf{z}$ restent à l'intérieur du domaine (X) pour $t > \tau_1$ et que les quantités formées à l'aide des $x_0 + \mathbf{z}$ comme les quantités q le sont à l'aide des x prennent les valeurs $(q)_0$ pour $t = \mathrm{T}_0$. Nous aurons alors les équations du type

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(x_{0i} + \mathbf{z}_i)}{dt} &= \mathrm{L}_i(x_0) - r_i + \xi_i(x_0) + \mathrm{L}_i(\mathbf{z}) + r_i \\ &= \mathrm{L}_i(x_0 + \mathbf{z}) + \xi_i(x_0 + \mathbf{z}) - [\xi_i(x_0 + \mathbf{z}) - \xi_i(x_0)] \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \right.$$

où $x_{01}, \ldots, x_{0n}$ sont les éléments de la solution approchée que nous avons jusqu'ici désignée par la lettre x_0.

Supposons maintenant qu'on ait, dans le domaine (X) et pour toutes les valeurs admises de t, $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| \lesseqgtr \Delta$, où la quantité positive Δ ne dépend que du tableau des quantités a. En posant alors

$$\mathbf{r}_i = \xi_i(x_0 + \mathbf{z}) - \xi_i(x_0),$$

on a, pour $t > \tau_1$,

$$|\mathbf{r}_i| < ne\Delta d.$$

En choisissant maintenant la quantité positive Δ, dont nous pouvons disposer, de façon qu'on ait

$$\omega = ne\Delta < \frac{1}{2},$$

nous aurons la proposition suivante :

Étant donnée une solution approchée x_0 répondant aux conditions indiquées plus haut, l'approximation pour $t \gtreqless T_0$ sera caractérisée par $|x_i - x_{0i}| < ed$, où e est un nombre ne dépendant que du tableau des quantités a. A l'aide de la solution des équations différentielles linéaires (4), on peut alors former une seconde solution approchée répondant aux mêmes conditions et qui satisfait aux équations différentielles avec une erreur numériquement inférieure à ωd où le nombre positif ω est inférieur à 1 et ne dépend que du tableau des quantités a. L'approximation pour $t \gtreqless T_0$ est donc caractérisée maintenant par $e\omega d$. En procédant de la même façon, nous pouvons trouver ensuite une solution approchée toujours de la même nature que les solutions précédentes, mais dont l'écart pour $t \gtreqless T_0$ soit caractérisé par $e\omega^2 d$ et ainsi de suite. Comme on a $0 < \omega < 1$, on peut atteindre, dans l'intervalle $t \gtreqless T_0$, telle approximation qu'on voudra.

Passons maintenant à la recherche de la première solution approchée. A cet effet formons les équations

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = L_i(\mathbf{x}) + \xi_{i0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

où ξ_{i0} est la valeur de ξ_i [*voir* les équations (11) du n° 8] pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

et déterminons-en la solution qui reste entre des limites finies pour $t \gtreqless T_0$ et telle que les quantités formées avec les $\mathbf{x}$ comme les quantités q le sont avec les x prennent les valeurs $(q)_0$ pour $t = T_0$.

Il est évident d'ailleurs que les quantités $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ formées avec les $\mathbf{x}$, comme p, q le sont avec les x, restent dans le domaine (3) pour $t \gtreqless T_0$ (et par conséquent aussi pour un certain intervalle $t > T_1 > T_0$), car les équations (6) représentent un cas particulier des équations (1) du n° 8 et répondent aux hypothèses faites jusqu'ici au sujet du degré de petitesse introduit dans le n° 8. Le nombre γ a ici la même valeur que dans les équations primitives.

Il résulte de ce qui vient d'être dit qu'on a, pour $t > T_1$, $|\mathbf{x}| < \frac{\gamma}{2}$. Si nous substituons maintenant les valeurs des $\mathbf{x}$ dans les équations données, ces dernières seront satisfaites en laissant de côté les termes $\xi_i(\mathbf{x}) - \xi_{i0}$. Or, nous avons

$$|\xi_i(\mathbf{x}) - \xi_{i0}| < n\,\Delta\,\frac{\gamma}{2} = \omega\,\frac{\gamma}{2e} < \frac{\gamma}{4e}.$$

La solution approchée $\mathbf{x}$ satisfait donc bien à toutes les conditions.

En supposant maintenant que nos recherches se rapportent au cas où l'intervalle de valeurs de t contient toutes les valeurs de t (t arbitraire), étudions l'expression de la solution qui reste toujours dans le domaine $-\gamma < x_i < \gamma$.

Par un choix convenable du degré de petitesse dont il est si souvent question, on peut obtenir, d'après le n° 14, qu'on ait toujours, pour la solution considérée, $|x| < \frac{\gamma}{2}$.

Imaginons maintenant une solution approchée x_0 [1], restant dans le domaine (X) et satisfaisant aux équations différentielles, abstraction faite de termes r_i numériquement inférieurs à $d > 0$. Les différences entre les éléments x de la solution exacte considérée et x_0 seront alors numériquement inférieures à $e_1 d$ où la quantité positive e_1 ne dépend que du tableau des quantités a, comme cela résulte du théorème auxiliaire du n° 11, pourvu que le degré de petitesse souvent mentionné soit convenablement choisi.

Supposons $d < \frac{\gamma}{4e_1}$; on a alors toujours $|x_0| < \frac{3}{4}\gamma$. Formons ensuite les équations différentielles (4) et déterminons-en la solution qui reste toujours entre des limites finies. Les éléments de cette solution restent, d'après ce qui précède, numériquement inférieurs à $e_1 d$; on a donc $|\mathbf{z}| < \frac{\gamma}{4}$ et, par conséquent, les $x_0 + \mathbf{z}$ restent dans le domaine (X) pour toutes les valeurs de t. En

---

(1) Nous supposons que les x_0 sont donnés pour toutes les valeurs de t et qu'ils admettent, pour ces valeurs de t, des dérivées finies et continues.

prenant $x_0 + \mathbf{z}$ pour solution approchée, les équations différentielles seront satisfaites avec une erreur numériquement inférieure à $ne_1 d\Delta_1$, si nous imposons aux quantités $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|$ d'être $< \Delta_1$ à l'intérieur de (X) et pour toutes les valeurs de t, Δ_1 désignant un nombre > 0 ne dépendant que du tableau des quantités a. Choisissons le nombre $\Delta_1 > 0$ de telle façon qu'on ait

$$\omega_0 = ne_1 \Delta_1 < \frac{1}{2}.$$

Alors la nouvelle solution approchée satisfait aux équations différentielles avec une erreur numériquement inférieure à $\omega_0 d$ où ω_0 est < 1, et l'écart entre la nouvelle solution approchée et la solution exacte est caractérisé par $e_1 \omega_0 d$.

En continuant de la sorte, nous obtiendrons une solution dont l'écart sera caractérisé par $e_1 \omega_0^2 d$, et ainsi de suite.

Reste, par conséquent, à trouver la première solution approchée pour laquelle on ait $d < \frac{\gamma}{4e_1}$.

A cet effet, formons les équations (6), ξ_{i0} désignant toujours la valeur de ξ_i pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$, et déterminons-en la solution qui reste entre des limites finies pour toutes les valeurs de t. On prouvera, de même que précédemment, que pour cette solution on a toujours $|\mathbf{x}| < \frac{\gamma}{2}$ et qu'elle satisfait aux équations différentielles (1) du n° 8, abstraction faite des termes $\xi_i(\mathbf{x}) - \xi_{i0}$. Mais puisque

$$|\xi_i(\mathbf{x}) - \xi_{i0}| < n\,\Delta_1 \frac{\gamma}{2} = \omega_0 \frac{\gamma}{2e_1} < \frac{\gamma}{4e_1},$$

cette solution des équations (6) satisfait à toutes les conditions imposées à la première solution approchée dont il a été question plus haut.

16. *Lemme.* — Le théorème que nous allons démontrer dans le présent paragraphe sert de base aux recherches du paragraphe suivant. De ce théorème découle, comme il est facile de le voir, le théorème fondamental relatif à l'existence des fonctions implicites ([1]).

([1]) Ce théorème a été démontré par Dini, Peano, Kneser (avec d'autres hypo-

Soient données m fonctions $f_\mu(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$ *des* $m+n$ *variables* $y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n$ *dans le domaine défini par les inégalités*

$$\text{(I)} \qquad \sum a_{ij} y_i y_j \overline{\gtrless} p,$$

$$\text{(II)} \qquad -\alpha_i \overline{\gtrless} x_i \leqq \alpha_i,$$

où $p, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *sont des nombres positifs et* $\sum a_{ij} y_i y_j$ *une forme quadratique définie positive. Supposons que les f soient, pour chaque système particulier de valeurs des x appartenant au domaine* (II), *des fonctions continues des y et qu'elles admettent dans le domaine* $\sum a_{ij} y_i y_j < p$ *des dérivées partielles du premier ordre par rapport aux y qui soient, elles aussi, des fonctions continues des y. Supposons ensuite que le déterminant fonctionnel* D *des fonctions f par rapport aux variables y soit différent de zéro et qu'on ait* $\left|\frac{\Delta}{D}\right| < \delta$ *où* Δ *est un mineur quelconque du premier ordre du déterminant* D *tandis que* δ *est un nombre positif, le même pour tous les y et x de notre domaine; de plus supposons que chacune des dérivées* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *prenne en deux points* $y'_1, \ldots, y'_m, x_1, \ldots, x_n$ *et* $y''_1, \ldots, y''_m, x_1, \ldots, x_n$ *des valeurs différant de moins de* $\varepsilon = \frac{1}{3m^2\delta}$, *et enfin qu'on ait*

$$\sum_{\mu=1}^{m} [f_\mu(0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_n)]^2 \overline{\gtrless} \frac{m\varepsilon^2 p}{Q},$$

où Q *est un nombre positif satisfaisant à la condition*

$$\sum a_{ij} y_i y_j \leqq Q \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu^2.$$

(*Un tel nombre peut s'obtenir, comme on le sait, à l'aide, par exemple, d'une certaine équation du degré m.*)

Dans ces conditions, il existe, pour tout système de valeurs

---

thèses), Schwartz. S'il ne s'agissait que de ce théorème, on pourrait simplifier nos considérations.

des x du domaine (II), *un système de valeurs des y appartenant au domaine $\sum a_{ij}y_iy_j < p$ et satisfaisant aux équations*

$$f_\mu(y_1, \ldots, y_m;\, x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

ce système étant de plus le seul dans le domaine (I) *qui satisfasse à ces équations.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons nous servir des relations suivantes résultant de la formule de Taylor [1],

$$\begin{aligned} &f_i(y'_1, \ldots, y'_m;\, x_1, \ldots, x_n) - f_i(y''_1, \ldots, y''_m;\, x_1, \ldots, x_n) \\ &\quad = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y''_m}(y'_\mu - y''_\mu) + \sum_{\mu=1}^{m} p_{i\mu}(y'_\mu - y''_\mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned}$$

où le système $y''_1, \ldots, y''_m$ appartient au domaine $\sum a_{ij}y_iy_j < p$ et où $|p_{i\mu}| < \varepsilon$. Multipliant chacune de ces relations par $\frac{\Delta_{i\nu}}{D}$, où $\Delta_{i\nu}$ est le mineur relatif à la $i^{\text{ième}}$ ligne et à la $\nu^{\text{ième}}$ colonne du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y''_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y''_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y''_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y''_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y''_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y''_m} \end{vmatrix}$$

et en les ajoutant nous aurons

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_{i\nu}}{D}[f_i(y'_1, \ldots, y'_m;\, x_1, \ldots, x_n) - f_i(y''_1, \ldots, y''_m;\, x_1, \ldots, x_n)] \\ &\quad = y'_\nu - y''_\nu + \sum_i \sum_\mu \frac{\Delta_{i\nu}}{D} p_{i\mu}(y'_\mu - y''_\mu), \end{aligned}$$

---

[1] Le fait que le théorème de Taylor est applicable dans notre cas résulte de la remarque suivante : *Si* $[y'_\mu]$, $[y''_\mu]$ *sont deux points différents du domaine* $\sum a_{ij}y_iy_j \gtreqless p$, *le point* $[y'_\mu + t(y'_\mu - y''_\mu)]$ *appartient au domaine* $\sum a_{ij}y_iy_j < p$, *la somme* $\sum a_{ij}y_iy_j$ *étant, par hypothèse, une forme quadratique positive définie.*

d'où, puisque $\left|\frac{\Delta}{D}\right| < \delta$,

$$\delta \sum_{i=1}^{m} |f_i(y', x) - f_i(y'', x)| \overline{\gtrless} |y'_\nu - y''_\nu| - \delta\varepsilon m \sum_{\mu=1}^{m} |y'_\mu - y''_\mu|,$$

l'égalité n'ayant lieu que si toutes les différences $y'_\mu - y''_\mu$ sont nulles. Désignant maintenant

$$\sum_{\mu=1}^{m} |y'_\mu - y''_\mu|$$

par S et faisant la sommation par rapport à ν, nous aurons

$$(1) \qquad \begin{cases} m\delta \sum_i |f_i(y', x) - f_i(y'', x)| \overline{\gtrless} S(1 - \delta\varepsilon m^2), \\ m\delta \sum_i |f_i(y', x) - f_i(y'', x)| \overline{\gtrless} \frac{2}{3} S. \end{cases}$$

Nous en concluons que si tous les f_μ s'annulent pour $x_1, \ldots, x_n$ et un système de valeurs des y appartenant au domaine $\sum a_{ij} y_i y_j < p$, ce système est dans le domaine (I) l'unique satisfaisant à cette condition. En effet, dans le cas contraire, il existerait deux systèmes différents de quantités y satisfaisant à la condition (1) alors qu'on aurait simultanément $f_i(y', x) = f_i(y'', x) = 0$, ce qui entraînerait pour S la relation $0 \overline{\gtrless} \frac{2}{3} S$, d'où $S = 0$ et par conséquent les deux systèmes de valeurs des y ne pourraient être différents.

Il suffit donc de prouver l'existence d'un système de valeurs des y $\left(\text{dans le domaine} \sum a_{ij} y_i y_j < p\right)$ qui correspond à $x_1, \ldots, x_n$ de telle façon qu'on ait

$$f_\mu(y, x) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

A cet effet, nous allons montrer d'abord que pour tout système de valeurs des y pris dans le domaine $\sum a_{ij} y_i y_j = p$, on a

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{m} [f_i(y_1, \ldots, y_m; x_1, \ldots, x_n)]^2 > \frac{m\varepsilon^2 p}{Q}$$

et cela quelles que soient les valeurs des x.

En effet, supposons qu'il n'en soit pas toujours ainsi, c'est-à-dire que, pour un certain système $y_1, \ldots, y_m; x_1, \ldots, x_n$, on ait la relation

$$\sum_{i=1}^{m}[f_i(y, x)]^2 \leqq \frac{m\varepsilon^2 p}{Q},$$

les y satisfaisant à la relation $\sum a_{ij} y_i y_j = p$. Appliquons alors la formule (1) en posant

$$y'_1 = y_1, \quad \ldots, \quad y'_m = y_m, \quad y''_1 = y''_2 = \ldots = y''_m = 0.$$

Nous aurons

$$m\delta \sum_{i=1}^{m}[|f_i(y, x)| + |f_i(0, x)|] > \frac{2}{3}\sum_{\mu=1}^{m}|y_\mu|$$

ou bien

$$m\delta\sqrt{m}\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}[f_i(y, x)]^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m}[f_i(0, x)]^2}\right\} > \frac{2}{3}\sqrt{\sum_{\mu=1}^{m} y_\mu^2}.$$

Or nous avons, par hypothèse,

$$\sum_{i=1}^{m}[f_i(0, x)]^2 \leqq \frac{m\varepsilon^2 p}{Q}$$

et

$$p = \sum a_{ij} y_i y_j \leqq Q \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu^2;$$

par conséquent,

$$2m\delta\sqrt{m}\,\frac{\sqrt{m}\,\varepsilon\sqrt{p}}{\sqrt{Q}} > \frac{2}{3}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{Q}},$$

d'où, en tenant compte de la valeur de ε,

$$\frac{2}{3}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{Q}} > \frac{2}{3}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{Q}},$$

nous aboutissons donc à une contradiction. L'inégalité (2) est ainsi établie. Il s'ensuit qu'on a, pour les valeurs des y satisfaisant à la relation $\sum a_{ij} y_i y_j = p$,

$$\sum_{i=1}^{m} [f_i(y, x)]^2 > \sum_{i=1}^{m} [f_i(0, x)]^2, \tag{3}$$

car le premier membre est $> \frac{m\varepsilon^2 p}{Q}$ et le second est $\overline{\overline{<}} \frac{m\varepsilon^2 p}{Q}$.

