G. HALPHEN

Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier

Bulletin de la S. M. F., tome 3 (1875), p. 76-92
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__76_1>

Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier; par M. Halphen.

(Séance du 17 février 1875)

1. Quand deux courbes ont en commun un point singulier et que leurs tangentes y sont distinctes, le nombre de leurs intersections confondues en ce point est, comme on sait, égal au produit des ordres de multiplicité du point sur chacune des deux courbes. Si, au contraire, les courbes ont, au point dont il s'agit, des tangentes communes, ce nombre s'augmente. *L'augmentation est égale à la somme des ordres des contacts des branches des courbes entre elles.* Cette proposition est due à M. Cayley, et j'en ai moi-même donné des démonstrations, l'une dans ce bulletin (t. I, p. 133), l'autre dans un *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques,* dont l'Académie a décidé l'insertion au recueil des Savants étrangers. On voit immédiatement comment cette proposition fournit le moyen de calculer l'augmentation dont je viens de parler. M. de la Gournerie, qui a écrit plusieurs mémoires *Sur les singularités élevées des courbes planes* (*Journal de Math.*, 2e série, t. XIV et XV, et *Comptes rendus*, t. LXXVII), a eu l'occasion d'en faire des applications à des cas très-complexes.

On a cependant pensé qu'il restait encore un pas à faire : on a demandé une formule générale qui fournisse immédiatement la solution du problème, quand les courbes sont données par leurs équations. La question a été nettement posée par M. Painvin dans les termes suivants :

Trouver le nombre des points coïncidant avec l'origine et communs aux deux courbes

$$x^a\varphi_{p-a} + x^b\varphi_{p-b+1} + x^c\varphi_{p-c+2} + \dots = 0,$$
$$x^\alpha\psi_{q-\alpha} + x^\beta\psi_{q-\beta+1} + x^\gamma\psi_{q-\gamma+2} + \dots = 0,$$

les lettres φ_i et ψ_i désignant des fonctions homogènes en x et y, et du degré i. (*Bul. des Sc. Math.* t. IV, p. 131, et t. V, p. 139.)

Sous la forme géométrique, c'est, comme on voit, un problème d'élimination, tout algébrique. M. Painvin en a donné une solution élégante dans un cas particulier, celui où l'exposant β est nul. On la trouvera un peu plus loin.

Sur le problème ainsi posé, il importe de faire une remarque : En ne caractérisant les polynômes φ_i et ψ_i que par leurs degrés, on suppose essentiellement que leurs coefficients ne soient pas particularisés de manière à modifier le nombre cherché. C'est cependant ce qui peut arriver, et c'est là précisément le cas le plus compliqué du problème général. Dans ce cas, il me paraît impossible de ne pas recourir aux développements employés par M. de la Gournerie, ou à des transformations équivalentes.

Le problème, tel que M. Painvin l'a posé, n'en reste pas moins digne d'intérêt. J'en donne ici une solution; j'y rattache ensuite le second cas, plus complexe, de telle sorte que la résolution du problème général s'obtient par l'application, plusieurs fois répétée, de la solution du problème particulier.

2. C'est une proposition rappelée plus haut qui sert de point de départ à mes recherches actuelles :

Théorème I. — *Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point, est égal au produit des multiplicités de ce point sur les deux courbes, augmenté de la somme des ordres des contacts des branches de l'une avec les branches de l'autre au même point.*

C'est cette dernière somme qu'il s'agit de déterminer; et il est clair que, pour y parvenir, il suffit de considérer successivement chaque tangente commune, et de faire la somme des résultats. Pour abréger le langage, je désignerai cette somme par *ordre total du contact.*

J'ai donné au théorème une autre forme souvent utile (*Bul. de la Soc. math.* t. II, p. 35) :

Théorème II. — *Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point* O, *l'équation de l'une d'elles étant, sous forme entière, $f(x,y)=0$, est égal à la somme des ordres des quantités $f(x,y)$ quand le point (x,y) est placé successivement sur les diverses branches de l'autre courbe, à distance infiniment petite du premier ordre du point* O.

Ces propositions rappelées, j'entre en matière. J'emploie la notation $[n]$ pour désigner abréviativement un polynôme homogène de degré n en x, y, ne s'évanouissant pas avec x. Je suppose, comme l'a fait M. Painvin, une courbe ayant, à l'origine des coordonnées, des branches tangentes à l'axe des y, et ordonnant son équation, je l'écris

$$(1)\qquad \begin{aligned} 0=f(x,y)=x^{m_0}[p-m_0]+x^{m_1}[p-m_1+a_1]\\ +x^{m_2}[p-m_2+a_2]+\ldots+x^{m_i}[p-m_i+a_i]+\ldots,\end{aligned}$$

où les nombres entiers $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$, dont le premier est au moins égal à l'unité, croissent avec leurs indices. L'entier p marque la multiplicité de l'origine sur la courbe (1). Parmi les entiers $m_0, m_1, \ldots, m_i, \ldots$, un au moins est nul, sans quoi $f(x, y)$ serait divisible par une puissance de x. On voit que la forme de l'équation (1) est un peu plus générale que celle adoptée par M. Painvin; on obtiendra cette dernière en supposant $a_i = i$.

Je suppose que y soit infiniment petit du 1[er] ordre, et qu'on mette dans $f(x,y)$, au lieu de x, un infiniment petit d'ordre supérieur $1 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. L'expression $x^{m_i}[p - m_i + a_i]$ est infiniment petite d'ordre $p + a_i + \varepsilon m_i$. Donc l'ordre de $f(x,y)$ est le minimum de cette dernière expression, quand on y fait varier l'indice i. La seule exception à cette règle a lieu si l'infiniment petit, qu'on substitue à x, a pour partie principale celle d'une racine de l'équation (1). L'ordre $f(x,y)$ s'élèverait dans ce cas.

