BULLETIN DE LA S. M. F.

E. MAILLET

# Sur les nombres transcendants dont le développement en fraction continue est quasi-périodique et sur les nombres de Liouville

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 34 (1906), p. 213-227

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__213_0>

# SUR LES NOMBRES TRANSCENDANTS DONT LE DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE EST QUASI-PÉRIODIQUE [1], ET SUR LES NOMBRES DE LIOUVILLE;

Par M. Edmond Maillet.

## I.

Je me propose ici de montrer que les racines positives des équations du deuxième degré, dont les coefficients sont des polynomes à coefficients entiers formés avec un nombre transcendant $I > 0$ de Liouville, sont, dans des cas étendus, des fractions continues quasi-périodiques. Il en est toujours ainsi quand l'ordre du développement en fraction continue de ce nombre de Liouville est assez grand [2]. I étant un de ces derniers nombres et positif, on peut le choisir de façon que $\sqrt{I}$ soit d'ordre au plus égal à $(2, 0)$ dans la première classification des fractions continues, et $(1, 1)$ dans la deuxième.

J'indique aussi : 1° des résultats relatifs à la représentation $q^{\text{imale}}$ des nombres de Liouville dans le système de numération de base $q$ entière; 2° l'impossibilité que $e$ soit racine d'une équation dont les coefficients sont des polynomes en I à coefficients entiers, I étant un nombre de Liouville d'ordre assez grand; 3° des cas où $a^I$ ($a$ entier) et $I^I$ sont transcendants.

## II.

Soit I un nombre de Liouville réel positif, $I_m = P_m Q_m^{-1}$ sa $m^{\text{ième}}$ réduite. On peut écrire

$$(1) \qquad |I - I_m| = Q_m^{-\varphi_m}, \qquad \varphi_m > 2;$$

par définition, I est tel que $\varphi_m$ est aussi grand qu'on veut pour

[1] Je suis obligé de renvoyer à mon *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions* (Paris, Gauthier-Villars; 1906) que je désignerai dans ce qui suit par la notation : *Introd. transc.* Toutefois, on n'a pas absolument besoin de s'y reporter pour le théorème I.

[2] Ceci me donne une occasion d'esquisser une classification des suites de quantités d'ordre infini (*Introd. transc.*, Chap. I, p. 10)

une infinité de valeurs de $m$. Je considère une de ces valeurs; soit $\varepsilon_m = \sqrt{\mathrm{I}} - \sqrt{\mathrm{I}_m}$; on a, pour $m$ assez grand,

$$|\varepsilon_m| = \frac{|\mathrm{I} - \mathrm{I}_m|}{\sqrt{\mathrm{I}} + \sqrt{\mathrm{I}_m}} < (\sqrt{\mathrm{I}})^{-1} |\mathrm{I} - \mathrm{I}_m| < \mu \mathrm{Q}_m^{-\varphi_m}, \qquad \mu \text{ constante.}$$

Je suppose que $\mathrm{I}_m$ ne soit pas un carré (on sait qu'il existe une infinité de nombres de Liouville I jouissant de cette propriété; voir *Introd. transc.*, note II, et *Comptes rendus,* 2 juillet 1906, p. 27). On a

$$\sqrt{\mathrm{I}_m} = \sqrt{\mathrm{P}_m \mathrm{Q}_m} \cdot \mathrm{Q}_m^{-1} = \sqrt{\mathrm{A}_m} \cdot \mathrm{Q}_m^{-1}, \qquad \mathrm{A}_m = \mathrm{P}_m \mathrm{Q}_m,$$

où $\mathrm{A}_m$ n'est pas un carré. On sait ([1]) que, si le développement en fraction continue de $\sqrt{\mathrm{I}_m}$ est

$$\mathrm{Q}_m^{-1} \sqrt{\mathrm{A}_m} = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots,$$

cette fraction continue est périodique, $a_n < 2\sqrt{\mathrm{A}_m} < \lambda \mathrm{Q}_m$ et la période a au plus $2\mathrm{A}_m < \lambda_1 \mathrm{Q}_m^2$ termes, $\lambda$ et $\lambda_1$ étant des constantes; le premier terme périodique est $a_0$ ou $a_1$; un des termes de la période est $\geqq 2$, sans quoi il faudrait $\sqrt{\mathrm{I}_m} - a_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, comme on le voit de suite.

