BULLETIN DE LA S. M. F.

M. DE MONTCHEUIL

Les anticaustiques du paraboloïde hyperbolique équilatère

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 139-152
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__139_0>

LES ANTICAUSTIQUES DU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE ÉQUILATÈRE;

Par M. DE MONTCHEUIL.

Laguerre [1] et, après lui, M. Humbert [2] ont été amenés, par l'étude des courbes de direction, à considérer les anticaustiques par réflexion pour des rayons parallèles, des courbes planes algébriques et en particulier de la parabole. Ces auteurs ont surtout considéré le cas des rayons perpendiculaires à l'axe de cette dernière courbe. Celui des rayons parallèles à cet axe est d'ailleurs sans intérêt, quand on suppose les rayons réfléchis dans le plan de la courbe. Alors, en effet, tout est dit quand on a remarqué que ces rayons convergent au foyer de la parabole. Mais il n'est nullement nécessaire de supposer qu'un rayon réfléchi par une courbe plane reste dans le plan de celle-ci. La direction de ce rayon *n'est bien définie* que lorsque, avec la direction du rayon incident et la courbe dirimante, on donne encore le plan passant par la tangente, sur lequel a lieu la réflexion; et si d'ordinaire on suppose implicitement que cette réflexion se fait sur un cylindre qui admet la courbe dirimante pour section droite, cette hypothèse ne s'impose en aucune façon.

Restant donc dans l'ordre d'idées de Laguerre et de M. Humbert, nous allons indiquer très sommairement quelques propriétés des anticaustiques du paraboloïde hyperbolique équilatère pour des systèmes de rayons parallèles. Nous étudierons d'abord les anticaustiques de la surface, ensuite celles de diverses courbes tracées sur cette surface et tout particulièrement celles des sections paraboliques.

I.

Soit donné le paraboloïde hyperbolique équilatère défini par l'équation

$$(1)\qquad z = \frac{y^2 - x^2}{4a}.$$

---

(1) *Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, 1883.

(2) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1888.

Nous allons établir que cette surface jouit des propriétés suivantes :

1° *Elle est la surface moyenne de la cyclide de Dupin.*

2° *Elle admet cette surface pour anticaustique, les rayons incidents étant supposés parallèles à l'axe des z.*

3° *La caustique est formée du système de deux paraboles situées dans deux plans perpendiculaires, et telles que le sommet de chacune d'elles soit au foyer de l'autre.*

4° *Les cosinus directeurs des rayons réfléchis et les coordonnées de l'anticaustique s'expriment rationnellement en fonction des coordonnées de la projection de la surface dirimante sur le plan des xy.*

5° *Les coordonnées du paraboloïde et celles de la cyclide sont liées par une transformation birationnelle qui fait correspondre point par point deux familles de sections paraboliques de celle-là aux cercles, lignes de courbure de celle-ci.*

Nous avons établi la première proposition dans notre thèse : *Sur une classe de surfaces* (¹).

La cyclide de Dupin qui admet pour surface moyenne le paraboloïde défini par l'équation (1) est donnée par l'équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{z+2a} + \frac{y^2}{z-2a} + z = 0.$$

Avant d'en venir à l'examen des autres propositions, remarquons que la cyclide et sa surface moyenne pourront être obtenues par la construction suivante :

Traçons deux paraboles identiques ayant pour axe commun celui des z, l'une dans le plan des xy, l'autre dans celui des yz, et telles que le sommet de chacune d'elles se confonde avec le foyer de l'autre. La congruence des droites qui s'appuient sur ces deux paraboles est celle des normales à la cyclide de Dupin. Ces paraboles représentent les deux courbes auxquelles se réduisent les deux nappes de la surface des centres de courbure. On voit dès lors que le point milieu du segment qui relie les deux paraboles décrira la surface moyenne de la cyclide.

(¹) Gauthier-Villars, 1902, p. 68.

Il nous reste à déterminer le point de la normale qui décrit la surface. Supposons pour un instant notre seconde proposition démontrée. Construisons alors un cercle vertical tangent au plan des xy contenant la normale dans son plan et ayant pour centre le point milieu du segment focal. On se rend compte aisément que l'un des points d'intersection du cercle et de la normale décrit la cyclide.

