BULLETIN DE LA S. M. F.

E. COTTON

Sur les équations différentielles dépendant de paramètres arbitraires

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 204-214
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__204_1>

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DÉPENDANT DE PARAMÈTRES ARBITRAIRES;

PAR M. ÉMILE COTTON.

Les solutions $x_1, \ldots, x_n$ d'un système d'équations différentielles dépendant de paramètres arbitraires $\mu_1, \ldots, \mu_r$, déterminées par les valeurs initiales $a_1, \ldots, a_n$, qu'elles prennent pour une valeur t_0 de la variable indépendante t, sont fonctions de ces valeurs initiales et de ces paramètres. Le but de cet article est d'établir que, dans des conditions qui seront précisées plus loin, *les fonctions $x_1, \ldots, x_n$ admettent, par rapport aux variables $a_1, \ldots, a_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$, des dérivées jusqu'à un certain ordre* N. Cette proposition sera désignée, dans les lignes suivantes, par la lettre A.

On sait que M. Poincaré (¹) a établi que, dès que certaines hypothèses, qu'il est inutile de rappeler, sont remplies, $x_1, \ldots, x_n$ sont fonctions analytiques des variables $a_1, \ldots, a_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$. Sa démonstration est basée sur l'emploi des fonctions majorantes; MM. Picard et Lindelöf (²) en ont donné d'autres en utilisant la méthode des approximations successives.

Les hypothèses sur lesquelles repose la proposition A sont plus larges que celles qui correspondent au théorème de M. Poincaré; A est toujours vérifiée lorsque le théorème est applicable, mais elle peut l'être encore dans des cas où l'on ne peut plus utiliser ce théorème.

(¹) *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, Chap. II.

(²) *Voir*, à ce sujet, le Tome III du *Traité d'Analyse* de M. Picard, Chap. VIII.

D'autre part, *la proposition* A *peut conduire souvent aux mêmes conséquences que le théorème de M. Poincaré.* Par exemple, divers théorèmes concernant les solutions périodiques, dus au même géomètre, reposent sur l'existence des solutions d'un certain système (S) d'équations finies, dont les premiers membres se construisent très simplement à l'aide des fonctions x des a et des μ envisagées plus haut. La démonstration de M. Poincaré utilise la théorie des fonctions implicites définies par des équations analytiques. Mais on peut aussi par diverses méthodes, en particulier par celle des approximations successives, comme l'a montré M. Goursat [1], édifier une théorie des fonctions implicites en faisant, sur les premiers membres des équations qui les définissent, l'hypothèse moins restrictive de l'existence des dérivées des premiers ordres. Le rapprochement de cette théorie et de la proposition A donne une démonstration des théorèmes de M. Poincaré sur les solutions périodiques. Cette démonstration, aussi simple que l'ancienne, élargit le domaine d'application de ces théorèmes [2].

La proposition A dont nous venons de montrer l'intérêt a été signalée, soit dans des cas particuliers, soit dans sa généralité, par divers auteurs (*voir* les notes pour la bibliographie). Il est commode, pour abréger l'écriture, de la présenter (n° 5) comme cas particulier d'une proposition générale, énoncée au n° 4, et dont on trouvera plus loin deux démonstrations. La première (n° 1), à laquelle l'exposé actuel n'apporte guère que des perfectionnements de détail, est très rapide, mais elle est basée sur des hypothèses plus restreintes que la seconde (n° 2). Celle-ci, que je crois nouvelle, conduit (n° 3) à une proposition générale concernant le calcul des approximations successives qu'il m'a paru intéressant de signaler.

1. Soit d'abord une seule équation du premier ordre dépendant d'un paramètre μ,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu). \tag{1}$$

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXI, 1903, p. 184.

(2) D'une façon générale, dans le domaine réel, la méthode des approximations successives de M. Picard paraît avoir une puissance supérieure à celle des fonctions majorantes.