Je considère maintenant une seconde courbe se composant, au point O, de ρ branches ayant avec l'axe des y des contacts d'ordre ε. D'après ce que je viens de dire, et conformément au théorème II, le nombre des intersections des deux courbes, réunies au point O, est égal à ρ fois le minimum de $p + a_i + \varepsilon m_i$. Comme ρp est le produit des multiplicités du point O sur les deux courbes, je vois que *l'ordre total du contact des deux courbes est le minimum de* $\rho(a_i + \varepsilon m_i)$, sauf toutefois le cas d'exception signalé plus haut.

Soit, comme exemple,

$$(2) \qquad 0 = x^{\mu}[\pi - \mu] + [\pi + \alpha] + \ldots$$

l'équation de la seconde courbe, ordonnée comme $f(x,y)$. On voit aisément que, parmi les π branches de courbe qui passent en O, il en est μ dont Oy est la tangente, et que l'ordre commun de leur contact avec Oy est $\frac{\alpha}{\mu}$. Si, d'ailleurs, je laisse aux polynômes qui figurent dans (1) et (2) toute leur généralité, le cas d'exception n'a pas lieu. Donc, en appliquant le résultat précédent, et faisant $\rho = \mu$, $\varepsilon = \frac{\alpha}{\mu}$, j'ai cette conclusion :

L'ordre total du contact des courbes (1) *et* (2) *au point* O *est le minimum de* $\mu a_i + \alpha m_i$.

En supposant $\alpha = 1$, et $a_i = i$, on obtient l'élégante solution que M. Painvin a donnée pour ce cas particulier du problème, et à laquelle j'ai fait précédemment allusion.

Si la seconde courbe, au lieu de contenir en O un seul groupe de branches ayant des contacts du même ordre avec Oy, contient plusieurs groupes analogues, ce n'est plus le minimum de $\rho(a_i + \varepsilon m_i)$ que l'on devra chercher, mais bien le minimum de $\rho(a_i + \varepsilon m_i) + \rho'(a_j + \varepsilon' m_j) + \ldots$, en supposant toujours, bien entendu, mis de côté le cas d'exception dont j'ai parlé, et sur lequel je reviendrai dans la dernière partie de ce travail. Ce que l'on doit chercher, c'est d'exprimer ce minimum au moyen des nombres qui interviennent dans l'équation de la seconde courbe, et qui y sont analogues à m_i, a_i. J'y parviendrai, comme on va le voir, assez rapidement, en faisant usage du *parallélogramme de Newton*, dont je modifie très-légèrement la définition pour l'approprier à mon objet actuel.

3. Je reprends l'équation (1), et je marque, sur un plan, des points $P_0, P_1, \ldots, P_i, \ldots$, dont les coordonnées, par rapport à des axes rectangulaires, soient

$$\begin{array}{ll} X_0 = m_0, & Y_0 = 0, \\ X_1 = m_1, & Y_1 = a_1, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ X_i = m_i, & Y_i = a_i, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots \end{array}$$

Comme il a été dit plus haut, si l'on fait y infiniment petit du 1er ordre, et x infiniment petit d'ordre $1+\varepsilon$, l'ordre de $f(x,y)$ surpasse p de la plus petite des quantités $a_i + \varepsilon m_i$. Je figure ces quantités en traçant une droite D passant par l'origine des coordonnées et faisant avec la direction négative de l'axe des x l'angle ω dont la tangente est ε. J'ai ainsi

$$a_i + \varepsilon m_i = Y_i + tg\omega . X_i = \frac{\delta_i}{\cos\omega},$$

δ_i étant la distance du point P_i à la droite D.

Ainsi le groupe de termes d'ordre le moindre dans $f(x,y)$ correspond au point P_i dont la distance à D est minima. On remarquera d'ailleurs que, dans un tel groupe, un seul terme est de l'ordre $p + a_i + \varepsilon m_i$; c'est celui qui contient y à la puissance $p - m_i + a_i$. Par conséquent, le cas d'exception dans lequel la partie principale de x est celle d'une racine de (1), et où les termes d'ordre minimum disparaissent, ne peut se produire que si deux points au moins, tels que P_i, sont à la distance minima de D. De là cette conclusion facile que, si une droite contient plusieurs points P et sépare l'origine de tous les autres, et si les points extrêmes qu'elle contient sont P_i et P_{i+j}, l'équation (1) admet $m_i - m_{i+j}$ racines x infiniment petites d'ordre $1+\eta$, η étant la tangente de l'angle que fait, avec la direction négative de l'axe des x, la droite considérée. Par suite, on n'aura qu'à tracer un polygone, tournant sa convexité vers l'origine, ayant pour sommets des points P, et séparant l'origine de tous les autres, pour obtenir la figuration des diverses quantités telles que η, et du nombre des racines x auxquelles elles se rapportent.

Tout ceci est trop semblable à la célèbre règle du *parallélogramme de Newton*, pour qu'il soit utile d'entrer dans plus de détails.

Pour abréger, je désignerai le polygone dont je viens de parler, et relatif à $f(x,y)$, par ce mot : *le polygone* (f).

Soit maintenant une seconde courbe dont l'équation est

$$(3)\quad 0=\varphi(x,y)=x^{\mu_0}[\pi-\mu_0]+x^{\mu_1}[\pi-\mu_1+\alpha_1]+\ldots+x^{\mu_j}[\pi-\mu_j+\alpha_j]+\ldots,$$

ordonnée comme $f(x,y)$; en sorte que $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_j,\ldots$ sont des entiers croissants, dont le premier est au moins égal à l'unité.

Nous nous proposons de chercher l'ordre total du contact de cette courbe avec la courbe (1) au point O.

Nous figurons φ, comme f, par des points Π_j, et nous considérons encore un polygone (φ), défini comme le précédent.