Pour un système déterminé de valeurs des x arbitrairement choisi dans le domaine (II), la fonction

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} [f_i(y, x)]^2$$

prend, en vertu de sa continuité, sa plus petite valeur en un point au moins du domaine (I). En ce point, on ne peut avoir $\sum a_{ij} y_i y_j = p$ en vertu de la relation (3); par conséquent on a, en ce point, $\sum a_{ij} y_i y_j < p$; il s'ensuit que toutes les dérivées partielles $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ s'annulent en ce point, d'où les m relations suivantes

$$\sum_{i=1}^{m} f_i \frac{\partial f_i}{\partial y_\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Or, le déterminant fonctionnel des fonctions f par rapport aux y n'est pas nul, on a donc en ce point $f_1 = f_2 = \ldots = f_m = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

17. *Modification des hypothèses. Application du lemme précédent.* — Nous présenterons dans le présent paragraphe une application du théorème précédent, après avoir donné une forme particulière à nos hypothèses. Ces hypothèses restreintes, dont nous ne ferons usage que dans ce paragraphe, sont les suivantes :

Soit donné le même système d'équations différentielles que précédemment (*voir* n° 8), assujetti aux mêmes conditions, et supposons l'intervalle de valeurs de t défini par $t > \tau$ (ou t arbitraire). De plus, soient données l fonctions

$$\varphi_i(u_1, \ldots, u_k, v_1 \ldots, v_l) \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, l)$$

[l et k désignant, comme jusqu'ici, le nombre des quantités q

et p [1])] que nous supposerons continues dans un certain voisinage du point $(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0)$ et admettant des dérivées partielles continues du premier ordre. Supposons que toutes ces fonctions φ s'annulent pour

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_k = v_1 = \ldots = v_l = 0,$$

mais que le déterminant fonctionnel de ces fonctions par rapport à v ne soit pas nul pour ce système de valeurs. Enfin, réservons-nous le droit d'imposer d'autres conditions encore au degré de petitesse introduit dans le n° 8 et ceci en le faisant dépendre, non seulement du tableau des quantités a, mais aussi de la nature des fonctions φ. Déterminons aussi, pour la quantité γ, un degré de petitesse de la même nature.

Nous allons prouver que, si le degré de petitesse des quantités dont il vient d'être question est déterminé convenablement, on a le théorème suivant :

A tout point $(\omega_1, \ldots, \omega_l)$ d'un certain domaine $-\sigma\gamma \leqq \omega_\rho \leqq \sigma\gamma$ (où σ est > 0 et ne dépend que du tableau des coefficients a et de la nature des fonctions φ) et à toute valeur t_0 de l'intervalle admis correspond un système de quantités p, q et un seul appartenant au domaine

$$\text{(I)} \qquad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \leqq \delta\gamma^2, \qquad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 \geqq -\delta\gamma^2$$

et satisfaisant aux équations

$$\varphi_\nu(p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l) = \omega_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, l)$$

et tel, de plus, que la solution dont les éléments prennent, pour $t = t_0$, ces valeurs p, q, reste, pour $t > t_0$, dans le domaine (I). *d_μ, f_ν, δ ont la même signification que dans les paragraphes précédents.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons d'abord déterminer, à l'intérieur du domaine renfermant le point $(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0)$ et où les hypothèses, faites au sujet des fonctions φ, se trouvent

(1) Nous supposons que les deux groupes q et p existent.

vérifiées, une région autour du point $(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0)$ définie par les inégalités

$$(1) \qquad A_\mu \leqq u_\mu \leqq B_\mu, \qquad C_\nu \leqq v_\nu \leqq D_\nu$$

et un nombre $E > 0$, tels qu'on ait

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} + \sum_{\rho=1}^{k} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_\rho} \varepsilon_\rho^1 & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_l} + \sum_{\rho=1}^{k} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_\rho} \varepsilon_\rho^l \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial \varphi_l}{\partial v_1} + \sum_{\rho=1}^{k} \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_\rho} \varepsilon_\rho^1 & \cdots & \frac{\partial \varphi_l}{\partial v_l} + \sum_{\rho=1}^{k} \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_\rho} \varepsilon_\rho^l \end{vmatrix} \gtrless 0$$

pour les valeurs des u, v appartenant au domaine (1) et pour celles des $\varepsilon_\eta^\vartheta$ satisfaisant aux conditions $-E \leqq \varepsilon_\eta^\vartheta \leqq E$. Cela est possible en vertu de nos hypothèses. On peut ensuite trouver un nombre $\lambda > 0$ tel que, pour ces mêmes valeurs des u, v, $\varepsilon_\eta^\vartheta$, on ait $\left|\frac{\Delta}{D}\right| < \lambda$ où Δ désigne un mineur quelconque du premier ordre du déterminant D. Posons enfin $\varepsilon = \frac{1}{3 l^2 \lambda}$.

Déterminons maintenant par les inégalités

$$(3) \qquad \alpha_\mu \leqq u_\mu \leqq \beta_\mu, \qquad \gamma_\nu \leqq v_\nu \leqq \delta_\nu, \qquad -s \leqq \varepsilon_\eta^\vartheta \leqq s$$

$(0 < s \leqq E)$ un domaine situé, en tant qu'il s'agit des quantités u, v, à l'intérieur du domaine (1) et autour du point $(0, \ldots, 0, 0, \ldots 0)$ et tel de plus que la différence des valeurs d'un élément de D en deux points du domaine (3) soit inférieure à ε.

Les opérations précédentes n'exigent que la connaissance des fonctions φ.

Attribuons maintenant à γ un degré de petitesse suffisant pour que tous les u, v du domaine

$$(4) \qquad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu u_\mu^2 \gtreqless \delta\gamma^2, \qquad \sum_{\nu=1}^{l} |f_\nu| v_\nu^2 \gtreqless \delta\gamma^2$$

appartiennent au domaine (3).

Nous savons (*voir* n° **12**) qu'à tout système de valeurs q_1, $q_2, \ldots, q_l$ des quantités q, pris dans le domaine

$$(5) \qquad \sum_{\nu=1}^{l} |f_\nu| q_\nu^2 \gtreqless \delta\gamma^2$$

et à toute valeur de t, prise dans l'intervalle admis pour t, correspond un système de valeurs $[p_1], \ldots, [p_k]$ des quantités p et un seul appartenant au domaine

$$(6) \qquad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta\gamma^2$$

et tel qu'en prenant $[p_1], \ldots, [p_k], q_1, \ldots, q_l$ pour système de valeurs initiales pour la valeur de t en question, on obtient une solution restant dans le domaine (5, 6) pour toutes les valeurs plus grandes de t. Nous savons aussi (*voir* n° 13) que ces quantités $[p]$, considérées comme fonctions des quantités q et du paramètre t, sont continues dans le domaine (5) et admettent, dans le domaine

$$(7) \qquad \sum_{\nu=1}^{l} |f_\nu| q_\nu^2 < \delta\gamma^2,$$

des dérivées premières par rapport aux quantités q également continues.

Supposons maintenant que le degré de petitesse dont nous avons parlé en introduisant les hypothèses soit déterminé de façon qu'on ait toujours $\left|\frac{\partial[p]}{\partial q}\right| < s$ indépendamment de la valeur de t. La possibilité d'une pareille détermination résulte du n° 13. En effet, quoique nous n'ayons prouvé, dans ce paragraphe, que la possibilité, à l'aide d'un énoncé convenable d'hypothèses, d'attribuer aux quantités $\left|\frac{\partial[p]}{\partial q}\right|$ un degré de petitesse dépendant du tableau des quantités a, il est facile de voir que cette même circonstance prouve l'exactitude de notre précédente affirmation puisque s ne dépend que de la nature des fonctions φ et que le degré de petitesse dont nous avons parlé en posant les hypothèses peut dépendre, non seulement du tableau des quantités a, mais aussi des fonctions φ.

Par un choix convenable de ce degré de petitesse, on peut aussi obtenir que, pour toutes les valeurs des quantités q appartenant au domaine (5) et quelle que soit la valeur de t, on ait

$$(8) \qquad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu [p_\mu]^2 \gtreqless \delta_0\gamma^2,$$

inégalité dans laquelle

$$(9) \qquad \delta_0 = \frac{\delta N}{36 C^2 l^5 \lambda^2 k Q},$$

où C est un nombre positif supérieur à $\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\mu}\right|$ $(i = 1, 2, \ldots, l;$ $\mu = 1, 2, \ldots, k)$, pour les valeurs des u, v du domaine (3), N désigne la plus petite parmi les quantités d_μ et Q la plus grande parmi les quantités $|f_\nu|$. La possibilité d'un pareil choix résulte du n° **14**, en remarquant que δ_0 ne dépend que du tableau des quantités a et de la nature des fonctions φ.

Formons maintenant les fonctions

$$(10) \qquad \chi_i = \varphi_i([p_1], \ldots, [p_k], q_1, \ldots, q_l) \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Les χ sont, d'après ce qui précède, des fonctions des quantités q renfermant en outre le paramètre t. Elles sont définies pour toutes les valeurs des quantités q dans le domaine (5) et continues par rapport aux q dans ce même domaine. En outre, pour toutes les valeurs des quantités q appartenant au domaine (7), ces fonctions admettent des dérivées du premier ordre continues par rapport aux quantités q ayant pour expression

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial q_\nu} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial v_\nu} + \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\mu} \frac{\partial [p_\mu]}{\partial q_\nu} \qquad (u_1 = [p_1], \ldots, u_k = [p_k];\ v_1 = q_1, \ldots, v_l = q_l).$$

Les valeurs des u, v qu'il faut substituer dans les seconds membres appartiennent au domaine (4) et par conséquent aussi au domaine (3). Toutes les quantités $\left|\frac{\partial [p]}{\partial q}\right|$ sont $< s$, comme nous l'avons dit plus haut.

De la comparaison des quantités $\frac{\partial \chi_i}{\partial q_\nu}$ avec les éléments du déterminant (2), et de ce que nous avons dit au sujet du domaine (3), il résulte que le déterminant fonctionnel R des fonctions χ, par rapport aux variables q, ne s'annule pas, que le quotient $\left|\frac{P}{R}\right|$ où P est un mineur du premier ordre du déterminant R est inférieur à λ, et que les valeurs des quantités $\frac{\partial \chi}{\partial q}$ en deux points du domaine (7) diffèrent l'une de l'autre de moins de $\varepsilon = \frac{1}{3 l^2 \lambda}$.

Calculons maintenant les valeurs des fonctions χ pour

$$q_1 = \ldots = q_l = 0.$$

Nous aurons

$$(11) \qquad \chi_i(0) = \sum_{\mu=1}^{k} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\mu} \right\} [p_\mu]_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l),$$

où $\left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\mu} \right\}$ désigne la valeur de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\mu}$ pour un certain sytème de valeurs des u, v appartenant au domaine (3) et $[p_\mu]_0$ est la valeur de $[p_\mu]$ pour $q_1 = \ldots = q_l = 0$. Or $\left| \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\mu} \right\} \right|$ est $<$ C par définition de C [*voir* formule (9)]. Les équations (11) nous donnent donc en tenant compte de (8)

$$\sum_{i=1}^{l} |\chi_i(0)| \leqq l C \sqrt{k} \sqrt{\sum_{\mu=1}^{k} [p_\mu]_0^2} \leqq l C \sqrt{k} \frac{\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{N}} \gamma,$$

d'où

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{l} |\chi_i(0)| \leqq l \sigma \gamma, \qquad \sigma = \frac{\sqrt{\delta} \varepsilon}{2\sqrt{l}\sqrt{Q}}.$$

Introduisons maintenant les quantités $\omega_1, \ldots, \omega_l$ appartenant au domaine

$$(13) \qquad -\sigma\gamma \leqq \omega_\rho \leqq \sigma\gamma \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, l).$$

On a alors toujours

$$\sum_{\rho=1}^{l} |\omega_\rho| \leqq l \sigma \gamma,$$

par conséquent

$$\sum_{\nu=1}^{l} [\chi_\nu(0) - \omega_\nu]^2 \leqq \left[\sum_{\nu=1}^{l} |\chi_\nu(0)| + \sum_{\nu=1}^{l} |\omega_\nu| \right]^2 \leqq 4 l^2 \sigma^2 \gamma^2$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$(14) \qquad \sum_{\nu=1}^{l} [\chi_\nu(0) - \omega_\nu]^2 \leqq \frac{l \varepsilon^2 \delta \gamma^2}{Q};$$

d'où la conclusion suivante : les l fonctions $\chi_\nu(q) - \omega_\nu$ sont données dans le domaine défini par les inégalités (5) et (13), elles y sont continues et admettent, dans le domaine (7), des dérivées du premier ordre par rapport aux q également continues. En désignant par R le déterminant fonctionnel de ces l fonctions par rapport aux q et par P un mineur quelconque du premier ordre du déterminant R, on a $\left|\frac{P}{R}\right| < \lambda$, cette inégalité ayant toujours un sens déterminé, puisque R ne s'annule pas. Les valeurs que prend la dérivée

$$\frac{\partial(\chi_\nu - \omega_\nu)}{\partial q} = \frac{\partial \chi_\nu}{\partial q},$$

en deux points du domaine (7), diffèrent de moins de $\varepsilon = \frac{1}{3\lambda l^2}$. Enfin ces l fonctions satisfont aux relations (14).

Nous avons, par conséquent, en vertu de théorème du paragraphe précédent, la proposition suivante :

A tout système de valeurs ω, *pris dans le domaine* (13), *et à toute valeur de* t *de l'intervalle admis correspond un système de quantités* q *appartenant au domaine* (7) *et satisfaisant aux relations*

$$\chi_\nu(q) = \omega_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, l), \tag{15}$$

ce système étant d'ailleurs l'unique dans le domaine (5) *qui satisfasse aux équations* (15).

Le théorème énoncé au début du présent paragraphe se trouve ainsi démontré. En effet, σ ne dépend que du tableau des quantités a et des fonctions φ; par conséquent, le domaine (13) a bien le caractère imposé au domaine des quantités ω dans l'énoncé du théorème en question. Si ensuite on choisit un système de valeurs ω du domaine (13) et une valeur de t, il existe, d'après ce qui précède, dans le domaine (7), un système de quantités q satisfaisant aux équations (15). Si l'on complète alors ce système de quantités q par le système $p_1 = [p_1]$, ..., $p_k = [p_k]$, et si l'on prend le système q, $[p]$ pour système initial correspondant à la valeur choisie de t, la solution correspondante restera dans le domaine (5, 6) pour toutes les valeurs plus grandes de t. Enfin, en vertu de (15), nous aurons

$$\chi_\nu = \varphi_\nu([p_1], \ldots, [p_k], q_1, \ldots, q_l) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, l).$$

Le système de valeurs initiales ainsi choisi satisfait donc bien à toutes les conditions de notre théorème. Il est aussi facile de voir que ce système est l'unique système satisfaisant à ces conditions. En effet, en admettant l'existence d'un second système $p'_1, \ldots, p'_k, q'_1, \ldots, q'_l$, jouissant des mêmes propriétés, on aurait d'abord

$$p'_1 = [p_1]', \qquad \ldots, \qquad p'_k = [p_k]'$$

où $[p_1]', \ldots, [p_k]'$ désignent les valeurs des fonctions $[p_1], \ldots, [p_k]$ pour $q'_1, \ldots, q'_l$ et la valeur choisie de t. Nous aurions ensuite

$$\omega_\nu = \varphi_\nu(p'_1, \ldots, p'_k, q'_1, \ldots, q'_l) = \varphi_\nu([p_1]', \ldots, [p_k]', q'_1, \ldots, q'_l) = \chi'_\nu$$
$$(\nu = 1, \ldots, l)$$

où χ'_ν désigne la valeur de χ_ν pour $q'_1, \ldots, q'_l$ et la valeur choisie de t, d'où $q_1 = q'_1, \ldots, q_l = q'_l$ et, par conséquent, aussi

$$[p_1]' = [p_1], \qquad \ldots \qquad [p_k]' = [p_k].$$

Les deux systèmes (p, q) coïncident donc.

