L. AUTONNE

Sur la fonction monogène d'une variable hypercomplexe dans un groupe commutatif

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 176-196
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__176_0>

SUR LA FONCTION MONOGÈNE D'UNE VARIABLE HYPERCOMPLEXE DANS UN GROUPE COMMUTATIF;

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

Dans un groupe (ε) de quantités hypercomplexes aux n symboles ε_α $(\beta, \alpha = 0, 1, \ldots, n-1)$, prenons deux quantités

$$x = \sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta, \qquad y = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha y_\alpha,$$

où les x_β et les y_α sont des nombres ordinaires (ou *scalaires*), réels ou complexes, variables. Si les y sont fonctions des x, $y_\alpha = y_\alpha(x_0, x_1, \ldots)$, on peut dire que y est une *fonction* de la *variable hypercomplexe* x.

Dans deux Ménoires précédents (III et IV de l'Index ci-après), j'ai cherché ce que devenait la monogénéité, car la définition ordinaire de cette dernière ne subsiste que pour les groupes commutatifs (ou à multiplication commutative).

Lorsque (ε) est un groupe simple de r^2 — *ions* $(n = r^2)$, la monogénéité (III, Index) est remplacée par un ensemble de propriétés passablement compliqué.

Revenant maintenant aux groupes commutatifs, j'ai résolu d'une façon complète le problème de la monogénéité, c'est-à-dire construit toutes les fonctions y de la variable hypercomplexe x, telles que $dy = y' dx$, où y' est aussi une quantité du groupe (ε), avec

$$dy = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \, dy_\alpha, \qquad dx = \sum_\beta \varepsilon_\beta \, dx_\beta.$$

M'appuyant sur certains résultats dus à MM. Frobenius (I, Index) et Cartan (II, Index), j'ai ramené la question au cas où les $n = m + 1$ symboles $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m$ suivent les règles suivantes de multiplication :

$$\varepsilon_\alpha \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha, \qquad \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\gamma \varepsilon_\beta = \sum_\rho \varepsilon_\rho a_{\rho\beta\gamma}$$
$$(\alpha, \beta, \gamma, \rho = 0, 1, \ldots, m),$$

les constantes scalaires $a_{\rho\beta\gamma}$ étant assujetties à certaines égalités qui expriment que la multiplication est associative dans le groupe (ε). Enfin

$$a_{\rho\beta\gamma} = a_{\rho\gamma\beta} = 0$$

pour $\rho \leqq \beta$, $\rho \leqq \gamma$.

La proposition suivante donnera alors la solution du problème :

Théorème. — *Toute fonction monogène y de la variable hypercomplexe*

$$x = \varepsilon_0 x_0 + t, \qquad t = \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m$$

est fournie par la formule

$$(0) \qquad y = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=m} \frac{t^\gamma}{\gamma!} \frac{d^\gamma u}{dx_0^\gamma},$$

où

$$u = \varepsilon_0 u_0(x_0) + \ldots + \varepsilon_m u_m(x_0)$$

est une quantité hypercomplexe qui ne dépend que de x_0.

y et u se définissent mutuellement sans ambiguïté, et l'on écrira $y = \Phi(u)$.

La formule (0) est fournie symboliquement par le développement taylorien de l'expression

$$u(x) = u(\varepsilon_0 x_0 + t).$$

où t est l'accroissement donné à la variable $\varepsilon_0 x_0$. D'ailleurs, $t^\mu = 0$ pour $\mu > m$.

Les dérivées partielles de y, de tous ordres, par rapport aux $m+1$ variables scalaires $x_0, x_1, \ldots, x_m$ sont encore des fonctions monogènes de x, suivant la formule

$$\frac{\partial^h y}{\partial x_0^{\rho_0} \ldots \partial x_m^{\rho_m}} = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \frac{\partial^h y_\alpha}{\partial x_0^{\rho_0} \ldots \partial x_m^{\rho_m}} = \varepsilon_1^{\rho_1} \ldots \varepsilon_m^{\rho_m} \Phi\left(\frac{d^h u}{dx_0^h}\right)$$
$$(h = \rho_0 + \rho_1 + \ldots + \rho_m).$$

Si l'on a posé $dy = y' dx$, la *dérivée* $y' = \frac{dy}{dx}$ de y par rapport à x n'est pas autre chose que $\frac{\partial y}{\partial x_0}$. y possède des dérivées de tous ordres

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{\partial^p y}{\partial x_0^p} = \Phi\left(\frac{d^p u}{dx_0^p}\right).$$

y possède aussi une *fonction primitive*

$$z = \Phi\left(\int u \, dx_0\right),$$

telle que

$$y = \frac{dz}{dx}.$$

Dans un travail ultérieur, j'espère étudier d'une façon approfondie certaines fonctions monogènes particulières, par exemple la fonction algébrique.

Une communication sur le même sujet a été faite au quatrième Congrès international des mathématiciens, à Rome, en 1908.

La Thèse de M. l'abbé Berloty (1886), *Théorie des quantités complexes à n unités principales,* traite aussi des fonctions monogènes d'une variable hypercomplexe; mais, fondée sur des théories déjà anciennes de Weierstrass et Dedekind, elle ne présente avec le présent travail que des rapports très éloignés.

Un résumé des présentes recherches a été inséré aux *Comptes rendus* du 1er mars 1909.

Index bibliographique.

I. Frobenius, *Theorie der hyperkomplexen Grössen* (*Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin,* avril, 1903).

II. Cartan, *Sur les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* t. XII, 1898; on consultera surtout les paragraphes IV, V, VI et VII).

III. Autonne, *Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hypercomplexe, correspondent à la monogénéité* (*Journal de Mathématiques,* 1907).

IV. Autonne, *Sur les polynomes à coefficients et à variable hypercomplexes* (*Bulletin de la Société mathématique de France,* 1906).

On renverra au présent Index par des notations comme celle-ci, par exemple :

(II, Index) ou (Index, II),

pour désigner le travail de M. Cartan.

