BULLETIN DE LA S. M. F.

L. REMY

Sur quelques théorèmes de géométrie plane liés à la surface de kummer

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 177-187
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__177_1>

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE PLANE LIÉS A LA SURFACE DE KUMMER;

Par M. L. Remy.

Si l'on projette une surface de Kummer à partir d'un de ses points doubles sur un plan tangent singulier, le contour apparent se compose de six droites tangentes à une même conique Γ, et formant deux triangles inscrits à la conique de contact C du plan tangent singulier.

Inversement, la figure plane formée par six droites tangentes à une même conique dépend de trois paramètres au point de vue projectif et peut être considérée comme la projection d'une surface de Kummer à partir d'un de ses points doubles.

De cette correspondance, nous nous proposons de déduire quelques théorèmes de géométrie plane dont il est aisé, d'ailleurs, de donner une démonstration directe.

I.

Prenons le centre de projection O comme sommet $x=y=z=0$ du trièdre de référence, et le plan de projection pour plan $t=0$. L'équation de la surface de Kummer est de la forme

$$\Gamma t^2 + 2 C_3 t + C^2 = 0,$$

Γ et C étant des polynomes homogènes en x, y, z de degré 2, et C_3 un polynome homogène en x, y, z de degré 3.

Dans le plan $t=0$, l'équation $\Gamma(x, y, z)=0$ représente la conique tangente aux six droites formant le contour apparent de la surface, et l'équation $C(x, y, z)=0$ représente la conique de contact du plan $t=0$.

Le cône circonscrit de sommet O a pour équation $C_3^2 - \Gamma C^2 = 0$;

or il se décompose en six plans, soient $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$. De là l'identité

$$C_3^2 - \Gamma C^2 = xyzx'y'z'. \tag{I}$$

Il résulte de cette identité que la cubique $C_3 = 0$ passe par les six sommets des deux triangles $T(x, y, z)$ et $T'(x', y', z')$ et par les points de contact de leurs six côtés avec la conique Γ. D'où ce théorème :

Si deux triangles sont inscrits à une conique C, *et, par suite, circonscrits à une même conique* Γ, *les six sommets et les six points de contact sont situés sur une cubique.*

Il est aisé d'obtenir l'équation de cette cubique. Soient

$$\Gamma = m^2x^2 + n^2y^2 + p^2z^2 - 2mnxy - 2npyz - 2pmzx = 0$$

et

$$C = ayz + bzx + cxy = 0$$

les équations des deux coniques. La cubique C_3 étant circonscrite au triangle de référence a une équation de la forme

$$yz(\alpha_1 y + \alpha_2 z) + zx(\beta_1 z + \beta_2 x) + xy(\gamma_1 x + \gamma_2 y) + \lambda xyz = 0.$$

En faisant successivement $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dans l'identité (I), on détermine les coefficients α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2

$$C_3 = \varepsilon ayz(ny - pz) + \varepsilon' bzx(pz - mx) + \varepsilon'' cxy(mx - ny) + \lambda xyz,$$

ε, ε', ε'' étant égaux à ± 1. D'ailleurs, on doit prendre $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''$, car la cubique C_3 ne peut être tangente à la conique C en aucun des sommets du triangle de référence. De cette équation, il résulte que :

En chacun des sommets des triangles T *et* T' *la tangente à la cubique* C_3 *et la tangente à la conique* C *sont conjuguées harmoniques par rapport aux côtés du triangle.*

Supposons que le triangle T reste fixe et que le triangle T' varie en restant inscrit à C et circonscrit à Γ : nous obtenons le théorème suivant :

Les involutions déterminées sur les coniques C *et* Γ *par les sommets et les points de contact des triangles inscrits à* C *et* *circonscrits à* Γ *sont découpées par le faisceau des cubiques* C_3 *qui passent par les trois points de contact et par les trois sommets d'un de ces triangles et ont ponr tangente en chacun de ces sommets la droite conjuguée harmonique de la tangente à la conique* C *par rapport aux deux côtés.*

II.