18. *Sur quelques équations différentielles contenant des paramètres.* — Soit donné le système suivant d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = L_i(x) + \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où les L_i sont des expressions linéaires et homogènes en $x_1, \ldots, x_n$, ayant même forme que celles qui figurent dans les seconds membres des équations (1) du n° 8 et répondant aux mêmes conditions; les ξ_i sont des fonctions uniformément continues de $t, x_1, \ldots, x_n$ et de certains paramètres $\alpha, \beta, \ldots$ dans le domaine défini de la façon suivante :

$$(2) \qquad \text{I. } t \text{ arbitraire}, \quad \text{II. } m_i < x_i < n_i, \quad \text{III. } a < \alpha < A, \quad b < \beta < B, \ldots$$

On suppose aussi que les ξ_i restent dans le domaine (2), entre des limites finies; que dans ce domaine les dérivées $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ existent, sont finies et continues par rapport à $t, x, \alpha, \beta, \ldots$ et satisfont aux conditions $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| \overline{\overline{<}} \frac{\varkappa}{\sqrt{n}}$ où $\varkappa > 0$ est le nombre introduit dans le n° 11 et qui ne dépend que du tableau des quantités a.

Supposons maintenant que, pour tout système de paramètres pris dans le domaine (2, III), il existe une solution des équations (1) restant dans le domaine (2, II) pour toutes les valeurs de t. Une pareille solution est alors aussi l'unique solution de cette nature pour le système considéré de paramètres, comme cela résulte du théorème auxiliaire du n° 11. En effet, soient

$$u_i \quad \text{et} \quad u_i + v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

deux pareilles solutions; les équations (1) donnent alors

$$\frac{dv_i}{dt} = \mathrm{L}_i(v) + w_i,$$

où, en vertu des hypothèses faites,

$$|w_i| \overline{\overline{<}} \varkappa \sqrt{\sum_{\rho=1}^{n} v_\rho^2};$$

d'où, en vertu du théorème mentionné,

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 0.$$

Nous désignerons, dans ce qui suit, par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les éléments de la solution que nous venons de définir.

En posant

$$x_i(t, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta, \ldots) - x_i(t, \alpha, \beta, \ldots) = z_i,$$

nous aurons

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dz_i}{dt} = \mathrm{L}_i(z) + \xi_i(x + z, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta, \ldots) - \xi_i(x, \alpha, \beta, \ldots) \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

ou bien

$$(4) \qquad \frac{dz_i}{dt} = \mathrm{L}_i(z) + \zeta_i + \vartheta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$\zeta_i = \xi_i(x + z, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta, \ldots) - \xi_i(x, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta \ldots),$$
$$\vartheta_i = \xi_i(x, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta, \ldots) - \xi_i(x, \alpha, \beta, \ldots).$$

En vertu des hypothèses faites, on a

$$|\zeta_i| \overline{\gtrless} \varkappa \sqrt{\sum_{\rho=1}^{n} z_\rho^2}.$$

Si maintenant nous admettons que $|\vartheta_i|$ a une limite supérieure d pour toutes les valeurs de t, d étant un nombre positif, nous aurons, en vertu du théorème auxiliaire du n° **11**, $|z_i| < ed\,(i = 1, 2, \ldots, n)$, e étant > 0 et ne dépendant que du tableau des quantités a.

En tenant compte des hypothèses faites, il résulte de ce qui vient d'être dit *que les fonctions* $x_i(t, \alpha, \beta, \ldots)$ *sont des fonctions uniformément continues de* t, α, β, ...

Supposons maintenant encore que les dérivées $\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ existent, qu'elles soient des fonctions continues de t, x, α, β, ..., et qu'elles soient comprises entre des limites finies. Soit, par exemple, $\left|\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}\right| < G$. En supposant $\Delta\beta = \ldots = 0$ et $\Delta\alpha \gtrless 0$, on a alors

$$|\xi_i(x, \alpha + \Delta\alpha, \beta, \ldots) - \xi_i(x, \alpha, \beta, \ldots,)| < G|\Delta\alpha|.$$

Donc, dans ce cas

$$|z_i| < eG|\Delta\alpha|,$$

d'où

$$\left|\frac{z_i}{\Delta\alpha}\right| < eG.$$

Posons

$$\frac{z_i}{\Delta\alpha} = v_i,$$

Nous aurons alors

$$(5)\quad \frac{dv_i}{dt} = L_i(v) + \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho} v_\rho + \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha} + \sum_{\rho=1}^{n} \left[\left(\underline{\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho}} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho}\right) v_\rho + \underline{\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}} - \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}\right],$$

où $\underline{\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho}}$ et $\underline{\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}}$ désignent respectivement les valeurs de $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho}$ et $\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}$ pour

$$x_\mu + \theta_i v_\mu \Delta\alpha,\ \alpha + \theta_i \Delta\alpha \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n;\ 0 < \theta_i < 1).$$

Considérons maintenant une suite de quantités $\Delta\alpha$ non nulles et tendant vers zéro et la suite de systèmes correspondants de valeurs des v. Ces systèmes, formés pour une valeur déterminée

t_0 de t, doivent avoir un point d'accumulation puisqu'on a toujours $|v| < eG$.

Cela posé, considérons le système suivant d'équations

$$(6) \qquad \frac{du_i}{dt} = L_i(u) + \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho} u_\rho + \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho}$ et $\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}$ sont considérées comme fonctions de t, α, β, ..., qu'on obtient en remplaçant $x_1, \ldots, x_n$ par les éléments

$$x_i(t, \alpha, \beta, \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

de la solution dont il a été question plus haut, ce qui donne pour $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho}$ et $\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}$ des fonctions continues de t, α, β, ...

Une solution $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de ces équations restant entre des limites finies pour toutes les valeurs de t sera l'unique solution de cette nature pour chaque système particulier de paramètres. Cela résulte de la relation $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| \leqq \frac{\varkappa}{\sqrt{n}}$ comme nous l'avons vu au début du présent paragraphe.

Considérons maintenant la solution U des équations (6) dont les éléments ont pour valeurs initiales pour $t = t_0$ les coordonnées du point d'accumulation déterminé plus haut [1]. D'après ce qui précède, on peut trouver des systèmes v aussi voisins qu'on veut du système de valeurs initiales, pour $t = t_0$, de U et correspondant à des valeurs aussi petites qu'on voudra de $|\Delta\alpha|$.

Or en tenant compte de la relation $|v| < eG$ et de la continuité des dérivées des fonctions ξ, nous voyons qu'en choisissant $|\Delta\alpha|$ suffisamment petit on peut rendre la valeur absolue des deux derniers termes de s aussi petite qu'on voudra, du moins pour un intervalle fini mais d'ailleurs aussi grand qu'on voudra de t. Il s'ensuit [2] qu'en choisissant un intervalle fini quelconque de t, on

---

[1] Cette solution s'étend à toutes les valeurs de t. Si l'on ne peut considérer cette remarque comme conséquence immédiate des théorèmes connus de la théorie des équations différentielles linéaires, on la déduira facilement des considérations du Chapitre I. Nous n'insisterons pas davantage, ayant rencontré des cas analogues dans ce qui précède.

[2] *Voir* Lemme, Chap. I, § 1.

peut trouver un système v restant, dans cet intervalle, aussi voisin qu'on veut de la solution U. Il en résulte que les éléments de U satisfont pour toutes les valeurs réelles de t à la condition $|u| \leqq eG$. En effet, si jamais on avait $|u_\rho| > eG$, où ρ est un des indices $1, 2, \ldots, n$, on pourrait trouver un système v suffisamment voisin de U pour qu'on ait aussi $|v_\rho| > eG$, ce qui est impossible.

La solution U reste, d'après ce qui précède, entre des limites finies pour toutes les valeurs de t. Or cette propriété définit complètement la solution des équations (6) pour un système de valeurs données des paramètres α, β, ... Par conséquent il existe un seul point d'accumulation, autrement dit quand $\Delta\alpha$ tend vers zéro les valeurs des v formées pour $t = t_0$ tendent vers des limites parfaitement déterminées et indépendantes de la façon dont $\Delta\alpha$ tend vers zéro. Ces valeurs sont celles des éléments, pour $t = t_0$, de la solution U que nous venons de définir.

En répétant les mêmes raisonnements pour β, etc., nous aurons le théorème suivant : *Les x considérées comme fonctions de t, α, β, ..., admettent des dérivées $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, ... Ces dernières s'obtiennent à l'aide de celles des solutions des équations* (6) (*et d'équations analogues*) *qui restent entre des limites finies* (¹).

Si de plus les dérivées $\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \xi}{\partial \beta}$, ..., $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ sont des fonctions uniformément continues de x, t, α, β, ..., on pourra répéter sur les équations (6) et les équations analogues les raisonnements du début du présent paragraphe, et en conclure que les u ou $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, ..., sont des fonctions uniformément continues de t, α, β, ...

De même si les ξ admettent des dérivées du second ordre par rapport à x, α, β, ..., et si ces dérivées sont des fonctions uniformément continues de x, t, α, β, ..., et restent comprises entre des limites finies, il résulte, de l'application du théorème démontré plus haut aux équations (6) et analogues, que les x admettent aussi

(¹) Pour tout système admis des paramètres, les équations (6) ont une solution déterminée restant entre des limites finies. Cela résulte immédiatement des considérations précédentes. Ces dernières montrent aussi que les éléments d'une pareille solution satisfont aux relations $|u| \leqq eG$.

des dérivées du second ordre par rapport à α, β, ...; que ces dérivées sont des fonctions uniformément continues de t, α, β, ... et sont comprises entre des limites finies. D'une manière générale *si les hypothèses correspondantes sont vérifiées pour toutes les dérivées des ξ jusqu'à l'ordre ν inclusivement, les x admettent des dérivées par rapport à α, β, ..., jusqu'à l'ordre ν inclusivement et ces dérivées sont toutes des fonctions uniformément continues de t, α, β, ..., et restent entre des limites finies.*

CHAPITRE III.

SOLUTIONS REPRÉSENTABLES A L'AIDE DE SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

19. *Première méthode.* — Soit donné le système d'équations

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \mathrm{L}_i(x) + \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où les L_i sont les mêmes expressions linéaires et homogènes en x que celles qui figurent dans les équations (1) du n° 8, les ξ_i sont des fonctions de x_1, x_2, ..., x_n, t données pour toutes les valeurs réelles de t et pour les valeurs des x appartenant à un certain domaine I défini par des conditions du type : $a_i < x_i < b_i$ ou $x_i > a_i$ ou $x_i < b_i$ ou x_i *arbitraire*. Supposons aussi que les dérivées $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ existent et satisfont à la condition $\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right| \overline{\overline{<}} \frac{\varkappa}{\sqrt{n}}$ où $\varkappa$ est le nombre défini au n° 11. De plus, supposons que les ξ_i sont les résultats de la substitution $u_1 = \frac{t}{\alpha_1}$, ..., $u_m = \frac{t}{\alpha_m}$ dans certaines fonctions $\rho_i(x, u_1, \ldots, u_m)$ données pour toutes les valeurs des x du domaine I et pour toutes les valeurs réelles des u comme fonctions uniformément continues des x et des u, périodiques par rapport aux u, de périodes égales à l'unité. α_1, ..., α_m sont des nombres non nuls et tels qu'entre les $\frac{1}{\alpha}$ il n'existe aucune relation linéaire et homogène dont les coefficients soient des nombres entiers.

Supposons enfin qu'il existe une solution des équations (1) restant pour toutes les valeurs de t dans le domaine défini par les inégalités $\gamma_i \overline{\overline{<}} x_i \overline{\overline{<}} \beta_i$ et intérieur au domaine I. Des considérations du n° **11** il résulte alors qu'il n'existe aucune autre solution (différente de la précédente) qui reste, pour toutes les valeurs de t, dans le domaine I et entre des limites finies. Nous désignerons, dans ce qui suit, par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les éléments de la solution que nous venons de définir.

Cela posé, les fonctions

$$y_i = x_i(t+\tau) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \tau = \text{const.})$$

satisfont aux équations

$$\frac{dy_i}{dt} = \mathrm{L}_i(y) + \xi_i(t+\tau, y) \tag{2}$$

où ξ_i se déduit de $\rho_i\left(y, u_1 + \frac{\tau}{\alpha_1}, \ldots, u_m + \frac{\tau}{\alpha_m}\right)$ par la substitution

$$u_1 = \frac{t}{\alpha_1}, \ldots, \qquad u_m = \frac{t}{\alpha_m}.$$

Remarquons qu'on peut remplacer $\frac{\tau}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\tau}{\alpha_m}$ par des nombres $v_1, \ldots, v_m$ différant respectivement des précédents de nombres entiers, ce que nous exprimerons par les symboles suivants

$$\frac{\tau}{\alpha_1} \equiv v_1, \ldots, \frac{\tau}{\alpha_m} \equiv v_m.$$

Rappelons maintenant le théorème suivant [1] : *Étant donnés m nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tels qu'entre leurs inverses il n'existe point de relation linéaire homogène à coefficients entiers et m nombres arbitraires $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_m$ on peut trouver un nombre τ tel que les différences $\frac{\tau}{\alpha_1} - \mathfrak{K}_1, \frac{\tau}{\alpha_2} - \mathfrak{K}_2, \ldots, \frac{\tau}{\alpha_m} - \mathfrak{K}_m$ diffèrent d'aussi peu qu'on voudra de nombres entiers.*

Remarquons en passant que cette proposition dérive du théorème suivant plus général : *Étant données m $(m+1)$ quantités*

$$\begin{array}{ccccc} a_0^1, & a_1^1, & a_2^1, & \ldots, & a_m^1, \\ a_0^2, & a_1^2, & a_2^2, & \ldots, & a_m^2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_0^m, & a_1^m, & a_2^m, & \ldots, & a_m^m, \end{array}$$

[1] *Voir* mon Mémoire *Ueber die Darstellung von Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen*, ..., p. 8.

telles qu'il n'existe point de relation linéaire homogène à coefficients entiers entre les m déterminants du tableau

$$\begin{vmatrix} a_0^1 & a_1^1 & \ldots & a_m^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & \ldots & a_m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^m & a_1^m & \ldots & a_m^m \end{vmatrix}$$

et, d'autre part, m nombres $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_m$ *arbitrairement choisis, on peut trouver* $m+1$ *nombres entiers* $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_m$ *tels qu'on ait*

$$\begin{gathered} n_0 a_0^1 + n_1 a_1^1 + n_2 a_2^1 + \ldots + n_m a_m^1 = \mathfrak{K}_1 + \varepsilon_1, \\ n_0 a_0^2 + n_1 a_1^2 + n_2 a_2^2 + \ldots + n_m a_m^2 = \mathfrak{K}_2 + \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ n_0 a_0^m + n_1 a_1^m + n_2 a_2^m + \ldots + n_m a_m^m = \mathfrak{K}_m + \varepsilon_m, \end{gathered}$$

où les ε *sont aussi petits qu'on voudra.* Pour démontrer ce théorème on peut le ramener à des propositions établies dans mon travail mentionné plus haut. Il est inutile de donner ici cette démonstration.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que les systèmes de quantités $v_1, \ldots, v_m$ définies par les relations

$$\frac{\tau}{\alpha_1} \equiv v_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\tau}{\alpha_m} \equiv v_m,$$

forment (¹), quand τ varie, une multiplicité ayant pour point d'accumulation tout point défini par m coordonnées arbitraires $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_m$ (²).

Remarquons ensuite qu'on a, pour tous les v,

$$|\rho_i(x+z, v) - \rho_i(x, v)| \lesseqgtr \varkappa \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^2}$$

si les $x+z$ et les x appartiennent au domaine I. En effet, si les quantités v forment un système de première catégorie (³), cette

(¹) Nous appellerons ces systèmes v *systèmes de première catégorie.*

(²) Il n'est pas nécessaire que ce point fasse partie de la multiplicité en question.

(³) *Voir* la note (¹) précédente.

relation découle directement des hypothèses faites au début du présent paragraphe. Dans le cas où les quantités v forment un système différent, la relation

$$|\rho_i(x+z, v) - \rho_i(x, v)| > \varkappa \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^2}$$

ne peut avoir lieu non plus, car si cette relation était vérifiée pour un certain système de quantités v, on pourrait trouver des systèmes v de première catégorie aussi voisins qu'on voudrait du précédent et pour lesquels on aurait, d'après ce qui précède,

$$|\rho_i(x+z, v) - \rho_i(x, v)| \overline{\gtrless} \varkappa \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^2},$$

d'où contradiction par suite de la continuité uniforme des fonctions ρ. On a donc aussi, pour toutes les valeurs des u, la relation

$$|\rho_i(x+z, u) - \rho_i(x, u)| \overline{\gtrless} \varkappa \sum_{\mu=1}^{n} |z_\mu|.$$

Formons maintenant les équations suivantes

$$\frac{d\omega_i}{dt} = L_i(\omega) + \eta_i(\omega, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

où les fonctions η_i sont données pour toutes les valeurs de t et pour les valeurs des ω appartenant au domaine I_a obtenu en remplaçant x par ω dans la définition du domaine I, ces fonctions étant les résultats de la substitution

$$u_1 = \frac{t}{\alpha_1}, \qquad \ldots, \qquad u_m = \frac{t}{\alpha_m}$$

dans les fonctions $\rho_i(\omega, u_1 + v_1, \ldots, u_m + v_m)$ où $v_1, \ldots, v_m$ sont des nombres quelconques.