Faisons, à son sujet, les hypothèses suivantes :

Pour $\mu = 0$, et dans l'intervalle I ($t_0 \leqq t \leqq t_1$), l'équation (1) admet une solution $y(t)$. Lorsque le point (x, t) varie dans un domaine D entourant la partie de la courbe intégrale $y(t)$ correspondant à l'intervalle I, et que $|\mu|$ reste inférieur à un nombre ε, la fonction f est continue et admet par rapport aux variables x et μ des dérivées du premier ordre, fonctions continues et bornées des variables x, t et μ.

Soit $a(\mu)$ une fonction de μ telle que

$$a(0) = y(t_0),$$

admettant pour $|\mu|$ assez petit une dérivée continue.

Si la valeur absolue de μ est assez petite, l'équation (1) admet une solution

$$x = \varphi_a(t, \mu), \tag{2}$$

prenant pour $t = t_0$ la valeur $a(\mu)$, bien définie dans l'intervalle I, et intérieure dans cet intervalle, au domaine D [1].

Nous allons établir que *cette solution admet une dérivée partielle par rapport à* μ [2].

---

[1] Soient

$$|a(\mu) - a(0)| \leqq \eta,$$

et

$$|f[y(t), t, \mu] - f[y(t), t, 0]| \leqq \alpha,$$
$$|f'_x(x, t, \mu)| \leqq b,$$

ces inégalités étant valables, dans l'intervalle I, pour $|\mu| < \varepsilon$ et quand (x, t) reste dans D.

On peut démontrer (voir *Acta mathematica*, t. XXXI, p. 113, n° 4) que la solution $\varphi_a(t, \mu)$ satisfait à l'inégalité

$$|\varphi_a(t, \mu) - y(t)| \leqq \psi(t, \eta, \alpha) = \eta e^{b(t-t_0)} + \frac{\alpha}{b}(e^{b(t-t_0)} - 1).$$

On peut rendre η et α aussi petits que l'on veut en prenant μ assez voisin de zéro, et obtenir ainsi une courbe intégrale (2) intérieure au domaine D lorsque t varie dans l'intervalle I.

En d'autres termes, l'intégrale (2) est une fonction continue du paramètre μ pour la valeur $\mu = 0$ lorsque t varie dans I La même propriété s'étend à toutes les valeurs μ_1 de μ assez petites en valeur absolue ; ce cas se ramène au précédent par la substitution $\mu = \mu_1 + \mu'$.

Voir HADAMARD, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVIII, 1900, p. 64, et PICARD, *Traité d'Analyse*, 2ᵉ édition, t. II, p. 332.

[2] Comme le fait observer M. Peano, cette proposition et les suivantes sont une extension du théorème classique sur la dérivation sous le signe *somme;* elles paraissent avoir la même importance que lui.

Considérons, pour cela, le système

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \\ \dfrac{dx'}{dt} = f'_\mu(x, t, \mu) + x' f'_x(x, t, \mu), \end{cases}$$

et intégrons-le par la méthode d'approximations successives de M. Picard. Nous poserons

$$(4)\qquad y_0(t) = y(t), \qquad y'_0(t) = 0,$$

et nous déterminerons de proche en proche les approximations successives y_i, y'_i par les formules

$$(5)\qquad \begin{cases} y_i(t) = \alpha(\mu) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(y_{i-1}, t, \mu)\, dt, \\ y'_i(t) = \alpha'(\mu) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} [f'_\mu(y_{i-1}, t, \mu) + y'_{i-1} f'_x(y_{i-1}, t, \mu)]\, dt. \end{cases}$$

Nous allons établir que les séries

$$(6)\qquad x(t, \mu) = \varphi_a(t, \mu) = y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_i - y_{i-1}) + \ldots,$$

$$(7)\qquad x'(t, \mu) = \qquad y'_0 + (y'_1 - y'_0) + \ldots + (y'_i - y'_{i-1}) + \ldots$$

sont uniformément convergentes; les termes de la seconde étant les dérivées des termes correspondants de la première, ainsi que le montrent les formules (4) et (6), nous démontrerons bien ainsi que

$$(8)\qquad x'(t, \mu) = \frac{\partial x(t, \mu)}{\partial \mu}.$$

La convergence uniforme de la série (6) peut être établie par la théorie classique de la méthode d'approximations successives de M. Picard appliquée à l'équation (1). L'existence et la nature bornée de la dérivée partielle $f'_x(x, t, \mu)$ permettent en effet d'écrire une inégalité de Lipschitz pour f considérée comme fonction de x.

