BULLETIN DE LA S. M. F.

A. BUHL

Sur la croissance des coefficients des séries trigonométriques analytiques

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 108-115
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__108_1>

SUR LA CROISSANCE DES COEFFICIENTS DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES ANALYTIQUES;

PAR M. A. BUHL.

1. Les séries trigonométriques définissent *en général* des fonctions non analytiques : la variable étant réelle, elles ne supportent pas qu'on y substitue une variable complexe. Mais, en dehors de ces généralités, il y a cependant le cas très important où l'on construit une série de Fourier en partant d'une fonction analytique définie dans une certaine couronne de Laurent; un changement de variable exponentiel fait correspondre à la série de Laurent, valable dans sa couronne, une série de Fourier valable dans une bande de champ complexe.

Ce sont là des résultats exposés dans tous les Traités d'Analyse; j'emprunte la rédaction précise qui suit à celui de M. C. Jordan (2e édition, t. II, p. 276) :

Soit $f(z)$ une fonction satisfaisant à la relation

$$f(z+2\omega)=f(z)$$

et qui n'ait aucun point critique dans la bande comprise entre deux droites parallèles L, L′, *faisant avec l'axe réel un angle égal à l'argument de* 2ω. *On aura dans cette bande*

$$(1)\qquad f(z)=\frac{1}{2\omega}\int_l\left[1+2\sum_{m=1}^{m=\infty}\cos\frac{m\pi}{\omega}(\alpha-z)\right]f(\alpha)\,d\alpha,$$

l désignant une droite de longueur 2ω parallèle à L *et* L′, *et située arbitrairement dans la bande.*

Je me propose ici d'étudier *directement* ce théorème; il n'en a nul besoin en lui-même, mais l'étude fait rencontrer certaines relations concernant la croissance des coefficients de (1) auxquelles il ne me paraît pas inutile d'arriver par une voie élémentaire.

Pour plus de simplicité, je supposerai toujours $\omega=\pi$ et n'envisagerai que des séries à coefficients a_n et b_n *réels*.

2. Soit la série

$$(2)\qquad \frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots+b_1\sin x+b_2\sin 2x+\ldots.$$

Essayons de poser directement $x=u+iv$.

On a

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,m(u+iv)=\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,mu\cos imv\pm\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,mu\sin imv,$$

$$\begin{matrix}2\ \cos\\ 2i\sin\end{matrix}\,imv=e^{-mv}\pm e^{mv};$$

la série (2) reste bien trigonométrique par rapport à u, mais elle a alors des coefficients exponentiels dépendant seulement de v, lesquels, si $v\neq 0$, menacent de croître indéfiniment avec m; la convergence n'est donc plus assurée, et c'est là en somme la manière la plus directe de montrer que l'introduction d'une variable complexe dans la série (2) lui fait perdre, *en général*, toute signification.

S'il y a des cas où il en est autrement, c'est qu'on a, dans ces cas,

$$\lim_{m=\infty} \frac{a_m}{b_m} e^{\pm mv} = \text{quantité finie.} \tag{3}$$

Ce sont là deux conditions distinctes suivant qu'on prend l'un ou l'autre des signes de l'exposant $\pm mv$; elles ne sont d'ailleurs pas suffisantes pour assurer la convergence, mais elles sont nécessaires.

On peut remarquer tout de suite que les séries trigonométriques qu'on forme d'ordinaire comme premiers exemples, telles celle qui représente $\frac{x}{2}$ de $-\pi$ à $+\pi$, celle qui représente $-\frac{\pi}{4}$ de $-\pi$ à zéro et $+\frac{\pi}{4}$ de zéro à $+\pi$, etc., ne peuvent être assujetties à des conditions du type (3); les coefficients a_m ou b_m y sont comparables à $\frac{1}{m}$; ils décroissent rationnellement et non exponentiellement.

3. Étudions, pour fixer les idées, la première des conditions (3), c'est-à-dire prenons le signe $+$ pour l'exposant. Supposons d'abord qu'on ait trouvé une valeur v_1 de v pour laquelle la condition soit satisfaite. Alors, si l'on remplace v par $v_1 - \varepsilon$, ε étant positif et aussi petit qu'on veut, on a

$$\lim \frac{a_m}{b_m} e^{m(v_1-\varepsilon)} = \text{quantité finie} \times \lim e^{-m\varepsilon}. \tag{4}$$

Cette fois, quand m croît indéfiniment, l'expression en litige tend vers zéro comme terme d'une progression géométrique convergente, et, par suite, la convergence des termes de (2) concernés par la condition précédente est rigoureusement assurée, ces termes étant de la nature de ceux d'une progression géométrique convergente, à cela près qu'ils contiennent des sinus ou des cosinus en mu toujours réels et, par suite, ne sortant jamais des limites -1, $+1$.

Géométriquement, la première des conditions (3) astreint la variable $x = u + iv$ à rester dans le champ complexe *au-dessous* d'une certaine droite $v = v_1$ parallèle à l'axe réel. Aux a_m et aux b_m pourront correspondre deux droites : rester au-dessous d'elles, c'est rester sous la droite inférieure.