De l'identité

$$C_3^2 - \Gamma C^2 = xyzx'y'z'$$

on peut déduire une autre identité plus générale : soit

$$\Delta = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

l'équation d'une droite quelconque et posons

$$\begin{aligned} C_3 + C\Delta &= \Sigma_3, \\ C_3 - C\Delta &= \Sigma'_3, \\ \Gamma - \Delta^2 &= Q. \end{aligned}$$

L'identité peut s'écrire

$$\Sigma_3 \Sigma'_3 - QC^2 = xyzx'y'z'.$$

Or l'équation $\Sigma_3 = 0$ représente une cubique *quelconque* circonscrite aux triangles T et T'. D'où cette conclusion :

Toute cubique Σ_3 *qui passe par les sommets de deux triangles inscrits à une conique coupe en outre leurs côtés en six points situés sur une conique* Q *bitangente à la conique* Γ *inscrite aux deux triangles.*

Il convient de donner une démonstration directe de ce théorème, ainsi que de l'identité fondamentale. Soient deux triangles inscrits à une conique C, et Σ_3 une cubique quelconque passant par leurs six sommets. Il résulte du théorème d'Abel que les six autres points d'intersection de Σ_3, avec les côtés, sont situés sur une conique : soient, en effet, a, b, c, a', b', c' les arguments elliptiques des sommets sur la cubique et α, β, γ, α', β', γ' ceux des autres points d'intersection de Σ_3 avec les côtés. Des relations

$$\begin{aligned} a + b + c + a' + b' + c' &= 0, \\ \alpha + b + c &= 0, \\ \beta + c + a &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots&, \\ \gamma' + a' + b' &= 0, \end{aligned}$$

on déduit de suite

$$\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma'=0 \quad (^1).$$

Soit $Q=0$ l'équation de cette conique et considérons les courbes du sixième degré

$$QC^2+\lambda\, xyz\, x'y'z'=0,$$

λ désignant un paramètre variable. Elles ont dix-huit points d'intersection avec Σ_3 fixes; si l'on choisit λ de manière à donner un point d'intersection de plus, la courbe se décompose en deux cubiques Σ_3 et Σ'_3, et l'on a

$$\Sigma_3\Sigma'_3-QC^2=\lambda\, xyz\, x'y'z'.$$

D'ailleurs, la cubique Σ'_3 est manifestement circonscrite aux deux triangles, de même que Σ_3 et, par suite, il existe une identité de la forme

$$\Sigma_3-\Sigma'_3=2C\Delta.$$

Dès lors il suffit de poser

$$\begin{aligned}\Sigma_3+\Sigma'_3&=2C_3,\\ Q+\Delta^2&=\Gamma\end{aligned}$$

pour obtenir l'identité

$$C_3^2-\Gamma C^2=\lambda\, xyz\, x'y'z'.$$

III.

Aux familles de courbes tracées sur la surface de Kummer on peut faire correspondre par projection des familles de courbes inscrites à l'hexagone qui forme le contour apparent de la surface. Considérons en particulier la famille linéaire des courbes d'ordre $N=4m$ découpées sur la surface de Kummer par les surfaces d'ordre m.

Leur équation hyperelliptique s'obtient en annulant une fonction $\theta(u,v)$ d'ordre $2m$, paire, de caractéristique nulle : leur

(1) On vérifie aisément que cette conique ne peut pas se décomposer en deux droites. Cette circonstance se présente, au contraire, lorsque l'on considère un hexagone au lieu de deux triangles.

genre est $p = 2m^2+1$, il est égal au nombre de leurs paramètres. En projection nous obtenons une famille de courbes inscrites à l'hexagone, de degré N et de genre p, dépendant de p paramètres (et non de $p-1$), ce qui constitue un théorème. Il en serait de même pour toute famille linéaire de courbes tracée sur la surface.