CHAPITRE I.

RÉDUCTION DU PROBLÈME.

1° On suppose parfaitement connues du lecteur la terminologie et les notations de M. Frobenius (I, Index), qu'on suivra fidèlement dans la suite. Je les ai, du reste, déjà résumées ailleurs (III, Index). Pareillement, je supposerai connus les résultats de M. Cartan (Index, II), qui seront fréquemment mis à profit.

2° Soit donc un groupe (ε) à n *nombres fondamentaux* (*Grundzahlen*) ou *unités* $\varepsilon_\alpha (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n)$, dont la multiplication est donnée par les formules

$$(0) \qquad \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma} \qquad (a_{\alpha\beta\gamma} = \text{quantité scalaire}).$$

On nommera d'ailleurs *scalaire,* par opposition aux quantités hypercomplexes, toute quantité ordinaire, réelle ou complexe.

Soit la forme trilinéaire

$$F(\xi, y, z) = \sum_{\alpha\beta\gamma} \xi_\alpha y_\beta z_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}.$$

On envisagera avec M. Frobenius les trois matrices n-aires

$$R(\xi) = [r_{\beta\gamma}(\xi)] = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_\beta \, \partial z_\gamma}\right), \qquad S(y) = [s_{\alpha\gamma}(y)] = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_\alpha \, \partial z_\gamma}\right),$$
$$T(z) = [t_{\alpha\beta}(z)] = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_\alpha \, \partial y_\beta}\right).$$

Pour l'*unité principale e,* on a

$$S(e) = E = \text{matrice } n\text{-aire unité}.$$

3° Si le groupe (ε) est *commutatif* ou à multiplication commutative, il vient, dans les relations (o) du 2°, $a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta}$, puisque $\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\gamma \varepsilon_\beta$. Alors, les deux matrices $S(x)$ et $T(x)$ coïncident et la matrice $R(\xi)$ est symétrique, comme identique à sa transposée $R'(\xi)$.

4° ξ et t étant deux quantités hypercomplexes quelconques, on a, comme conséquence de ce que la multiplication est associative, la formule (I, Index, page 13, formule 11)

$$(o) \qquad R(\xi)\,S(t) = T'(t)\,R(\xi).$$

Le groupe (ε) est commutatif :

$$S(t) = T(t), \qquad R(\xi) = R'(\xi).$$

Alors (o) devient

$$(1) \qquad R(\xi)\,S(t) = S'(t)\,R(\xi).$$

Cela posé, transposons la matrice $R(\xi)S(t)$. On a, en vertu de (1),

$$[R(\xi)\,S(t)]' = S'(t)\,R'(\xi) = S'(t)\,R(\xi) = R(\xi)\,S(t).$$

Donc *la matrice* $R(\xi)S(t)$ *est symétrique,* résultat qui nous est utile plus loin (18°).

5° Prenons n variables scalaires x_β et n fonctions scalaires

$$y_\alpha = y_\alpha(x_1, \ldots, x_\beta, \ldots, x_n).$$

Dans le groupe (ε), la quantité hypercomplexe $y = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha y_\alpha$ sera, *par définition, fonction* de la *variable hypercomplexe* $x = \sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta$. On écrira, avec M. Frobenius, $y = f((x))$.

Par définition, la fonction y sera *monogène,* si la différentielle $dy = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha\, dy_\alpha$ est le produit de la différentielle $dx = \sum_\beta \varepsilon_\beta\, dx_\beta$ par une certaine quantité hypercomplexe u du groupe (ε).

6° Le but du présent travail est de donner l'expression générale de la fonction monogène $y = f((x))$. Utilisant les résultats de M. Cartan (II, Index), je vais montrer qu'il suffit, pour résoudre le problème dans toute sa généralité, de considérer, non plus le groupe commutatif (ε) le plus général, mais un groupe très particulier, beaucoup moins compliqué.

7° Dans tout groupe commutatif le déterminant $\Theta(x) = |S(x)|$ (2°) se décompose en facteurs linéaires ([1]). Appliquons alors les théorèmes de M. Cartan (II, Index, 38° et 74°); on constate ce qui suit.

Les n unités $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ se répartissent en k systèmes (G_λ) $(\lambda = 1, 2, \ldots, k)$, de g_λ unités respectivement, avec $n = g_1 + \ldots + g_\lambda + \ldots + g_k$, savoir les g_1 premières unités entrent dans (G_1), les g_2 suivantes entrent dans (G_2), etc. Les g_λ unités de (G_λ) engendrent un groupe G_λ de quantités hypercomplexes, lequel comporte une *variable hypercomplexe* (5°) X_λ. Le produit d'une unité de G_λ par une unité de G_μ, $\lambda \neq \mu$, est zéro; donc $X_\lambda X_\mu = 0$.

8° La variable hypercomplexe x du groupe (ε) (5°) se présente alors comme la somme $x = \sum\limits_\lambda X_\lambda$ et la variable $y = f((x))$ se présente comme la somme $y = \sum\limits_\lambda Y_\lambda$, où Y_λ est une quantité du groupe G_λ. Pareillement pour u (5°), $u = \sum\limits_\lambda U_\lambda$, où U_λ est une quantité de G_λ.

La relation $dy = u\,dx$ de monogénéité devient alors (sous le bénéfice des explications du 7°)

$$\sum_\lambda dY_\lambda = \left(\sum_\lambda U_\lambda\right)\left(\sum_\lambda dX_\lambda\right) = \sum_\lambda U_\lambda\, dX_\lambda,$$

$$\sum_\lambda (dY_\lambda - U_\lambda\, dX_\lambda) = 0.$$

Comme les n unités ε sont linéairement indépendantes, on a les k relations

$$dY_\lambda = U_\lambda\, dX_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k).$$

Donnons aux g_λ (7°) variables x qui figurent dans X_λ des

([1]) Voici comment on s'en assure immédiatement :

La trace d'une matrice est la somme des éléments situés sur la diagonale principale.