On verrait, d'une manière tout à fait identique, que la seconde des conditions (3) astreint $x = u + iv$ à rester *au-dessus* d'une autre droite $v = v_2$ parallèle aussi à l'axe réel.

L'espace compris entre ces deux droites sera la *bande de convergence* du développement (2).

Supposons qu'on sache directement que la série (2) représente une fonction sans singularités sur l'axe réel, et même dont toutes les singularités sont à distance finie dudit axe. Alors, pour établir la bande de convergence, on peut tracer deux parallèles de part et d'autre de l'axe réel et d'abord très voisines de cet axe, puis chercher à les en écarter. Chacune sera arrêtée par les points singuliers d'ordonnée minimum (¹); mais, pour bien comprendre cette dernière affirmation, il faut se reporter au numéro suivant.

4. *Dérivabilité.* — Admettons définitivement pour tout ce qui suit que la série (2) ait une bande de convergence parallèle à l'axe réel et contenant cet axe.

Je dis que *les dérivées, formées terme à terme et jusqu'à un ordre quelconque k, du développement* (2) *admettent la même bande de convergence.*

En effet, dans de telles dérivées, les coefficients a_m ou b_m sont multipliés, au signe près, par m^k; par suite, le second membre de (3) devient le produit d'une quantité finie par m^k, ce qui ne reste pas fini quand m croît indéfiniment, mais ce qui donnera dans (4) un second membre tendant tout de même vers zéro. Donc, pour les séries dérivées, *l'intérieur* de la bande de convergence sera exactement le même que pour la série primitive; la seule différence est que la série primitive pourrait converger sur certaines portions des droites limitrophes sans qu'il en soit de même pour les séries dérivées.

5. *Intégrabilité.* — *Les intégrales, formées terme à terme, et jusqu'à un ordre quelconque k, du développement* (2) *admettent la même bande de convergence.* C'est là un résultat tout à fait analogue au précédent. Intégrant (2) k fois, les coefficients a_m

(¹) A cause de la périodicité, ces points se répètent évidemment en nombre infini sur une parallèle à l'axe réel.

ou b_m sont multipliés par m^{-k}; il en est de même du second membre de (3) qui tend alors vers zéro quand m croît indéfiniment; mais malgré cela, si l'on remplace v par $v_1 + \varepsilon_1$, v_1 ayant la même signification qu'au n° 3, le second membre de (3) sera le produit d'une quantité finie par m^{-k} et par $e^{m\varepsilon}$, ce qui croîtra indéfiniment avec m et fera diverger la série intégrale considérée. Donc l'intégration ne peut augmenter d'une quantité finie, si petite soit-elle, la largeur de la bande de convergence d'une série (2); il peut arriver tout au plus qu'une série non convergente sur les droites limitrophes donne une série intégrale convergeant sur ces droites ou du moins sur certaines portions.

6. Il est maintenant facile de justifier l'affirmation qui termine le n° 3. Les points singuliers d'une fonction analytique sont des points pour lesquels la fonction ou ses dérivées, à partir d'un certain ordre, cessent d'être finies ou bien déterminées. Dans ces conditions, *si une série* (2) *représente une telle fonction* $f(x)$, la série ou certaines des séries dérivées devraient cesser d'être finies ou bien déterminées en certains points, tous également propres à limiter la largeur de la bande de convergence, car, d'après le numéro précédent, limiter celle-ci pour une série dérivée entraîne une limitation identique pour la série primitive.

7. *Application.* — Il est bon d'éclaircir tout ce qui précède par le choix de quelque exemple. On en trouve facilement de très élégants.

Considérons l'égalité

$$\int_C \frac{z^m\, dz}{z-a} = 2i\pi a^m$$

qui résulte immédiatement du théorème de Cauchy, si C est un cercle de rayon 1 ayant l'origine pour centre et si a est un nombre réel < 1. Soit maintenant une intégrale analogue où a sera remplacé par un autre nombre réel $b > 1$; cette seconde intégrale sera nulle.

En la retranchant de la première, on aura

$$(a-b)\int_C \frac{z^m\, dz}{z^2-(a+b)z+ab} = 2i\pi a^m.$$

Posons maintenant $z = e^{ix}$, $ab = 1$, et prenons la partie réelle de l'intégrale ; il viendra

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2} \cos mx\, dx = 2\pi a^m,$$

α étant une constante réelle quelconque.

L'existence d'une telle intégrale définie entraîne celle de la série

$$(5) \qquad \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2} = 1 + 2a\cos x + 2a^2 \cos 2x + \ldots$$

qu'on aurait d'ailleurs pu obtenir par d'autres méthodes.

Cherchons la largeur de la bande de convergence.

La première des conditions (3) s'écrit ici

$$\lim_{m=\infty} a^m e^{mv} = \lim_{m=\infty} e^{m(v+\log a)} = \text{quantité finie};$$

elle ne peut avoir lieu que pour $v + \log a \leqq 0$; donc v est un nombre dont les valeurs positives ne peuvent dépasser $-\log a$ (n'oublions pas que $a < 1$).