Quelles que soient les valeurs de $v_1, \ldots, v_m$ dans les équations (3) il existe toujours des systèmes v aussi voisins qu'on veut du précédent et pour lesquels les équations (3) admettent une solution s'étendant à toutes les valeurs de t et restant dans le domaine $\gamma_i \overline{\gtrless} \omega_i \overline{\gtrless} \beta_i \, (i = 1, \ldots, n)$ puisqu'une pareille solution existe pour tout système v de première catégorie, comme cela résulte des remarques relatives aux équations (2).

Il s'ensuit que, quelles que soient les valeurs de $v_1, \ldots, v_m$, les équations (3) admettent une solution s'étendant à toutes les valeurs de t et restant dans le domaine $\gamma_i \overline{\gtrless} \omega_i \overline{\gtrless} \beta_i$.

Pour démontrer cette proposition choisissons une suite de systèmes v de première catégorie $S_1, S_2, S_3, \ldots$, tendant vers le système V donné. A chacun de ces systèmes S_p faisons correspondre la solution I_p jouissant des propriétés qui viennent d'être rappelées. Les systèmes de valeurs que prennent, pour une valeur arbitrairement choisie t_0 de t, les éléments ω de ces solutions ont au moins un point d'accumulation $\omega_1^0, \omega_2^0, \ldots, \omega_n^0$ dans le domaine $\gamma_i \overline{\gtrless} \omega_i \overline{\gtrless} \beta_i$. Conservant dans les équations (3) pour les quantités v les valeurs du système V, déterminons-en la solution λ dont les éléments aient pour valeurs initiales $\omega_1^0, \ldots, \omega_n^0$ pour $t = t_0$. En tenant compte de la relation

$$|\rho_i(x+z, u) - \rho_i(x, u)| \overline{\gtrless} \varkappa \sum_{\mu=1}^{n} |z_\mu|,$$

nous voyons qu'une telle solution existe, du moins pour un certain intervalle de valeurs de t renfermant t_0.

Ces mêmes relations nous permettent d'affirmer, d'après le Chapitre I, que si la solution λ ne s'étend pas à toutes les valeurs de t en restant en même temps dans le domaine $\gamma_i \overline{\gtrless} \omega_i \overline{\gtrless} \beta_i$, on peut trouver une valeur t_1 de t telle que cette solution s'étende, entre autres, à l'intervalle t_0, t_1 inclusivement et soit pour $t = t_1$ en dehors du domaine $\gamma_i \overline{\gtrless} \omega_i \overline{\gtrless} \beta_i$. Or cela ne peut avoir lieu. En effet, on peut, d'après ce qui précède, trouver des solutions I_p aussi voisines qu'on veut de λ pour $t = t_0$ et correspondant à des systèmes S_p aussi voisins qu'on veut du système V. On peut donc (*voir* Chap. I, n° 1) trouver une solution I_p qui reste aussi voisine qu'on veut de λ dans tout l'intervalle t_0, t_1 et, par conséquent, parmi les solutions I_p, il y en aurait qui seraient pour $t = t_1$ en dehors du domaine $\gamma_i \leqq \omega_i \leqq \beta_i$, ce qui est en contradiction avec les propriétés des solutions I_p : donc, en définitive, la solution λ existe pour toutes les valeurs de t et reste dans le domaine $\gamma_i \overline{\gtrless} \omega_i \overline{\gtrless} \beta_i$.

Deux solutions de cette nature pour les équations (3) correspondant à deux systèmes différents de quantités v diffèrent aussi peu qu'on voudra l'une de l'autre pourvu que les deux systèmes v diffèrent assez peu entre eux. Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème auxiliaire du n° 11, étant donnée la continuité uniforme des fonctions ρ et les relations

$$|\rho_i(x+z,\ u)-\rho_i(x,\ u)| \overline{\gtrless} \varkappa \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^2}.$$

Il existe par conséquent, pour tout système v arbitrairement choisi, une solution des équations (3) et une seule définie pour toutes les valeurs de t et restant dans le domaine $\gamma_i \overline{\gtrless} \omega_i \overline{\gtrless} \beta_i$. Nous désignerons les éléments de cette solution par

$$\omega_i(t,\ v_1,\ \ldots,\ v_m) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n).$$

Posons maintenant

$$\sigma_i=\omega_i(t+\tau,\ v_1,\ \ldots,\ v_m)$$

où τ désigne un nombre quelconque. Nous aurons

$$(4)\quad \frac{d\sigma_i}{dt}=\mathrm{L}_i(\sigma)+\rho_i\left(\sigma,\ \frac{t+\tau}{\alpha_1}+v_1,\ \ldots,\ \frac{t+\tau}{\alpha_m}+v_m\right) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

La comparaison des équations (3) et (4) conduit aux relations

$$(5)\qquad \omega_i(t+\tau,\ v_1,\ \ldots,\ v_m)=\omega_i\left(t,\ v_1+\frac{\tau}{\alpha_1},\ \ldots,\ v_m+\frac{\tau}{\alpha_m}\right)$$

d'où

$$(6)\qquad \omega_i(t,\ 0,\ \ldots,\ 0)=\omega_i\left(0,\ \frac{t}{\alpha_1},\ \ldots,\ \frac{t}{\alpha_m}\right).$$

Or les $\omega_i(t,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ ne sont évidemment autre chose que les éléments x_i de la solution des équations (1); donc

$$(7)\qquad x_i(t)=\omega_i\left(0,\ \frac{t}{\alpha_1},\ \ldots,\ \frac{t}{\alpha_m}\right).$$

D'autre part, les fonctions $\omega_i(0,\ v_1,\ \ldots,\ v_m)$ sont, d'après ce que nous avons vu, des fonctions continues de $v_1,\ \ldots,\ v_m$ pour toutes les valeurs des v et, par définition, des fonctions périodiques par rapport aux v, de périodes égales à l'unité.

On peut donc développer chacune des fonctions $\omega_i(0,\ v_1,\ \ldots,\ v_m)$

en série (¹) uniformément convergente pour toutes les valeurs des v

$$\omega_{i1} + \omega_{i2} + \omega_{i3} + \ldots, \tag{8}$$

chacun des termes $\omega_{i\nu}$ étant une fonction entière et rationnelle des expressions

$$\cos 2\pi v_\mu, \quad \sin 2\pi v_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Il s'ensuit que *les éléments $x_i(t)$ de la solution définie plus haut peuvent être développés en séries*

$$x_i(t) = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \ldots$$

uniformément convergentes pour toutes les valeurs de t et dont chaque terme est une fonction entière et rationnelle des expressions

$$\cos\left(2\pi \frac{t}{\alpha_\mu}\right), \quad \sin\left(2\pi \frac{t}{\alpha_\mu}\right) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

20. *Seconde méthode.* — On peut simplifier considérablement la démonstration du précédent paragraphe et modifier les hypothèses en se fondant sur les propositions établies dans mon travail cité plus haut.

Conservons les hypothèses faites dans le précédent paragraphe *avant l'introduction des fonctions* ρ et remplaçons les hypothèses qui suivent par les suivantes : *A tout nombre $d > 0$ on peut faire correspondre un nombre $\varepsilon > 0$ tel que*

$$|\xi_i(x, t + \tau) - \xi_i(x, t)|$$

reste toujours inférieur à d si $\frac{\tau}{\alpha_1}, \frac{\tau}{\alpha_2}, \ldots, \frac{\tau}{\alpha_m}$ diffèrent de nombres entiers de moins de ε. Supposons ensuite qu'il existe une solution restant pour toutes les valeurs de t dans le domaine I et entre des limites finies; désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les éléments de cette solution.

Posons maintenant

$$x_i(t + \tau) - x_i(t) = z_i$$

(¹) *Voir* mon travail mentionné plus haut, p. 13.

où τ désigne d'abord une constante arbitraire. Nous aurons alors

$$\frac{dz_i}{dt} = L_i(z) + \xi_i(x+z,\ t+\tau) - \xi_i(x,\ t+\tau) + \xi_i(x,\ t+\tau) - \xi_i(x,\ t)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

En posant

$$u_i = \xi_i(x,\ t+\tau) - \xi_i(x,\ t); \qquad v_i = \xi_i(x+z,\ t+\tau) - \xi_i(x,\ t+\tau),$$

nous aurons

$$|v_i| \overline{\overline{<}} \varkappa \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^2}.$$

Si maintenant on a

$$|u_i| < \delta > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour une certaine valeur de τ et pour toutes les valeurs de t, il s'ensuivra, d'après le n° **11**, que

$$|z_i| < e\,\delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où la quantité positive e ne dépend que du tableau des quantités a.

Il s'ensuit qu'à tout nombre $D > 0$, on peut faire correspondre un nombre $E > 0$ tel qu'on ait

$$|x_i(t+\tau) - x_i(t)| < D \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

si $\frac{\tau}{\alpha_1}, \frac{\tau}{\alpha_2}, \ldots, \frac{\tau}{\alpha_m}$ diffèrent de nombres entiers de moins de E.

Par conséquent [1], les fonctions $x_i(t)$ sont développables en séries trigonométriques

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \ldots,$$

chaque terme étant fonction entière et rationnelle de

$$\cos\left(2\pi\frac{t}{\alpha_\mu}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(2\pi\frac{t}{\alpha_\mu}\right) \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

et la série uniformément convergente pour toutes les valeurs de t.

Enfin, indiquons encore une modification des hypothèses. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que, pour toutes les valeurs de t et pour les valeurs admises des x, on pouvait rendre la quan-

---

[1] *Voir* mon travail cité plus haut, p. 3.

tité $|\xi(x, t+\tau)-\xi(x, t)|$ aussi petite qu'on voudrait, à condition de choisir $\frac{\tau}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\tau}{\alpha_m}$ suffisamment voisins de nombres entiers. Cette hypothèse est vérifiée par la fonction ξ, si l'on peut les développer en série $g_1+g_2+g_3+\ldots$ qui serait uniformément convergente pour toutes les valeurs de t et pour les valeurs admises des x et dont chaque terme serait une expression entière et rationnelle en $\cos\left(2\pi\frac{t}{\alpha_\mu}\right)$ et $\sin\left(2\pi\frac{t}{\alpha_\mu}\right)$, à coefficients fonctions des x seulement. On suppose que la fonction ξ reste entre des limites finies (cela résulte d'ailleurs de nos hypothèses si I est un domaine fini).

Pour le prouver, choisissons un nombre $d>0$ quelconque et déterminons un nombre N tel qu'on ait

$$|g_{N+1}+g_{N+2}+\ldots|<\frac{d}{4},$$

ce qui est possible, d'après ce qui précède. Écrivons ensuite la somme $g_1+g_2+\ldots+g_N$ sous la forme

$$G=\sum A\cos\alpha t+\sum B\sin\beta t$$

où les α et β sont des sommes des termes du type $\nu\frac{2\pi}{\alpha_\mu}$ (ν entier) et les A et B sont fonctions des x. De plus, on a $\alpha \overline{\gtrless} 0$, $\beta>0$ et tous les α sont différents entre eux, ainsi que les β. ξ restant entre des limites finies, il en est de même de

$$G=g_1+g_2+\ldots+g_N.$$

Désignons maintenant par a une des quantités α et formons l'expression

$$\frac{1}{t}\int_0^t G\cos at\,dt.$$

Cette expression tend évidemment vers une limite déterminée si t tend vers $+\infty$, les x étant considérées comme constantes. Cette limite, dans le cas $a=0$, est égale au coefficient du terme de G qui contient $\cos at$ et, dans le cas $a>0$, est la moitié du coefficient correspondant.

De même, en désignant par b une des quantités β et formant l'expression

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{G}\sin bt\,dt,$$

on remarquera que, lorsque t tend vers $+\infty$, cette expression tend vers une limite égale à la moitié du coefficient de $\sin\beta t$ dans G. La somme G restant entre des limites finies, il en est de même des limites que nous venons de définir et, par conséquent, aussi des fonctions A, B pour toutes les valeurs admises des x.

Nous avons maintenant

$$|\xi(x, t+\tau)-\xi(x, t)| < \left|\sum \mathrm{A}[\cos\alpha(t+\tau)-\cos\alpha t]\right| \\ + \left|\sum \mathrm{B}[\sin\beta(t+\tau)-\sin\beta t]\right| + \frac{d}{2}.$$

Or, on peut rendre les quantités

$$|\cos\alpha(t+\tau)-\cos\alpha t| \quad \text{et} \quad |\sin\beta(t+\tau)-\sin\beta t|$$

aussi petites qu'on voudra pourvu que les quantités $\frac{\tau}{\alpha}$ diffèrent suffisamment peu de nombres entiers, ce qui résulte immédiatement de la forme des α et β, et comme de plus les quantités A et B sont comprises entre des limites finies, il s'ensuit que le premier terme du second membre peut être rendu inférieur à $\frac{d}{2}$ pour toutes les valeurs de t et pour les valeurs admises des x.

L'exactitude de notre remarque est donc évidente.

21. *Type de séries employées.* — Reprenons les hypothèses du n° 19 et supposons de plus que les fonctions $\rho(x, u)$ admettent des dérivées par rapport aux u et aux x jusqu'à un certain ordre ν inclusivement, et que ces dérivées soient des fonctions continues pour toutes les valeurs des u et pour les valeurs admises des x.

On a évidemment toujours

$$\left|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right| \leqq \frac{\varkappa}{\sqrt{n}}.$$

Pour les points u de première catégorie, cette relation résulte immédiatement des hypothèses. Je dis de plus qu'en tout autre point u, l'inégalité $\left|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right| > \frac{\varkappa}{\sqrt{n}}$ ne peut être vérifiée non plus. En effet, si cette inégalité était vérifiée en un certain point (x, u) elle le serait aussi aux points suffisamment voisins de celui-ci, par suite de la continuité de $\frac{\partial\rho}{\partial x}$, et ceci est incompatible avec le fait que, dans le voisinage aussi rapproché qu'on voudra de tout point (x, u), on peut trouver des points pour lesquels les u forment un système de première catégorie.

Portons maintenant de nouveau notre attention sur les équations (3) du n° 19 et définissons des domaines pour les quantités ω et ν. Soit Ω un domaine de variabilité des quantités ω, défini par les inégalités

$$\Gamma_i < \omega_i < \mathrm{B}_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

ses limites étant choisies de façon qu'il contienne le domaine

$$\gamma_i \lesseqgtr \omega_i \lesseqgtr \beta_i$$

et qu'il soit (limites comprises) à l'intérieur du domaine I_a. Appelons V le domaine des quantités v, défini par les inégalités

$$\mathrm{M}_\mu < v_\mu < \mathrm{N}_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

avec la condition $|\mathrm{M}_\mu - \mathrm{N}_\mu| > 1$. Les équations (3) du n° 19 remplissent alors, relativement au domaine Ω, V, *t arbitraire*, des conditions analogues à celles que les équations (1) du n° 18 remplissent relativement au domaine (2) du même paragraphe. Les quantités $v_1, \ldots, v_m$ jouent le rôle de paramètres.

Nous avons donc, relativement aux fonctions désignées dans le n° 19 par $\omega_i(t, v_1, \ldots, v_m)$, la proposition suivante : *Les fonctions ω_i sont uniformément continues pour toutes les valeurs de t et des v; elles admettent des dérivées par rapport aux v jusqu'à l'ordre ν inclusivement, lesquelles sont aussi des fonctions uniformément continues de t et des v et restent entre des limites finies pour toutes les valeurs de t et des v.*

Remarquons que cette proposition s'établit pour les valeurs des v appartenant au domaine V et s'étend ensuite à toutes les valeurs des v grâce à la périodicité des fonctions ω_i

En particulier, les fonctions $\omega_i(0, v_1, \ldots, v_m)$ ont des dérivées par rapport aux v jusqu'à l'ordre ν inclusivement. Elles sont uniformément continues pour toutes les valeurs des v et périodiques de périodes égales à l'unité. Si $\nu \gtreqless 2m$ [1], on peut développer les fonctions $\omega_i(0, v_1, \ldots, v_m)$ en séries trigonométriques absolument et uniformément convergentes pour toutes les valeurs des v. Ces séries ont la forme de séries de Fourier à plusieurs variables, chaque terme étant de la forme

$$A \cos 2\pi(\nu_1 v_1 + \eta_1) \cos 2\pi(\nu_2 v_2 + \eta_2) \ldots \cos 2\pi(\nu_m v_m + \eta_m),$$

où les ν sont des nombres entiers positifs ou nuls et les $\eta = 0$ ou $\frac{1}{4}$.