Pour que $\Theta(x)$ se décompose en facteurs linéaires, il faut et il suffit (I, Index, théorèmes II et III du paragraphe 15) que la matrice $S(x, y, z)$ ait, pour x, y et z quelconques, sa trace symétrique en x, y et z. Or cela a évidemment lieu dans un groupe commutatif.

valeurs fixes quelconques et faisons varier arbitrairement les $n - g_\lambda$ autres variables scalaires x. Alors il vient

$$o = dX_\lambda = U_\lambda\, dX_\lambda = dY_\lambda;$$

par suite

$$Y_\lambda = \text{const.}$$

Y_λ ne dépend que de X_λ et en est (8°) une fonction monogène. On écrira

$$Y_\lambda = f_\lambda((X_\lambda)) \qquad \text{et} \qquad y = f((x)) = \sum_\lambda f_\lambda((X_\lambda)).$$

La construction de la fonction monogène y, dans le groupe ε, *se ramène à celle des k fonctions monogènes* Y_λ *dans les groupes* G_λ.

9° Or, les groupes G_λ ont une nature spéciale mise en lumière par M. Cartan (II, Index, 74°). Il suffit de supposer que le groupe (ε) a cette nature.

10° Parmi les $n = m + 1$ unités de (ε), savoir $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, la première ε_0 est l'unité principale (2°); quant aux m autres, on a la formule de multiplication ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m$)

$$\varepsilon_\gamma \varepsilon_\beta = \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma} \qquad (a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta})$$

avec

$$a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta} = o$$

pour $\alpha \leqq \beta$ et $\alpha \leqq \gamma$.

On va construire la matrice $(m+1)$-aire $S(x) = T(x)$ d'un pareil groupe.

11° Prenons trois indices $g, h, k = 0, 1, \ldots, m$ et trois autres $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m$. De plus, $g = \alpha$, $h = \beta$, $k = \gamma$ respectivement, pour $g > 0$, $h > 0$, $k > 0$ respectivement.

On écrira les formules de multiplication ($b_{ghk} = b_{kgh}$)

$$\varepsilon_k \varepsilon_h = \varepsilon_h \varepsilon_k = \sum_g \varepsilon_g b_{ghk},$$

d'où

$$s_{gk}(x) = s_{gk} = \sum_h b_{ghk} x_h.$$

On a d'ailleurs vu (10°) que

$$\varepsilon_0 \varepsilon_k = \varepsilon_k \varepsilon_0 = \varepsilon_k,$$
$$\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\gamma \varepsilon_\beta = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha b_{\alpha\beta\gamma}.$$

De là on tire trois formules utiles pour la suite.

De

$$\varepsilon_0 \varepsilon_k = \sum_g \varepsilon_g b_{g0k} = \varepsilon_k$$

on tire

(I) $$\begin{cases} b_{g0k} = 0, & g \neq k, \quad b_{k0k} = 1; \\ b_{gk0} = 0, & b_{kk0} = 1. \end{cases}$$

De ce que $\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma$ ne dépend pas de ε_0, on tire

(II) $$b_{0\beta\gamma} = 0.$$

Enfin (10°)

(III) $$b_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \leqq \beta, \quad \alpha \leqq \gamma.$$

Nous sommes maintenant à même de construire la matrice $S(x)$, c'est-à-dire les expressions

$$s_{gk} = s_{gk}(x) = \sum_h x_h b_{ghk}.$$

12° *Calcul de* s_{00}.

$$s_{00} = \sum_g x_g b_{0g0}.$$

Or ((I), 11°) $b_{0g0} = 0$, $b_{000} = 1$;

$$s_{00} = x_0.$$

Calcul de $s_{0\gamma}$.

$$s_{0\gamma} = \sum_g x_g b_{0g\gamma} = x_0 b_{00\gamma} + \sum_\beta x_\beta b_{0\beta\gamma}.$$

Or $b_{00\gamma} = 0$ ((I), 11°); $b_{0\beta\gamma} = 0$ ((II), 11°);

$$s_{0\gamma} = 0.$$

Calcul de $s_{\alpha 0}$.

$$s_{\alpha 0} = \sum_g x_g b_{\alpha g 0} = \sum_g x_g b_{\alpha 0 g}.$$

Or ((I), 11°) $b_{\alpha 0 \beta} = 0$, $b_{\alpha 0 \alpha} = 1$;

$$s_{\alpha 0} = x_\alpha.$$

Calcul de $s_{\alpha\alpha}$.

$$s_{\alpha\alpha} = \sum_g x_g b_{\alpha g \alpha} = x_0 b_{\alpha 0 \alpha} + \sum_\beta x_\beta b_{\alpha\beta\alpha}.$$

Or $b_{\alpha 0 \alpha} = 1$ ((I), 11°); $b_{\alpha\beta\alpha} = 0$ ((III), 11°);

$$s_{\alpha\alpha} = x_0.$$

Calcul de $s_{\alpha\gamma}$ $(\gamma > \alpha)$.

$$s_{\alpha\gamma} = \sum_g x_g b_{\alpha g \gamma} = x_0 b_{\alpha 0 \gamma} + \sum_\beta x_\beta b_{\alpha\beta\gamma}.$$

Or $b_{\alpha 0 \gamma} = 0$ ((I), 11°); $b_{\alpha\rho\gamma} = 0$ ((III), 11°);

$$s_{\alpha\gamma} = 0.$$

Calcul de $s_{\alpha\gamma}$ $(\gamma < \alpha)$.

$$s_{\alpha\gamma} = x_0 b_{\alpha 0 \gamma} + \sum_\beta x_\beta b_{\alpha\beta\gamma}.$$

Or ((I), 11°) $b_{\alpha 0 \gamma} = 0$ et ((III), 11°)

$$s_{\alpha\gamma} = b_{\alpha\gamma 1} x_1 + \ldots + b_{\alpha\gamma,\alpha-1} x_{\alpha-1}.$$

