BULLETIN DE LA S. M. F.

P. BOUTROUX

Propriétés d'une fonction holomorphe dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs zéro et un

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 30-39
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__30_1>

PROPRIÉTÉS D'UNE FONCTION HOLOMORPHE DANS UN CERCLE OÙ ELLE NE PREND PAS LES VALEURS ZÉRO ET UN [1];

Par M. Pierre Boutroux.

1. M. Landau a démontré le théorème suivant [2] qui se présente comme une généralisation du théorème de M. Picard sur les fonctions entières :

Soit une fonction entière

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

et soit $a_0 \neq 0$, $a_0 \neq 1$, $a_1 \neq 0$. Il existe un nombre R indépendant des coefficients a_3, a_4, ..., c'est-à-dire fonction de a_0 et de a_1 seulement, tel que F (x) prenne sûrement l'une des valeurs 0 ou 1 dans le cercle de rayon R ayant son centre à l'origine.

---

(1) Les résultats que je vais exposer ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 31 juillet 1905. A cette époque j'ignorais absolument l'existence du Mémoire très important que M. le Professeur Schottky avait publié quelques mois plus tôt sur le théorème de M. Picard (*Sitzungsberichte d. k. preussischen Ak. d. W.*, 27 octobre 1904), Mémoire qui contenait une série d'énoncés semblables à celui que j'ai obtenu. M. Landau vient d'être assez obligeant pour me signaler cette inadvertance. Je me décide néanmoins à publier ce travail tel qu'il est, quitte à revenir ultérieurement sur la même question en m'inspirant des beaux résultats de M. Schottky. J'ajoute qu'une démonstration, extrêmement élégante et précise du principal théorème exposé ci-dessous a été récemment obtenue par M. C. Carathéodory (voir *Comptes rendus,* 26 décembre 1905.)

(2) Landau, *Ueber eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes* (*Sitzungsberichte d. k. preussischen Ak. d. W.*. juillet 1904).

J'ai été conduit depuis lors à quelques résultats d'un caractère analogue que je vais brièvement exposer.

Ces résultats se résument comme il suit :

Considérons la fonction $F(x)$ *dans un cercle* C, *ayant son centre à l'origine, où elle est holomorphe et dans lequel elle est supposée ne pas prendre les valeurs* o *et* 1. *Soit* M *le module maximum que prend* $F(x)$ *dans un cercle concentrique à* C *et de rayon* λR, $(\lambda < 1)$, *par exemple dans un cercle* C′ *de rayon* $\frac{3R}{4}$.

LE MODULE MAXIMUM M EST INFÉRIEUR A UN NOMBRE FIXE $\mathcal{A}$ QUI NE DÉPEND QUE DU COEFFICIENT a_0.

2. Soit la fonction

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \tag{1}$$

holomorphe dans un cercle C de rayon R, ayant son centre à l'origine, et ne prenant dans ce cercle ni la valeur o, ni la valeur 1. Dans le cercle C, $\log F(x)$ est une fonction holomorphe qui ne prend pas les valeurs o, $2i\pi$, $4i\pi$, ... De même $\log \frac{\log F(x)}{2i\pi} = F_1(x)$ est une fonction holomorphe qui ne prend dans C aucune des valeurs suivantes :

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{lllll} \dots, & k_{0,-2} = -2i\pi, & k_{0,0} = 0, & k_{0,2} = 2i\pi, & \dots, \\ \dots, & k_{2,-2} = \log 2 - 2i\pi, & k_{2,0} = \log 2, & k_{2,2} = \log 2 + 2i\pi, & \dots, \\ \dots, & k_{3,-2} = \log 3 - 2i\pi, & k_{3,0} = \log 3, & k_{3,2} = \log 3 + 2i\pi, & \dots, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right.$$

De $F_1(x)$ on pourrait passer à la fonction $\log \frac{\log F_1(x)}{2i\pi}$ et ainsi de suite. Je m'arrêterai pour l'instant à la fonction $F_1(x)$ que j'étudierai en place de $F(x)$.