Les relations $x_i(t) = \omega_i\left(0, \frac{t}{\alpha_1}, \ldots, \frac{t}{\alpha_m}\right)$ montrent alors qu'on peut développer les $x_i(t)$ en séries trigonométriques du type

$$\sum A \cos 2\pi\left(\nu_1 \frac{t}{\alpha_1} + \eta_1\right) \ldots \cos 2\pi\left(\nu_m \frac{t}{\alpha_m} + \eta_m\right),$$

absolument et uniformément convergentes pour toutes les valeurs de t. Ces séries se déduisent des précédentes par la substitution

$$v_1 = \frac{t}{\alpha_1}, \qquad \ldots, \qquad v_m = \frac{t}{\alpha_m}.$$

Les nouvelles hypothèses introduites au début du présent paragraphe peuvent elles aussi être modifiées en partant d'une proposition généralisant les considérations de la page 19 de mon travail mentionné plus haut. Cependant, comme la démonstration de cette proposition est relativement longue et m'entraînerait à des recherches d'un caractère tout différent de celles qui précèdent, je préfère ne pas exposer ici la modification en question.

22. *Du théorème relatif aux équations différentielles du Chapitre III.* — Nous ferons dans ce paragraphe une remarque relative aux équations (1) du n° **19**. Soient donc données les équations

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = L_i(x) + \xi_i(x, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous supposerons remplies les conditions posées dans le n° **19**

---

[1] Bornons-nous ici à cette condition qu'il serait probablement possible de généraliser sous certains rapports. *Voir* mon travail mentionné plus haut, page 17.

avant l'introduction des fonctions ρ. Supposons ensuite qu'il existe une solution $[x]$ donnée pour toutes les valeurs de t et restant toujours entre des limites finies.

Soient maintenant $\eta_i(x, t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ n fonctions des x et de t données pour toutes les valeurs des x du domaine I et pour l'intervalle de t défini par l'inégalité $t > \tau$, où τ est un nombre déterminé. Supposons que, quelle que soit la quantité arbitraire d, on ait, pour des valeurs suffisamment grandes de t, $|\eta| < d$ et cela quelles que soient les valeurs des x.

Formons maintenant les équations

$$(2) \qquad \frac{dy_i}{dt} = L_i(y) + \xi_i(y, t) + \eta_i(y, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

S'il existe, du moins pour des valeurs suffisamment grandes de t, une solution $[y]$ de ces équations restant entre des limites finies, cette solution tend asymptotiquement vers la solution $[x]$ quand t croît indéfiniment.

Pour le prouver, désignons par x les éléments de la solution $[x]$ et par y ceux de la solution $[y]$ et posons $x_i = y_i + z_i$. Nous aurons alors, pour des valeurs suffisamment grandes de t,

$$(3) \quad \frac{dz_i}{dt} = L_i(z) + \xi_i(y+z, t) - \xi_i(y, t) - \eta_i(y, t) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Or nous avons, par hypothèse,

$$|\xi_i(y+z, t) - \xi_i(y, t)| \leqq \varkappa \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^2};$$

de plus, étant donné un nombre positif d arbitrairement choisi, on a, pour des valeurs suffisamment grandes de t, $|\eta_i(t)| < d$; par conséquent, pour des valeurs suffisamment grandes de t, on a, puisque les z restent entre des limites finies, $|z_i| < e\,d$ où $e > 0$ ne dépend que du tableau des quantités a, comme cela résulte du théorème auxiliaire du n° **11**. Notre proposition est ainsi démontrée.

23. Des résultats établis dans le présent Chapitre et de ceux du Chapitre précédent résulte le théorème suivant :

Soient données les équations

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = L_i(x) + \xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ayant la même forme que les équations (1) *du n° 8; supposons remplies pour toutes les valeurs de t les conditions posées dans le Chapitre II. Supposons, de plus, que les* ξ_i *résultent de la substitution* $u_1 = \frac{t}{\alpha_1}, \ldots, u_m = \frac{t}{\alpha_m}$ *dans des fonctions*

$$\rho_i(x, u_1, \ldots, u_m)$$

continues pour toutes les valeurs des u et pour celles des x appartenant au domaine $-\gamma < x_i < \gamma$, *périodiques par rapport aux u de périodes égales à l'unité. Enfin supposons que* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *soient des nombres non nuls et tels qu'entre leurs inverses il n'existe point de relation linéaire et homogène à coefficients entiers.*

Si le degré de petitesse, mentionné dans le n° 8, est choisi convenablement, il existe une solution des équations (1) et une seule définie pour toutes les valeurs de t et restant toujours dans le domaine $-\gamma < x_i < \gamma$; les éléments de cette solution sont développables en séries trigonométriques

$$(2) \qquad x_i(t) = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

uniformément convergentes pour toutes les valeurs de t, dont chaque terme est une expression entière et rationnelle en

$$(3) \qquad \cos 2\pi \frac{t}{\alpha_\mu}, \quad \sin 2\pi \frac{t}{\alpha_\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m).$$

Si de plus les fonctions ρ ont des dérivées continues par rapport aux x et aux u jusqu'à l'ordre ν inclusivement, ν étant $\gtreqless 2m$, on peut mettre chaque élément $x_i(t)$ de la solution sous la forme

$$(4) \qquad x_i(t) = \sum A \cos 2\pi\left(\nu_1 \frac{t}{\alpha_1} + \eta_1\right) \ldots \cos 2\pi\left(\nu_m \frac{t}{\alpha_m} + \eta_m\right)$$

où les $\nu \gtreqless 0$ sont des nombres entiers, les η nuls ou $= \frac{1}{4}$; ces séries sont absolument et uniformément convergentes pour toutes les valeurs de t.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS.

24. *De quelques problèmes de Mécanique. Sons résultants.* — J'examinerai, dans ce Chapitre, quelques applications [1] de la théorie exposée plus haut.

Un grand nombre d'exemples sont fournis par les questions de Mécanique où se rencontre la *dispersion de l'énergie*. Soit, par exemple, donné un système mécanique à un degré de liberté. On rencontre alors souvent l'équation suivante

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\mathfrak{K}\frac{d\varphi}{dt} + p\varphi = \psi\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dt}, t\right) \tag{1}$$

où $\mathfrak{K} > 0$ et $p > 0$ sont des constantes et ψ réunit les termes correctifs et ceux relatifs aux perturbations. Supposons que la fonction $\psi(\varphi, \chi, t)$ soit donnée dans le domaine (A), $\alpha < \varphi < \beta$, $\alpha_1 < \chi < \beta_1$ renfermant le point (0, 0) et pour toutes les valeurs de t et qu'elle admette des dérivées $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial\psi}{\partial\chi}$ qui soient, ainsi que la fonction ψ, continues par rapport à φ, χ, t. Supposons ensuite que les valeurs absolues de ces dérivées soient inférieures à Δ_1 pour $|\varphi| < \gamma$, $|\chi| < \gamma$ et qu'on ait $|\psi(0, 0, t)| < \Delta_2\gamma$ où γ est un nombre positif, le domaine $|\varphi| < \gamma$, $|\chi| < \gamma$ étant, limites comprises, intérieur à (A) et où Δ_1, Δ_2 sont des nombres positifs ne dépendant que des quantités $\mathfrak{K}$ et p et que nous nous réservons le droit de choisir convenablement.

En remplaçant l'équation (1) par le système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= -2\mathfrak{K}\chi - p\varphi + \psi(\varphi, \chi, t), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \chi, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

et en choisissant convenablement Δ_1, Δ_2 nous serons ramenés au cas défini au début du Chapitre II. Le tableau des quantités a

---

[1] *Voir* dans l'Introduction les remarques relatives à ces applications.

est ici

$$\begin{matrix} -2\mathfrak{K}, & -p, \\ 1, & 0, \end{matrix}$$

de sorte que les racines de l'équation caractéristique

$$-\mathfrak{K} \pm \sqrt{-p+\mathfrak{K}^2}$$

sont toutes à partie réelle négative.

En vertu des théorèmes généraux établis précédemment, nous avons donc la proposition suivante : *Il existe une solution* Φ *de l'équation* (1) *et une seule donnée pour toutes les valeurs de* t *et pour laquelle on ait* $-\gamma < \varphi < \gamma$, $-\gamma < \frac{d\varphi}{dt} < \gamma$. *Si, pour une valeur quelconque de* t *on choisit les valeurs initiales* φ_0 *et* $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$ *suffisamment petites en valeurs absolues la solution correspondante reste à l'intérieur du domaine* $-\gamma < \varphi < \gamma$, $-\gamma < \frac{d\varphi}{dt} < \gamma$ *pour toutes les valeurs plus grandes de* t *et tend asymptotiquement vers la solution* Φ *quand* $t = +\infty$.

Si l'on suppose de plus que t entre sous forme trigonométrique (¹) dans $\psi(\varphi, \chi, t)$ il en résultera que *la solution* Φ *peut être représentée par une série trigonométrique uniformément convergente pour toutes les valeurs de* t.

Passons maintenant à un cas plus particulier encore en appliquant notre théorie à une question d'acoustique.

Helmholtz, dans sa théorie des sons résultants (²), part de l'équation suivante :

$$(3) \qquad -m\frac{d^2x}{dt^2} = ax + bx^2 + f\sin(pt) + g\sin(qt+c)$$

où a est > 0. Il pose

$$f = \varepsilon f_1, \qquad g = \varepsilon g_1$$

et dit que l'équation (3) admet l'intégrale

$$x = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \ldots,$$

(¹) *Voir* dans l'Introduction le sens de cette expression.

(²) *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. I, p. 260.

x_1, x_2, ... se déduisant successivement des relations

$$\begin{aligned}
mx_1'' + ax_1 &= -f_1 \sin pt - g_1 \sin(qt + c),\\
mx_2'' + ax_2 &= -bx_1^2,\\
mx_3'' + ax_3 &= -2bx_1, x_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ce dernier système s'intègre de façon que l'intégrale (4) se présente sous forme de série trigonométrique ayant pour arguments les multiples entiers de pt et qt. Les arguments $(p+q)t$, $(p-q)t$ donnent alors les termes correspondant aux sons résultants de l'ordre le plus inférieur.

On peut objecter que l'existence de l'intégrale du type indiqué par Helmholtz n'a pas été établie jusqu'ici. L'équation de Helmholtz peut être comparée avec celle (citée dans l'Introduction) qui se rencontre dans la Mécanique céleste et a été étudiée par M. Poincaré. Mais M. Poincaré démontre l'existence d'une intégrale trigonométrique seulement pour $\alpha > 0$ (si le nombre d'arguments est plus grand que 1), et ce cas ne correspond cependant pas à l'équation (3) avec $a > 0$. En tout cas, je n'ai pas connaissance qu'une démonstration analogue pour l'équation (3) ait été donnée.

Ensuite il y a lieu de se demander pourquoi, si l'on admet l'existence de l'intégrale ci-dessus, il faut choisir cette intégrale précisément. Je ne pense pas qu'on puisse y répondre en s'appuyant sur notre équation seulement. Évidemment, on suppose implicitement des forces d'amortissement et l'on conclut par analogie avec les cas où le son propre au système disparaît petit à petit par suite de l'amortissement et où il ne faut tenir compte que d'arguments correspondant aux forces extérieures.

Mais précisément alors, en tenant compte des résistances (par tradition, il est vrai), on peut trouver une base solide pour la théorie, car si l'on ajoute, au second membre de l'équation (3), le terme $2q\frac{dx}{dt}$ $(q > 0)$ [1], l'équation ainsi obtenue appartient à la catégorie indiquée plus haut, si les termes correspondant aux forces extérieures sont suffisamment petits en valeur absolue. Une

[1] Il résulte d'ailleurs de ce qui précède, qu'on pourrait introduire encore d'autres termes correctifs d'une nature très générale.

intégrale peut alors être représentée sous forme de série trigonométrique. Si l'on se borne à des élongations et à des vitesses initiales suffisamment petites, toute autre solution tend vers la précédente quand t croît indéfiniment.

25. *Du mouvement d'un système mécanique soumis à des forces dont certaines dérivent d'un potentiel, au voisinage d'une position où le potentiel est minimum. Deux types d'hypothèses.* — Comme autre exemple étudions le mouvement, sous l'influence de forces perturbatrices, d'un système mécanique autour de la position où le potentiel est minimum.

Nous introduirons sous deux formes différentes les hypothèses que nous ferons ici, en distinguant ces deux cas par les chiffres I et II.

Supposons que la position du système soit définie par n paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Supposons que la fonction de forces V ainsi que ses dérivées du premier et du second ordre soient données comme fonctions uniformes et continues de $u_1, \ldots, u_n$ dans le voisinage de la position o, o, ..., o défini par les inégalités

$$(1) \qquad a_i < u_i < b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons que V soit minimum pour $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$, de sorte qu'en représentant V par la formule de Taylor les termes du premier ordre s'évanouissent et ceux du second ordre donnent une forme quadratique définie positive.

Supposons la force vive T donnée par l'expression

$$(2) \qquad 2\mathrm{T} = \sum_{ik} \mathrm{A}_{ik} u'_i u'_k \qquad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{matrix} \qquad \mathrm{A}_{ik} = \mathrm{A}_{ki}\right),$$

où les A_{ik} et leurs dérivées du premier et du second ordre soient des fonctions uniformes et continues de $u_1, \ldots, u_n$ dans le domaine (1). Nous désignerons par I le cas où l'expression (2) est donnée pour les valeurs des u appartenant au domaine (1) et pour celles de u'_1, $u'_2, \ldots, u'_n$ appartenant au domaine

$$(3) \qquad a'_i < u'_i < b'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

contenant le point o, o, ..., o et par II celui où l'expression (2) est donnée pour les u_i du domaine (1) et pour toutes les valeurs des u'_i. Supposons que, dans les deux cas, T s'annule pour

$$u'_1 = u'_2 = \ldots = u'_n = 0.$$

Formons maintenant les équations de Lagrange

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u'_i} = \frac{\partial(T+V)}{\partial u_i} + U_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les U_i correspondent aux forces perturbatrices. Supposons que dans le cas I les U_i soient fonctions de t, $u_1, \ldots, u_n, u'_1, \ldots, u'_n$ pour les u du domaine (1), pour les u' du domaine (3) et pour toutes les valeurs de t et que, dans le cas II, les U_i soient fonctions des mêmes variables pour les u du domaine (1) et pour toutes les valeurs des u' et de t et qu'elles restent, pour toutes ces valeurs des u, u', t entre des limites finies. Supposons ensuite que, dans les deux cas, les fonctions U_i admettent des dérivées du premier ordre par rapport à $u_1, \ldots, u_n, u'_1, \ldots, u'_n$ qui soient, ainsi que les U_i, des fonctions continues des u, u', t. Enfin, réservons-nous le droit d'assigner aux $|U_i^0|$ (l'indice o indique la valeur pour $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u'_1 = \ldots = u'_n = 0$) et aux $\left|\frac{\partial U_i}{\partial u_k}\right|$, $\left|\frac{\partial U_i}{\partial u'_k}\right|$ [pour les valeurs des u du domaine (1), celles des u' du domaine (3) et pour toutes les valeurs de t dans le cas I ou bien pour toutes les valeurs de t et celles des u, u' de tout domaine

$$(5) \qquad -g < u_i < +g, \qquad -g < u'_i < +g \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

qui est situé, en tant qu'il s'agit des u, à l'intérieur du domaine (1)] un degré de petitesse dépendant dans le cas I de la nature de T et de V et dans le cas II de la nature de ces mêmes fonctions et aussi des limites finies entre lesquelles restent les U_i.