La même démonstration s'applique à la série (7) *si l'on admet que $f'_\mu(x, t, \mu)$ et $f'_x(x, t, \mu)$ satisfont, en tant que fonctions de x, à certaines inégalités de Lipschitz lorsque $|\mu|$ est assez petit; que t appartient à* I *et que le point (x, t) est dans* D.

On a ainsi une première démonstration, très rapide, de la proposition énoncée ([1]).

2. Mais l'hypothèse supplémentaire sur laquelle repose cette démonstration n'est nullement nécessaire, comme l'ont montré MM. Peano et von Escherisch ([2]).

Nous allons l'établir par un procédé simple que nous croyons nouveau.

Écrivons les inégalités suivantes valables lorsque le point (x, t) reste dans la partie de D correspondant à l'intervalle I, et pour $|\mu|$ assez petite.

$$(9) \qquad |f'_x| < b, \qquad |f'_\mu| < c, \qquad |a'(\mu)| < \eta'.$$

Montrons d'abord que *la somme y'_i des i premiers termes de la série* (7) *reste finie quand i croît indéfiniment.*

Comparons pour cela $y'_0 = 0$, y'_1, ..., y'_i aux termes de la suite $Y'_0 = 0$, Y'_1, ..., Y'_i obtenue en intégrant l'équation linéaire à coefficients constants

$$(10) \qquad \frac{dX'}{dt} = bX' + c$$

par la méthode des approximations successives, la première approximation étant $Y'_0 = 0$ et les suivantes correspondant aux conditions initiales

$$Y'_i(t_0) = \eta'.$$

([1]) M. Picard (Note ajoutée au Tome IV des *Leçons sur la théorie des surfaces* de M. Darboux) établit la convergence uniforme de la série (7) en considérant la seconde équation (3) (ou, plus exactement, le cas particulier correspondant à $f'_\mu = 0$) comme une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. MM. Nicoletti (*Lincei*, 15 décembre 1895) et von Escherisch (*Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. CLXVIII, 1899, p. 622) ont indiqué la démonstration donnée ci-dessus.

([2]) *Voir* l'intéressant article de M. Peano (*Atti di Torino*, 1897-1898); la lecture des démonstrations en est malheureusement difficile pour le lecteur non habitué à la notion de nombre complexe et aux symboles employés. *Voir* aussi un article de M. Hadamard (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVIII, 1900, p. 64). M. Nicoletti (*Atti di Torino*, 1897-1898) a signalé incidemment ce résultat et M. von Escherisch l'a démontré (*loc. cit.*) en utilisant un théorème non classique concernant la dérivation des séries.

On voit bien aisément de proche en proche que $Y'_i > |y'_i|$ quel que soit i. Pour une même valeur attribuée à t, les Y'_i croissent avec i, et tendent vers la limite

$$(11) \qquad Y' = \left(\eta' + \frac{c}{b}\right) e^{b(t-t_0)} - \frac{c}{b}.$$

Si donc t reste dans I, on peut trouver un nombre m tel que, quel que soit i,

$$(12) \qquad |y'_i| < Y' < m.$$

Ce point établi, *nous allons démontrer que la valeur absolue de la somme de h termes suivant le terme de rang $i+p$ dans la série* (7) *peut être rendue, quelle que soit la valeur de t* (*comprise dans* I), *et quel que soit h, aussi petite qu'on veut en prenant i et p assez grands*, ce qui établira bien la convergence uniforme de cette série.