Nous avons affirmé que les rayons parallèles à l'axe des z se réfléchissent sur le paraboloïde normalement à la cyclide. Cette proposition peut être vérifiée comme il suit :

Quand on passe des coordonnées cartésiennes à celles de O. Bonnet, l'équation (2) de la cyclide de Dupin prend la forme

$$\xi = a(u^2 + u_1^2). \tag{3}$$

Or, cette expression de ξ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial u_1} = 0,$$

équation qui est celle des surfaces pour lesquelles la demi-somme des rayons de courbure est égale à la distance du point donné de la surface moyenne à un plan fixe ([1]). Par suite les deux nappes de l'enveloppe de la sphère tangente à la cyclide et dont le centre décrit le paraboloïde seront formées de cette même cyclide et d'un plan fixe. Ici, le plan fixe étant celui des xy, l'anticaustique du paraboloïde pour les rayons parallèles à l'axe des z sera bien la cyclide de Dupin.

La troisième proposition découle de la seconde. Les rayons réfléchis étant normaux à la cyclide passeront nécessairement par les deux paraboles auxquelles se réduisent les deux nappes de la surface des centres.

La quatrième proposition qui va découler des formules que nous allons établir à l'instant peut encore être considérée comme la conséquence à peu près immédiate d'une affirmation que nous avons démontrée ailleurs ([2]) et qui peut se formuler comme il

---

([1]) Thèse déjà citée, p. 29.

([2]) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXII, 1904, p. 173.

suit : *Une surface étant définie par une relation algébrique quelconque entre les coordonnées de O. Bonnet, les systèmes formés des rayons normaux à cette surface et des rayons réfléchis par la surface moyenne sont analytiquement séparables. Il en est de même des surfaces normales à ces congruences qui constituent les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère variable dont le centre décrit la surface dirimante.*

D'ailleurs la démonstration de cette proposition et celle de la suivante sont une conséquence des formules que nous allons établir.

En prenant pour point de départ l'équation (2) on obtient les expressions suivantes des coordonnées de la surface moyenne :

$$(4)\qquad \begin{cases} x = -a(u+u_1), \\ y = ia(u_1-u), \\ z = -\dfrac{a}{2}(u^2+u_1^2). \end{cases}$$

On sait d'ailleurs que les cosinus directeurs c, c', c'' de la normale à la cyclide sont exprimés par les relations

$$c = \frac{u+u_1}{1+uu_1},$$

$$c' = i\frac{u_1-u}{1+uu_1},$$

$$c'' = \frac{uu_1-1}{1+uu_1}.$$

Éliminant u, u_1 entre ce système et le système (4), il vient

$$(5)\qquad \begin{cases} c = -\dfrac{4ax}{x^2+y^2+4a^2}, \\ c' = \dfrac{4ay}{x^2+y^2+4a^3}, \\ c'' = \dfrac{x^2+y^2-4a^2}{x^2+y^2+4a^2}. \end{cases}$$

X, Y, Z désignant les coordonnées courantes, la normale de cosinus directeurs c, c', c'' passant par le point de coordonnées x,

y, z du paraboloïde sera déterminée par le système

$$(6)\qquad \begin{cases} X = x + \dfrac{4ax}{x^2+y^2+4a^2}\lambda, \\ Y = y - \dfrac{4ay}{x^2+y^2+4a^2}\lambda, \\ Z = \dfrac{y^2-x^2}{4a} - \dfrac{x^2+y^2-4a^2}{x^2+y^2+4a^2}\lambda. \end{cases}$$

λ désigne ici la distance d'un point donné de la normale à son point de rencontre avec le paraboloïde.