Remplaçons le système d'équations (4) par celui qu'on obtient en considérant $u'_1, \ldots, u'_n$ comme nouvelles variables et en le complétant par les relations

$$\frac{du_1}{dt} = u'_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{du_n}{dt} = u'_n.$$

Nous aurons

$$(6) \quad A_{\mu 1}\frac{du'_1}{dt} + A_{\mu 2}\frac{du'_2}{dt} + \ldots + A_{\mu n}\frac{du'_n}{dt} = \frac{\partial V}{\partial u_\mu} + W_\mu + U_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

où les W_μ sont des formes homogènes du second degré par rapport aux u' dont les coefficients sont des fonctions linéaires homogènes à coefficients constants des dérivées du premier ordre des quantités A_{ik}.

On peut résoudre les équations (6) par rapport à $\frac{du'_1}{dt}, \ldots, \frac{du'_n}{dt}$, puisque le déterminant A des coefficients des membres de gauche ne s'annule pas. Nous obtenons ainsi

$$\frac{du'_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\alpha_{\mu i}}{A}\left(\frac{\partial V}{\partial u_\mu} + W_\mu + U_\mu\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

où $\alpha_{\mu i}$ désigne le mineur correspondant au terme $A_{\mu i}$ dans le déterminant A. Les $\frac{\alpha_{\mu i}}{A}$ sont des fonctions continues de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et admettent des dérivées du premier et du second ordre également continues.

Écrivons maintenant nos équations sous la forme suivante

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= u'_i, \\ \frac{du'_i}{dt} &= C_{i1}u_1 + C_{i2}u_2 + \ldots + C_{in}u_n + R_i + S_i, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} C_{i\nu} &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\alpha^0_{\mu i}}{A^0} \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_\mu \partial u_\nu}, \\ R_i &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\alpha_{\mu i}}{A}\left(\frac{\partial V}{\partial u_\mu} + W_\mu\right) - C_{i1}u_1 - C_{i2}u_2 - \ldots - C_{in}u_n, \\ S_i &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\alpha_{\mu i}}{A} U_\mu, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

où l'indice o indique la valeur pour $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$. Les R_i sont des fonctions continues des u et u' et ont des dérivées continues du premier ordre par rapport aux u et u'. Ces dérivées, ainsi que les R_i, s'annulent pour

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u'_1 = \ldots = u'_n = 0.$$

Les fonctions R_i ne dépendent que de la nature des fonctions T et V. Les S_i sont fonctions continues des u, u', t et il en est de même des dérivées du premier ordre par rapport aux u et u'.

Formons maintenant l'équation qui, dans la suite, va jouer le rôle de l'équation caractéristique, à savoir

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} -\omega & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\omega & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -\omega & 0 & 0 & \dots & 1 \\ C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} & -\omega & 0 & \dots & 0 \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} & 0 & -\omega & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} & 0 & 0 & \dots & -\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions la première ligne par $-\omega$ et retranchons-la de la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne, faisons la même combinaison avec la deuxième et la $(n+2)^{\text{ième}}$ ligne, etc. Nous aurons

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} C_{11}-\omega^2 & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22}-\omega^2 & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions les deux membres de cette relation par la quantité

$$A^0 = \begin{vmatrix} A^0_{11} & A^0_{12} & \dots & A^0_{1n} \\ A^0_{21} & A^0_{22} & \dots & A^0_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^0_{n1} & A^0_{n2} & \dots & A^0_{nn} \end{vmatrix}$$

non nulle, d'après ce qui précède, l'indice o indiquant toujours la valeur pour $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$. Dans l'équation ainsi obtenue, on peut mettre le premier membre sous la forme d'un déterminant à n^2 éléments, le $s^{\text{ième}}$ élément de la $r^{\text{ième}}$ ligne étant

$$\sum_{\nu=1}^{n} C_{\nu r} A^0_{\nu s} - \omega^2 A^0_{rs} = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\alpha^0_{\mu\nu}}{A^0} \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_\mu \partial u_r} \right] A^0_{\nu s} - \omega^2 A^0_{rs}$$
$$= \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_r \partial u_s} - \omega^2 A^0_{rs}.$$

Nous aurons donc l'équation suivante

$$(12)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_1 \partial u_1} - \omega^2 A^0_{11} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_1 \partial u_2} - \omega^2 A^0_{12} & \cdots & \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_1 \partial u_n} - \omega^2 A^0_{1n} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_2 \partial u_1} - \omega^2 A^0_{21} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_2 \partial u_2} - \omega^2 A^0_{22} & \cdots & \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_2 \partial u_n} - \omega^2 A^0_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \cdots & \dots\dots\dots \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_n \partial u_1} - \omega^2 A^0_{n1} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_n \partial u_2} - \omega^2 A^0_{n2} & \cdots & \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_n \partial u_n} - \omega^2 A^0_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation appartient à un type connu et, dans notre cas, où les sommes

$$\sum_{ik} A^0_{ik} x_i x_k, \quad \sum_{ik} \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_i \partial u_k} x_i x_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

sont des formes quadratiques définies positives par rapport aux x, elle a n racines réelles et positives pour ω^2 (1). Par conséquent, toutes les racines de l'équation (10) sont réelles, non nulles et deux à deux de signes contraires.

26. *Théorèmes se rapportant au premier type d'hypothèses.* — Plaçons-nous d'abord dans les hypothèses du type I et utilisons les résultats des précédents Chapitres, et en particulier le théorème cité dans l'Introduction. Pour notre but, le cas important est celui où t est arbitraire. Le tableau

$$(13)\quad \left\| \begin{matrix} 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & ., & ., & \ldots, & .. \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, \\ C_{11}, & C_{12}, & \ldots, & C_{1n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ C_{21}, & C_{22}, & \ldots, & C_{2n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1}, & C_{n2}, & \ldots, & C_{nn}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \end{matrix} \right.$$

a cette propriété que l'équation (10) (2) n'admet que des racines à

---

(1) *Voir* Thomson und Tait, *Theoretische Physik*, deutsche Ausgabe, I, 1, p. 314. Weierstrass, *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* (*Werke*, Bd. II, p. 43).

(2) Les renvois portant des numéros qui ne figurent pas dans le présent paragraphe se rapportent au paragraphe précédent. Il en sera de même dans le paragraphe suivant.

partie réelle non nulle. Désignons maintenant par D_1, D_2 des nombres positifs correspondant au tableau (13) de la même façon que les nombres Δ_1, Δ_2 (*voir* l'Introduction) correspondent au tableau des quantités a des équations (1) de l'Introduction.

Déterminons maintenant un nombre positif γ tel que le domaine

$$(14) \qquad -\gamma < u_i < \gamma, \quad -\gamma < u'_i < \gamma \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

soit, limites comprises, intérieur au domaine défini par les relations (1) et (3) et tel de plus que dans le domaine (4) les valeurs absolues des dérivées du premier ordre des fonctions R_i, par rapport aux u et u', soient inférieures à $\frac{D_1}{2}$, ce qui est possible puisque ces dérivées sont des fonctions continues par rapport aux u et u' et qu'elles s'annulent pour

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u'_1 = \ldots = u'_n = 0.$$

On peut considérer γ comme quantité définie par la nature de T et de V.

On peut ensuite, d'après ce qui précède, choisir le degré de petitesse mentionné dans les hypothèses du précédent paragraphe, de telle façon qu'on ait, dans le domaine (14) et pour toutes les valeurs de t, $\left|\frac{\partial S_i}{\partial u_k}\right|$, $\left|\frac{\partial S_i}{\partial u'_k}\right| < \frac{D_1}{2}$ et $|S_i^0| < D_2\gamma$, l'indice o désignant la valeur pour

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u'_1 = \ldots = u'_n = 0.$$

L'exactitude de cette remarque résulte de la forme de S_i précisée dans le précédent paragraphe; toutes les conditions nécessaires pour l'application du théorème cité dans l'Introduction, sont donc remplies. On peut donc introduire les $2n$ fonctions

$$\begin{matrix} p_1, & p_2, & \ldots, & p_n, \\ q_1, & q_2, & \ldots, & q_n \end{matrix}$$

linéaires et homogènes en u et u' de déterminant non nul et énoncer relativement à ces fonctions les propositions résultant des théorèmes correspondants cités dans l'Introduction.

27. *Théorèmes se rapportant au second type d'hypothèses.* —

Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses du cas II et faisons d'abord quelques remarques préliminaires.

A. Pour tout domaine $a_i^0 < u_i < b_i^0$ intérieur (limites comprises) au domaine (1), les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\sigma & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-\sigma & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

sont comprises entre deux nombres positifs. Par conséquent, pour tout domaine tel, on a

$$K\sum_{i=1}^{n} u_i'^2 \leqq T \leqq G\sum_{i=1}^{n} u_i'^2,$$

où $K > 0$, $G > 0$.

B. Si le mouvement s'étend à l'intervalle $t_1 \leqq t < t_2$, la fonction T ne peut prendre des valeurs aussi grandes qu'on voudra si le système ne prend pas de positions aussi voisines qu'on voudra des limites du domaine (1). En effet, dans ce cas, on peut trouver un domaine $e_i < u_i < h_i$ intérieur (limites comprises) au domaine (1) et tel que le système reste à l'intérieur du nouveau domaine. Or, on déduit de (4)

$$\frac{d}{dt}(T-V) = \sum_{i=1}^{n} u_i' U_i,$$

d'où

$$\frac{dT}{dt} = 2M\sqrt{T},$$

où $|M|$ reste toujours inférieur à un nombre déterminé $C > 0$. Il s'ensuit que

$$\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1} < C(t_2 - t_1),$$

où T_0 est la valeur de T correspondant à la valeur t_0 de t de l'intervalle t_1, t_2. Si $T_0 \leqq T_1$ la proposition est démontrée. Si $T_0 > T_1$ on peut trouver une valeur de t inférieure à t_0, soit t_3, telle que pour t_3 la force vive soit égale à T_1 et telle de plus qu'on ait $T > T_1$ dans l'intervalle $t_3 < t < t_0$. Puisque, dans cet intervalle, T est par conséquent $>$ o on a dans cet intervalle

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\mathrm{T}} = \mathrm{M}$$

et, par conséquent,

$$\sqrt{\mathrm{T}_0} - \sqrt{\mathrm{T}_1} < \mathrm{C}(t_2 - t_1).$$

C. Soit donné un mouvement s'effectuant conformément à nos équations. Étudions-le à partir d'un certain moment τ (ce moment inclus) pour des valeurs croissantes de t. Si l'on ne peut étendre le mouvement à toutes les valeurs de $t > \tau$ on peut, comme il est facile de le voir, l'étendre à un intervalle $\tau \leqq t < \mathfrak{I}$ et pas au delà. Alors pour des valeurs de t aussi voisines qu'on voudra de $\mathfrak{I}$, le système prendra des positions aussi voisines qu'on voudra des limites du domaine (1). En effet, s'il n'en était pas ainsi, il en résulterait, d'après le premier Chapitre, que, parmi les quantités $|u'_i|$, il y en aurait qui prendraient des valeurs aussi grandes qu'on voudrait pour des valeurs de t aussi voisines qu'on voudrait de $\mathfrak{I}$, et par conséquent la quantité T devrait aussi prendre des valeurs aussi grandes qu'on voudrait dans l'intervalle $\tau \leqq t < \mathfrak{I}$; mais comme le système ne prend pas dans cet intervalle des positions aussi voisines qu'on voudrait des limites du domaine (1) nous aboutissons à une contradiction avec les résultats précédents.

D. Soit maintenant un domaine défini par les inégalités

$$(15) \qquad -\gamma_0 < u_i < \gamma_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où le nombre $\gamma > 0$ ne dépend que du caractère de T et V et de plus est tel que le domaine (15) soit, limites comprises, intérieur au domaine (1).

Supposons qu'une certaine solution reste pour $t \geqq t_1$ à l'intérieur du domaine

$$(16) \qquad \begin{cases} -\mathrm{D} < u_i < \mathrm{D} \\ \text{où} \\ 0 < \mathrm{D} \leqq \gamma_0 \qquad (i = 1, \ldots n), \end{cases}$$

et examinons quelques conséquences qui résultent de cette hypothèse.

Supposons que pour $t = t_1$ tous les u' ne soient pas nuls. Désignons par v celui des paramètres u dont la dérivée pour $t = t_1$ a la plus grande valeur absolue parmi les valeurs des $|u'|$ pour $t = t_1$. Désignons par v_1, v'_1, u'_{11}, ..., u'_{n1} les valeurs des quantités

$$v, v', u'_1, \ldots, u'_n$$

pour $t = t_1$. Nous avons $|v'_1| > 0$, et pour $t = t_0$ $(t_0 > t_1)$,

$$v_0 - v_1 - v'_1(t_0 - t_1) = \frac{1}{2} v''_\mu (t_0 - t_1)^2$$

où v_0 est la valeur de v pour $t = t_0$ et v''_μ est celle de v'' pour une valeur de t de l'intervalle t_1, t_0. En posant

$$t_0 - t_1 = \frac{4\mathrm{D}}{|v'_1|}$$

on a

$$|v''_\mu| > \frac{v'^2_1}{4\mathrm{D}}$$

où la quantité v''_μ doit être prise pour une valeur de t différant de t_1 de moins de $\frac{4\mathrm{D}}{|v'_1|}$; par conséquent de moins de

$$\frac{4\sqrt{n}\,\mathrm{D}}{\sqrt{u'^2_{11} + \ldots + u'^2_{n1}}}.$$

Des équations (7) il résulte maintenant que, pour les valeurs des u du domaine (15), les quantités $\left|\frac{du'}{dt}\right|$ sont inférieures à

$$\mathrm{P}(u'^2_1 + \ldots + u'^2_n) + \mathrm{Q}$$

où $\mathrm{P} > 0$ est une constante déterminée par la nature des fonctions T et V et $\mathrm{Q} > 0$ une constante ne dépendant que de la nature de ces mêmes fonctions et des limites des fonctions U_i.

Nous avons par conséquent, pour une certaine valeur de $t > t_1$ et différant de t_1 de moins de

$$\frac{4\sqrt{n}\,\mathrm{D}}{\sqrt{u'^2_{11} + \ldots + u'^2_{n1}}},$$

$$\mathrm{P}(u'^2_1 + \ldots + u'^2_n) + \mathrm{Q} > \frac{u'^2_{11} + \ldots + u'^2_{n1}}{4n\mathrm{D}}. \tag{17}$$

Montrons maintenant qu'on ne peut avoir

$$\mathrm{D} < \frac{1}{4n\left[p + \frac{\mathrm{Q}}{s_1^2}\right]},$$

où

$$s_1 = \sqrt{u'^2_{11} + \ldots + u'^2_{n1}},$$

car si cette inégalité était vérifiée, nous aurions

$$\frac{1}{4n\mathrm{DP}} - \frac{\Phi}{\mathrm{P}s_1^2} = 1 + p \qquad (p > 0).$$

Or, d'après la relation (17), nous avons

$$\mathrm{P}(u'^2_{12} + \ldots + u'^2_{n2}) + \mathrm{Q} > \frac{s_1^2}{4n\mathrm{D}},$$

où les u'_{i2} désignent les valeurs des u'_i pour une valeur t_2 de t plus grande que t_1 et différant de t_1 de moins de $\frac{4\sqrt{n}\mathrm{D}}{s_1}$. On a donc, en posant $s_2 = \sqrt{u'^2_{12} + \ldots + u'^2_{n2}}$,

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} > \frac{1}{4n\mathrm{DP}} - \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}s_1^2},$$

et par conséquent

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} > 1 + p,$$

d'où $s_2 > 0$ et $s_2^2 > s_1^2$. Partant maintenant de t_2 et s_2 nous obtiendrons, pour une certaine valeur $t_3 > t_2$ et différant de t_2 de moins de $\frac{4\sqrt{n}\mathrm{D}}{s_2}$,

$$\frac{s_3^2}{s_2^2} > \frac{1}{4n\mathrm{DP}} - \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}s_2^2} > 1 + p;$$

par conséquent $\frac{s_3^2}{s_2^2} > 1 + p$, etc. En définitive

$$\frac{s_m^2}{s_1^2} > (1 + p)^{m-1}$$

où

$$s_m = \sqrt{u'^2_{1m} + \ldots + u'^2_{nm}},$$

les u'_{im} étant les valeurs des u'_i pour $t = t_m > t_1$ et différant de t_1 de moins de

$$\frac{4\sqrt{n}\mathrm{D}}{s_1} + \frac{4\sqrt{n}\mathrm{D}}{s_1\sqrt{1+p}} + \frac{4\sqrt{n}\mathrm{D}}{s_1(\sqrt{1+p})^2} + \ldots + \frac{4\sqrt{n}\mathrm{D}}{s_1(\sqrt{1+p})^{m-2}},$$

par conséquent aussi de moins de

$$r = \frac{4\sqrt{n}\mathrm{D}}{s_1} \frac{\sqrt{1+p}}{\sqrt{1+p} - 1};$$

donc $s^2 = u_1'^2 + \ldots + u_n'^2$ prendrait dans l'intervalle $t_1 \leqq t < t_1 + r$ des valeurs aussi grandes qu'on voudrait, ce qui ne peut être.