Soit $i_n = p_n q_n^{-1}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite de $\sqrt{\mathrm{I}_m}$; on a, d'après une propriété connue [Serret, ou *Introd. transc.*, Chap. I, form. (13)].

$$|\sqrt{\mathrm{I}_m} - i_n| < q_n^{-1} q_{n+1}^{-1}$$

et

$$|\sqrt{\mathrm{I}} - i_n| < q_n^{-1} q_{n+1}^{-1} + \mu \mathrm{Q}_m^{-\varphi_m} < (2q_n^2)^{-1},$$

si, comme on le vérifie facilement,

$$\frac{q_{n-1}}{6} q_n^{-3} > \mu \mathrm{Q}_m^{-\varphi_m}, \qquad a_{n+1} \geqq 2,$$

Il suffit alors pour cela, $m$ étant assez grand,

$$(2) \qquad q_n^3 < \mathrm{Q}_m^{\varphi_m},$$

condition que je suppose avoir lieu; par suite (Serret, p. 19, ou *Introd. transc.*, Chap. I, p. 5) $i_n$ et, bien entendu, $i_{n-1}, i_{n-2}, \ldots$

---

([1]) Serret, *Algèbre supérieure*, 5e édition, t. I, p. 45 à 55. Paris, Gauthier-Villars; 1885.

sont des réduites de $\sqrt{\mathrm{I}}$. Mais

$$q_n < 2^{n+1} a_0 a_1 \ldots a_n < 2^{n+1} (2\sqrt{\mathrm{A}_m})^{n+1} < (2\lambda \mathrm{Q}_m)^{n+1};$$

(2) aura lieu *a fortiori* si l'on a

$$(3) \qquad (2\lambda \mathrm{Q}_m)^{3n+3} < \mathrm{Q}_m^{4n} < \mathrm{Q}_m^{\varphi_m}, \qquad 4n < \varphi_m.$$

Soit $n'$ la plus grande valeur de $n$ satisfaisant à la dernière inégalité; $n'\mathrm{A}_m^{-1}$ et $\varphi_m$ étant supposés assez grands, je considère les $\mathrm{E}\left(\frac{n'}{2\mathrm{A}_m}\right)$ premières périodes de $\sqrt{\mathrm{I}_m}$; la dernière d'entre elles contient un quotient $a_{n+1} \geqq 2$, pour lequel $n$ satisfait à (3) et $i_n$ est réduite de $\sqrt{\mathrm{I}}$; $\sqrt{\mathrm{I}}$ a au moins en commun avec $\sqrt{\mathrm{I}_m}$ les quotients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et les

$$\mathrm{E}\left(\frac{n'}{2\mathrm{A}_m}\right) - 1 \geqq \frac{n'}{2\mathrm{A}_m} - 2$$

premières périodes de $\sqrt{\mathrm{I}_m}$. Or

$$4n' + 4 \geqq \varphi_m, \qquad n' \geqq \frac{\varphi_m - 4}{4}, \qquad \frac{n'}{2\mathrm{A}_m} - 2 \geqq \frac{\varphi_m - 4}{4\lambda_1 \mathrm{Q}_m^2} - 2.$$

Il suffira que l'on ait, pour une infinité de valeurs de $m$,

$$(4) \qquad \varphi_m \geqq \alpha_m \mathrm{Q}_m^2,$$

où $\alpha_m$ est une fonction positive croissante de $m$, pour que $\sqrt{\mathrm{I}}$ présente, dans son développement en fraction continue, une infinité de suites $s_1, s_2, \ldots, s_p, \ldots$ formées chacune par la répétition, un nombre $k_p$ de fois pour $s_p$, d'une même période de quotients incomplets, $k_p$ croissant indéfiniment avec $p$. Ces fractions continues peuvent encore être appelées *quasi-périodiques* [1]; $s_p$ présente évidemment un caractère spécial, puisqu'il contient $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$. Donc :

Théorème I. — I *étant un nombre de Liouville convenable, sans être le carré d'un nombre de Liouville,* $\sqrt{\mathrm{I}}$ *est une fraction continue quasi-périodique.*

Avant de chercher des généralisations, il convient de carac-

[1] *Introd. transc.*, Chap. VII, p. 131 et suiv.

tériser avec plus de précision la nature des nombres de Liouville satisfaisant au théorème I.

On peut se proposer, à propos du développement des irrationnelles positives en fractions continues et des classifications corrélatives (*Introd. transc.*, notes I et II, et *Comptes rendus*, 2 juillet 1906, p. 26), une série de problèmes du genre de ceux-ci : *Y a-t-il, au moins dans certains cas, une relation entre l'ordre de deux irrationnelles et celui de la somme, de la différence, du produit, du quotient, d'une fonction rationnelle à coefficients entiers de ces irrationnelles?* Il y a des problèmes analogues pour un nombre quelconque d'irrationnelles (1, 2, 3, ...).

J'ai déjà donné des solutions de ces questions dans des cas étendus [1]; en particulier, l'ordre de $(pI + q)\,(p'I + q')^{-1}$, où $p, q, p', q'$ sont entiers, $pq' - p'q \neq 0$, est le même que celui de I dans les deuxième et troisième classifications. A ce point de vue, il peut être intéressant de chercher s'il y a quelque relation entre l'ordre de l'irrationnelle I considérée au théorème I et celui de $\sqrt{I}$. Je reprends les mêmes notations.

On sait qu'un nombre de Liouville est d'ordre au moins égal à (2, 0) dans la première classification. Je vais d'abord montrer que, *parmi les nombres de Liouville satisfaisant au théorème I, il y en a d'ordre quelconque au moins égal à* $(3, \varepsilon)$.