Nous nous bornerons à un exemple particulier en étudiant la famille découpée par les quadriques passant par le centre de projection et par la conique C. Ces quadriques ont pour équation

$$C - \Delta t = 0,$$

en posant

$$\Delta = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

et les courbes d'intersection se projettent suivant les quartiques

$$C_4 = C\Gamma + 2C_3\Delta + C\Delta^2 = 0,$$

qui, d'après leur définition même, sont à la fois inscrites et circonscrites aux deux triangles T et T'. Elles dépendent des trois paramètres α, β, γ, ce qui constitue un théorème :

Si deux triangles sont inscrits à une conique, il existe une famille trois fois infinie de quartiques C_4 *à la fois inscrites et circonscrites aux deux triangles.*

De la forme de l'équation des quartiques C_4 on peut déduire quelques conséquences géométriques. D'après l'identité

$$C_3^2 - \Gamma C^2 = xyzx'y'z',$$

on peut écrire

$$CC_4 = (C_3 + C\Delta)^2 - xyz\,x'y'z',$$

ce qui prouve que la cubique

$$\Sigma_3 = C_3 + C\Delta = 0$$

passe par les six sommets des triangles et les points de contact des six côtés avec C_4. Lorsque la quartique C_4 varie, la cubique Σ_3 appartient à une famille linéaire à trois paramètres.

Réciproquement, étant donnée une cubique quelconque Σ_3 circonscrite aux deux triangles, il existe une quartique C_4 circonscrite aux deux triangles et tangente aux côtés en leurs points de rencontre avec Σ_3.

Les six points de contact de C_4 avec les côtés sont situés sur une conique Q bitangente à la conique Γ, d'après ce que nous avons vu plus haut. Les coniques C et Q coupent en outre la quartique C_4 en quatre points situés sur la droite $\Delta = 0$, et cette droite est la corde de contact des coniques Q et Γ. Tous ces résultats sont mis en évidence par la forme de l'équation

$$C_4 = C(\Gamma - \Delta^2) + 2\Sigma_3 \Delta.$$

IV.

L'équation des quartiques C_4 renferme huit paramètres : c'est précisément le nombre des paramètres de l'équation d'une quartique générale Σ_4, lorsqu'on prend pour triangle de référence un triangle inscrit et circonscrit à la quartique

$$\Sigma_4 = yz(A_1 y + A_2 z)^2 + zx(B_1 z + B_2 x)^2 + xy(C_1 x + C_2 y)^2 + xyz(Mx + Ny + Pz) = 0.$$

Dès lors on peut prévoir que l'équation d'une quartique générale Σ_4 peut être identifiée avec celle de C_4, et que, par suite, les propriétés énoncées plus haut appartiennent à la quartique générale. Nous montrerons effectivement un peu plus loin, par un exemple particulier, que cette identification n'est ni impossible, ni indéterminée. Mais, dans le cas général, l'identification présenterait une certaine difficulté et il sera préférable d'aborder directement l'étude des triangles inscrits et circonscrits à une quartique.

Soient $g_1(\xi)$, $g_2(\xi)$, $g_3(\xi)$ les intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe C_4 ; nous supposerons que les sommes $\Sigma g(\xi)$ relatives à quatre points de la courbe situés en ligne droite sont nulles. Désignons par ξ_1, ξ_2, ξ_3 les sommets, et par η_1, η_2, η_3 les points de contact d'un triangle inscrit et circonscrit :

$$2g_i(\eta_1) + g_i(\xi_2) + g_i(\xi_3) = 0,$$
$$2g_i(\eta_2) + g_i(\xi_3) + g_i(\xi_1) = 0,$$
$$2g_i(\eta_3) + g_i(\xi_1) + g_i(\xi_2) = 0$$
$$(i = 1, 2, 3),$$

d'où

$$2\Sigma g_i(\xi) + 2\Sigma g_i(\eta) = 0$$

et

$$\Sigma[g_i(\xi)+g_i(\eta)]=\frac{P_i}{2},$$

en désignant par $\frac{P_1}{2}, \frac{P_2}{2}, \frac{P_3}{2}$ une demi-période.