Avant de poursuivre l'exposé de nos remarques préliminaires, introduisons les quantités p, q, formées à l'aide des $u_1, \ldots, u_n$, $u_1', \ldots, u_n'$ comme les quantités p, q du Chapitre II sont formées à l'aide de $x_1, \ldots, x_n$. Le tableau des quantités a est ici

$$
\tag{18}
\left\{
\begin{array}{llllllll}
0, & 0, & \ldots, & 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0, \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0, \\
., & ., & \ldots, & ., & ., & ., & \ldots, & ., \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1, \\
C_{11}, & C_{12}, & \ldots, & C_{1n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\
C_{21}, & C_{22}, & \ldots, & C_{2n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & ., & ., & \ldots, & 0, \\
C_{n1}, & C_{n2}, & \ldots, & C_{nn}, & 0, & 0, & \ldots, & 0.
\end{array}
\right.
$$

Il existe évidemment n quantités p et n quantités q. Les quantités $u_1, \ldots, u_n$ sont des fonctions des p, q linéaires homogènes à coefficients constants ne dépendant que de la nature des fonctions T et V. Nous désignerons ces fonctions des p, q par

$$
\varphi_1(p, q), \ldots, \varphi_n(p, q).
$$

E. Nous allons démontrer que les déterminants

$$
\tag{19}
\begin{vmatrix}
\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_n} \\
\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial \varphi_n}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_n}
\end{vmatrix}
$$

et

$$
\tag{20}
\begin{vmatrix}
\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_n} \\
\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial \varphi_n}{\partial p_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial p_n}
\end{vmatrix}
$$

ne s'annulent pas ([1]).

([1]) Nous savons que les C ont des valeurs telles que l'équation (10) n'a que des

A cet effet, formons le système suivant d'équations auxiliaires :

$$
(21)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x'_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = x'_n,\\
&\frac{dx'_1}{dt} = C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + \ldots + C_{1n}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{dx'_n}{dt} = C_{n1}x_1 + C_{n2}x_2 + \ldots + C_{nn}x_n.
\end{aligned}
\right.
$$

Désignons ensuite par $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n$, les quantités formées avec $x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$ à l'aide du tableau (18) comme les p, q (Chap. II) sont formées avec $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Des équations (21) on déduira des équations en P se partageant en systèmes du type

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\mathfrak{p}_1}{dt} = h\mathfrak{p}_1,\\
&\frac{d\mathfrak{p}_2}{dt} = h\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{d\mathfrak{p}_\mu}{dt} = h\mathfrak{p}_\mu + \mathfrak{p}_{\mu-1},
\end{aligned}
$$

où $h > 0$.

Si le déterminant fonctionnel (19) était nul on pourrait trouver une quantité

$$Y = r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n$$

qui soit fonction linéaire et homogène des P seuls, $r_1, \ldots, r_n$ n'étant pas tous nuls.

On pourrait alors, les $x_1, \ldots, x_n$ étant les éléments de l'intégrale générale des équations (21), mettre Y sous la forme

$$(22)\qquad \rho_1(t)e^{h_1t} + \rho_2(t)e^{h_2t} + \ldots$$

où les $\rho_1, \rho_2, \ldots$ sont des fonctions entières et rationnelles de t et $h_1, h_2, \ldots$ sont des quantités h positives différentes entre elles. En effet, pour une quelconque des quantités $\mathfrak{p}$ de la suite $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\mu$, on a $\mathfrak{p} = \rho(t)e^{ht}$, où $\rho(t)$ est une fonction entière et rationnelle de t.

Or, si $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ sont les éléments du système de so-

racines réelles, non nulles, le nombre de racines positives étant égal à celui de racines négatives. Nous ne nous servirons pas, dans cette démonstration, d'autres propriétés des quantités C.

lutions des équations (21), il en est de même de $x_1(-t)$, ..., $x_n(-t)$, d'où

(23) $r_1 x_1(-t) + \ldots + r_n x_n(-t) = \rho_1(-t)e^{-h_1 t} + \rho_2(-t)e^{-h_2 t} + \ldots.$

Mais le premier membre peut être représenté d'une façon analogue à (22), d'où $\rho_1(t) = \rho_2(t) = \ldots = 0$ et, par conséquent, $r_1 x_1 + \ldots + r_n x_n = 0$. Or cette relation ne peut avoir lieu, puisqu'on peut trouver des éléments de la solution x_1, ..., x_n qui prennent des valeurs arbitraires pour une valeur choisie de t.

Par conséquent le déterminant (19) ne s'annule pas et il en est de même du déterminant (20).

Arrivons maintenant aux résultats que nous avions en vue.

Nous utiliserons dans ce qui suit les résultats du n° 17 en nous plaçant dans le cas où t est arbitraire. Choisissons à cet effet trois nombres $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ de telle façon que les hypothèses

$$\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| < \delta_1, \qquad \frac{|\xi_0|}{\gamma} < \delta_2, \qquad \gamma < \delta_3$$

entraînent comme conséquences celles du n° 17 (ξ_0 est la valeur de ξ pour $x_1 = \ldots = x_n = 0$). On peut considérer les nombres δ_1, δ_2, δ_3 comme ne dépendant que du tableau des quantités a et de la nature des fonctions $\varphi_i(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l)$.

Revenons maintenant au cas que nous examinons ici et désignons par $\varphi_i(w_1, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_n)$ les fonctions $\varphi_i(p, q)$ dont il a été question plus haut et dans lesquelles nous écrivons $w_1, \ldots, w_n$, $v_1, \ldots, v_n$ à la place de $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Dans une certaine région autour du point 0, ..., 0, 0, ..., 0, elles satisfont aux conditions imposées aux fonctions $\varphi_i(u, v)$ dans le n° 17. Choisissons cette région d'une façon quelconque mais en ne la faisant dépendre que de la nature des fonctions T et V. On peut alors considérer les $\varphi(w, v)$ comme fonctions caractérisées par T et V.

Introduisons maintenant des nombres D_1, D_2, D_3 tous positifs et correspondant au tableau (18) et aux fonctions $\varphi(w, v)$ de la même façon que les nombres δ_1, δ_2, δ_3 correspondent au tableau des quantités a et aux fonctions $\varphi_i(u, v)$. On peut encore considérer D_1, D_2, D_3 comme nombres déterminés par la nature des fonctions T et V.

Soit ensuite $\mathfrak{w} > 0$ la quantité correspondant au tableau (18) et aux fonctions $\varphi(w, v)$ de la même façon que la quantité σ correspond au tableau des quantités a et aux fonctions $\varphi_i(u, v)$. La quantité $\mathfrak{w}$ peut aussi être considérée comme définie par la nature des fonctions T et V.

Déterminons maintenant un nombre γ_1 tel qu'on ait $0 < \gamma_1 < \gamma_0$, $\gamma_1 < D_3$ et tel de plus que, dans le domaine

$$(24) \qquad -\gamma_1 < u_i < \gamma_1, \qquad -\gamma_1 < u'_i < \gamma_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on ait

$$\left|\frac{\partial R_\mu}{\partial u_\nu}\right| < \frac{D_1}{2}, \qquad \left|\frac{\partial R_\mu}{\partial u'_\nu}\right| < \frac{D_1}{2}.$$

On peut considérer le nombre γ_1 comme ne dépendant que de la nature des fonctions T et V.

Choisissons ensuite un nombre γ_2 tel qu'on ait $0 < \gamma_2 < \gamma_1$ et tel que, pour des valeurs des u et u' appartenant au domaine

$$(25) \qquad -\gamma_2 < u_i < \gamma_2, \qquad -\gamma_2 < u'_i < \gamma_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on ait

$$(26) \qquad \sum_{\mu=1}^{n} d_\mu p_\mu^2 \lesseqgtr \delta\gamma^2, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu q_\nu^2 \gtreqless -\delta\gamma^2,$$

où les quantités d_μ, f_ν, δ correspondent au tableau (18) de la même façon que les quantités de mêmes noms considérées dans le Chapitre II correspondent au tableau des quantités a. On peut considérer γ_2 comme nombre ne dépendant que de la nature des fonctions T et V.

Enfin, choisissons une quantité $\mathfrak{g}$ satisfaisant aux inégalités

$$0 < \mathfrak{g} \leqq \gamma_2, \qquad \mathfrak{g} < \frac{1}{4n\left[P + \dfrac{Q}{\gamma_2^2}\right]}.$$

La quantité $\mathfrak{g}$ peut être considérée comme déterminée par la nature des fonctions T et V et par les limites des U_i.

Nous pouvons, d'après ce qui précède, choisir le degré de petitesse des quantités $\left|\frac{\partial U_i}{\partial u_k}\right|$, $\left|\frac{\partial U_i}{\partial u'_k}\right|$, $|U_i^0|$ de telle façon qu'on ait dans le domaine (24) $\left|\frac{\partial S_i}{\partial u_k}\right| < \frac{D_1}{2}$, $\left|\frac{\partial S_i}{\partial u'_k}\right| < \frac{D_1}{2}$, $\frac{|S_i^0|}{\mathfrak{g}} < D_2$ (l'indice o indique les valeurs pour

$$u_1 = \ldots = u_n = u'_1 = \ldots = u'_n = 0).$$

Supposons ce choix fait ainsi.

D'après le n° 17, nous savons qu'à tout point du domaine

$$(27) \qquad -\mathfrak{w}\mathfrak{g} \leqq u_i \leqq \mathfrak{w}\mathfrak{g} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et à toute valeur t_1 de t correspond un point du domaine

$$(28) \qquad \sum_{\mu=1}^{n} d_\mu p_\mu^2 \leqq \delta\mathfrak{g}^2, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu q_\nu^2 \geqq -\delta\mathfrak{g}^2$$

et un seul tel que les coordonnées du premier point soient précisément les valeurs des fonctions u_i en ce point p, q et tel, de plus, que la solution dont les éléments ont ces valeurs p, q pour $t = t_1$, reste dans le domaine (28) pour $t > t_1$. Comme il est facile de le voir, le nombre positif $\mathfrak{w}$ est inférieur à 1.

La solution restant dans le domaine (28) pour $t \geqq t_1$ reste pour ces mêmes valeurs de t aussi dans le domaine

$$(29) \qquad -\mathfrak{g} < u_i < \mathfrak{g}, \qquad -\mathfrak{g} < u'_i < \mathfrak{g} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Étant donnés un point du domaine (27) et une valeur quelconque t_1 de t, il existe donc une solution au moins restant, pour $t \geqq t_1$, dans le domaine

$$(30) \qquad -\mathfrak{g} < u_i < \mathfrak{g} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et ayant, pour $t = t_1$ comme système partiel de valeurs initiales, les coordonnées u_i de ce point. Nous allons prouver qu'il n'existe qu'*une seule* solution de cette nature.

A cet effet, remarquons d'abord que pour une solution de cette nature on ne peut avoir, pour aucune valeur de $t \geqq t_1$,

$$u_1^2 + \ldots + u_n^2 \geqq \gamma^2,$$

car si jamais cette relation était vérifiée on aurait, d'après le théorème démontré plus haut,

$$\mathfrak{g} \geqq \frac{1}{4n\left[P + \dfrac{Q}{\sum\limits_{i=1}^{n} u_i'^2}\right]} \geqq \frac{1}{4n\left[P + \dfrac{Q}{\gamma_2^2}\right]},$$

ce qui est en contradiction avec ce qui précède.

Par conséquent, pour des valeurs de $t \gtreqless t_1$, les u' restent dans le domaine $-\gamma_2 < u'_i < \gamma_2$ ($i = 1, \ldots, n$). Donc la solution en question reste pour $t \gtreqless t_1$ dans le domaine (25) et, par conséquent, aussi dans le domaine (26). Or, il résulte du n° **17** qu'à tout point du domaine

$$-\mathfrak{w}\gamma_1 \leqq u_i \leqq \mathfrak{w}\gamma_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{31}$$

et à toute valeur de t correspond un point du domaine (26) et un seul tel que les coordonnées du premier point soient les valeurs des fonctions u_i en ce point p, q et tel, de plus, qu'étant pris comme point initial pour la valeur considérée de t, la solution correspondante reste, pour toutes les valeurs plus grandes de t, dans le domaine (26). Mais le point u du domaine (27) dont nous sommes partis est en même temps un point du domaine (31), il s'ensuit qu'il existe bien une solution de la nature considérée et une seule.

Je dis maintenant qu'il existe une solution restant dans le domaine (30) pour toutes les valeurs de t. En effet, il existe une solution restant pour toutes les valeurs de t dans le domaine (28); elle reste aussi toujours dans le domaine (29). C'est là l'unique solution restant pour toutes les valeurs de t dans le domaine (30). En effet, toute solution restant, pour toutes les valeurs de t, dans le domaine (30) reste aussi dans le domaine (26) pour toutes les valeurs de t. Or, il n'existe qu'une seule solution répondant à cette dernière condition.

Deux solutions restant pour $t > t_1$ dans le domaine (30) s'approchent asymptotiquement quand $t = +\infty$, comme cela résulte immédiatement du fait qu'elles restent dans le domaine (26).

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant : *A tout point u du domaine*

$$-\mathfrak{w}\mathfrak{g} \leqq u_i \leqq \mathfrak{w}\mathfrak{g} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et à toute valeur t_0 de t correspond une solution et une seule partant de ce point u pour $t = t_0$ et restant pour $t \gtreqless t_0$ dans le domaine

$$-\mathfrak{g} < u_i < \mathfrak{g} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{32}$$

Il existe une solution et une seule restant dans le domaine (32) *pour toutes les valeurs de t. Deux solutions restant pour des* *valeurs suffisamment grandes de t dans le domaine* (32) *s'approchent asymptotiquement pour* $t = +\infty$. *Dans cet énoncé, le nombre* $\mathfrak{w} > 0$ *ne dépend que de la nature des fonctions* T *et* V *et le nombre* $\mathfrak{g} > 0$ *ne dépend que des limites des* U_i *et de la nature des fonctions* T *et* V.

Étant donné un nombre $\mathfrak{h} > 0$ et $\overline{\overline{<}} \mathfrak{g}$, les solutions correspondant (dans le même sens que ci-dessus) aux points du domaine

$$(33) \qquad -\mathfrak{w}\mathfrak{h} \leqq u_i \leqq \mathfrak{w}\mathfrak{h} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

restent dans le domaine

$$(34) \qquad -\mathfrak{h} < u_i < \mathfrak{h}, \qquad -\mathfrak{h} < u'_i < h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

si

$$(35) \qquad \frac{|S_i^0|}{\mathfrak{h}} < D_2.$$

En effet, à tout point du domaine (33) et à toute valeur de t, on peut faire correspondre un point du domaine

$$(36) \qquad \sum_{\mu=1}^{n} d_\mu p_\mu^2 \overline{\overline{<}} \delta\mathfrak{h}^2, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu q_\nu^2 \overline{\overline{>}} -\delta\mathfrak{h}^2$$

donnant une solution qui reste, pour toutes les valeurs plus grandes de t, dans le domaine (36). Elle reste aussi dans le domaine (34).

La condition (35) sera remplie si nous nous réservons le droit de déterminer le degré de petitesse des quantités $|U_i^0|$ non seulement à l'aide des données indiquées plus haut, mais aussi à l'aide du nombre $\mathfrak{h}$. Si $U_i^0 = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, la condition (35) est toujours remplie.

Si la condition (35) est remplie, la solution qui reste toujours dans le domaine (32) reste d'ailleurs dans le domaine (34).