Nous supposerons en plus, pour le moment, et cette hypothèse disparaîtra plus loin, que le polygone (φ) sépare l'origine de tous les points P, en sorte que le polygone (f) est entièrement à droite de (φ).

Je suppose que l'équation (3) admette un groupe de ρ racines x infiniment petites d'ordre $1+\varepsilon$, pour y infiniment petit du 1er ordre. En appliquant à φ ce qui a été dit pour f, je vois que ε est la tangente de l'angle ω que fait avec la direction négative de l'axe des x un certain côté Λ du polygone (φ), et que ρ est la projection de ce côté sur l'axe des x. Par suite, $\dfrac{\rho}{\cos\omega}$ est la longeur λ de ce côté. D'ailleurs, si D est la parallèle menée par O à Λ, et δ_i la distance de P_i à D, nous avons trouvé

$$a_i+\varepsilon m_i=\frac{\delta_i}{\cos\omega}.$$

Donc

$$\rho(a_i+\varepsilon m_i)=\frac{\rho\delta_i}{\cos\omega}=\lambda\delta_i.$$

Comme, par hypothèse, O et P_i sont de part et d'autre de Λ, la quantité $\lambda\delta_i$ est le double de la somme des aires des triangles ayant le côté Λ pour base, et pour sommets les points O et P_i. Le premier de ces triangles ne dépend pas du point P_i. Quant au second, on voit aisément qu'on le rendra minimum en prenant pour P_i un sommet du polygone (f), tellement choisi que les directions des côtés qui y aboutissent comprennent entre elles celle de Λ.

J'ai à considérer ensuite d'autres groupes de racines de φ. Soit ρ' le nombre des racines d'un de ces groupes, et soit aussi $1+\varepsilon'$ leur ordre. Il y correspond un autre côté Λ' du polygone (φ).

La quantité $\rho'(a_i+\varepsilon' m_i)$ est représentée par le double de l'aire du triangle de sommet O et de la base λ', augmenté du double de l'aire du triangle de sommet P_i et de même base, et ainsi de suite.

J'ai d'ailleurs à chercher le minimum de

$$\rho(a_i + \varepsilon m_i) + \rho'(a_j + \varepsilon m_j) + \ldots,$$

pour obtenir l'ordre total du contact des courbes (1) et (3). Ce nombre est donc égal au double de l'aire comprise entre les axes et le polygone (φ), augmenté du double de la somme des aires minima des triangles construits sur les côtés successifs de ce polygone et ayant pour sommets des points P.

Rien n'est plus aisé que de trouver la règle pour former ce minimum. Je ne m'y arrête pas ici. Je remarque seulement que les divers triangles de sommets P_i, P_j, ..., dans la figure qui fournit l'aire minima, n'empiètent pas les uns sur les autres, en sorte que l'on peut dire que : *La moitié de l'ordre total du contact de* (1) *et* (3) *est égale à l'aire comprise entre les axes et une ligne polygonale aboutissant à ces axes, et ayant alternativement pour sommets des points* P *et des sommets de* (φ), *de manière que cette aire soit minima.*

J'ai supposé que le polygone (φ) séparait l'origine de tous les points P. Je suppose qu'en outre tous les points Π soient compris entre le polygone (φ) et le polygone (f). Dans cette hypothèse, on peut modifier le dernier énoncé et dire que :

La moitié de l'ordre du contact de (1) *et* (3) *est égale au minimum de l'aire comprise entre les axes et une ligne polygonale aboutissant à ces axes et ayant pour sommets alternativement un point* Π *et un point* P.

Pour traduire ce résultat en une formule algébrique sans qu'il y ait aucune ambiguïté, je vais supprimer *a priori* un certain nombre de termes dans les équations proposées. A cet effet, j'observe qu'un point Π_i ne peut faire partie du polygone (φ), si l'exposant correspondant μ_i n'est pas inférieur à tous les nombres μ d'indices moindres. Comme je sais d'ailleurs que ce sont les sommets du polygone qui doivent intervenir seuls pour la solution, je peux supprimer un tel point. Il en est de même pour les points P. En d'autres termes, je puis supposer que, dans les équations (1) et (3), les nombres $m_0, m_1, \ldots$ et $\mu_0, \mu_1, \ldots$ vont en décroissant quand leurs indices croissent.

Soit alors $k+1$ le rang du dernier groupe de termes subsistant dans $\varphi(x,y)$. Je peux supposer $\mu_k = 0$, c'est-à-dire $\varphi(x,y)$ non divisible par x. Parmi les points Π, il en est un sur l'axe des x, c'est Π_0; et un sur l'axe des y, c'est Π_k. Je peux, dans tous les cas, supposer que la ligne polygonale, limite de l'aire considérée, part de Π_0 et aboutit à Π_k.

Une quelconque de ces lignes polygonales peut être définie comme il suit. Parmi les points $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{k-1}$, j'en choisis quelques-uns. Soit r leur nombre. Leurs indices seront r nombres, compris entre 1 et $k-1$ inclusivement. Je les désigne, dans l'ordre croissant, par (1), (2), ..., (r). Parmi tous les points P, j'en choisis de même $r+1$. Leurs indices seront $r+1$

nombres compris entre zéro et l'indice supérieur des points P inclusivement. Je les désigne, dans l'ordre croissant, par [1], [2],..., $[r+1]$. En mettant simplement l'indice pour représenter chaque point, j'ai ainsi une ligne polygonale

$$0[1](1)[2](2)\ldots(r)[r+1]k.$$

C'est cette ligne que l'on doit faire varier, tant en changeant ses sommets, sauf les extrêmes, qu'en modifiant le nombre de ces sommets, de manière à rendre minima l'aire comprise entre cette ligne et les deux axes.