Il existe 64 demi-périodes, mais elles ne conviennent pas toutes au problème actuel.

En effet, 28 de ces demi-périodes correspondent aux bitangentes de C_4 : si l'on désigne par X_1, X_2 les points de contact d'une bitangente, on a

$$g_i(X_1)+g_i(X_2)=\frac{\Pi_i}{2} \qquad (i=1,2,3).$$

Dès lors, si les points ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3 satisfont aux conditions

$$\Sigma[g_i(\xi)+g_i(\eta)]=\frac{\Pi_i}{2},$$

on en déduit que les huit points ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3, X_1, X_2 sont situés sur une conique, ce qui ne peut avoir lieu dans le cas actuel.

De là résulte que les triangles inscrits et circonscrits à une quartique se répartissent *en* 36 *groupes seulement* (1).

Ceci posé, soient T, T′ deux triangles d'un même groupe : des relations

$$\Sigma[g_i(\xi)+g_i(\eta)]+\Sigma[g_i(\xi')+g_i(\eta')]=0,$$

il résulte que les six sommets ξ, ξ' et les six points de contact η, η' sont situés sur une cubique.

Soit $\Sigma_3=0$ l'équation de cette cubique et considérons les courbes du sixième ordre

$$\Sigma_3^2+\lambda\, xyzx'y'z'=0,$$

λ désignant un paramètre variable. Elles ont un point double en chacun des sommets des triangles T, T′ et sont tangentes à C_4 aux six points de contact de C_4 avec les côtés, soit vingt-quatre points d'intersection fixes avec C_4. Si l'on choisit λ de manière à donner

(1) Il resterait à déterminer le nombre des triangles appartenant à un même groupe.

un point d'intersection de plus, la courbe se décompose en C_4 et une conique C

$$\Sigma_3^2 + \lambda xyzx'y'z' = CC_4,$$

et cette conique est manifestement circonscrite aux deux triangles.

Nous sommes donc conduits aux théorèmes suivants :

Les triangles inscrits et circonscrits à une quartique C_4 *se répartissent en* 36 *groupes. Deux triangles d'un même groupe sont inscrits à une conique* C *et leurs points de contact avec* C_4 *sont également situés sur une conique* Q. *Les quatre autres points d'intersection de* C_4 *avec les coniques* C *et* Q *sont en ligne droite. Enfin les six sommets et les six points de contact sont situés sur une cubique.*

Corrélativement :

Les triangles inscrits et circonscrits à une courbe de quatrième classe Γ_4 *se répartissent en* 36 *groupes. Deux triangles d'un même groupe sont inscrits à une conique; les tangentes à* Γ_4 *aux sommets de ces deux triangles sont tangentes à une autre conique et ces deux coniques sont bitangentes.*

V.

Nous terminerons par une application à un exemple particulier : soit la quartique aux 168 collinéations

$$\Sigma_4 = x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

Le triangle de référence T_0 est un triangle inscrit et circonscrit à la quartique (car les trois sommets sont des points d'inflexion avec les trois côtés pour tangentes d'inflexion). Proposons-nous de déterminer les triangles T inscrits et circonscrits à Σ_4 et appartenant au même groupe que T_0. Ce problème revient à identifier l'équation de C_4

$$C_4 = C(\Gamma - \Delta^2) + 2\Sigma_3\Delta$$

avec celle de Σ_4 (en conservant les mêmes notations). Soit, en effet, $a_ib_ic_i$, $m_in_ip_i$, $\alpha_i\beta_i\gamma_i$, λ_i une solution des équations d'identification : à l'identité

$$(E_i) \qquad \Sigma_4 = C_i(\Gamma_i - \Delta_i^2) - 2\Sigma_{3i}\Delta_i$$

correspond un triangle T_i inscrit et circonscrit à Σ_4 ayant ses sommets sur la conique $C_i = 0$ et ses points de contact sur la conique $\Gamma_i - \Delta_i^2 = 0$. Inversement à tout triangle T_i de même groupe que T_0 correspond une identité (E_i).