3. LEMME I. — *Soit une fonction entière*

$$\varphi(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots.$$

Posons

$$|x| = r, \qquad \mathfrak{M}(r) = 1 + |\alpha_1| r + |\alpha_2| r^2 + \dots$$

et appelons $A(r)$ *la plus grande valeur positive de la partie réelle de* $\varphi(x)$ *pour* $|x| = r$, $A(r)$ *étant assujetti à être, par exemple, supérieur* (¹) *à* 10. QUEL QUE SOIT r, ON A

$$(2) \qquad \mathfrak{M}(\theta r) < 10 A(r) \log A(r) \quad \text{pour} \quad \theta \leqq 1 - \frac{1}{\log A(r)}.$$

La démonstration de ce lemme résulte d'une remarque due à M. Borel (²). Soit $x = re^{i\omega}$ et soit $P(r, \omega)$ la partie réelle de $\varphi(x)$. On vérifie que

$$\pi r^m |\alpha_m| + 2\pi < \int_0^{2\pi} (|P| + P)\, d\omega < 4\pi . A(r),$$

et, par suite, que

$$\mathfrak{M}(\theta r) < 1 + [4 A(r) + 2] \frac{\theta}{1-\theta} < [4 A(r) + 3] \log A(r).$$

On en déduit l'inégalité (2). Nous pouvons ajouter que *l'inégalité subsiste si* $\varphi(0)$ *au lieu d'être égal à* 1 *est assujetti seulement à avoir un module inférieur à* 4π.

4. LEMME II. — *Supposons que pour* $|x| < R$ *le module de* $\varphi(x)$ *reste inférieur à un nombre donné* $\mathcal{A}$. *Dans ces conditions, je dis que* L'ON A POUR

$$|x| < \lambda R \left(1 - \frac{1}{\log \mathcal{A}}\right), \quad \lambda < 1,$$

L'INÉGALITÉ

$$(3) \qquad |\alpha_m x^m| + |\alpha_{m+1} x^{m+1}| + \ldots < \lambda^{\frac{m}{2}} \mathcal{A},$$

POURVU QUE m DÉPASSE UNE CERTAINE VALEUR CHOISIE DE TELLE MANIÈRE QUE

$$(4) \qquad \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{m}{2}} > 10 \log \mathcal{A}.$$

En effet, supposons que l'inégalité (3) ne soit pas vérifiée. Alors

---

(¹) Je n'ai point cherché à donner aux constantes numériques leur valeur minimum. Elles ne figurent ici que pour fixer les idées.

(²) *Voir* BOREL, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta math.*, t. XX). M. Landau a fait usage d'un lemme voisin.

on aura pour $R' = R\left(1 - \frac{1}{\log \mathcal{A}}\right)$ l'inégalité

$$|\alpha_m| R'^m + |\alpha_{m+1}| R'^{m+1} + \ldots > \frac{1}{\lambda^{\frac{m}{2}}} \mathcal{A},$$

et l'on en conclura, d'après le lemme I et l'inégalité (4), que l'on a en certains points du cercle de rayon R

$$|\varphi(x)| > \mathcal{A},$$

ce qui est contraire à nos hypothèses.

5. Lemme III. — *Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans un cercle* C *de rayon* R, *et soit* $M(r)$ *le module maximum de cette fonction pour* $|x| \leqq r$. *Je suppose* (¹) *que l'on ait par exemple* (¹)

$$1 < R < 2, \qquad M\left(\frac{3R}{4}\right) > 10;$$

ON AURA, POUR UNE INFINITÉ DE VALEURS r_0 DE r, COMPRISES ENTRE $\frac{3R}{4}$ ET $\frac{7R}{8}$, L'INÉGALITÉ

$$M(r) < M^2(r_0) \quad \text{pour} \quad r < r_0 + \frac{r_0}{\sqrt{M(r_0)}}.$$

On voit en effet immédiatement que, s'il n'en était pas ainsi, la fonction $f(x)$ deviendrait infinie dans le cercle C.

D'ailleurs il existera pour $|x| \leqq r_0$ des points $\bar{x}$ où l'on aura

$$|f'(\bar{x})| \geqq \frac{M(r_0) - |f(0)|}{|\bar{x}|}.$$

En ces points $\bar{x}$ on aura donc simultanément :

$$(5)\qquad \begin{cases} f'(\bar{x}) \geqq \dfrac{M(r_0) - |f(0)|}{|\bar{x}|} \\ M(|x|) < M^2(r_0) \quad \text{pour} \quad |x - \bar{x}| \leqq \dfrac{r_0}{\sqrt{M(r_0)}} \end{cases}$$

(¹) Les nombres $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ peuvent naturellement être remplacés par des nombres quelconques inférieurs à 1.

avec

$$\frac{3R}{4} < r_0 < \frac{7R}{8}, \qquad M(r_0) \geqq M\left(\frac{3R}{4}\right).$$

6. Revenons maintenant à la fonction $F_1(x)$ du n° 2, et appelons $M_1(r)$ son module maximum dans le cercle C de rayon R. Je vais montrer que $M\left(\frac{3R}{4}\right)$ *est inférieur à un nombre fixe qui ne dépend que de* a_0, *c'est-à-dire de* $F_1(o)$. (On obtiendrait le même résultat si l'on remplaçait le coefficient numérique $\frac{3}{4}$ par un nombre quelconque inférieur à 1.)