En effet, soit $I = c_0 + 1 : c_1 + 1 : c_2 + \ldots$. On a

$$(Q_s Q_{s+1})^{-1} > |I - I_s| = Q_s^{-\varphi_s}, \qquad \varphi_s \log Q_s > \log(Q_s Q_{s+1});$$

pour que I satisfasse au théorème I il suffit, d'après (4),

$$\log Q_{s+1} > Q_s^{2+\varepsilon},$$

pour une infinité de valeurs de $s$ ($\varepsilon$, $\varepsilon'$ fixes, positifs, aussi petits qu'on veut). Or

$$c_0 c_1 \ldots c_s < Q_s < 2^{s+1} c_0 c_1 \ldots c_s,$$

ou, si $\gamma_s$ est la plus grande des quantités $c_0, c_1, \ldots, c_s$,

$$\gamma_s < Q_s < (2\gamma_s)^{s+1};$$

---

[1] *Introd. transc.*, loc. cit. et Chap. III.

il suffit donc que l'on ait, pour une infinité de valeurs de $s$,

(5) $$\log\gamma_{s+1} > (2\gamma_s)^{(s+1)(2+\varepsilon')}, \qquad \text{ou} \qquad \log\gamma_{s+1} > \gamma_s^{(2+\eta)s},$$

($\eta > 0$ analogue à $\varepsilon$).

En particulier, quand I est d'ordre $(k, \rho)$, avec $k \geqq 3$, dans la première classification, si $c_{s+1}$ est *quotient principal* (*Introd. transc.*, Chap. I, p. 10), la condition sera toujours satisfaite pourvu que

(5 *bis*) $$\log c_{s+1} \geqq (\rho - \varepsilon'')e_{k-1}(s+1) > \gamma_s^{(2+\eta)s},$$

$\varepsilon''$ comme $\varepsilon$, ce qui donne une limite supérieure de $\gamma_s$ toujours acceptable quand $k \geqq 3$ (¹).

On voit toutefois que les nombres de Liouville ainsi obtenus, c'est-à-dire satisfaisant à (5 *bis*), sont particuliers; par exemple, quand tous les quotients incomplets sont principaux,

$$e_k(s)^{\rho-\varepsilon''} < \gamma_s < Q_s < (2\gamma_s)^{s+1} < 2^{s+1}e_k(s)^{(s+1)(\rho+\varepsilon'')};$$

(4) exige $\varphi_m > Q_m^2$, et, puisque

$$(2Q_mQ_{m+1})^{-1} < |I - I_m| = Q_m^{-\varphi_m},$$
$$Q_m^{\varphi_m} < 2Q_mQ_{m+1}, \qquad \log Q_{m+1} > Q_m,$$
$$(m+2)\log 2 + (m+2)(\rho+\varepsilon'')e_{k-1}(m+1) > e_k(m)^{\rho-\varepsilon''};$$

si $k \geqq 3$, il faut *a fortiori*

$$\log[2(m+2)(\rho+\varepsilon'')] + e_{k-2}(m+1) > (\rho-\varepsilon'')e_{k-1}(m) = (\rho-\varepsilon'')e_{k-2}(e^m),$$

ce qui est impossible pour $k \geqq 3$ et $m$ assez grand. On ne sait donc plus si le théorème I s'applique ici, puisque (4) n'a pas lieu.

Ce dernier raisonnement n'est valable que lorsque $k$ est fini. Quand I est d'ordre $+\infty$ (*Introd. transc.*, Chap. I, p. 10), il suffit d'ébaucher une extension de notre classification des irrationnelles pour arriver à un critère simple et général.

Une suite S de quantités positives $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ est dite d'ordre plus petit que $+\infty$ ou que $\infty$ quand on peut toujours trouver un nombre $k_1$ tel que

$$c_n = e_{k_1}(n)^{\rho_n},$$

(¹) On trouve des résultats analogues dans la deuxième classification quand $(k, \rho) > (2, 1)$.

$\rho_n$ restant limité supérieurement. Je suppose que cette circonstance ne puisse se présenter; j'écris $c_n = e_{k_n}(n)^{\rho_n}$, en choisissant pour la suite des entiers $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ des nombres déterminés comme il suit : je compare $c_n$ avec

$$\ldots,\quad \log n = e_{-1}(n),\quad n = e_0(n),\quad e^n = e_1(n),\quad e_2(n) = e^{e_1(n)},\quad \ldots;$$

soit $i$ la plus grande valeur de l'indice telle que

$$e_i(n) < c_n \leqq e_{i+1}(n); \tag{6}$$

je prendrai *provisoirement* $k_n = i + 1$, d'où $\rho_n \leqq 1$. Quand S est d'ordre infini, on ne peut assigner aucune limite supérieure aux $k_n$. Je puis alors classer la suite $\Sigma$ des $k_n$ comme j'ai classé celle des $c_n$ : elle sera d'ordre fini ou infini. Si elle est d'ordre infini, j'opérerai sur elle comme je l'ai fait sur les $c_n$; et ainsi de suite (¹).