Je considère la portion de cette aire comprise dans le quadrilatère formé par l'origine et les points (i), $[i+1]$ et $(i+1)$. Son double a pour expression

$$S_i = a_{[i+1]}(\mu_{(i)} - \mu_{(i+1)}) + m_{[i+1]}(\alpha_{(i+1)} - \alpha_{(i)}).$$

Le double de l'aire totale est

$$S = S_0 + S_1 + \ldots + S_r.$$

Pour exprimer ce résultat d'une manière plus simple, je donne une désignation uniforme aux coordonnées des sommets successifs de cette ligne polygonale.

J'appelle A_j, M_j les coordonnées du sommet de rang $j+1$. Le sommet (i) occupe le rang $2i+1$, et le sommet $[i]$ le rang $2i$. J'ai donc

$$\begin{array}{ll}
A_0 = 0, & M_0 = \mu_0, \\
A_1 = a_{[1]}, & M_1 = m_{[1]}, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
A_{2i-1} = a_{[i]}, & M_{2i-1} = m_{[i]}, \\
A_{2i} = \alpha_{(i)}, & M_{2i} = \mu_{(i)}, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
A_{2r+2} = \alpha_{(k)}, & M_{2r+2} = 0.
\end{array}$$

Soit

$$A_{j+1}M_j - M_{j+1}A_j = \Sigma_j;$$

j'ai

$$S_i = \Sigma_{2i} + \Sigma_{2i+1}.$$

Par suite

$$S = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \ldots + \Sigma_{2r+1}.$$

Telle est l'expression dont le minimum fournira le nombre que l'on cherche. Il ne faut pas perdre de vue que cette formule n'est établie que dans l'hypothèse où tous les points Π sont compris entre les polygones (φ) et (f). Je vais maintenant montrer que cette restriction peut être écartée, et que mon dernier résultat en est affranchi.

On assure la réalisation de l'hypothèse que je viens de rappeler, en donnant à la figure formée par les points P une translation suivant la direction positive de l'axe des x. Ceci revient à multiplier $f(x,y)$ par une puissance de x. Il est vrai que, de la sorte, aucun des points P ne se trouve plus sur l'axe des y. Mais on peut remarquer que, dans ce qui précède, on n'a pas supposé qu'il y en eût. Les conclusions ne sont donc pas troublées. Mais on a fait subir au nombre cherché une augmentation dont il faut actuellement tenir compte.

En multipliant $f(x,y)$ par x^λ, j'augmente l'ordre total du contact des deux courbes, f et φ, d'un nombre égal à celui de φ avec l'axe des y, répété λ fois. Cette augmentation est donc $\lambda\alpha_k$. Pour obtenir l'ordre total du contact de f et φ, j'ai donc : 1° à augmenter chaque nombre m, dans l'expression S, de la quantité fixe λ; 2° à retrancher $\lambda\alpha_k$. Or la première opération conduit à augmenter chaque nombre S_i de $\lambda(\alpha_{(i+1)}-\alpha_{(i)})$. Par suite, S qui est la somme des nombres S_i, se trouve augmenté de $\lambda\alpha_k$, c'est-à-dire précisément du nombre qu'il faut retrancher ensuite. Donc, ainsi que je l'ai annoncé, les résultats ci-dessus sont affranchis de l'hypothèse qui a servi à les établir.

La généralité de ces résultats étant reconnue, on peut maintenant supposer que $f(x,y)$, ainsi que $\varphi(x,y)$, ne contient pas le facteur x. Ceci permet de prendre les couples extrêmes de nombre A, M, dans l'une ou l'autre des équations, pour former les diverses valeurs de S, entre lesquelles on aura à choisir la plus petite.

Pour énoncer sous forme de théorème les résultats obtenus, de telle sorte qu'ils soient applicables à tous les cas, je donnerai au nombre ainsi calculé le nom de *premier surcroît d'intersection* des branches des deux courbes, tangentes à l'axe des y. J'ai supposé jusqu'ici que, si deux branches des deux courbes ont avec la tangente commune, à l'origine des coordonnées, un contact du même ordre, elles ont aussi entre elles un contact de ce même ordre. Dans cette hypothèse, le premier surcroît d'intersection n'est autre chose que l'ordre total du contact cherché. Quand cette hypothèse n'a plus lieu, il n'en est plus de même. Ainsi que je l'ai déjà annoncé, je traiterai plus loin ce cas, et j'aurai encore à y faire usage du nombre calculé comme il vient d'être dit. C'est en vue de cet usage que j'adopte ici, pour ce nombre, une dénomination particulière. Cette définition posée, voici le théorème :

Théorème III. — *Soient deux courbes représentées par les équations entières*

$$0=x^{m_0}[p-m_0]+x^{m_1}[p-m_1+a_1]+\ldots+x^{m_i}[p-m_i+a_i]+\ldots,$$
$$0=x^{\mu_0}[\pi-\mu_0]+x^{\mu_1}[\pi-\mu_1+\alpha_1]+\ldots+x^{\mu_i}[\pi-\mu_i+\alpha_i]+\ldots,$$

dans lesquelles $[n]$ *représente un polynôme homogène en x et y, de degré n, non divisible par x, où les entiers a croissent avec leurs indices, le premier* *étant au moins égal à l'unité, et où il en est de même des entiers* α. *On fera abstraction de tous les termes de la première équation, dans lesquels l'exposant m n'est pas inférieur à tous ceux qui le précèdent; et de même dans la seconde équation, à l'égard des exposants* μ. *Parmi les termes qui subsistent, on prendra le premier terme de l'une des équations, puis un quelconque de rang t dans l'autre, puis un quelconque de rang t' dans la première, puis un terme de rang supérieur à t dans la seconde, un terme de rang supérieur à t' dans la première, et ainsi de suite en alternant, sans jamais rétrograder dans une même équation, et en terminant par le dernier terme de l une des deux équations. Soient* M_i, A_i *les deux nombres m, a, ou* μ, α, *caractérisant le terme auquel on a ainsi assigné le rang* $i+1$. *On formera la somme des expressions*

$$A_{i+1}M_i - A_iM_{i+1}.$$

Le minimum de cette somme est le premier surcroît d'intersection des branches des deux courbes tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées.