La somme en question est

$$(13) \qquad \delta_{i+p,h} = y'_{i+p+h} - y'_{i+p}.$$

On peut écrire

$$(14) \qquad \delta_{i+p,h} = \int_{t_0}^{t} \{[f'_\mu(y_{i+p+h-1}, t, \mu) - f'_\mu(y_{i+p-1}, t, \mu)] \\ + y'_{i+p+h-1}[f'_x(y_{i+p+h-1}, t, \mu) - f'_x(y_{i+p-1}, t, \mu)] \\ + \delta_{i+p-1,h} f'_x(y_{i+p-1}, t, \mu)\} \, dt.$$

En vertu de la convergence uniforme de la série (6) et de la continuité des dérivées f'_x et f'_μ, les deux différences entre crochets peuvent être rendues aussi petites qu'on veut en valeur absolue en prenant i assez grand. Tenant compte alors de l'inégalité (12), on voit qu'on peut déterminer un nombre γ_i tel que

$$(15) \qquad \gamma_i > |f'_\mu(y_{i+p+h-1}, t, \mu) - f'_\mu(y_{i+p-1}, t, \mu) \\ + y'_{i+p+h-1}[f'_x(y'_{i+p+h-1}, t, \mu) - f'_x(y'_{i+p-1}, t, \mu)]|,$$

et que ce nombre γ_i *peut être pris aussi petit qu'on veut pourvu que i soit assez grand.*

Cela étant, en rapprochant l'égalité (14) des inégalités (15) et (9), on voit que

$$(16)\qquad |\delta_{i+p,h}| < \int_{t_0}^{t} [\gamma_i + b\,|\delta_{i+p-1,h}|]\,dt.$$

On a

$$|\delta_{i,h}| < 2m.$$

Prenons alors $\Delta_i = 2m$, et déterminons de proche en proche les fonctions Δ_{i+p} par la relation de récurrence

$$(17)\qquad \Delta_{i+p} = \int_{t_0}^{t} (\gamma_i + b\,\Delta_{i+p-1})\,dt;$$

nous obtenons aisément [1]

$$(18)\qquad \Delta_{i+p} = \gamma_i \left[(t-t_0) + \frac{b(t-t_0)^2}{2} + \ldots + \frac{b^{p-1}(t-t_0)^p}{1.2\ldots p} \right] + 2m\,\frac{b^p(t-t_0)^p}{1.2\ldots p}.$$

Il est d'ailleurs manifeste que

$$(19)\qquad |\delta_{i+p,h}| < \Delta_{i+p},$$

et comme on a

$$(20)\qquad \Delta_{i+p} < \gamma_i\,\frac{e^{b(t_1-t_0)}-1}{b} + 2m\,\frac{b^p(t_1-t_0)^p}{1.2\ldots p},$$

puisque t est censé compris entre t_0 et t_1, on voit bien qu'en prenant i et p assez grands, $|\delta_{i+p,h}|$ peut être rendue aussi petite qu'on veut; c'est ce qu'il fallait établir.

---

[1] Δ_{i+p} est la $p^{\text{ième}}$ approximation dans l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d\overline{\Delta}_i}{dt} = \gamma_i + b\,\overline{\Delta}_i,$$

par la méthode de M. Picard, la première approximation étant $2m$, et toutes les approximations suivantes s'annulant pour $t = t_0$. On aurait donc pu se dispenser de calculer Δ_{i+p}, puisque cette fonction tend uniformément vers sa limite dans l'intervalle $t_0\,t_1$.

Cette remarque s'applique aussi bien quand on a plusieurs équations telles que l'équation (14), et, par suite, plusieurs expressions analogues à Δ_{i+p}, dont le calcul pourrait alors paraître compliqué.