Sans insister davantage, je me contenterai de déduire de là un corollaire du théorème I. La condition (5) exige seulement pour une infinité de valeurs de $s$, si l'on change $s$ en $s - 1$,

$$\log c_s > \gamma_{s-1}^{(2+\eta)(s-1)}, \qquad \log\log c_s > (2+\eta)(s-1)\log\gamma_{s-1}.$$

Soit encore I d'ordre infini, $c_n = e_{k_n}(n)^{\rho_n}$, et la suite des $k_n$ d'ordre $> (0,1)$; par définition, il y a une infinité de valeurs de $n$ telles que $k_n \geqq n^{1+\varepsilon}$ ($\varepsilon$ fixe positif) et que $k_n - k_j \geqq 3$ quel que soit $j < n$, puisque $n^{1+\varepsilon} > 3n$. Si $s$ est une de ces valeurs, on aura, d'après (6),

$$c_s > e_{k_s-1}(s), \qquad \gamma_{s-1} < e_{k_s-3}(s),$$

et il suffira, pour que (5) ait lieu,

$$e_{k_s-3}(s) > (2+\eta)(s-1)\, e_{k_s-4}(s).$$

Posant

$$x = e_{k_s-4}(s) > (2+\eta)(s-1),$$

il suffira $e^x > x^2$, ce qui a lieu pour $x$ ou $s$ assez grand. La condition (5) est satisfaite pour une infinité de valeurs de $s$; donc :

---

(¹) Ce que je viens de faire correspond à la première classification des irrationnelles; on peut en faire autant pour la deuxième. Enfin, on pourrait essayer d'étendre ceci aux fonctions entières et attaquer aussi la classification des fonctions entières d'ordre transfini. Je ne m'en occuperai pas pour le moment.

Corollaire I. — *Soit* I *l'irrationnelle positive*

$$c_0 + 1 : c_1 + 1 : c_2 + \ldots,$$

*d'ordre infini, qui est alors un nombre transcendant de Liouville; je pose* $c_n = e_{k_n}(n)^{\rho_n}$, *où* $k_n$ *est le plus petit nombre entier positif ou négatif tel que* $c_n \leqq e_{k_n}(n)$.

*Si la suite des quantités* $k_n$ *ou la fraction continue* $1 : k_1 + 1\, k_2 + \ldots$ *est d'ordre* $> (0, 1)$ *dans une quelconque* (1) *des classifications des irrationnelles,* $\sqrt{\mathrm{I}}$ *est toujours un nombre de Liouville ou une fraction continue quasi-périodique.*

J'établirai encore ce résultat :

Corollaire II. — *Parmi les nombres* $\sqrt{\mathrm{I}}$ *du théorème* I, *il y en a d'ordre au plus égal à* (2, 0) *dans la première classification et à* (1, 1) *dans la deuxième.*

Je reprends les suites $s_1, s_2, \ldots, s_p, \ldots$ de périodes du théorème I. La suite $s_p$ correspondant à $i_n$ contient au moins $\frac{n'}{2}$ quotients complets tous $< 2\sqrt{\mathrm{A}_m} < \lambda \mathrm{Q}_m$, et

$$n' \geqq \frac{\varphi_m - 4}{4} \geqq \frac{\varphi_m}{5}.$$

Je suppose maintenant que (4) ait lieu pour *toute valeur* de $m$ assez grande. On a

$$\mathrm{Q}_{m+1} < \mathrm{Q}_m^{\varphi_m - 1}, \qquad \log \mathrm{Q}_{m+1} < (\varphi_m - 1) \log \mathrm{Q}_m.$$

Dans $\sqrt{\mathrm{I}}$ il y a une série de quotients incomplets $a_{j_m}$ de rang supérieur à $\frac{n'}{2} \geqq \frac{\varphi_m}{10}$, appartenant à $s_{p+1}$, et tels que

$$a_{j_m} < \lambda \mathrm{Q}_{m+1} < \lambda \mathrm{Q}_m^{\varphi_m - 1};$$

tous ces précédents sont *a fortiori* $< \lambda \mathrm{Q}_{m+1}$.

J'admets, par exemple, que $\log a_n > n^{1+\varepsilon}$, pour une infinité de valeurs de $n$, c'est-à-dire que $\sqrt{\mathrm{I}}$ soit d'ordre plus grand que (1, 1) dans la deuxième classification : l'inégalité ci-dessus pour $a_{j_m}$ s'ap-

---

(1) Car les ordres (0, $\rho$) sont les mêmes dans les deux classifications.

plique aux quotients d'indice $j_m$ de $s_{p+1}$; on peut alors trouver une infinité de valeurs de $m$ telles que

$$\left(\frac{\varphi_m}{10}\right)^{1+\varepsilon} < j_m^{1+\varepsilon} < \log a_{j_m} < \log\lambda + (\varphi_m - 1)\log Q_m < 3\varphi_m \log\varphi_m,$$

car ici $Q_m < \varphi_m$, d'après (4). On est conduit à une impossibilité pour $m$ assez grand, et, dès lors, $\sqrt{I}$ est d'ordre $\leqq (1, 1)$ dans la deuxième classification.