D'après les raisonnements employés ci-dessus, il est très-aisé de démontrer la proposition suivante que je me borne à énoncer.

Théorème IV. — *Si l'on a soin de rejeter les combinaisons dans lesquelles quelques éléments*

$$A_{i+1}M_i - A_iM_{i+1}$$

de la somme ci-dessus seraient nuls, et que, dans ces conditions, le minimum de cette somme s'obtienne d'une seule manière, ce minimum n'est autre que l'ordre total du contact des branches des courbes tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées.

Il importe de remarquer que la réciproque de cette proposition ne serait pas exacte.

Pour l'application du théorème III, on peut manifestement prendre les termes extrêmes à volonté dans l'une ou l'autre des équations et s'abstenir de les faire varier. Supposons, par exemple, que l'on ait $\mu_1 = 0$, la seconde équation, bornée aux termes convenables, ainsi qu'il est dit dans l'énoncé du théorème, se réduit à deux termes

$$0 = x^{\mu_0}[\pi - \mu_0] + [\pi + \alpha_1].$$

Je prends ces deux termes pour extrêmes. Je n'y peux intercaler qu'un seul terme de la première équation. J'ai donc

$$M_0 = \mu_0,\quad M_1 = m_i,\quad M_2 = 0,$$
$$A_0 = 0,\quad A_1 = a_i,\quad A_2 = \alpha_1.$$

La somme à considérer se réduit à

$$\mu_0 a_i + \alpha_1 m_i,$$

dont le minimum fournit le premier surcroît cherché. On voit donc que le théorème III contient le résultat particulier déjà trouvé précédemment.

4. Pour former le minimum qui, suivant le théorème III, fournit le surcroît cherché, on peut former toutes les combinaisons différentes des termes des deux équations. On peut y parvenir aussi d'une manière généralement plus rapide en suivant une règle que je vais énoncer. Cette règle n'est autre chose que la traduction algébrique du procédé géométrique le plus simple pour former le minimum de l'aire qui a été considérée ci-dessus. Voici cette règle :

Règle. — *Dans la première des équations du théorème III, considérons les nombres* $\dfrac{a_i}{m_0 - m_i}$. *Soit* L *le plus petit d'entre eux, et* n *le plus grand indice pour lequel on ait* $\dfrac{a_n}{m_0 - m_n} = \mathrm{L}$. *Considérons ensuite les nombres* $\dfrac{a_i - a_n}{m_n - m_i}$, *pour les valeurs de* i *supérieures à* n, *et soit* n' *le plus grand indice* i *qui donne à ce nombre sa valeur minima* L′. *Considérons ensuite les nombres* $\dfrac{a_i - a_{n'}}{m_{n'} - m_i}$ *pour les valeurs de* i *supérieures à* n', *et soit* L″ *le plus petit d'entre eux, et ainsi de suite. Nous formons ainsi des nombres* L, L′, L″,..., *qui vont en croissant.*

Relativement à la seconde des équations du théorème III, nous formons, de la même manière, des nombres Λ, Λ′, Λ″,....

Rangeons tous les nombres L *et* Λ *par ordre de grandeur en commençant par le plus petit. Nous formons ainsi une suite de groupes alternativement composés, les uns de nombres* L, *les autres de nombres* Λ. *Considérons le premier nombre de chacun de ces groupes sauf le premier, et prenons, parmi les deux couples de nombres* m, a *ou* μ, α, *qui figurent dans son expression, celui dont l'indice est le plus petit. Nous avons ainsi une série de couples de nombres* $(\mathrm{M}_0, \mathrm{A}_0)$, $(\mathrm{M}_1, \mathrm{A}_1)$, ... *Joignons-y le couple, d'indice le plus grand, qui figure dans le dernier nombre de l'avant-dernier groupe.*

Ces couples de nombres (M, A) *sont, dans l'ordre même où nous les rencontrons, ceux qui fournissent le minimum mentionné au théorème III.*

Chaque nombre tel que L est la tangente de l'inclinaison d'un côté du polygone (f) sur l'axe des x ; en d'autres termes, $1 + \mathrm{L}$ est l'ordre d'infiniment petit auquel appartient un groupe de racines x de la première équation, y étant supposé du premier ordre.

Le dénominateur de L est égal au nombre de ces racines. Donc un nombre Λ ne peut être égal à un nombre L, que si les deux équations considérées admettent des racines x, infiniment petites du même ordre. Ce n'est aussi que dans ce dernier cas que l'ordre total du contact peut surpasser le premier surcroît. On peut donc ajouter à la règle précédente cette remarque, qui s'accorde avec le théorème IV :

Si aucun des nombres Λ *n'est égal à un des nombres* L, *le premier surcroît d'intersection des branches des deux courbes tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, est égal à l'ordre total de leur contact.*

A peine est-il besoin faire observer que :

Si, au contraire, deux nombres L, Λ *sont égaux, on peut, pour l'application de la règle ci-dessus, en intervertir l'ordre, sans troubler le résultat.*

L'application de la règle que je viens de donner est simple et rapide. J'en donnerai un exemple :

Exemple. — Désignant par n un entier positif, je pose

$$m_i = (n-i)^2, \qquad a_i = i, \quad i = 0,1,2,\ldots,n,$$
$$\mu_j = \frac{(2n-j)(2n-j+1)}{2}, \quad \alpha_j = j, \quad j = 0,1,2,\ldots,2n.$$

Il y a n nombres L, et l'on a

$$L_k = \frac{a_k - a_{k-1}}{m_{k-1} - m_k} = \frac{1}{2n-2k+1}, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Il y a $2n$ nombres Λ, et l'on a

$$\Lambda_k = \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{\mu_{k-1} - \mu_k}, \quad k = 1,2,\ldots,2n.$$