L'unité de longueur restant arbitraire, nous avons le droit de supposer [après avoir fait au besoin un changement de variable de la forme $x' = \lambda x$, lequel n'affecte pas $F_1(o)$] que

$$1 < R < 2.$$

Nous admettrons, d'autre part, que

$$M_1\left(\frac{3R}{4}\right) > 2\,|\,F_1(o)\,|,$$

et nous chercherons à étudier $F_1(x)$ dans ces conditions.

Soit $\overline{x_0}$ un point de C où l'on ait les inégalités (5) du lemme III. $F_1(x)$ est holomorphe dans un cercle Γ, de centre $\overline{x_0}$ et de rayon supérieur à

$$\rho_1 = \frac{r_0}{\sqrt{M_1(r_0)}}, \qquad \frac{3R}{4} < r_0 < \frac{7R}{8}.$$

On a, dans ce cercle,

$$F_1(x) = b_0 + b_1(x - \overline{x_0}) + \ldots$$

avec

$$(6) \qquad |\,b_1\,| > \frac{M_1(r_0) - |\,F_1(o)\,|}{|\,x_0\,|}.$$

Considérons dans le cercle Γ_1 la fonction

$$G_1(x) = F_1(x) + \overline{k} = b + b_1(x - \overline{x_0}) + \ldots,$$

la constante $\overline{k}$ étant l'un des éléments du Tableau I (n° 1) que l'on choisira de telle manière que

$$2\pi < |\,b\,| < 4\pi.$$

Par hypothèse $G_1(x)$ ne s'annule pas dans le cercle Γ_1 et n'y prend pas un ensemble de valeurs $k'_{i,j}$ qui (comme les éléments du Tableau I) sont deux à deux à une distance au plus égale à 2π. D'autre part, le module maximum de $G_1(x)$ pour $|x-\overline{x_0}| \leqq \rho_1$ est, d'après le lemme III, inférieur ou égal à $M_1^2(r_0)$. Nous le désignerons par μ_1, et le supposerons plus grand que 10.

7. Considérons maintenant la fonction

$$G_2(x) = \log \frac{G_1(x)}{2i\pi} + \overline{k'} = c + \frac{b_1}{b}(x-\overline{x_0}) + \ldots = c + c_1(x-\overline{x_0}) + \ldots,$$

la constante $\overline{k'}$ étant encore choisie de telle sorte que $2\pi < |c| < 4\pi$. Comme on a

$$c = \log \frac{b}{2i\pi} + \overline{k'} \qquad 2\pi < |b| < 4\pi,$$

on aura ([1]) évidemment

$$|\overline{k'}| \leqq 2\pi.$$

La fonction $G_2(x)$ est holomorphe dans le cercle Γ_1, ne s'y annule pas et n'y prend pas un ensemble de valeurs $k''_{i,j}$ dont la distance deux à deux est au plus égale à 2π. D'autre part, dans le cercle Γ_1, la plus grande valeur positive de la partie réelle de G_2 est comprise entre $\log\left(\frac{\mu_1}{2\pi} - 2\pi\right)$ et $\log\left(\frac{\mu_1}{2\pi} + 2\pi\right)$; elle est *a fortiori* inférieure à $\log \mu_1$ (puisque nous supposons $\mu_1 > 10$). Il en résulte, d'après le lemme I, que, dans un cercle Γ_2 concentrique à Γ_1 et de rayon

$$\rho_2 = \theta_1 \rho_1, \qquad \theta_1 = 1 - \frac{1}{\log\log \mu_1},$$

la somme des modules des termes de G_2

$$\mathfrak{M}_2(|x|) = |c| + |c_1(x-\overline{x_0})| + |c_2(x-\overline{x_0})^2| + \ldots$$

est inférieure ([2]) à $10 \log \mu_1 \log\log \mu_1$.