Lorsque $\log a_n > e^{\varepsilon n}$ pour une infinité de valeurs de $n$, la conclusion est *a fortiori* analogue, et $\sqrt{I}$ est d'ordre $\leqq (2, 0)$ dans la première classification (¹). C. Q. F. D.

## III.

*Extensions des idées précédentes.* — On arrive encore à des fractions continues quasi-périodiques en considérant une racine positive X de

$$LX^2 - 2MX + N = 0, \tag{7}$$

où L, M, N sont des polynomes à coefficients entiers formés avec un même nombre I de Liouville convenable (²), et sont par suite des nombres correspondants de I (*Introd. transc.*, Chap. III).

Soient $L_m$, $M_m$, $N_m$ les valeurs obtenues remplaçant I par $I_m$ dans L, M, N, et $X_m$ la valeur approchée de X correspondante, satisfaisant à

$$L_m X_m^2 - 2M_m X_m + N_m = 0; \tag{8}$$

(¹) On peut se poser dès lors cette question bien intéressante, et susceptible d'extensions d'après ce qui suit : $\sqrt{I}$ peut-il avoir tous ses quotients incomplets limités, quand I est un nombre de Liouville?

(²) Certains des nombres L, M, N peuvent être rationnels. On peut supposer plus généralement que L, M, N sont des nombres de Liouville *correspondants particuliers* (*Intr. transc.*, Chap. III, p. 33-34), c'est-à-dire *ici* des nombres de Liouville ainsi définis : soit I l'un d'eux; pour une infinité de valeurs de $m$, *les mêmes pour tous les nombres considérés,* les dénominateurs $Q'_m$ *de la* $m^{\text{ième}}$ *réduite* sont de la forme $Q_m^{\sigma_m}$, où $\sigma_m$ est positif et limité supérieurement et inférieurement et $Q'_{m+1} > Q_m'^{\sigma'\varphi_m}$ ($\sigma'$ fixe $> 0$, $\varphi_m > \alpha$, si grand que soit $\alpha$ dès que $m$ est assez grand). Les raisonnements et conclusions sont à peu près les mêmes, Le théorème II reste encore vrai quand L, M, N sont des nombres correspondants non particuliers, c'est-à-dire satisfaisant à des conditions un peu moins précises, *analogues à* (4) : je n'insiste pas.

$m$ et $\varphi_m$ étant supposés assez grands pour une infinité de valeurs de $m$, on a encore pour ces valeurs

$$(9) \qquad |X - X_m| < \lambda' Q_m^{-\varphi_m \tau_m}$$

($\lambda'$ constante, $\tau_m$ positif limité supérieurement et inférieurement), et $L_m$, $M_m$, $N_m$ sont des réduites de L, M, N (*Introd. transc.*, Chap. III). $X_m$ est un nombre rationnel ou une irrationnelle quadratique.

Si $X_m$ est rationnel, (8) est réductible, et $A_m = M_m^2 - L_m N_m$ est le carré d'un nombre rationnel.

Si ceci a lieu pour une infinité de valeurs de $m$,

$$LX = M \pm \sqrt{A}, \qquad A = M^2 - LN\,;$$

le nombre rationnel ou de Liouville A possède une infinité de réduites $A_m$ qui sont des carrés parfaits, et, par suite, A est le carré d'un nombre rationnel ou d'un nombre de Liouville correspondant à I (*Introd. transc.*, Chap. III, p. 44); de même, $ML^{-1}$ et $\sqrt{A}\,L^{-1}$ sont des nombres rationnels ou des nombres de Liouville correspondant à I, par suite aussi X et, d'ailleurs, (7) est réductible, en ce sens que son premier membre est un produit de deux facteurs linéaires dont les coefficients sont [1] des nombres de Liouville correspondant à I ou des nombres rationnels.

Je suppose qu'il n'en soit pas ainsi : dès que $m$ est assez grand, pour les valeurs de $m$ considérées, $A'_m = M_m^2 - L_m N_m$ n'est pas le carré d'un nombre rationnel ; par suite, $X_m$ est une irrationnelle dont le développement en fraction continue est périodique

$$X_m = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots.$$

On a par exemple

$$L_m = \frac{f(P_m, Q_m)}{f_1(P_m, Q_m)} \qquad (f, f_1 \text{ polynomes}).$$

Chassant les dénominateurs de $L_m$, $M_m$, $A'_m$ dans $X_m$, on met

[1] On pourrait aussi abréger le langage en considérant l'ensemble H des nombres rationnels et des nombres de Liouville correspondant à I, et dire que (7) est *réductible dans* H, qu'il est le produit de deux facteurs linéaires *à coefficients rationnels dans* H, etc. [comp. *Introd. transc.*, Chap. III, p. 33, note (1)].