13° En résumé, rétablissant a_{ghk} pour b_{ghk}, il viendra, pour la matrice $(m+1)$-*aire* $S(x)$, l'expression

$$\begin{array}{llllllllll}
x_0 \\
x_1 & x_0 \\
x_2 & s_{21} & x_0 \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\
x_\alpha & s_{\alpha 1} & s_{\alpha 2} & \cdots & s_{\alpha\beta} & \cdots & s_{\alpha,\alpha-1} & x_0 \\
\cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
x_m & s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{m\beta} & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & s_{m,m-1} & x_0
\end{array}$$

De plus,

$$s_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta 1} x_1 + \ldots + a_{\alpha\beta,\alpha-1} x_{\alpha-1}.$$

Par conséquent,

$$\Theta(x) = |S(x)| = x_0^{m+1}.$$

14° Supprimant les indices g, h, k (11°) devenus inutiles, j'écrirai dorénavant, pour le groupe (ε), la formule de multiplication

$$\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\gamma \varepsilon_\beta = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma},$$

et l'expression

$$s_{\alpha\gamma} = s_{\alpha\gamma}(x) = \sum_\beta x_\beta a_{\alpha\beta\gamma}$$

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\beta\gamma}).$$

CHAPITRE II.

CONSTRUCTION DE LA FONCTION MONOGÈNE $y = f((x))$.

15° Dans un groupe commutatif (ε), défini comme plus haut (9° à 14°), prenons la fonction monogène

$$y = f((x)) = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha y_\alpha(x_0,\ \ldots,\ x_\beta,\ \ldots,\ x_m)$$

de la variable hypercomplexe

$$x = \sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta \qquad (\alpha,\ \rho,\ \beta,\ \gamma = 0,\ 1,\ \ldots,\ m).$$

On a, par définition (5°),

$$dy = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \, dy_\alpha = u \, dx \left(\sum_\rho \varepsilon_\rho u_\rho\right) \left(\sum_\beta \varepsilon_\beta \, dx_\beta\right).$$

De là, par les formules connues (I, Index),

$$dy_\alpha = \sum_\beta y_{\alpha\beta} \, dx_\beta = \sum_{\rho\beta} a_{\alpha\rho\beta} u_\rho \, dx_\beta = \sum_\beta dx_\beta s_{\alpha\beta}(u),$$

$$y_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} = s_{\alpha\beta}(u).$$

Faisons en particulier $\beta = 0$: il vient (13°)

$$y_{\alpha 0} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_0} = s_{\alpha 0}(u) = u_\alpha,$$

et, finalement, *la condition nécessaire et suffisante de monogé-*

néité est le système

$$(\Omega) \qquad \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} = s_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right) = \frac{\partial}{\partial x_0} s_{\alpha\beta}(y) \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, m).$$

On peut nommer la quantité hypercomplexe u *dérivée* de y par rapport à x, et poser

$$u = \frac{dy}{dx} = f'((x)) = y' = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_0} = \frac{\partial y}{\partial x_0}.$$

16° Nommons $J = (y_{\alpha\beta})$ la matrice *jacobienne* des $(m+1)^2$ dérivées partielles $y_{\alpha\beta} = \frac{dy_\alpha}{dx_\beta}$. Le système Ω du 15° s'obtient en identifiant la matrice $(m+1)$-aire J avec la $(m+1)$-aire

$$S\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right) = \frac{\partial}{\partial x_0} S(y).$$

Soit ω_α le système de relations, aux dérivées partielles, obtenu en identifiant la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne de J avec la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne de $S\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)$. Nommons Ω_α le système total des relations $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\alpha$. Évidemment $\Omega = \Omega_m$.

Dans la matrice $S(y)$, on a (12° et 13°) $s_{\alpha\beta}(y) = 0$ pour $\beta > \alpha$ et, en vertu de Ω, $y_{\alpha\beta} = 0$. Donc :

y_α ne dépend que des variables $x_0, x_1, \ldots, x_\alpha$; il ne figure dans le système Ω_α que les fonctions $y_0, \ldots, y_\alpha$ et les variables $x_0, x_1, \ldots, x_\alpha$.

Dans le système Ω, les $m+1$ relations

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} s_{\alpha 0}(y) = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_0}$$

se réduisent à des identités. Les autres relations sont

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_0} s_{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial}{\partial x_0} \sum_{\rho=1}^{\rho=\alpha-1} a_{\alpha\beta\rho} y_\rho$$

$$(\beta \leqq 0, \ \alpha > 0);$$

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_0} s_{\alpha\alpha}(y) = \frac{\partial y_0}{\partial x_0}.$$

17° Ω est un système d'équations aux dérivées partielles, entre les $m+1$ fonctions y_α et les $m+1$ variables x_β. Toute solution, ou intégrale, de Ω fournit une fonction monogène $y=f((x))$.

Supposons que, par un procédé quelconque, on se soit procuré α fonctions $y_0, \ldots, y_{\alpha-1}$, constituant une intégrale du système $\Omega_{\alpha-1}$. Je vais construire une $(\alpha+1)^{\text{ième}}$ fonction y_α, satisfaisant au système ω_α, de façon que les $\alpha+1$ fonctions $y_0, \ldots, y_\alpha$ constituent une intégrale de Ω_α. Procédant ainsi de proche en proche, on construira $y_0, \ldots, y_m$, c'est-à-dire $y=f((x))$.

18° Lemme. — *Quand on envisage x_0 comme un paramètre, tandis que $y_0, \ldots, y_{\alpha-1}$ sont une intégrale de $\Omega_{\alpha-1}$, l'expression*

$$\varpi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\beta=\alpha} dx_\beta \frac{\partial}{\partial x_0} s_{\alpha\beta}(y) \qquad (\alpha > 0)$$

est la différentielle exacte $d\eta_\alpha$. $\eta_\alpha = \eta_\alpha(x_0;\, x_1, \ldots, x_\alpha)$ est une fonction des α variables $x_1, \ldots, x_\alpha$, laquelle dépend aussi du paramètre x_0.