Pour obtenir les expressions des coordonnées de l'anticaustique, nous devons donner à λ, dans le système (6), la valeur de la demi-somme des rayons de courbure, valeur qui est ici égale à z, puisque la sphère dont le centre décrit la surface moyenne et qui a pour rayon la demi-somme des rayons de courbure est tangente (nous l'avons vu) au plan des xy. Nous avons donc le système

$$(7)\qquad \begin{cases} X = 2x\dfrac{y^2+2a^2}{x^2+y^2+4a^2}, \\ Y = 2y\dfrac{x^2+2a^2}{x^2+y^2+4a^2}, \\ Z = 2a\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2+4a^2}. \end{cases}$$

Les systèmes (5) et (7) définissent les cosinus directeurs des normales de la cyclide et ses coordonnées en fonction rationnelle des coordonnées du paraboloïde, ou, si l'on veut, des coordonnées de sa projection sur le plan des xy. Il nous reste maintenant à exprimer les coordonnées du paraboloïde en fonction de celles de la cyclide.

Dans ce but, cherchons les paramètres des lignes de courbure de cette dernière surface. En désignant par ρ, ρ_1 ces paramètres on déduit de l'équation (3)

$$\rho = u + u_1,$$
$$\rho_1 = i(u_1 - u).$$

D'où, en tenant compte des expressions de x, y coordonnées du paraboloïde,

$$x = -a\rho,$$
$$y = a\rho_1.$$

Ces lignes de courbure sont donc des courbes planes. Si nous déterminons les équations de ces plans et si nous y remplaçons ρ, ρ_1 par leurs valeurs en x, y nous obtenons le système

$$2aX - x(Z+2a) = 0,$$
$$2aY + y(Z-2a) = 0.$$

Or, il reste à remarquer que ces relations nous donnent précisément deux des trois quantités x, y, z que nous cherchons à exprimer rationnellement en X, Y, Z. Il nous suffira donc de leur associer l'équation du paraboloïde, et nous obtiendrons le système

$$(8)\qquad \begin{cases} x = 2a\dfrac{X}{Z+2a}, \\ y = -2a\dfrac{Y}{Z-2a}, \\ z = a\left[\left(\dfrac{Y}{Z-2a}\right)^2 - \left(\dfrac{X}{Z-2a}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Les systèmes (7) et (9) combinés définissent donc la transformation birationnelle dont nous avons affirmé l'existence dans notre cinquième proposition.

Pour x et y constants nous avons sur le paraboloïde des sections paraboliques d'axes parallèles à celui des z. D'autre part, les quantités x et y peuvent être considérées comme les paramètres des lignes de courbure de la cyclide comme le montrent les relations

$$x = -a\rho, \qquad y = a\rho_1.$$

Or, les lignes de courbure de la cyclide sont des cercles. Nous voyons par là que les systèmes (7) et (8) font correspondre point par point deux familles de paraboles tracées sur le paraboloïde aux cercles de la cyclide. Nos propositions sont donc complètement démontrées.

Le système (6) nous permet de suivre la marche des rayons réfléchis. Nous savons qu'ils rencontrent deux paraboles. On déduit aisément les équations de ces paraboles de l'équation (3) qui définit la cyclide. Elles sont respectivement déterminées par les deux systèmes

$$(9)\qquad \begin{cases} X^2 + 8aZ - 8a^2 = 0, \\ Y = 0, \end{cases}$$

$$(9)'\qquad \begin{cases} Y^2 - 8aZ - 8a^2 = 0, \\ X = 0. \end{cases}$$

Ceci posé, remarquons que le paraboloïde et la cyclide se coupent suivant deux droites rectangulaires, situées dans le plan des xy et définies par le système

$$y^2 - x^2 = 0, \qquad z = 0.$$

Considérons la région de la surface pour laquelle on a

$$x^2 - y^2 > 0.$$

Alors les rayons réfléchis partiront de la surface dirimante avec la valeur initiale $\lambda = 0$, et croissant avec ce paramètre rencontreront la cyclide lorsque l'on aura

$$\lambda = \frac{y^2 - x^2}{4a} = z;$$

λ continuant à croître ils viendront rencontrer la parabole définie par le système (9), et l'on aura

$$\lambda = \frac{x^2 + y^2 + 4a^2}{4a}.$$

Si, au contraire, partant de $\lambda = 0$, nous faisons décroître ce paramètre, nous verrons que les rayons réfléchis rencontreront la seconde parabole définie par le système $(9)'$ pour une valeur de λ égale et de signe contraire à celle qui correspond à la première parabole.