Dans cet exemple, se présente la particularité $L_k = \Lambda_{2k}$, dont il vient d'être question : il y a plusieurs manières de ranger les nombres L et Λ par ordre de grandeur. J'en choisis une

$$\Lambda_1\Lambda_2L_1\Lambda_3\Lambda_4L_2 \ldots \Lambda_{2(i+1)}L_{i+1}\Lambda_{2i+3} \ldots \Lambda_{2n}L_n,$$

j'ai ainsi

$$M_{2i} = (n-i)^2, \qquad A_{2i} = i, \qquad i = 0,1,2,\ldots,(n-2),$$
$$M_{2i+1} = (n-i-1)(2n-2i-1), \quad A_{2i+1} = 2i+2.$$

Le dernier couple sera

$$M_{2n-2} = 0, \quad A_{2n-2} = 2n.$$

J'ai à former la quantité

$$S = \sum_{k=0}^{k=2n-3} (M_kA_{k+1} - A_kM_{k+1}),$$

que je puis écrire

$$S = A_1M_0 + \sum_{k=1}^{k=2n-3} M_k(A_{k+1} - A_{k-1}).$$

En groupant les termes suivant la parité de l'indice de M, et à cause de

$$A_{2i+1} - A_{2i-1} = 2, \quad A_1 = 2, \quad A_{2i+2} - A_{2i} = 1,$$

je puis écrire

$$S = 3(n+2) + 2\sum_{i=0}^{i=n-2}(n-i)^2 + \sum_{i=0}^{i=n-3}(n-i-1)(2n-2i-1)$$
$$= \frac{n(4n^2+5)}{3} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Cette dernière valeur de S est le résultat demandé.

5. Je dois signaler ici un cas particulier, celui où les nombres (μ, α) coïncident avec les nombres (m, a). Les équations, dans lesquelles figurent ces nombres, donnent lieu au même polygone. Dans ce cas, le premier surcroît d'intersection est égal au double de l'aire comprise entre ce polygone et les axes. On voit bien aisément aussi que, pour appliquer ici le théorème III, on devra prendre simplement pour les couples successifs (M, A) des couples (m, a) dans l'ordre croissant des indices. Enfin, pour appliquer la règle du paragraphe précédent, on prendra pour les couples (m, a) donnant le minimum, tous ceux qui figurent dans les expressions des nombre I_i.

On voit ainsi comment les résultats généraux acquis jusqu'à présent s'appliquent au cas particulier considéré. J'en veux maintenant tirer une importante conséquence; à savoir le procédé pour calculer l'abaissement produit dans la classe d'une courbe par un point singulier.

Pour un instant encore, je raisonne sur les deux courbes f et φ, définies au théorème III, en supposant que les couples successifs de nombres μ, α soient respectivement égaux aux couples de nombres m, a.

A chaque branche B de f, tangente à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, on peut, dans le cas actuel, faire correspondre une branche B′ de φ, ayant avec la même droite, au même point, un contact du même ordre, et inversement. Du nombre S, qui est le premier surcroît d'intersection de toutes les branches B avec toutes les branches B′, je retranche le nombre T, premier surcroît d'intersection des couples de branches correspondantes. De la sorte, si C, C′ sont deux autres branches correspondantes, et si je désigne abréviatement par (BC′) le premier surcroît d'intersection de B et de C′, le nombre S — T se compose d'une somme d'éléments tels que (BC′) + (CB′).

Je rappelle que, par définition, le premier surcroît d'intersection de deux branches n'est autre chose que l'ordre de leur contact, si elles ont avec la tangente commune des contacts d'ordres différents; si, au contraire, elles ont avec cette tangente des contacts du même ordre, c'est précisément cet ordre. D'après cela, il n'y a aucune difficulté à étendre cette définition à deux branches B, C d'une même courbe. Ceci étant convenu, j'ai, dans le cas actuel,

$$(\mathrm{BC'}) = (\mathrm{CB'}) = (\mathrm{BC}).$$

Par suite, S — T se compose du double de la somme des éléments tels que (BC). En d'autres termes, S — T est le double du premier surcroît d'intersection de toutes les branches de f, tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, prises deux à deux de toutes les manières. Dans des cas particuliers, ce premier surcroît est précisément égal à la somme des ordres des contacts de ces branches entre elles. Dans le cas général, c'est un élément de cette somme, dont l'usage apparaîtra dans le paragraphe suivant.

Or, d'après M. Cayley, si p est l'ordre de multiplicité d'un point singulier, ce point produit dans la classe un abaissement égal à $p(p-1)$, augmenté du double de la somme des ordres des contacts des branches qui y passent, prises deux à deux. On voit donc que S — T est, dans le cas général, un premier élément du nombre que l'on doit ajouter à $p(p-1)$, pour obtenir l'abaissement de classe dû au point singulier.

Je l'appelle *premier surcroît d'abaissement de classe*, relatif aux branches considérées. Pour être en mesure de le calculer, il me suffit, connaissant S, de chercher l'expression de T.