Si l'on désigne par $(\beta\gamma)$ l'expression

$$(\beta\gamma) = \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\frac{\partial}{\partial x_0} s_{\alpha\beta}(y) \qquad (\beta, \gamma = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

il suffit de montrer que $(\beta\gamma) = (\gamma\beta)$.

Eu égard à la nature de $s_{\alpha\beta}$ (16°), il vient, en supposant d'abord $\beta \neq \alpha$,

$$(\beta\gamma) = \frac{\partial^2}{\partial x_0\, \partial x_\gamma} \sum_{\rho=1}^{\rho=\alpha-1} a_{\alpha\beta\rho} y_\rho = \frac{\partial}{\partial x_0} \sum_{\rho=1}^{\rho=\alpha-1} a_{\alpha\beta\rho} \frac{\partial y_\rho}{\partial x_\gamma}.$$

Comme $\rho < \alpha$, il est licite, puisque $y_0, \ldots, y_{\alpha-1}$ sont une intégrale de $\Omega_{\alpha-1}$ (17°), de remplacer $\frac{\partial y_\rho}{\partial x_\gamma}$ par $\frac{\partial}{\partial x_0} s_{\rho\gamma}(y)$. Alors

$$(\beta\gamma) = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \sum_{\rho=1}^{\rho=\alpha-1} a_{\alpha\beta\rho} s_{\rho\gamma}(y).$$

D'ailleurs $a_{\alpha\beta 0} = 0$ et $a_{\alpha\beta\rho} = 0$ pour $\rho \geqq \alpha$ (13°). Il est ainsi licite d'écrire $\sum_{\rho=0}^{\rho=m}$ au lieu de $\sum_{\rho=1}^{\rho=\alpha-1}$. D'ailleurs $a_{\alpha\beta\rho}$ n'est pas autre chose que $r_{\beta\rho}(\varepsilon_\alpha)$ (2°) et

$$(\beta\gamma) = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\sum_{\rho=0}^{\rho=m} r_{\beta\rho}(\varepsilon_\alpha)s_{\rho\gamma}(y) = \frac{\partial^2 W_{\beta\gamma}}{\partial x_0^2},$$

$W_{\beta\gamma}$ désignant l'élément de ligne $1+\beta$ et de colonne $1+\gamma$ dans la matrice $(m+1)$-aire $W = R(\varepsilon_\alpha)\,S(y)$. Or, la matrice W est symétrique (4°);

$$W_{\beta\gamma} = W_{\gamma\beta}, \qquad \text{d'où} \qquad (\beta\gamma) = (\gamma\beta).$$

C. Q. F. D.

Faisons maintenant $\beta = \alpha$; on a encore

$$(\alpha\gamma) = \frac{\partial^2 s_{\alpha\alpha}(y)}{\partial x_0\,\partial x_\gamma} = \frac{\partial^2 y_0}{\partial x_0\,\partial x_\gamma} = 0$$

$$= (\gamma\alpha) = \frac{\partial^2 s_{\alpha\gamma}(y)}{\partial x_0\,\partial x_\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial x_0\,\partial x_\alpha}\sum_{\rho=1}^{\rho=\alpha-1} a_{\alpha\gamma\rho}y_\rho,$$

puisque x_γ manque dans y_0 et x_α manque dans y_ρ $(\rho < \alpha)$.

Le lemme est ainsi complètement établi.

19° Pour remonter de la différentielle $\varpi_\alpha = d\eta_\alpha$ à la fonction $\eta_\alpha(x_0; x_1, \ldots, x_\alpha)$ elle-même, on n'a qu'à employer un procédé élémentaire bien connu du calcul intégral.

Soit la différentielle exacte

$$dp = p_1\,dx_1 + \ldots + p_i\,dx_i + \ldots + p_j\,dx_j + \ldots + p_m\,dx_m,$$
$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}.$$

On a

$$(c_i = \text{const.}), \qquad p = \int_{c_m}^{x_m} p_m\,dx_m + \Psi(x_1, \ldots, x_{m-1});$$

puis

$$p_i = \frac{\partial p}{\partial x_i} = \int_{c_m}^{x_m} \frac{\partial p_m}{\partial x_i}\,dx_m + \frac{\partial\Psi}{\partial x_i}$$
$$= \int_{c_m}^{x_m} \frac{\partial p_i}{\partial x_m}\,dx_m + \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} = p_i - p_i(x_1, \ldots, x_{m-1}, c_m) + \frac{\partial\Psi}{\partial x_i}.$$

Enfin

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} = p_i(x_1, \ldots, x_{m-1}, c_m).$$

De même

$$\Psi = \int_{c_{m-1}}^{x_{m-1}} p_{m-1}(x_1, \ldots, x_{m-1}, c_m)\, dx_{m-1} + \chi(x_1, \ldots, x_{m-2}),$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_j} = p_j(x_1, \ldots, x_{m-2}, c_{m-1}, c_m), \qquad \ldots.$$

Bref on aura, pour la quantité dont dp est la différentielle, l'expression $p + v$, où v est une quantité indépendante des variables $x_1, \ldots, x_m$ et d'ailleurs arbitraire, tandis que p se trouve obtenue, par le procédé qui précède, sans aucune ambiguïté.

Il va sans dire que l'entier m de la présente démonstration n'est pas forcément égal à l'entier m qui figure dans le reste du travail.

20° Le calcul précédent donnera donc, pour l'expression dont $\varpi_\alpha = d\eta_\alpha$ est la différentielle exacte, la formule $\eta_\alpha + v_\alpha$, où η_α est connu sans ambiguïté et v_α est une fonction, d'ailleurs arbitraire, de x_0.