Les points pour lesquels on a $x^2 < y^2$ donneraient lieu à une discussion analogue. Ici seulement le point de rencontre du rayon lumineux avec la cyclide se trouvera placé entre le paraboloïde et la seconde parabole. On trouverait les mêmes valeurs de λ que précédemment mais changées de signe.

En terminant ce paragraphe nous allons établir quelques autres transformations birationnelles qui ont un lien étroit avec les précédentes. Nous allons indiquer brièvement la marche des calculs à effectuer. Les systèmes (7) et (8) nous donneront une transformation birationnelle entre le paraboloïde hyperbolique équilatère et la cyclide de Dupin. Si dans le système (5) nous changeons c, c', c'' en $\frac{x_1}{R}$, $\frac{-y_1}{R}$, $\frac{z_1}{R}$, x_1, y_1, z_1 représentent les coordonnées du paraboloïde. Nous pouvons alors exprimer x, y, z rationnellement en x_1, y_1, z_1, et nous avons une transformation birationnelle entre le paraboloïde et la sphère. Rapprochant alors les deux transformations et éliminant x, y, z, nous obtenons une transformation birationnelle entre la cyclide de Dupin et la sphère. Une propriété intéressante rapproche d'ailleurs ces deux surfaces. Les congruences de leurs normales se réfléchissent parallèlement aux axes de deux paraboloïdes : du paraboloïde hyperbolique équilatère pour la cyclide, du paraboloïde de révolution pour la sphère. Nous sommes donc invités à chercher une transformation birationnelle qui relie la sphère au paraboloïde de révolution dont le foyer occupe le centre de cette sphère. Il ne nous restera plus qu'à établir la transformation birationnelle qui relie les deux paraboloïdes et ainsi nous aurons obtenu un cycle fermé de ces transformations.

Nous allons en dresser le Tableau, et, pour procéder avec ordre, nous désignerons par x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 les systèmes de coordonnées respectives du paraboloïde hyperbolique équilatère, de la cyclide, de la sphère, du paraboloïde de révolution.

Enfin nous aurons recours à la notation (0, 1) (1, 2), etc. pour désigner les transformations relatives aux surfaces de coordonnées (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), etc.

Nous avons donc

$$x = 2a\frac{x_1}{z_1+2a}, \qquad x_1 = 2x\frac{y^2+2a^2}{x^2+y^2+4a^2},$$

$$y = -2a\frac{y_1}{z_1-2a}, \qquad y_1 = 2y\frac{x^2+2a^2}{x^2+y^2+4a^2},$$

$$z = a\left[\left(\frac{y_1}{z_1-2a}\right)^2-\left(\frac{x_1}{z_1+2a}\right)\right]^2, \qquad z_1 = 2a\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2+4a^2},$$

$$x_2 = 2\mathrm{R}x_1\frac{2a-z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2+4a^2}, \qquad x_1 = \frac{a}{\mathrm{R}}\frac{2y_1^2+(\mathrm{R}-z_2)^2}{(z_2-\mathrm{R})^2}x_2,$$

$$y_2 = 2\mathrm{R}y_1\frac{2a+z_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2+4a^2}, \qquad y_1 = \frac{a}{\mathrm{R}}\frac{2x_2^2+(\mathrm{R}-z_2)^2}{(z_2-\mathrm{R})^2}y_2,$$

$$z_2 = \mathrm{R}\frac{x_1^2+y_1^2+3z_1^2-4a^2}{x_1^2+y_1^2+z_1^2+4a^2}, \qquad z_1 = \frac{a}{\mathrm{R}}\frac{y_2^2-x_2^2}{\mathrm{R}-z_2},$$

$$x_2 = -\frac{\mathrm{R}x_3}{z_3+2c}, \qquad x_3 = \frac{2cx_2}{z_2-\mathrm{R}},$$

$$y_2 = -\frac{\mathrm{R}y_3}{z_3+2c}, \qquad y_3 = \frac{2cy_2}{z_2-\mathrm{R}},$$

$$z_2 = \frac{\mathrm{R}z_3}{z_3+2c}, \qquad z_3 = -\frac{2cz_2}{z_2-\mathrm{R}},$$