La seconde des conditions (3) montrerait de même que les valeurs négatives de v ne peuvent tomber au-dessous de $\log a$. Donc la bande de convergence du développement (5) s'étend de part et d'autre de l'axe réel sur une largeur égale à $-\log a$. Si ces résultats sont exacts, on doit trouver, sur chacune des droites limitrophes, des singularités de la fonction (5). Or, résolvant l'équation $1 - 2a\cos x + a^2 = 0$, on trouve

$$x = 2k\pi \pm i\log a;$$

donc (5) est une fonction méromorphe dont tous les pôles sont sur les droites considérées.

Dans ce qui précède, les quantités v_1 et v_2 du n° 3 sont égales et de signes contraires ; géométriquement, la bande de convergence admet l'axe réel pour axe de symétrie. Il serait aisé de trouver des cas différents. Ainsi, pour la série

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos(x-i\beta)+a^2} = 1 + 2a\cos i\beta\cos x + 2a^2\cos 2i\beta\cos 2x + \ldots \\ + 2a\sin i\beta \sin x + 2a^2 \sin 2i\beta \sin 2x + \ldots,$$

les conditions (3) se réduisent finalement à

$$\lim_{m=\infty} a^m e^{\mp m\beta} e^{\pm m v} = \text{quantité finie};$$

on déduit de là

$$\log a - \beta + v \leqq 0 \qquad \text{ou} \qquad \log a + \beta - v \leqq 0,$$

d'où l'on conclut

$$v_1 = \beta - \log a \qquad \text{et} \qquad v_2 = \beta + \log a.$$

On retrouve la bande de l'exemple précédent, mais élevée de β, ce à quoi l'on devait évidemment s'attendre.

8. *Séries trigonométriques valables dans tout le champ complexe.* — Ce qui précède se rapporte surtout aux séries (2) dont les coefficients décroissent comme de certaines exponentielles et qui ont une certaine bande de convergence. Si la croissance est d'un type *moins rapide*, comme on l'a vu ou à la fin du n° **2**, la bande se réduit à l'axe réel. Inversement, à une décroissance *plus rapide* correspond une série (2) valable dans tout le plan. Alors le second membre de (3) est toujours nul, le raisonnement du n° 3 est inutile, la série convergeant toujours, non par comparaison avec une progression géométrique, mais avec une série encore plus convergente qu'une telle progression.

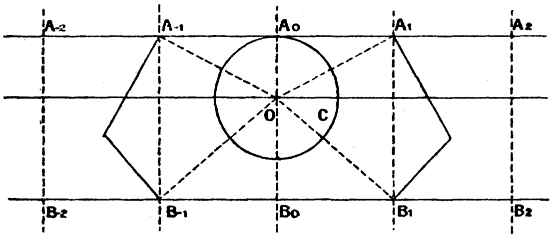
Ainsi, à des coefficients a_m ou b_m de la forme

$$e^{-m^2}, \quad e^{-m^p}, \quad e^{-c^m}, \quad \dots,$$

correspondraient certainement des séries (2) convergeant dans tout le champ complexe. La recherche de telles séries est donc liée à celle des fonctions de m croissant plus rapidement, au moins pour les valeurs entières et positives de la variable, qu'une exponentielle.

9. *Prolongement analytique. Analogies avec les séries sommables de M. Borel.* — Supposons que la fonction $f(x)$ ait des points singuliers A_0 et B_0 sur l'axe imaginaire, lesquels se reproduisent en A_1, B_1, A_{-1}, B_{-1}, ..., à cause de la périodicité. Traçons la bande de convergence, le cercle taylorien C, de centre O,

et le polygone borélien qui sera ici un hexagone obtenu en menant en A_1 une perpendiculaire à OA_1 et en faisant de même en B_1, B_{-1}, A_{-1}. On suppose qu'en dehors des points singuliers mentionnés, il n'y en ait pas d'autre, K tel que la perpendiculaire en K à OK



diminue l'hexagone. Dès lors, $f(x)$ est développable en série entière dans C, en série trigonométrique (2) dans la bande comprise entre la droite des A et celle des B, en série de polynomes tayloriens s_n, sous la forme

$$f(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{e^{\xi}}, \tag{6}$$

dans l'hexagone. Je rappelle que s_n est la somme des $n+1$ premiers termes du développement taylorien obtenu dans C et que c_n est le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de la série e^{ξ}.

Dans ces conditions, la série (2) effectue un véritable prolongement analytique hors de C; la série borélienne en fait autant et est ici pratiquement équivalente, car, pour connaître $f(x)$ dans toute la bande, il suffit, en vertu de la périodicité, de connaître la fonction dans l'un des rectangles $A_0A_1B_1B_0$ ou $A_{-1}A_0B_0B_{-1}$. Quoi qu'il en soit, dans l'hexagone, $f(x)$ est représentée soit par une série (2), soit par une série (6); *c'est un exemple élémentaire et explicite* (quoique évidemment particulier) *de fonction analytique représentée dans une portion bien définie du champ complexe, soit par une série de polynomes, soit par une série d'autres fonctions continues.*