Cela posé, qu'expriment les α relations (17°) du système ω_α, savoir

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_0} s_{\alpha\beta}(y) \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \alpha)?$$

Simplement que y_α et η_α ont les mêmes dérivées partielles $\dfrac{\partial}{\partial x_\beta}$. Autrement dit,

$$y_\alpha = \eta_\alpha + u_\alpha,$$

où u_α est une fonction *arbitraire* de x_0.

Le même procédé, u_α restant arbitraire, permet de passer à $y_{\alpha+1}$, en introduisant une nouvelle arbitraire $u_{\alpha+1}(x_0)$, etc.

21° Construisons directement y_0 et y_1. y_0 ne dépend que de x_0; $y_0 = u_0(x_0)$, $u_0 =$ fonction arbitraire. Pour ϖ_1 (18°), il vient

$$\frac{\partial}{\partial x_0} s_{11}(y)\, dx_1 = dx_1 \frac{\partial}{\partial x_0} y_0 = u_{01}\, dx_1,$$

$$u_{01} = \frac{du_0}{dx_0}.$$

Donc $y_1 = u_1 + u_{01} x_1$, $u_1 =$ fonction arbitraire de x_0

22° Lemme. — *On a*

$$y_\alpha = \sum_{\beta\gamma} u_{\beta\gamma} \mathrm{F}_{\alpha\beta\gamma},$$

où

$$u_{\beta\gamma} = \frac{du_\beta}{dx_0^\gamma}, \qquad u_{\beta_0} = u_\beta,$$

tandis que $F_{\alpha\beta\gamma}$ *est un polynome en* $x_1, \ldots, x_\alpha$ *dont les coefficients sont constants et ne dépendent que du groupe* (ε). *Enfin*

$$\beta + \gamma \leqq \alpha.$$

Le lemme est vrai pour

$$y_0 = u_0 = u_{00}, \qquad F_{000} = 1,$$
$$y_1 = u_{10} + u_{01} x_1, \qquad F_{110} = 1, \qquad F_{101} = x_1.$$

Je dis que, s'il est vrai pour $y_0, \ldots, y_{\alpha-1}$, il est encore vrai pour y_α.

Formons (18°) l'expression

$$\varpi_\alpha = \sum_{\rho=1}^{\rho=\alpha} dx_\rho \frac{\partial}{\partial x_0} s_{\alpha\rho}(y).$$

Or

$$s_{\alpha\rho}(y) = a_{\alpha\rho 1} y_1 + \ldots + a_{\alpha\rho,\alpha-1} y_{\alpha-1}; \qquad s_{\alpha\alpha}(y) = y_0.$$

Puisque $y_0, \ldots, y_{\alpha-1}$ satisfont au lemme, on a

$$s_{\alpha\rho}(y) = \sum_{\beta\gamma} u_{\beta\gamma} \varphi_{\alpha\beta\gamma\rho}, \qquad \beta + \gamma \leqq \alpha - 1,$$

où les expressions $\varphi_{\alpha\beta\gamma\rho}$, par leur formation même, ne dépendent pas du choix des u_β et sont, comme les F, des polynomes en $x_1, \ldots, x_{\alpha-1}$ à coefficients constants.

De là

$$\frac{\partial}{\partial x_0} s_{\alpha\rho}(y) = \sum_{\beta\gamma} u_{\beta,\gamma+1} \varphi_{\alpha\beta\gamma\rho};$$
$$\varpi_\alpha = \sum_{\beta\gamma} u_{\beta,\gamma+1} \theta_{\alpha\beta\gamma}; \qquad \theta_{\alpha\beta\gamma} = \sum_\rho \varphi_{\alpha\beta\gamma\rho} dx_\rho.$$

$\varpi_\alpha = d\eta_\alpha$ est (18°) une différentielle exacte dès que $y_0, \ldots, y_{\alpha-1}$ sont une intégrale de $\Omega_{\alpha-1}$, c'est-à-dire (20°) *pour tout choix* des $u_0, u_1, \ldots, u_{\alpha-1}$. Donc chacune des expressions $\theta_{\alpha\beta\gamma}$ est une différentielle exacte $dF_{\alpha\beta\gamma}(x_1, \ldots, x_\alpha)$. Remontons de $\theta_{\alpha\beta\gamma}$ à $F_{\alpha\beta\gamma}$ par le calcul du 19°. $F_{\alpha\beta\gamma}$ sera de la nature voulue au lemme.

Il viendra finalement (20°)

$$y_\alpha = \eta_\alpha + u_\alpha = u_{\alpha 0} + \sum_{\beta\gamma} u_{\beta,\gamma+1} F_{\alpha\beta\gamma}, \qquad \beta+\gamma \leqq \alpha - 1$$

ou encore, posant $F_{\alpha\alpha 0} = 1$,

$$y_\alpha = \sum_{\beta\gamma} u_{\beta\gamma} F_{\alpha\beta\gamma}, \qquad \beta+\gamma \leqq \alpha.$$

C. Q. F. D.

Dans la formule

$$y_\alpha = u_\alpha(x_0) + \eta_\alpha(x_0\,;\, x_1, \ldots, x_\alpha),$$

je supposerai toujours

$$\eta_\alpha(x_0\,;\, 0, 0, \ldots) = 0.$$

Sinon, il suffirait de remplacer u_α par $u_\alpha + \eta_\alpha(x_0\,;\, 0, \ldots)$, ce qui n'est ni plus ni moins général.

Autrement dit, je supposerai que, pour

$$t = \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m = 0,$$

l'hypercomplexe y se réduit à l'hypercomplexe

$$u = \varepsilon_0 u_0 + \ldots + \varepsilon_m u_m.$$

23° Posons

$$F_{\beta\gamma} = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha F_{\alpha\beta\gamma}.$$

Il viendra

$$(1) \qquad y = \sum_{\beta\gamma} u_{\beta\gamma} F_{\beta\gamma}, \qquad \beta+\gamma \leqq m,$$

où les expressions $F_{\beta\gamma}(x_1, \ldots, x_m)$ sont les polynomes à coefficients constants et hypercomplexes. Ces polynomes dépendent *uniquement* du groupe (ε) et sont *les mêmes pour tout choix des $m+1$ fonctions $u_{\beta 0} = u_\beta$ de x_0*, c'est-à-dire pour toute fonction monogène $f((x))$.