et

$$x_3 = \frac{c}{a}x, \qquad x = \frac{a}{c}x_3,$$

$$y_3 = \frac{c}{a}y, \qquad y = \frac{a}{c}y_3,$$

$$z_3 = \frac{c}{4a^2}(x^2+y^2-4a^2), \qquad z = \frac{a}{4c^2}(y_3^2-x_3^2).$$

Les quatre surfaces considérées sont ici définies par le système

$$(10)\quad \begin{cases} y^2-x^2-4az=0, & z_1(x_1^2+y_1^2+z_1^2-4a^2)+2a(y_1^2-x_1^2)=0,\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2-R^2=0, & x_3^2+y_3^2-4c(z_3+c)=0, \end{cases}$$

c désigne ici une constante.

Ces quatre systèmes forment le cycle complet. Nous pouvons toutefois y joindre les deux systèmes (0, 2), (1, 3) qui relient le paraboloïde hyperbolique équilatère à la sphère et le paraboloïde de résolution à la cyclide.

Nous trouvons

$$x_2 = -\frac{4ax}{x^2+y^2+4a^2}R, \qquad x = 2a\frac{x_2}{z_2-R},$$

$$y_2 = -\frac{4ay}{x^2+y^2+4a^2}R, \qquad y = 2a\frac{y_2}{z_2-R},$$

$$z_2 = \frac{x^2+y^2-4a^2}{x^2+y^2+4a^2}R, \qquad z = a\frac{y_2^2-x_2^2}{(z_2-R)^2},$$

$$x_3 = 2c\frac{x_1}{z_1+2a}, \qquad x_1 = \frac{a}{2c^2}\frac{y_3^2+2c^2}{z_3+2c}x_3,$$

$$y_3 = -2c\frac{y_1}{z_1-2a}, \qquad y_1 = \frac{a}{2c^2}\frac{x_3^2+2c^2}{z_3+2c}y_3,$$

$$z_3 = c\left(\frac{x_1^2}{(z_1+2a)^2}+\frac{y_1^2}{(z_1-2a)^2}-1\right), \qquad z_3 = \frac{a}{2c}\frac{y_3^2-x_3^2}{z_3+2c}.$$

L'interprétation géométrique de ces systèmes offre un intérêt particulier quand on introduit l'hypothèse

$$a = c = -\frac{R}{2}.$$

Alors les projections sur le plan des xy des points associés sur les deux paraboloïdes se confondent. Le système (0, 3) donne en effet

$$x_3 = x, \qquad y_3 = y.$$

De ce fait nous pouvons déduire la proposition suivante :

Soient donnés un paraboloïde de révolution et un paraboloïde hyperbolique équilatère de même axe définis par les équations du système (10) *où l'on suppose* $2a = 2c = -R$; *tout rayon incident parallèle à l'axe des* z *se réfléchira sur chacune de ces deux surfaces suivant des directions respectivement normales à la sphère et à la cyclide du même système* (10) *et rencontrant ces deux surfaces en des points liés par la transformation birationnelle* (1, 2).

Dans la même hypothèse les deux groupes de formules du système (2, 3) deviennent identiques.

Ainsi donc le *système* (2, 3) *définit une transformation réciproque entre les points du paraboloïde de révolution et l'une des sphères normales aux rayons réfléchis sur cette surface, la direction des rayons incidents étant supposée parallèle à l'axe.*

Si dans le système (2, 3) nous faisons toujours $2c = -R$ le point du plan des xy de coordonnées $x_3 y_3$ sera à la fois projection orthogonale sur ce plan d'un point du paraboloïde de révolution, et projection centrale sur le même plan de point correspondant de la sphère, le pôle de projection étant situé en un des points où l'axe des z rencontre la sphère.

Cette transformation d'un point de la sphère en sa projection centrale que nous venons de définir est celle (à un coefficient près d'homothétie) par laquelle on passe de la surface plane à la surface sphérique de Riemann.