3. La démonstration précédente peut évidemment être rattachée à la proposition plus générale que voici. Soit donnée une suite de fonctions

$$(21)\qquad F_1(x,t),\quad F_2(x,t),\quad \ldots,\quad F_n(x,t),\quad \ldots,$$

uniformément convergente lorsque le point (x, t) reste dans un domaine D. On suppose que ces fonctions sont continues dans ce domaine, et qu'elles satisfont à une même condition de Lipschitz

$$(22)\qquad |F_i(x,t) - F_i(x',t)| < b\,|x - x'|.$$

Soit $x = y_0(t)$ une fonction continue, le point $[y_0(t_0), t_0]$ étant intérieur à D. Considérons la suite de fonctions définies par la loi de récurrence

$$(23)\qquad y_i(t) = y_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} F_i(y_{i-1}, t)\,dt.$$

On peut déterminer un intervalle I $(t_0 < t < t_1)$ *tel que dans cet intervalle : 1° toutes les fonctions $y_i(t)$ soient définies; 2° $y_i(t)$ converge uniformément vers une limite.*

L'existence des diverses fonctions $y_i(t)$ s'établit sans difficulté par le même raisonnement qui sert à prouver l'existence des approximations successives dans l'application de la méthode de M. Picard. Pour établir la convergence, considérons la différence analogue à (13)

$$\delta_{i+p,h} = y_{i+p+h} - y_{i+p}.$$

On peut écrire

$$(24)\qquad \delta_{i+p,h} = \int_{t_0}^{t} \{[F_{i+p+h}(y_{i+p+h-1}\, t) - F_{i+p+h}(y_{i+p-1}\, t)] + [F_{i+p+h}(y_{i+p-1}\, t) - F_{i+p}(y_{i+p-1}\, t)]\}\,dt.$$

Soit γ_i un nombre supérieur à la valeur absolue de la seconde différence ; γ_i peut être pris aussi petit qu'on peut en prenant i assez grand. Tenant compte alors de la condition de Lipschitz (22), on déduit de (24) l'inégalité

$$(25)\qquad |\delta_{i+p,h}| < \int_{t_0}^{t} \{\gamma_i + b\,|\delta_{i+p-1,h}|\}\,dt$$

analogue à l'inégalité (16), et le raisonnement s'achève comme au numéro précédent.

Soit $F(x, t)$ la limite de la suite (21); la fonction $y(t)$, limite de $y(t)$, vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t). \tag{26}$$

On pourrait généraliser ce qui précède en supposant que les valeurs initiales des approximations successives (pour $t = t_0$) varient avec i en tendant uniformément vers une limite.

4. C'est pour ne pas compliquer les notations que nous avons considéré dans les numéros précédents une seule équation et un seul paramètre; mais le raisonnement subsiste dans le cas où équations et paramètres sont en nombre quelconque, et l'on peut énoncer ainsi qu'il suit le résultat correspondant à la proposition établie aux nos **1** et **2**.

Soit

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n; t; \mu_1, \ldots, \mu_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{27}$$

un système d'équations différentielles dépendant de paramètres arbitraires $\mu_1, \ldots, \mu_p$. On admet que, lorsque $\mu_1 = \ldots = \mu_p = 0$ et que t varie dans l'intervalle $I(t_0 < t < t_1)$, le système (27) est vérifié par

$$x_1 = y_1(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = y_n(t).$$

On suppose que dans un domaine D de la multiplicité $x_1, \ldots, x_n, t$ comprenant à son intérieur la partie de la courbe intégrale précédente correspondant à I, et que les valeurs absolues des paramètres μ sont assez petites, les f sont continues et admettent par rapport aux variables x et μ des dérivées premières continues.

Soient $a_1(\mu_1, \ldots, \mu_p), \ldots, a_n(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ des fonctions admettant des dérivées premières continues lorsque les valeurs absolues des paramètres μ sont assez petites, telles que

$$a_1(0, \ldots, 0) = y_1(t_0), \qquad \ldots, \qquad a_n(0, \ldots, 0) = y_n(t_0).$$

Les intégrales du système (27), *déterminées par les condi-*

tions initiales

$$x_1 = a_1, \quad \ldots, \quad x_n = a_n, \quad t = t_0, \tag{28}$$

sont, lorsque $|\mu_1|, \ldots, |\mu_p|$ *sont assez petites, définies dans tout l'intervalle* I, *correspondent à des courbes intérieures à* D, *et admettent par rapport à* $\mu_1, \ldots, \mu_p$ *des dérivées du premier ordre.*

Ces dérivées $\frac{\partial x_i}{\partial \mu_h} = x_{ih}$ vérifient les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_{ih}}{dt} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1} x_{1h} + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n} x_{nh} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mu_h} \\ (i = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, \ldots, p), \end{array}\right. \tag{29}$$

où les x sont remplacés par les intégrales correspondantes de (27).