C'est ce qui résulte de la discussion précédente, depuis 18°.

24° Il suffit donc, pour avoir les $F_{\beta\gamma}$, de choisir une fonction monogène $f((x))$ particulière, où ces polynomes apparaissent avec évidence.

25° La fonction $y = \varepsilon_\beta x^{m-\beta}$ est évidemment monogène et a pour dérivée $\varepsilon_\beta (m - \beta) x^{m-\beta-1}$. Il viendra

$$\varepsilon_\beta x^{m-\beta} = \varepsilon_\beta (\varepsilon_0 x_0 + t)^{m-\beta} = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=m-\beta} \varepsilon_\beta \frac{t^\gamma}{\gamma!} \frac{x_0^{m-\beta-\gamma}(m-\beta)!}{(m-\beta-\gamma)!}.$$

Faisons (22°, *in fine*) $t = 0$; y se réduit à

$$u = \varepsilon_\beta x_0^{m-\beta}.$$

Comparons avec l'expression (1) du 23°; on trouve

$$u_{\beta'} = 0, \qquad \beta' \neq \beta, \qquad u_\beta = x_0^{m-\beta},$$

$$u_{\beta\gamma} = \frac{(m-\beta)!\, x_0^{m-\beta-\gamma}}{(m-\beta-\gamma)!},$$

et enfin

$$F_{\beta\gamma} = \varepsilon_\beta \frac{t^\gamma}{\gamma!}, \qquad t = \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m.$$

De là, pour une fonction monogène quelconque

$$y = f((x)) = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=m} P_\gamma \frac{t^\gamma}{\gamma!},$$

$$P_\gamma = \sum_{\beta=0}^{\beta=m-\gamma} u_{\beta\gamma} \varepsilon_\beta.$$

26° L'expression de P_γ peut être simplifiée par une proposition qu'on va établir.

Prenons un entier μ, $1 \leqq \mu \leqq m$, et μ indices α_i ($i = 1, 2, \ldots, \mu$), distincts ou non, dans la suite $1, 2, \ldots, m$. Désignons par Q_μ un quelconque des produits

$$\prod_i \varepsilon_{\alpha_i}.$$

LEMME [μ]. — *On a*

$$\varepsilon_\lambda Q_\mu = 0,$$

dès que

$$\lambda = \varphi(\mu) = m - \mu + \sigma, \qquad \sigma \geqq 1.$$

Je dis que le lemme [μ] est la conséquence du lemme [$\mu - 1$]. En effet,

$$\varepsilon_\lambda Q_\mu = \varepsilon_\lambda \varepsilon_\alpha Q_{\mu-1} = Q_{\mu-1} \sum_\rho \varepsilon_\rho a_{\rho\lambda\alpha}, \qquad \rho = \lambda + j, \qquad j \geqq 1,$$

le tout conformément aux propriétés du groupe (ε), expliquées au Chapitre I. Or

$$\rho = \lambda + j = m - (\mu - 1) + \sigma + j - 1 = \varphi(\mu - 1),$$

puisque le nombre $\sigma + j - 1$ est sûrement positif. Alors

$$\varepsilon_\rho Q_{\mu-1} = \varepsilon_{\varphi(\mu-1)} Q_{\mu-1} = 0$$

en vertu du lemme $[\mu - 1]$ supposé vrai.

On a, par suite,

$$\varepsilon_\lambda Q_\mu = 0,$$

et le lemme $[\mu]$ est établi.

Vérifions enfin le lemme $[1]$. Faisons $\mu = 1$, $\lambda = \varphi(\mu) = m$. On a bien

$$\varepsilon_\lambda \varepsilon_\alpha = \varepsilon_m \varepsilon_\alpha = 0.$$

Il vient aussi

$$t^\mu = (\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m)^\mu = \sum \prod_i x_{\alpha_i} \prod_i \varepsilon_{\alpha_i}.$$

En vertu du lemme $[\mu]$, *l'expression* $\varepsilon_\lambda t^\mu$ *est nulle dès que* $\lambda + \mu > m$.

C'est là le résultat que nous cherchions.

27° Reprenons la formule du 25° :

$$y = \sum_\beta P_\gamma \frac{t^\gamma}{\gamma!}, \qquad P_\gamma = \sum_{\beta=0}^{\beta=m-\gamma} \varepsilon_\beta u_{\beta\gamma}.$$

En vertu de ce qui précède (26°),

$$t^\gamma \sum_{\beta=m-\gamma+1}^{\gamma=m} \varepsilon_\beta u_{\beta\gamma} = 0.$$

Il est licite de remplacer P_γ par

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=m} \varepsilon_\beta u_{\beta\gamma} = \frac{d^\gamma}{dx_0^\gamma} \sum_{\beta=0}^{\beta=m} \varepsilon_\beta u_\beta = u^{(\gamma)} = \frac{d^\gamma u}{dx_0^\gamma},$$

u étant la quantité hypercomplexe dont les u_β sont les coordonnées.

En résumé, il vient la proposition suivante qui contient toute la présente théorie :

Théorème. — *Toute fonction monogène* $y = f((x))$ *de la variable hypercomplexe* x, *dans le groupe commutatif* (ε), *est* *donnée par la formule*

$$y = f((x)) = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=m} \frac{t^\gamma}{\gamma!} \frac{d^\gamma u}{dx_0^\gamma},$$

où u est une quantité hypercomplexe qui ne dépend que de x_0. La quantité u et la fonction y se définissent mutuellement sans ambiguïté.

y se réduit à u pour $x_1 = \ldots = x_m = t = 0$.