Ceci posé, on trouve de suite, en faisant $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,

$$(1) \qquad \alpha = m, \qquad \beta = n, \qquad \gamma = p,$$

et en annulant dans C_4 les coefficients des termes en x^2yz, y^2zx, z^2xy,

$$\begin{aligned} am - bn + cp - \lambda &= 0, \\ am + bn - cp - \lambda &= 0, \\ -am + bn + cp - \lambda &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$(2) \qquad am = bn = cp = \lambda.$$

On peut d'ailleurs prendre $\lambda = 1$.

Il reste à égaler dans Σ_4 et C_4 les coefficients des termes en x^3y, y^3z, z^3y, d'où

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} cm^2 &= 1, \\ an^2 &= 1, \\ bp^2 &= 1. \end{aligned} \right.$$

La résolution du système (1) (2) (3) est immédiate

$$\begin{aligned} \alpha &= m = \omega, \\ \beta &= n = \omega^4, \\ \gamma &= p = \omega^2, \\ a &= \frac{1}{m} = \omega^6, \\ b &= \frac{1}{n} = \omega^3. \\ c &= \frac{1}{p} = \omega^5, \end{aligned}$$

ω étant une racine septième de l'unité.

La solution $\omega = 1$ conduit à l'identité (E_1) :

$$(E_1) \quad \begin{cases} x^3y + y^3z + z^3x \\ = (x+y+z)(x^2y + y^2z + z^2x + xyz) - (xy + yz + zx)^2. \end{cases}$$

On vérifie aisément que les six autres identités (E_i) se déduisent de celle-là par les transformations

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{\omega^3 Y} = \frac{z}{\omega Z}.$$

L'équation E_1 met en évidence quelques propriétés géométriques de la quartique Σ_4. Les coniques $C = 0$ et $\Gamma - \Delta^2 = 0$ étant confondues, les points de contact des côtés du triangle T_1 sont confondus avec ses sommets : ceux-ci sont donc trois points d'inflexion de Σ_4 ayant les trois côtés pour tangentes d'inflexion. Ainsi le groupe de triangles considéré comprend les huit triangles suivant lesquels se répartissent les vingt-quatre points d'inflexion de la quartique Σ_4.

D'autre part la droite

$$\Delta = x + y + z = 0$$

est bitangente à la quartique en ses points de rencontre avec la conique

$$C = xy + yz + zx = 0$$

et la cubique

$$\Sigma_3 = x^2y + y^2z + z^2x + xyz = 0$$

est tangente à la quartique aux six points d'inflexion, sommets des triangles T_0 et T_1.

Donc :

Les huit triangles suivant lesquels se répartissent les points d'inflexion de la quartique

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0$$

jouissent des propriétés suivantes : deux quelconques de ces triangles T_i, T_k *ont leurs sommets situés sur une conique* C_{ik} *et leurs côtés tangents à une conique* Γ_{ik}.

Les coniques C_{ik} *et* Γ_{ik} *sont bitangentes et leurs points de contact sont les points de contact de la quartique avec une de* *ses bitangentes* Δ_{ik}. *Il y a* 28 *combinaisons de deux triangles* T_i, T_k *s'associant respectivement aux* 28 *bitangentes de la quartique.*

Enfin, il existe 28 *cubiques* Σ_{ik} *tangentes à la quartique aux six points d'inflexion formant deux triangles* T_i, T_k.