$X_m$ sous la forme

$$X_m = M'_m L'^{-1}_m \pm \sqrt{A'_m}\, L'^{-1}_m,$$

ou $M'_m$, $L'_m$, $A'_m$ sont des entiers $\leqq Q_m^{2\theta}$, $\theta$ constante $> 0$. Dès lors, pour la partie périodique du développement de $X_m$ en fraction continue, $a_n < 2Q_m^\theta$, la période de $X_m$ a au plus $2A'_m < 2Q_m^{2\theta}$ termes. Quant au nombre $\nu_m$ des termes de la partie non périodique, soit $i_n = p_n q_n^{-1}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite de $X_m$; ce nombre $\nu_m$ est au plus égal [1] à $n_1$, si $n_1$ est le plus petit entier tel que

$$q_{n_1} > \sqrt{L'_m}.$$

Or [2], en général, $q_n > 2^{\frac{n-1}{2}}$. Soit $n_2$ le plus petit entier tel que

$$2^{\frac{n_2-1}{2}} \geqq Q_m^\theta \geqq \sqrt{L'_m}\,; \qquad 2^{\frac{n_2-3}{2}} < Q_m^\theta\,;$$

on a

$$\nu_m \leqq n_1 \leqq n_2 < \frac{2\theta \log Q_m}{\log 2} + 3 < Q_m^\theta.$$

Ceci posé,

$$|X_m - i_n| < q_n^{-1} q_{n+1}^{-1},$$

et, d'après (9),

$$|X - i_n| < q_n^{-1} q_{n+1}^{-1} + \lambda' Q_m^{-\varphi_m \tau_m}.$$

Si la période de $X_m$ renferme un quotient incomplet $\geqq 2$, le raisonnement s'achève comme au théorème I; la condition analogue à (2) est encore suffisante; quand $\varphi_m$ est au moins égal à une certaine puissance $\theta'$ de $Q_m$ pour une infinité de valeurs de $m$, X est encore une fraction continue *quasi-périodique*.

Je suppose au contraire que la période ne renferme que des quotients égaux à 1, c'est-à-dire un seul terme, égal à 1. Si $a_{n-2}$, $a_{n-1}$, $a_n$, $a_{n+1}$ appartiennent à la partie périodique, *avec mes notations* (*Introd. transc.*, Chap. I, p. 4),

$$X_m = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}}, \qquad x_{n+1} = \frac{q_{n-1} X_m - p_{n-1}}{-q_n X_m + p_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$q_n < 2 q_{n-1},$$

---

[1] On le voit en complétant un passage de l'*Algèbre supérieure* de Serret (*loc. cit.*, p. 43).

[2] *Introd. transc.*, Chap. III, p. 42.

et

$$\frac{5}{6}(1+\sqrt{5}) > \frac{q_n}{q_{n-1}}x_{n+1} = \frac{q_{n-1}+q_{n-2}}{q_{n-1}}x_{n+1} = \frac{X_m - i_{n-1}}{i_n - X_m} > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (^1),$$

$$|X_m - i_{n-1}| < |i_n - X_m|(1+\sqrt{5})\frac{5}{6}, \qquad |i_n - X_m| < \frac{2}{1+\sqrt{5}}|X_m - i_{n-1}|,$$

$$\begin{aligned} q_n^{-1}q_{n-1}^{-1} &> |i_n - i_{n-1}| \\ &= |i_n - X_m| + |X_m - i_{n-1}| > |X_m - i_{n-1}|\left(1+\frac{6}{5(1+\sqrt{5})}\right) \\ &= |X_m - i_{n-1}|\frac{7+3\sqrt{5}}{10}, \end{aligned}$$

$$|X_m - i_n| < q_n^{-1}q_{n+1}^{-1}\frac{10}{7+3\sqrt{5}}.$$

En choisissant la parité de $n$ de façon que $X_m - i_n$ et $X - X_m$ soient de signes contraires, on a, quand une condition analogue à (2) a lieu,

$$|X - i_n| < q_n^{-1}q_{n+1}^{-1}\frac{10}{7+3\sqrt{5}} < \frac{10}{7+3\sqrt{5}}\,\frac{2}{3}\,q_n^{-2} < \frac{q_n^{-2}}{2},$$

comme on le voit de suite ; donc $i_n$ est encore réduite de X. On suppose, bien entendu, des conditions analogues à (3) et (4) satisfaites. Le raisonnement s'achève comme au théorème I, avec des simplifications, la période n'ayant ici qu'un terme.

On conçoit d'ailleurs très bien l'existence de pareilles fractions continues quasi-périodiques, forcément mixtes, où les suites $s_1$, $s_2$, ..., $s_p$, ... sont toutes formées de périodes d'un terme unique ; mais ici $s_{p-1}$ appartiendra à la partie non périodique correspondant à la suite $s_p$.