Je considère, à cet effet, un côté du polygone (f), et soient B, C,... les branches qui lui correspondent. Leur nombre est égal à la projection de ce côté sur l'axe des x, et l'ordre commun de leur contact avec la tangente est la tangente de l'inclinaison de ce côté sur l'axe des x. Par suite, la somme des ordres de leurs contacts avec la tangente est égale à la projection du même côté sur l'axe des y. Cette somme n'est pas autre chose que $(\mathrm{BB'}) + (\mathrm{CC'}) + \ldots$. Je considère successivement tous les côtés du polygone (f), et je conclus que T est égal à la projection de ce polygone sur l'axe des y, c'est-à-dire au dernier des nombres a. De là, en premier lieu, cet énoncé géométrique :

Théorème V. — *Étant donnée la courbe $f(x,y) = 0$, traçons le polygone (f), ainsi qu'il a été expliqué au paragraphe 3; joignons le point où ce polygone rencontre l'axe des y au point situé sur l'axe des x et ayant pour abscisse l'unité. L'aire comprise entre cette dernière droite, l'axe des x et le polygone, est égale à la moitié du premier surcroît d'abaissement de classe dû aux branches de la courbe tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées.*

On remarquera ici que : *Si aucun côté du polygone (f) ne contient plus de deux points représentatifs de $f(x,y)$, ce premier surcroît est égal au double de l'ordre total du contact des branches considérées entre elles.*

J'ai, en second lieu, sous une forme analogue à celle du théorème III :

THÉORÈME VI. — *L'équation d'une courbe étant réduite comme il est dit au théorème III, et a_n étant le dernier des nombres a, on prendra une suite de couples m, a, dans l'ordre croissant des indices, en y comprenant les extrêmes. Soit* M_s, A_s, *le couple m, a, qui occupe ainsi le rang* $s+1$.

Le premier surcroît d'abaissement de classe, relatif aux branches de la courbe tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, est le minimum de l'expression

$$-a_n + \sum (A_{s+1}M_s - A_sM_{s+1}).$$

Semblablement au théorème IV, j'ai cette proposition :

THÉORÈME VII. — *Si le minimum de cette somme s'obtient d'une seule manière, ce minimum est égal à l'ordre total du contact des branches considérées entre elles.*

J'ai enfin, pour former le minimum, une règle analoge à celle du paragraphe IV :

RÈGLE. — *Pour former le minimum indiqué au théorème VI, on n'aura qu'à prendre pour les couples* M,A, *les couples de nombres m,a, qui figurent dans les expressions des nombres* L, *dont la formation est expliquée dans la règle du paragraphe 4, et en respectant leur ordre.*

J'applique cette dernière règle à l'exemple cité plus haut, à savoir

$$m_i = (n-i)^2, \quad a_i = i, \quad i = 0,1,2,\ldots,n.$$

Je trouve, pour le surcroît cherché, $\frac{2}{3}n(n^2-1)$. Il est facile de voir que, dans cet exemple, le théorème VII a lieu. Ainsi le nombre indiqué est précisément égal à l'ordre total du contact des branches considérées entre elles, quelle que soit d'ailleurs la forme des polynômes qui entrent dans l'équation de la courbe.

6. Dans ce paragraphe, je vais m'occuper du cas le plus général de l'intersection de deux courbes en un point singulier, et montrer quel usage on peut faire alors des résultats obtenus précédemment. J'invoquerai quelques propositions contenues dans mon *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques*, auquel je renvoie pour les démonstrations.

Soit $f(x,y)=0$ l'équation d'une courbe, contenant des branches tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées. Ces branches se répartissent, comme on sait (*voy.* le mémoire cité), en un certain nombre de *systèmes circulaires*, correspondant aux systémes circulaires formés par celle des racines x de l'équation, qui sont infiniment petites avec y. J'envisage un de ces systèmes circulaires D. Soit $uy^{1+\frac{s}{q}}$ la partie principale d'une racine appartenant à ce système, s et q étant des entiers positifs premiers entre eux. On sait que les parties principales de toutes les autres racines, appartenant au système D, ont la même expression, qui est d'ailleurs susceptible de q valeurs.

On sait, en outre, qu'à chacune de ces q valeurs correspond un même nombre r de racines, dont le nombre total est ainsi rq. Je pose

$$(1) \qquad y_1 = y^{1+\frac{s}{q}}, \quad x_1 = x - uy_1.$$

J'obtiens ainsi une transformée $f_1(x_1,y_1) = 0$ de l'équation primitive.

Dans cette transformée, le système circulaire D se change en autre D_1, composé de $r(q+s)$ racines x_1 infiniment petites par rapport à y_1(*ibid.*).

De même, tout autre système circulaire D' composé de $r'q$ racines x, ayant uy_1 pour partie principale, donne également lieu, dans la transformée, à un système circulaire D'_1, composé de $r'(q+s)$ racines x_1 infiniment petites par rapport à y_1. En d'autres termes, ces systèmes D,D' donnent lieu à des branches de la courbe transformée f_1, qui sont tangentes à l'axe des y_1, à l'origine des coordonnées.

Au contraire, tout système circulaire de racines x ayant une partie principale différente de uy_1, donne lieu, dans la transformée, à un système circulaire de racines x_1 qui appartiennent à un ordre d'infiniment petit ne surpassant pas celui de y_1. Si, en effet, x est de l'ordre de y_1, sans avoir pour partie principale uy_1, ou bien si x est d'ordre supérieur à celui de y_1, x_1 est du même ordre que y_1. Enfin, si x est d'un ordre inférieur à celui de y_1, il en est de même de x_1. Dans tous les cas, à cette racine x_1 correspond une branche n'ayant pas; à l'origine des coordonnées, l'axe des y_1 pour tangente.

Si maintenant je considère à part, dans la transformée, comme je l'ai fait précédemment pour la courbe primitive, les branches tangentes à l'axe des y, j'ai éliminé toutes celles qui correspondent aux racines x dont la partie principale diffère de uy_1.

Je considère, à présent, une seconde courbe $\varphi(x,y) = 0$, contenant, comme la première, des branches tangentes à l'axe des y, à l'origine. Par les formules (1), j'en déduis une transformée φ_1. Si uy_1 n'est la partie principale d'aucune racine de φ, on voit que φ_1 n'a aucune branche tangente à l'axe des y_1, à l'origine. L'ordre du contact des branches de f_1 et de φ_1, tangentes à cet axe, est nul. Et dans ce cas aussi, l'ordre du contact des branches de f, correspondant aux racines x dont la partie principale est uy_1, avec les branches de φ, se borne au premier surcroît d'intersection de ces branches.