On peut maintenant passer des dérivées du premier ordre aux dérivées d'ordre quelconque en modifiant convenablement les hypothèses.

Par exemple, si l'on suppose que, dans le domaine D et pour les petites valeurs de $|\mu_1|, \ldots, |\mu_p|$, les f admettent par rapport aux x et aux μ, et les a par rapport aux μ des dérivées du premier et du second ordre continues, *les* x *admettent par rapport aux paramètres* μ *des dérivées du second ordre.*

Il suffit, pour le voir, d'appliquer le résultat précédent [1] au système formé par la réunion des équations (27) et (29).

Des dérivées du second ordre on passe à celles du troisième, etc., et l'on voit ainsi que :

Si dans les conditions *précédentes les f et les a admettent par rapport aux variables x_i et μ_h des dérivées d'ordre inférieur ou égal à* N, *ces dérivées étant continues, les intégrales considérées du système* (27) *admettent aussi par rapport aux* μ *des dérivées d'ordre inférieur ou égal à* N [2].

---

[1] Les équations (29) étant linéaires, il n'est pas nécessaire de compléter les conditions précédentes par des inégalités relatives aux variables x_{ih}.

[2] Nous avons supposé que la valeur initiale t_0 de t était une constante. On pourrait aussi bien la regarder comme fonction des μ, et étudier encore, comme fonctions de μ, les valeurs des intégrales pour $t = t_0 + h$, h étant constant. On arrive à des résultats analogues aux précédents si l'on ajoute aux hypothèses précédentes celle de l'existence et de la continuité des dérivées des f par rapport à t; il suffit pour s'en assurer de faire le changement de variable $t = t_0 + t'$ qui ramène ce cas au précédent.

5. Supposons qu'on ait

$$p = r + n$$

avec

$$a_1 = \mu_{r+1} + y_1(t_0), \qquad \ldots, \qquad a_n = \mu_{r+n} + y_n(t_0),$$

et que les f soient indépendants de $\mu_{r+1}, \ldots, \mu_{r+n}$; nous obtenons la proposition suivante, dont l'intérêt a été signalé au début de cet article.

A. Soit donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n; t; \mu_1, \ldots, \mu_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{30}$$

dépendant de paramètres arbitraires $\mu_1, \ldots, \mu_r$, admettant lorsque tous ces paramètres sont nuls et que t varie dans un intervalle $\mathrm{I}(t_0 < t < t_1)$ des solutions $y_1(t), \ldots, y_n(t)$, satisfaisant en outre à la condition suivante : Lorsque le point $(x_1, \ldots, x_n; t)$ reste dans un domaine D entourant la partie de la courbe $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ correspondant à I, et que $|\mu_1|, \ldots, |\mu_r|$ sont assez petites, les f sont continues et admettent par rapport aux variables x et μ des dérivées partielles jusqu'à l'ordre N, ces dérivées étant elles-mêmes continues.

Les intégrales du système (30), *déterminées par les conditions initiales*

$$x_1 = a_1, \qquad x_n = a_n, \qquad t = t_0,$$

sont, pour des valeurs assez petites de

$$|a_1 - y_1(t_0)|, \quad \ldots, \quad |a_n - y_n(t_0)|, \quad |\mu_1|, \quad \ldots, \quad |\mu_r|,$$

intérieures à D. *Ces intégrales admettent par rapport aux valeurs initiales a et aux paramètres* μ *des dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à* N.