Finalement, on conclut :

Théorème II. — *Soit* X *une racine positive de*

$$LX^2 - 2MX + N = 0, \tag{7}$$

*où* L, M, N *sont des polynomes à coefficients entiers formés*

---

(1) En effet,

$$q_{n+1} = q_n + q_{n-1} < 2q_n, \qquad q_n > \frac{q_{n+1}}{2}, \qquad q_{n-1} > \frac{q_n}{2}, \qquad q_{n+1} > \frac{3}{2}q_n,$$

$$\frac{3}{2} < \frac{q_{n+1}}{q_n} = 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n} < \frac{5}{3}.$$

*avec un même nombre de Liouville, ou, plus généralement, des nombres rationnels ou correspondants particuliers de Liouville* (¹).

*Quand ces nombres de Liouville sont convenablement choisis* (²), X *est un nombre rationnel ou quadratique, un nombre de Liouville, ou une fraction continue quasi-périodique, les trois cas étant effectivement possibles.*

*Remarque I.* — Soit R un nombre rationnel ou un nombre de Liouville correspondant de I, L, M, N ; XR et $X \pm R$ sont racines d'équations analogues à (7), dont les racines positives ont mêmes propriétés; d'ailleurs, quand X est une fraction continue quasi-périodique sans être un nombre de Liouville, ni XR, ni $X \pm R$ ne sont ici des nombres de Liouville; c'est-à-dire que ce sont des fractions continues quasi-périodiques. De même $X^p$, où $p$ est un entier quelconque, sera un nombre de Liouville ou une fraction continue quasi-périodique ; plus généralement il en sera de même pour un polynome en X dont les coefficients sont des nombres rationnels ou des nombres de Liouville correspondant à I, L, M, N (³).

*Remarque II.* — On peut montrer qu'en dehors des fractions continues quasi-périodiques racines des équations (7), où L, M, N sont des nombres correspondants de Liouville tels que, pour une infinité de valeurs de $m$, $|L - L_m|$, $|M - M_m|$, $|N - N_m|$ sont plus petits que $Q_m^{-\theta_1 \varphi_m}$, avec $\varphi_m \geqq Q_m^{\theta'}$ ($\theta_1$, $\theta'$ fixes $> 0$), il y a d'autres fractions continues quasi-périodiques qui sont des nom-

(¹) Au sens de la note (²), début du § III.

(²) C'est le cas quand L, M, N sont des polynomes à coefficients entiers formés avec I, et que I satisfait aux conditions du corollaire I du théorème I ; la condition (5) est en effet ici remplacée simplement par

$$\log \gamma_{s+1} > \gamma_s^{\omega s} \quad (\omega \text{ constante convenable} > 0),$$

et les calculs sont à peu près les mêmes que pour le corollaire I. *Pour les nombres de Liouville* I *qui satisfont à ce corollaire, le théorème II est applicable,* L, M, N *étant des polynomes en* I *à coefficients entiers.*

(³) R satisfait aux conditions mentionnées à la fin de la note (²), début du § III. On peut encore se demander si X peut avoir tous ses quotients incomplets limités.

bres transcendants. Je me contenterai d'indiquer cet exemple [1] : les fractions continues $\xi = b_0 + 1 : b_1 + 1 : b_2 + \ldots$ quasi-périodiques, où les périodes commencent toutes à $b_i$, quand $b_{\lambda_n}$, dernier terme de la période de la $n^{\text{ième}}$ suite $s_n$ de périodes, et $\lambda_n$, nombre des termes de cette période, croissent indéfiniment avec $n$, de façon que $b_m \leqq \theta'' m$ ($\theta''$ constante). Grâce à cette dernière condition, on est sûr que $\xi$ n'est pas un nombre de Liouville ; c'est d'ailleurs un nombre transcendant si $s_n \lambda_n^{-1}$ croît suffisamment vite avec $n$.

## IV.

En terminant, je mentionnerai encore les résultats suivants que l'on obtient en appliquant à l'équation ($1_7$ *bis*) de notre *Introd. transc.* (Chap. VII, p. 130) des raisonnements et calculs semblables à ceux qui accompagnent les équations (5) et (6) ci-dessus et qui aboutissent au corollaire I du théorème I :

*Soit* I *l'irrationnelle positive* $c_0 + 1 : c_1 + 1 : c_2 + \ldots$ *d'ordre* $> (3,0)$ *dans la première classification des fractions continues ou* $> (2,1)$ *dans la deuxième. Quand l'ordre est* $(k, \rho)$ *non infini, si les quotients incomplets principaux sont suffisamment espacés et les quotients précédents suffisamment petits par rapport à eux, la représentation* $q^{\text{imale}}$ [2] *de* I *dans le système de numération de base q est quasi-périodique.*

*Quand l'ordre est infini et que* I *satisfait aux conditions du corollaire I du théorème I, la représentation* $q^{\text{imale}}$ *de* I *est quasi-périodique.*

*Tous les nombres* I, *pour lesquels j'ai montré plus haut que* $\sqrt{\mathrm{I}}$ *est une fraction continue quasi-périodique, ont leur représentation* $q^{\text{imale}}$ *quasi-périodique* [3].