([1]) Nous supposerons toujours que l'on considère la plus petite détermination du logarithme.

([2]) De la fonction $G_2(x)$ on passerait par le même procédé à une fonction $G_3(x)$, et ainsi de suite. La fonction $G_i(x)$ aurait un module maximum μ_i comparable à $\log \mu_{i-1}$, et la somme des modules de ses termes serait inférieure à $10 \log \mu_{i-1} \log\log \mu_{i-1}$ dans un cercle Γ_i de rayon

$$\rho_i = \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_{i-1} \rho_1, \qquad \theta_j = 1 - \frac{1}{\log\log \mu_j}.$$

Cela posé, il va nous être facile de montrer que l'on aboutirait à une contradiction si l'on supposait que μ_1 satisfasse à l'inégalité

$$(7) \qquad \mu_1 > \mathcal{A},$$

où $\mathcal{A}$ est un nombre fixe [fonction de $F_1(0)$] que nous allons déterminer.

8. Nous supposerons que l'on ait déterminé le nombre positif $\mathcal{A}$ de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

1° L'inégalité (7) entraîne

$$\left(1 - \frac{1}{\log\log\mu_1}\right) > \frac{7}{8}.$$

2° Si l'on a l'inégalité (7), on a, *a fortiori*,

$$M_1(r_0) > \sqrt{\mathcal{A}}.$$

Nous supposerons que $\mathcal{A}$ soit assez grand pour que l'on ait

$$(8) \qquad \frac{7\sqrt{M_1(r_0)}}{16 \times 4\pi} > \frac{7\mu_1^{\frac{1}{4}}}{16 \times 4\pi} > 20 \log\mu_1 \log\log\mu_1.$$

3° Enfin, nous assujettirons $\mathcal{A}$ à être supérieur à 10 et à satisfaire à la condition

$$(9) \qquad \sqrt{\mathcal{A}} > 2\,|\,F_1(0)\,|.$$

9. Cela posé, considérons la fonction $G_2(x)$. Nous savons que, dans un cercle Γ_2 de centre $\overline{x_0}$ et de rayon supérieur à $\frac{7}{8}\rho_1$, la somme $\mathfrak{M}_2(|x|)$ des modules des termes de cette fonction est inférieure à $10 \log\mu_1 \log\log\mu_1$. Je vais montrer que *nous serions en présence d'une contradiction si nous admettions que μ_1 est supérieur au nombre positif $\mathcal{A}$ déterminé au n° 8.*

En effet, nous avons vu que $G_2(x)$ se développe, à l'intérieur de Γ_2, sous la forme

$$c + c_1(x - \overline{x_0}) + \ldots,$$

$|c_1|$ étant supérieur à $\frac{|b_1|}{4\pi}$, c'est-à-dire, d'après (6) et (9), à

$$\frac{\overline{M_1}}{2|\overline{x_0}|4\pi} \qquad [\overline{M_1} = M_1(r_0)].$$

On en conclura que l'on a, pour les points x' de Γ_2 voisins du contour de ce cercle,

$$\mathfrak{M}_2(|x'|) > \frac{7\rho_1}{8}\,\frac{\overline{M_1}}{2|\overline{x_0}|4\pi}.$$

Or, on a

$$\rho_1 = \frac{r_0}{\sqrt{M_1(r_0)}} > |\overline{x_0}|\,\overline{M_1}^{-\frac{1}{2}}$$

On aura, dès lors, en vertu de l'inégalité (8) :

$$\mathfrak{M}_2(|x'|) > \frac{7\sqrt{\overline{M_1}}}{16\times 4\pi} > 20\log\mu_1 \log\log\mu_1.$$

Or, par hypothèse, $\mathfrak{M}_2$ reste inférieur à $10\log\mu_1 \log\log\mu_1$ dans le cercle Γ_2; donc l'inégalité (7) conduit à une contradiction.