Nous n'avons déterminé qu'une seule anticaustique du paraboloïde, alors que leur ensemble constitue une famille. Mais rien n'est plus aisé que de déduire cette famille de l'équation de la cyclide. Écrivons

$$\xi = a(u^2 + u_1^2) + \rho_2(1 + u u_1),$$

ρ_2 désignant un paramètre arbitraire. Pour $\rho_2 = 0$ nous avons l'équation de la cyclide, et à chaque valeur de ρ_2 correspond une surface parallèle à celle-ci, par conséquent une anticaustique du paraboloïde.

On sait que le paramètre ρ_2 associé aux paramètres ρ, ρ_1 des lignes de courbure permet de définir un système cyclique dont fait partie la cyclide de Dupin.

Nous n'insisterons pas sur ces résultats et nous avons hâte d'en venir à l'étude des anticaustiques relatives à certaines courbes tracées sur le paraboloïde.

II.

Coupons le paraboloïde par un plan parallèle à l'axe des z. Soit θ l'angle de ce plan avec celui des xz. Si l'on effectue un changement de plans de projection, tel que le plan de section devienne celui des yz, x', y', z' les nouvelles coordonnées peuvent être définies par le système

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta + x'_0, \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta + y'_0, \\ z' &= 0. \end{aligned}$$

x'_0, y'_0, coordonnées de l'ancienne origine par rapport à la nouvelle, peuvent être choisies sur le plan de section de telle sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} x'_0 &= \lambda\cos 2\theta, \\ y'_0 &= -\lambda\sin 2\theta, \end{aligned}$$

λ désignant la distance de l'ancienne origine à la nouvelle.

L'équation du paraboloïde hyperbolique devient alors

$$\cos 2\theta(y'^2 - x'^2) + 2\sin 2\theta\, x'y' + 2\lambda x' - \cos 2\theta\lambda^2 - 4az' = 0$$

et la parabole de section sera définie par le système

$$\begin{aligned} x' &= 0, \\ \cos 2\theta\, y'^2 - 4az' - \cos 2\theta\lambda^2 &= 0. \end{aligned}$$

En tenant compte des relations

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta + x'_0 = 0, \qquad x'_0 = \lambda\cos 2\theta, \qquad y' = -\lambda\sin 2\theta$$

il vient

$$\begin{aligned} x &= -y'\sin\theta - \lambda\cos\theta, \\ y &= y'\cos\theta + \lambda\sin\theta. \end{aligned}$$

Il suffit de porter ces valeurs dans le second groupe du système (o,1), qui définit les coordonnées de la cyclide de Dupin, pour obtenir l'anticaustique de la section.

On trouvera en particulier

$$\frac{X}{\lambda \sin 2\theta Y + 2a \sin\theta Z} + \frac{Y}{\lambda \sin 2\theta x - 2a \cos\theta Z} + \frac{Z}{\sin\theta X + \cos\theta Y} = 0.$$

Nous voyons par cette équation que *les paraboles déterminées sur le paraboloïde par des plans parallèles à l'axe des z admettent pour anticaustique l'intersection de deux cubiques dont l'une est la cyclide de Dupin.*

Les cosinus directeurs des rayons réfléchis vérifient la relation

$$2a(c\cos\theta - c'\sin\theta) + \lambda(c'' - 1)\cos 2\theta = 0.$$

Cette équation montre que les rayons réfléchis sur la parabole de section font un angle constant avec une direction fixe.

Cet angle a pour valeur

$$\cos V = \frac{\lambda \cos 2\theta}{\sqrt{\lambda^2 \cos^2 2\theta + 4a^2}}.$$

Quand le plan de section passe par l'axe des z, on a $\lambda = 0$. x et y sont alors définis par les expressions

$$x = -y'\sin\theta,$$
$$y = \quad y'\cos\theta$$

et les coordonnées de l'anticaustique ont pour expressions

$$X = -2y'\cos\theta \frac{y'^2\cos^2\theta + 2a^2}{y'^2 + 4a^2},$$
$$Y = \quad 2y'\sin\theta \frac{y'^2\sin^2\theta + 2a^2}{y'^2 + 4a^2},$$
$$Z = 2a \frac{y'^2\cos 2\theta}{y'^2 + 4a^2}.$$