Si, au contraire, uy_1 est la partie principale d'une racine de φ, les choses changent. La transformée φ_1 a, comme f_1, des branches tangentes à l'axe des y_1, à l'origine de coordonnées. Dans ce cas aussi, l'ordre total du contact des branches des deux courbes f et φ, correspondant aux racines dont la partie principale est uy_1, surpasse leur premier surcroît d'intersection. Je vais prouver qu'*il le surpasse d'un nombre précisément égal à l'ordre total du contact des branches de f_1 et de φ_1, tangentes à l'axe des y_1, à l'origine.*

Soit Δ un système circulaire de racines x de φ, ayant uy_1 pour partie principale. Je considère une branche δ correspondant à une de ces racines, et une branche d du système circulaire D. Soit $\frac{s}{q}+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$) l'ordre du contact de d et de δ. On sait (*ibid.*) que le nombre des couples, tels que d,δ, de branches des deux systèmes ayant entre elles un contact de ce même ordre est toujours un multiple de q. Par suite, la somme des ordres des contacts de toutes ces branches entre elles est un nombre tel que $t(s+q\varepsilon)$, t étant un nombre entier, et tq le nombre des couples d,δ envisagés.

Dans les transformées f_1 et φ_1, à deux branches, telles que d et δ, correspondent des racines x_1 dont la différence est de l'ordre $\left(1+\frac{s}{q}+\varepsilon\right)$ relativement à y, c'est-à-dire de l'ordre $\left(1+\frac{s}{q}+\varepsilon\right)\frac{q}{s+q}$ relativement à y_1. C'est-à-dire qu'à deux branches telles que d et δ correspondent, dans les transformées, des branches d_1 et δ_1, dont l'ordre du contact est

$$\left(1+\frac{s}{q}+\varepsilon\right)\frac{q}{s+q}-1=\frac{q\varepsilon}{s+q}.$$

Les couples d,δ et les couples d_1 et δ_1 ne se correspondent pas un à un. Mais au groupe de tq couples d, δ, correspond un groupe de couples d_1, δ_1; et le nombre de ces derniers est $t(s+q)$ (*ibid.*). Donc, la somme des ordres des contacts des branches composant ces derniers couples est égale à $tq\varepsilon$. Ce dernier nombre est précisément égal à celui dont la somme des ordres des contacts des branches d, δ de chaque couple surpasse leur premier surcroît d'intersection.

On répètera le même raisonnement en considérant successivement toutes les combinaisons des branches d'une courbe avec les branches de l'autre. On obtiendra ainsi la démonstration de la proposition énoncée, et comme conclusion :

Théorème VIII. — *Si $uy^{1+\zeta}$ ($\zeta>0$) est la partie principale à la fois d'une racine infiniment petite x de chacune des deux équations $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$, formons deux transformées $f_1(x_1,x_1)=0$, $\varphi_1(x_1,y_1)=0$, en posant $y_1=y^{1+\zeta}$, $x_1=x-uy_1$. Formons de même toutes les transformées analogues et relatives aux autres quantités différentes entre elles $u'^{1+\zeta'}$ ($\zeta'>0$), ..., analogues à la première, et soient $f_2=0$, $\varphi_2=0$; $f_3=0$, $\varphi_3=0$; etc., ces divers couples de transformées.*

L'ordre total du contact des branches des courbes f et φ, tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, est égal à la somme des nombres analogues *et relatifs aux divers couples de courbes f_1 et φ_1, f_2 et φ_2, f_3 et φ_3, ..., augmentée du premier surcroît d'intersection des branches considérées des deux courbes f et φ.*

Il résulte de ce théorème que l'application du théorème III, faite successivement aux équations proposées et à un certain nombre de transformées, conduira toujours au calcul précis de l'ordre total du contact cherché.

On aperçoit immédiatement comment le théorème VIII s'applique au calcul de l'abaissement de classe dû à un point singulier; cette application peut s'énoncer ainsi :

Théorème IX. — *Les notations restant les mêmes qu'au théorème VIII, si une même valeur de $uy^{1+\zeta}$ est la partie principale de plus d'une racine de $f(x,y)=0$, et de même pour $u'y^{1+\zeta'}$, ..., le double de l'ordre total du contact des branches de f, tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, entre elles, est égal à la somme des nombres analogues pour les diverses transformées f_1, f_2, ..., augmentée du premier surcroît d'abaissement de classe, dû aux branches considérées de f.*

Par suite, *l'application des théorèmes V ou VI, faite successivement à $f(x,y)$ et à des transformées, conduira toujours au calcul précis de l'ordre total du contact des branches considérées dans la courbe f, entre elles.*

En répétant les mêmes calculs relativement à chaque tangente d'une courbe donnée, en un point singulier, multiple d'ordre p, et ajoutant à $p(p-1)$ la somme de tous les premiers surcroîts calculés, on obtiendra l'abaissement produit par le point singulier dans la classe de la courbe.

Je dois faire remarquer que la considération des transformées ci-dessus revient complètement à celle des développements relatifs aux branches partielles employés par M. de la Gournerie. On observera, en outre, que ces considérations présentent de grandes analogies, que l'on pourrait rendre complètes, avec un ordre de recherches bien différent en apparence. Je veux parler des recherches relatives à la simplification des points singuliers dans les transformées d'une courbe. Les résultats que j'ai obtenus dans un mémoire déjà cité ici, relativement aux développées successives des courbes algébriques se rattachent à ce sujet. Il en est de même de la méthode que j'ai employée dans une note sur les fonctions abéliennes (*Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 1833) ; j'ai d'ailleurs été de beaucoup prévenu dans cette voie par M. Nöther (*Gött. Nachr.*, 1871).