La formule qui donne y peut se représenter symboliquement par le développement taylorien de $u(x_0 + t)$, où t serait l'accroissement donné à la variable x_0.

28° Vérifions *a posteriori* que $f = f((x))$ ainsi définie est monogène.

Soit $\delta\omega$ ce que devient la différentielle $d\omega(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ pour $dx_0 = 0$. On a la condition de monogénéité (15°)

$$dy = \varepsilon_0 y'\, dx_0 + \delta y = y'\, dx = y'(\varepsilon_0\, dx_0 + \delta t),$$
$$\delta y = y'\, \delta t.$$

Dans le cas actuel,

$$y = u + u^{(1)} t + \ldots + u^{(m)} \frac{t^m}{m!},$$

$$y' = u^{(1)} + u^{(2)} t + \ldots + u^{(m+1)} \frac{t^m}{m!},$$

$$\delta y = \left(u^{(1)} + u^{(2)} t + \ldots + u^{(m)} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\right) \delta t.$$

La relation $\delta y = y'\,\delta t$ devient

$$0 = t^m\, \delta t = \delta t^{m+1},$$

et est vérifiée, car $t^{m+1} = 0$, puisque la matrice

$$S(t^{m+1}) = S^{m+1}(t) = 0,$$

comme on s'en assure aisément, eu égard au Chapitre I.

29° Pour exprimer la dépendance mutuelle de y et de u, on écrira $y = \Phi(u)$. On vérifie de suite que $y' = \frac{dy}{dx_0}$ est monogène avec

$$y' = \Phi(u^{(1)}).$$

La condition de monogénéité $dy = y'\,dx$ ou (28°) $\delta y = y'\,\delta t$ donne immédiatement, pour $\tau > 0$,

$$\frac{\partial y}{\partial x_\tau} = y'\,\varepsilon_\tau = \varepsilon_\tau\, \Phi(u^{(1)}).$$

De là, en général,

$$\frac{\partial^h y}{\partial x_0^{\rho_0} \ldots \partial x_m^{\rho_m}} = \varepsilon_1^{\rho_1} \ldots \varepsilon_m^{\rho_m} \Phi(u^{(h)})$$
$$(h = \rho_0 + \ldots + \rho_m).$$

Ainsi : *la fonction monogène y possède, par rapport aux variables scalaires* $x_0, \ldots, x_m$, *des dérivées partielles de tous ordres, lesquelles sont aussi des fonctions monogènes de* x. *Pour* p *quelconque*

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{\partial^p y}{\partial x_0^p}.$$

Soit $z = \Phi\left(\int u\, dx_0\right)$. On aura

$$\frac{dz}{dx} = y.$$

z est une fonction monogène de x, *fonction primitive* de $y = \Phi(u)$.

30° Soient $f((x))$ et $\varphi((x))$ deux fonctions monogènes de la variable hypercomplexe x. Je dis que *l'expression* $f\big((\varphi((x)))\big)$ *peut encore s'écrire* $\mathrm{F}((x))$.

Posons, en effet,

$$y = f((z)), \qquad z = \varphi((x)).$$

Il viendra, par hypothèse,

$$dy = f'((z))\,dz, \qquad dz = \varphi'((x))\,dx, \qquad dy = f'((z))\,\varphi'((x))\,dx,$$
$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}'((x)) = f'((z))\,\varphi'((x)).$$

C. Q. F. D.

31° On a vu (16°) que les deux matrices $(m+1)$-*aires*

$$\mathrm{J} = \left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial x_0} \mathrm{S}(y)$$

sont identiques. Donc

$$\frac{\partial(y_0, \ldots, y_m)}{\partial(x_0, \ldots, x_m)} = |\mathrm{J}| = \left|\frac{\partial}{\partial x_0}\mathrm{S}(y)\right| = \left(\frac{\partial y_0}{\partial x_0}\right)^{m+1} = \left[\frac{du_0(x_0)}{dx_0}\right]^{m+1},$$

égard à la nature de S (13°). Si $u_0(x_0)$ n est pas une constante, on peut exprimer les x_β à l'aide des y_α. On procédera d'ailleurs de proche en proche, puisque x_α n'apparaît que dans y_α, au premier degré et avec le coefficient

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial y_0}{\partial x_0} = \frac{du_0}{dx_0}.$$

Bref, on peut parler de la *fonction inverse* de la fonction $y = f((x))$. Je dis que *cette fonction inverse est monogène*. En effet, de $dy = y'dx$, on tire $dx = y'^{-1}\,dy$. On a le droit de parler de l'expression y'^{-1}, puisque la matrice

$$S(y') = \frac{\partial}{\partial x_0} S(y)$$

est invertible.

On écrira

$$y = f((x)), \qquad x = f_1((y)).$$

32° La fonction monogène (29°) $\Phi(u) = f((x))$ se réduit à U (27°), quand la variable hypercomplexe x prend la valeur scalaire $\varepsilon_0 x_0$ ou x_0. Ainsi

$$U = f((x_0)).$$

Reprenons les notations du 30°. Pour $x = \varepsilon_0 x_0$,

$$z = \Phi(w) = \varphi((x))$$

se réduit à w, tandis que

$$F((x)) = \Phi(u)$$

se réduit à u. Il vient donc (30°)

$$u = f((w)).$$

33° Faisons en particulier $\varphi((x)) = f_1((x)) = \Phi(w) =$ fonction inverse de $f((x))$. Alors $F((x)) = x$, $u = x_0$, et, sous le bénéfice du 32°, $x_0 = f((w))$.

De même, si $f((x)) = \Phi(v)$, $x_0 = f_1((v))$. Bref,

$$x_0 = f((w)) = f_1((v)).$$

D'où les formules

$$f((x)) = \Phi(v), \qquad f_1((x)) = \Phi(w).$$
$$w = f_1((f_1((v)))), \qquad v = f((f((w)))).$$