C. Q. F. D.

10. Ainsi se trouve démontré le théorème que j'ai annoncé. Résumons, en effet, pour plus de clarté, les résultats acquis aux n^{os} 6-9. Nous avons considéré la fonction $F_1(x)$ dans un cercle C de rayon R dans lequel, par hypothèse, elle ne prend aucune des valeurs k_{ij} du Tableau I, et nous avons appelé $M_1(r)$ le module maximum (pour $|x| = r$) de $F_1(x)$ dans ce cercle. Nous avons ensuite supposé que l'on ait l'inégalité (7), laquelle résulte par *a fortiori* de l'inégalité

$$M_1\left(\frac{3R}{4}\right) > \mathcal{A}^2, \tag{10}$$

où $\mathcal{A}$ est un nombre fixe qui ne dépend que de $F_1(0)$, et cette hypothèse nous a conduits à une contradiction. Nous en concluons que *l'inégalité* (10) *ne saurait avoir lieu.*

Revenant maintenant à la fonction F (x) qui ne prend dans C ni la valeur 0, ni la valeur 1, et appelant M (r) son module maximum pour $|x| \leqq r$, nous pouvons affirmer que *l'on a*

$$M\left(\frac{3R}{4}\right) < \mathcal{A}_1,$$

$\mathcal{A}_1$ *étant un nombre qui ne dépend que de* F (o), *c'est-à-dire du coefficient* a_0.

11. De cette proposition on déduit immédiatement le théorème de M. Landau. Considérons en effet la fonction

$$(1) \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

les deux premiers coefficients étant fixes et les coefficients suivants variables. D'après le lemme I, si R' est un nombre positif quelconque, on aura en certains points de la circonférence de rayon $R'\left(1 + \frac{1}{\log M(R')}\right)$:

$$10\,|F(x)|\log|F(x)| > |a_0| + |a_1|\,R'.$$

On peut donc évidemment déterminer un nombre R, fonction des seuls coefficients a_0 et a_1, tel que le module $M\left(\frac{3R}{4}\right)$ soit supérieur à $\mathcal{A}_1$, par suite tel que $F(x)$ prenne sûrement l'une des valeurs o ou 1 dans le cercle de rayon R.

Nous sommes d'ailleurs en mesure de varier l'énoncé du théorème en prenant pour coefficients fixes, outre a_0, un ou plusieurs coefficients de (1) autres que a_1. Quels que soient les invariants choisis, il existera toujours un cercle ne dépendant que de ces invariants dans lequel $F(x)$ prendra sûrement l'une des valeurs o, 1.

12. Une autre conséquence du résultat que nous avons établi sera la suivante, relative à la convergence du développement de $F(x)$ dans le cercle C.

D'après le lemme II, si λ est un nombre inférieur à 1, on peut déterminer un entier m tel que l'on ait pour

$$|x| < \frac{3\lambda}{4} R\left(1 - \frac{1}{\log \mathcal{A}_1}\right)$$

l'inégalité

$$(12) \qquad |a_{m+1}x^{m+1}| + |a_{m+2}x^{m+2}| + \ldots < \varepsilon \mathcal{A}_1,$$

ε étant un nombre arbitrairement petit assigné à l'avance. D'ailleurs, ici comme plus haut, on peut remplacer le coefficient numérique $\frac{3}{4}$ par un nombre quelconque inférieur à 1.

En d'autres termes, soit un cercle C de rayon R dans lequel la fonction holomorphe $F(x)$ ne prend pas les valeurs 0 et 1, et soit C' un cercle concentrique à C ayant pour rayon

$$\lambda' R\left(1 - \frac{1}{\log \mathcal{A}_1}\right) \qquad (\lambda' < 1,\ \mathcal{A}_1 \text{ fonction de } a_0 \text{ exclusivement}).$$

Il existe un entier m, dépendant exclusivement du coefficient a_0, tel que l'on ait dans le cercle C' l'inégalité (12). — Quels que soient les coefficients a_1, a_2, ... la partie principale de la valeur de $F(x)$ en un point quelconque de C' est déterminée par un nombre de termes du développement (1) qui est au plus égal à m, m étant fonction de a_0 seulement.

13. J'observe, en terminant, que le mode de démonstration employé plus haut conduit à une généralisation du théorème qui fait l'objet de cette Note.

Imaginons que, dans un cercle C, une fonction holomorphe $F(x)$ ne prenne qu'un nombre fini p de fois les valeurs 0 et 1. On pourra déterminer à l'intérieur de C un cercle Γ de centre $\overline{x_0}$, où $F(x)$ ne prendra aucune des valeurs du Tableau I et où l'on aura l'inégalité (6) : la limite inférieure du rayon de Γ sera d'ailleurs d'autant plus grande que p sera plus petit. On en conclura que $M\left(\frac{3R}{4}\right)$ *est nécessairement inférieur à un certain nombre $\mathcal{A}$, fonction de a_0 et de p exclusivement.*