L'élimination de y' donne entre autres équations

$$X^2 - Y^2 + 2\cot 2\theta XY + 4aZ = 0,$$
$$(X^2 + Y^2 + 2Z^2)\sin 2\theta + 2XY = 0,$$
$$Z = 2a \frac{X\cos\theta + Y\sin\theta}{X\cos\theta - Y\sin\theta}.$$

Nous voyons donc que *les intersections du paraboloïde hyperbolique équilatère avec un plan passant par l'axe des z admettent, pour anticaustiques, des courbes suivant lesquelles trois surfaces du deuxième degré coupent la cyclide de Dupin.*

Les cosinus directeurs des rayons réfléchis vérifient ici la relation

$$c \cos\theta - c' \sin\theta = 0$$

qui montre que ces rayons sont tous parallèles à un plan passant par l'axe des z.

Si l'on rapproche cette relation de l'équation

$$x \cos\theta + y \sin\theta = 0$$

qui définit la direction du plan de section, on trouve pour valeur de l'angle des deux plans

$$\cos\gamma = \cos 2\theta.$$

D'où nous pouvons tirer cette conclusion : *Soient données sur le paraboloïde hyperbolique équilatère défini par l'équation* (1) *deux plans symétriques par rapport au plan des xz, les rayons parallèles à l'axe des z se réfléchiront sur chacune des paraboles de section suivant des directions parallèles au plan de l'autre parabole.*

Pour $\theta = 0$ les deux plans se confondent et dès lors les rayons réfléchis doivent se trouver dans le plan de section. L'intersection de ce plan avec la cyclide étant l'anticaustique de la parabole doit se réduire à un cercle. On vérifie sans peine qu'il en est bien ainsi. En effet l'équation (2) de la cyclide peut se mettre sous la même forme

$$(Z - 2a)(X^2 + Z^2 - 2aZ) + (Z^2 + 2a)Y^2 = 0.$$

Or, pour la section du paraboloïde déterminée par la valeur $\theta = 0$, on a $Y = 0$ et l'équation de la cyclide se décompose en deux équations dont l'une définit bien un cercle.

Les sections les plus intéressantes du paraboloïde sont celles qu'on obtient en faisant successivement x et y constants. Nous avons vu que ces quantités sont les paramètres des lignes de courbure de la cyclide. Les anticaustiques des paraboles de section seront donc les cercles qui constituent les lignes de courbure de cette surface. Nous pouvons résumer les propriétés du système de rayons réfléchis dans la proposition suivante :

Soit donné le paraboloïde hyperbolique équilatère défini par l'équation (1); *les parallèles à l'axe des z se réfléchiront sur les paraboles de la surface situées dans des plans parallèles aux plans coordonnés suivant les génératrices d'un cône de révolution. Ces cônes ont leur sommet sur l'une des paraboles auxquelles se réduisent les deux nappes de la développée de la cyclide de Dupin normale aux rayons réfléchis. Ils enveloppent la seconde de ces paraboles, la parabole de section et admettent pour sections droites leurs intersections avec la cyclide et toutes les surfaces parallèles à celles-ci.*

En égalant z à une constante dans l'équation du paraboloïde, on obtient une série de sections parallèles qui admettent pour anticaustique les intersections de la cyclide avec la surface du second degré définie par l'équation

$$a(Y^2 - X^2) - zZ^2 - 4a^2(Z - z) = 0.$$

On trouve pour équation de la représentation sphérique

$$a(c^2 - c'^2) + 2(1 - c'')^2 = 0.$$

Nous pouvons en terminant considérer les courbes d'intersection du paraboloïde par un cylindre de révolution ayant pour axe celui des z.

On a ici

$$x^2 + y^2 = k^2 = \text{const.}$$

et l'on trouve

$$c'' = \frac{k^2 - 4a^2}{k^2 + 4a^2}.$$

Cette relation nous montre que les rayons réfléchis font un angle constant avec l'axe des z. Pour $k = 2a$, ces rayons deviennent perpendiculaires à cet axe.

L'anticaustique se trouve ici sur la surface de révolution du second degré :

$$4a^2(X^2 + Y^2 - k^2) + (k^2 + 8a^2)Z^2 = 0.$$