Il résulte de là en particulier la certitude que les nombres de

---

[1] Pour la démonstration, on s'appuiera sur *Introd. transc.*, Chap. VII, particulièrement sur l'équation irréductible ($3_7$), qui coïncide alors avec une des équations (8).

[2] Il m'est arrivé aussi de dire ailleurs plus simplement, mais moins correctement : décimale dans le système de base $q$.

[3] Une condition suffisante de quasi-périodicité de cette représentation est en effet $\varphi_m > Q_m$, pour une infinité de valeurs de $m$, condition qui est une conséquence de (4).

Liouville d'ordre infini considérés au corollaire I du théorème I ont des analogies tout à fait profondes avec les nombres rationnels. Pour les nombres de Liouville d'ordre fini, il y a encore beaucoup d'analogies; mais jusqu'ici il n'est pas établi qu'elles soient aussi intimes.

J'énoncerai encore ces propriétés:

*Le nombre e, base des logarithmes népériens, ne peut être racine d'aucune équation algébrique dont les coefficients sont des nombres de Liouville correspondants, tels que* [*note* (2), *début du* § III] $\varphi_m > Q_m^{\alpha_m}$, $\lim \alpha_m = \infty$, *pour* $m = \infty$. *C'est en particulier le cas quand les coefficients sont des polynomes en I à coefficients entiers*, I *satisfaisant aux conditions du corollaire I du théorème I.*

La démonstration n'est qu'une modification d'une démonstration classique [1] (Jordan, *Cours d'Analyse lithographié de l'École Polytechnique*).

$a^{\mathrm{I}}$ (*a entier*) *et* $\mathrm{I}^{\mathrm{I}}$ *sont transcendants quand* I *est un nombre de Liouville tel que, pour une infinité de valeurs de m*, $\varphi_m \geqq Q_m$ *ou* $\varphi_m \geqq \alpha_m Q_m$ ($\alpha_m$ *comme ci-dessus*) *respectivement* [2]; *c'est le cas quand I satisfait aux conditions du corollaire I du théorème I.*

Je finirai en indiquant des cas étendus où un quotient convergent de produits infinis est un nombre transcendant de Liouville.

*Soit* $\mathrm{I} = \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}{b_1 b_2 \ldots b_n \ldots}$ *un pareil quotient, où les* $a_n$ *et les* $b_n$

---

(1) En cours d'impression, j'ajouterai qu'une démonstration analogue permet d'établir la propriété plus générale suivante, qui a des extensions :

Soient $J_1, \ldots, J_\nu, I_1, \ldots, I_\nu$ des fractions rationnelles à coefficients entiers réels ou imaginaires formés avec un même nombre de Liouville I réel ou imaginaire d'ordre assez grand : les $I_n$ ayant des valeurs distinctes et les $J_n \neq 0$, on n'a aucune identité de la forme $\sum_1^\nu J_n e^{I_n} = 0$. — Conséquences : $e^{I\sqrt{-1}}$ et $\sin I$ sont transcendants; si $e^x$ est algébrique $> 0$, $x$ est une fraction continue d'ordre limité; $\log \text{nép}\, y$, où $y$ est algébrique $> 1$, est une fraction continue d'ordre limité.

(2) On se base sur des relations analogues à $(5_7)$ et $(6_7)$ de notre *Introd. transc.*, Chap. VII, p. 134.

*sont des entiers réels ou imaginaires, et* $c_n = a_n - b_n$. *Les* $c_n$ *étant donnés, si la croissance des* $|b_n|$ *est suffisamment rapide ou encore, si l'ordre de la fonction, supposée entière,* $\sum_1^\infty b_n^{-1} x^n$ *est suffisamment petit,* I *est un nombre transcendant de Liouville.*

*Exemple :* $0 < |c_n| \leqq \gamma$ *nombre fixe,* $b_n = \mathrm{E}[e_k(n)^{\rho+\varepsilon_n}]$, *où* $k$ *entier* $\geqq 3$, $\rho > 0$, $\lim \varepsilon_n = 0$ *pour* $n = \infty$.

La démonstration se déduit de l'identité

$$\mathrm{I} = 1 + c_1 b_1^{-1} + c_2 b_2^{-1} \mathrm{I}_1 + \ldots + c_n b_n^{-1} \mathrm{I}_{n-1} + \ldots,$$

où

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{P}_n \mathrm{Q}_n^{-1}, \qquad \mathrm{P}_n = a_1 a_2 \ldots a_n, \qquad \mathrm{Q}_n = b_1 b_2 \ldots b_n.$$

On a

$$\mathrm{I} - \mathrm{I}_n = c_{n+1} b_{n+1}^{-1} \mathrm{I}_n + c_{n+2} b_{n+2}^{-1} \mathrm{I}_{n+1} + \ldots,$$

et il suffit de faire en sorte que $|\mathrm{I} - \mathrm{I}_n| < |\mathrm{Q}_n|^{-\alpha}$ pour une infinité de valeurs de $n$ si grand que soit $\alpha$.