Examinons encore le cas où tous les U_i seraient nuls. Les conditions relatives au degré de petitesse dont il est question dans les hypothèses ainsi que les relations (35) sont alors vérifiées. Nous obtenons donc le théorème suivant :

Supposons vérifiées les hypothèses du type (II); *supposons ensuite que les fonctions* U_i *disparaissent des équations* (4) *et* *avec elles les hypothèses qui les concernaient. Alors étant donné un nombre $\mathfrak{h}$ quelconque satisfaisant à la condition* $0 < \mathfrak{h} \leqq \mathfrak{z}$, *où* $\mathfrak{z} > 0$ *désigne un certain nombre ne dépendant que de la nature des fonctions* T *et* V, *il existe, pour tout point du domaine*

$$-\mathfrak{w}\mathfrak{h} \leqq u_i \leqq \mathfrak{w}\mathfrak{h} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et pour toute valeur t_1 *de* t, *une solution restant pour* $t > t_1$ *dans le domaine*

$$-\mathfrak{h} < u_i < \mathfrak{h}, \qquad -\mathfrak{h} < u'_i < \mathfrak{h} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et ayant comme système partiel de valeurs initiales pour $t = t_1$ *les coordonnées* u_i *de ce point. C'est d'ailleurs l'unique solution restant pour* $t > t_1$ *dans le domaine*

$$(37) \qquad -\mathfrak{z} < u_i < \mathfrak{z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et répondant à ces conditions initiales. L'unique solution restant dans le domaine (37) *pour toutes les valeurs de* t *est* $u_1 = \ldots = u_n = 0$. *Pour toute solution restant dans le domaine* (37) *pour des valeurs suffisamment grandes de* t, *on a*

$$\lim_{t=\infty} u_i = 0 \qquad \lim_{t=\infty} u'_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut, bien entendu, énoncer des propositions analogues aux précédentes en remplaçant, dans ce qui précède, les relations $t > t_1$ et $t = \infty$ par les relations $t < t_1$ et $t = -\infty$.

Je remarquerai, en terminant, que j'ai été conduit aux recherches de ce paragraphe par le travail du professeur Kneser (¹).

28. *L'anneau de Saturne.* — De la question traitée dans les trois derniers paragraphes passons maintenant à un cas particulier.

Soit donné un système mécanique formé de deux corps solides dont l'un est une sphère de masse S et l'autre un anneau de masse R et que nous désignerons respectivement par *Saturne* et *Anneau*

(¹) A. Kneser, *Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. CXV, p. 308, et Bd. CXVIII, p. 186).

de Saturne (¹). Nous ferons, au sujet de ces corps, les hypothèses suivantes : l'anneau de Saturne est un corps de révolution ayant un plan de symétrie E perpendiculaire à l'axe de révolution. Si on le coupe par un plan E′ passant par l'axe et qu'on choisisse dans ce plan comme axes de coordonnées rectangulaires x et z la droite d'intersection de E et E′ et l'axe de révolution respectivement, la section par le plan E′ n'occupe pas le voisinage de l'origine de ces coordonnées (centre de l'anneau) et se trouve dans la partie du plan comprise entre les droites $x+\sqrt{2}z=0$, $x-\sqrt{2}z=0$ et contenant l'axe des x. La distribution des masses de l'anneau est symétrique par rapport à l'axe de révolution et par rapport au plan de symétrie E. Enfin nous supposerons le rayon de Saturne inférieur à celui de la sphère qu'on pourrait placer à l'intérieur de l'anneau en faisant coïncider le centre de la sphère avec celui de l'anneau. Enfin la distribution des masses de Saturne est concentrique (²).

Nous examinons les positions de Saturne où son centre est dans le plan de symétrie E et sa sphère entièrement à l'intérieur de l'anneau, de sorte que les masses de Saturne se trouvent en dehors des masses de l'anneau. Le potentiel mutuel (³) P des deux corps est égal alors à celui de l'anneau relativement à la masse R supposée concentrée au centre de Saturne. Soit un système d'axes de coordonnées rectangulaires x, y situé dans le plan E et ayant son origine sur l'axe de révolution. Dans un certain voisinage du point $x=0$, $y=0$, P est une fonction de x, y (coordonnées du centre de Saturne) ayant des dérivées premières et secondes qui sont, ainsi que la fonction P, des fonctions continues de x et y, et l'on a

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0=0$$

(¹) Par là nous n'affirmons cependant rien au sujet de l'anneau de Saturne existant réellement.

(²) A ces hypothèses il faut en ajouter encore une, de caractère général, relativement à la distribution des masses, afin d'assurer l'exactitude des remarques qui vont suivre et qui reposent sur les éléments de la théorie du potentiel. Nous renvoyons à la théorie du potentiel pour l'énoncé de ces conditions générales et suffisantes.

(³) Nous nous appuyons, dans ce qui suit, sur la loi de Newton.

(l'indice o désigne la valeur pour $x=y=0$). Les quantités du second ordre, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + 2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_0 y^2\right],$$

prennent la forme A (x^2+y^2) où

$$A = \frac{S}{4}\int \frac{\rho^2 - 3e^2}{\rho^5}\, dm,$$

ρ désignant la distance d'un point de l'anneau à son centre, e celle d'un point de l'anneau au plan de symétrie E et dm un élément de masse de l'anneau et l'intégrale étant étendue à l'anneau. Des hypothèses relatives à la forme de l'anneau il résulte que A est > 0. En choisissant dans le plan de symétrie E un système d'axes de coordonnées rectangulaires dont l'origine coïncide avec le centre de Saturne, P s'exprimera de la même façon en fonction des coordonnées u, v du centre de l'anneau.

Étudions maintenant le mouvement de notre système en l'imaginant assujetti à des forces provenant, d'une part, des actions réciproques de l'anneau et de Saturne et, d'autre part, d'autres causes quelconques. Désignons ces dernières forces par *forces extérieures*. Nous nous bornons à des mouvements pour lesquels le plan de symétrie E garde une position déterminée tandis que le centre de Saturne reste dans le plan E et la sphère à l'intérieur de l'anneau. Supposons, de plus, les forces extérieures symétriques par rapport au plan E.

Considérons un système d'axes de coordonnées ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$) fixes dans l'espace et dont le plan ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$) est parallèle au plan E, et dans ce dernier plan deux axes de coordonnées parallèles aux axes $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ du précédent système et dont l'origine coïncide avec le centre de Saturne. Soient u, v les coordonnées par rapport à ce dernier système du centre de l'anneau. En désignant par SX, SY, RΞ, RH les projections sur les axes fixes de la force extérieure totale appliquée à Saturne et à l'anneau, nous aurons

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= \frac{R+S}{RS}\frac{\partial P}{\partial u} + \Xi - X, \\ \frac{d^2v}{dt^2} &= \frac{R+S}{RS}\frac{\partial P}{\partial v} + H - Y. \end{aligned}\right.$$

Nous nous ramènerons à un cas particulier de la question traitée dans les nos 25 à 27, en introduisant l'hypothèse que les quantités $\Xi - X$, $H - Y$ sont des fonctions de t, u, v, u', v' satisfaisant à des conditions qui correspondent aux hypothèses faites dans le no 25 au sujet de la fonction U_i. Ces hypothèses, comme nous le savons, ont été introduites sous deux formes; elles consistaient à admettre que certaines fonctions étaient données dans certains domaines, que certaines dérivées existaient, que certaines fonctions étaient continues, que certaines quantités étaient comprises (dans le cas correspondant) entre des limites finies et, enfin, qu'un certain degré de petitesse était donné. Avant de formuler les hypothèses relatives aux quantités $\Xi - X$ et $H - Y$, il faut introduire des domaines jouant dans notre cas le même rôle que celui des domaines (1) et (3) ou (1) dans le no 25.

Les recherches des nos 25-27 revèlent alors d'une part une infinité de mouvements pour lesquels il ne se produit point de chocs entre Saturne et l'anneau lorsque t croît, et d'autre part un mouvement pour lequel ce choc ne se produit jamais. Pour la démonstration nous renvoyons aux paragraphes précédents.

Laplace [1] a, comme on sait, étudié le mouvement (dans un plan) du système formé par Saturne et l'anneau, en supposant ce dernier réduit à une ligne homogène ayant la forme d'une circonférence. Laplace affirme que les forces pertubatrices doivent toujours avoir pour effet le choc entre Saturne et l'anneau. Cette proposition n'est pas tout à fait exacte, comme nous venons de le reconnaître.

29. *Sur une certaine équation différentielle.* — Comme dernier exemple, étudions l'équation différentielle

$$\frac{d^2z}{dt^2} - [\alpha + \varphi(t)]\, z = \psi(t). \tag{1}$$

où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont données comme fonctions continues pour toutes les valeurs de t et contiennent t sous forme trigonométrique. Cela signifie que $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ se déduisent des $\Phi(u_1, \ldots, u_m)$,

---

(1) *Mécanique céleste*, t. III, Ch. VI.

$\Psi(u_1, \ldots, u_m)$ par la substitution $u_1 = \frac{t}{\alpha_1}, \ldots, u_m = \frac{t}{\alpha_m}$, Φ et Ψ étant données pour toutes les valeurs réelles des u comme fonctions continues et périodiques, de périodes égales à l'unité. $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont des quantités non nulles et telles qu'entre leurs inverses il n'existe point de relations linéaires homogènes à coefficients entiers. Soit α une constante positive et supposons que $|\varphi(t)|$ ait un certain degré de petitesse déterminé à l'aide de α et que nous nous réservons le droit de choisir plus loin.

Nous allons donner la solution générale de l'équation (1). Commençons par une certaine solution particulière.

Remplaçons (1) par le système suivant

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \zeta, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \alpha z + \varphi(t)z + \psi(t). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

L'équation

$$\begin{vmatrix} -\omega & 1 \\ \alpha & -\omega \end{vmatrix} = 0,$$

ou $\omega^2 = \alpha$ a deux racines $+\sqrt{\alpha}$ et $-\sqrt{\alpha}$ réelles et non nulles. Soient Δ_1 et Δ_2 les nombres positifs dont il a été question dans l'Introduction, ces nombres correspondant au tableau des quantités a qui est ici

$$\begin{matrix} 0, & 1, \\ \alpha, & 0. \end{matrix}$$

Supposons maintenant $|\varphi(t)| < \Delta_1$. Puisqu'on peut choisir un nombre $\gamma > 0$ de telle façon qu'on ait $|\psi(t)| < \Delta_2\gamma$ nous obtenons le résultat suivant en nous basant sur la proposition citée dans l'Introduction : l'équation (1) admet une solution et une seule pour laquelle z reste entre des limites finies. Pour cette solution on peut développer z en série trigonométrique uniformément convergente pour toutes les valeurs de t et ayant la forme caractérisée dans l'Introduction. Si Φ et Ψ admettent des dérivées continues par rapport aux u jusqu'à un ordre suffisamment élevé, on peut développer z en série trigonométrique absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs de t et ayant la forme de séries ordinaires de Fourier à plusieurs variables (*voir* Introduction). Nous désignerons cette solution par $\mathfrak{C}$.

Passons maintenant à l'étude de l'équation différentielle

$$(3) \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} - [\alpha + \varphi(t)] = 0.$$

Faisons d'abord une remarque dont l'exactitude peut être facilement prouvée et qui est d'ailleurs connue.

Soit X une fonction continue de t, donnée pour toutes les valeurs de t. Si alors deux fonctions v et w de t, définies pour toutes les valeurs de t, satisfont aux équations

$$(4) \qquad \frac{dv}{dt} + v^2 + X = 0, \qquad \frac{dw}{dt} + w^2 + X = 0$$

et diffèrent entre elles pour une valeur au moins de t, elles diffèrent pour toutes les valeurs de t. En posant $L = \frac{1}{2}(v - w)$, les fonctions

$$(5) \qquad \frac{1}{\sqrt{|L|}} e^{\int_a^t L\,dt}, \qquad \frac{1}{\sqrt{|L|}} e^{-\int^t L\,dt}$$

représentent des solutions indépendantes de l'équation

$$(6) \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} + Xz = 0.$$

Formons l'équation

$$(7) \qquad \frac{d\lambda}{dt} = -2\sqrt{\alpha}\,\lambda - \lambda^2 + \varphi(t)$$

et désignons par δ_1, δ_2 des quantités correspondant à $-2\sqrt{\alpha}$ de la même façon que les nombres Δ_1, Δ_2 de l'Introduction correspondent au tableau des quantités a. Choisissons ensuite un nombre g ne dépendant que de α et satisfaisant aux relations

$$0 < g \leqq \sqrt{\alpha}, \qquad 2g \leqq \delta_1.$$

Enfin supposons qu'on ait $|\varphi(t)| < \delta_2 g$. (Nous avons le droit de faire cette hypothèse, d'après ce qui précède.)

Il existe une solution de l'équation (7) et une seule s'étendant à toutes les valeurs de t et restant dans le domaine $-g < \lambda < g$. Cette solution peut être développée en série trigonométrique uniformément convergente pour toutes les valeurs de t et ayant la forme précisée dans l'Introduction. Si Φ admet des dérivées continues par rapport aux u jusqu'à un ordre suffisamment élevé, on peut développer cette solution en série trigonométrique absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs de t et ayant la forme de séries ordinaires de Fourier à plusieurs variables. Désignons par λ cette solution. On a toujours $|\lambda| < \sqrt{\alpha}$. Formons ensuite l'équation

$$\frac{d\mu}{dt} = 2\sqrt{\alpha}\,\mu - \mu^2 + \varphi(t). \tag{8}$$

De même que pour l'équation (7), il résulte de la théorie générale que si $|\varphi(t)|$ a un certain degré de petitesse déterminé à l'aide de α, il existe une solution μ de l'équation (8) s'étendant à toutes les valeurs de t, satisfaisant à la relation $|\mu| < \sqrt{\alpha}$ et qui est développable dans des conditions analogues à celles que nous avons énoncées tout à l'heure pour le développement de λ.

Nous avons maintenant

$$\frac{d(\sqrt{\alpha} + \lambda)}{dt} = -(\sqrt{\alpha} + \lambda)^2 + \alpha + \varphi(t),$$
$$\frac{d(-\sqrt{\alpha} + \mu)}{dt} = -(-\sqrt{\alpha} + \mu)^2 + \alpha + \varphi(t).$$

Par conséquent $\sqrt{\alpha} + \lambda$ et $-\sqrt{\alpha} + \mu$ satisfont à la condition

$$\frac{d\eta}{dt} = -\eta^2 + \alpha + \varphi(t) \tag{9}$$

et, par conséquent, les quantités $\sqrt{\alpha} + \lambda$ et $-\sqrt{\alpha} + \mu$ diffèrent entre elles, puisqu'on a $2\sqrt{\alpha} > \mu - \lambda$ et par conséquent

$$\sqrt{\alpha} + \lambda > -\sqrt{\alpha} + \mu.$$

Posons maintenant

$$2\mathrm{T} = 2\sqrt{\alpha} + \lambda - \mu.$$

Alors T est > 0. Ensuite, on peut développer T en série trigonométrique uniformément continue pour toutes les valeurs de t et ayant la forme caractérisée dans l'Introduction. Si Φ admet des dérivées continues par rapport aux u jusqu'à un ordre suffisamment élevé, T est développable en série trigonométrique absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs de t

et ayant la forme d'une série ordinaire de Fourier à plusieurs variables.

La solution générale de l'équation (1) peut, d'après ce qui précède, être représentée sous la forme

$$\mathfrak{T} + c_1 \frac{e^{\int_a^t \mathrm{T}dt}}{\sqrt{\mathrm{T}}} + c_2 \frac{e^{-\int_a^t \mathrm{T}dt}}{\sqrt{\mathrm{T}}},$$

où c_1, c_2 et a sont des constantes arbitraires.

Nons aurions, d'ailleurs, pu étudier l'équation (3) en partant de la remarque suivante :

Si la fonction u donnée pour toutes les valeurs de t satisfait à l'équation

$$u^3(u'' + \mathrm{X}u) = c \qquad (c = \text{const.})\ (c \gtrless 0),$$

où X est une fonction donnée pour toutes les valeurs de t, les expressions

$$ue^{\sqrt{-c}\int_a^t \frac{dt}{u^2}}, \quad ue^{-\sqrt{-c}\int_a^t \frac{dt}{u^2}},$$

dans le cas $c < 0$ et

$$u \cos\left(\sqrt{c}\int_a^t \frac{dt}{u^2}\right), \quad u \sin\left(\sqrt{c}\int_a^t \frac{dt}{u^2}\right)$$

dans le cas $c > 0$ sont des solutions de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \mathrm{X}z = 0.$$

Plus importante que l'équation (1) est celle qui a même forme mais où d est négatif ([1]), les hypothèses restant d'ailleurs analogues aux précédentes. Pour ce cas, on n'a pas obtenu de résultats correspondant à ceux établis dans le présent paragraphe. Cependant, l'équation que nous avons étudiée peut aussi trouver son application en Mécanique.

([1]) *Voir* A. Lindstedt, *Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie,* p. 17 (Saint-Pétersbourg, 1883). — Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. II, p. 277.