BULLETIN DE LA S. M. F.

G. REMOUNDOS

Sur les fonctions entières de genre fini

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 314-316

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__314_1>

SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES DE GENRE FINI;

Par M. Georges Remoundos.

1. Dans un travail, qui a paru récemment dans les *Arkiv för matematik, astronomi och fysik utgifvet af k. svenska Vetenskapsakademien* (Band 1) sous le titre *Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières,* M. A. Wiman a signalé un certain défaut dans le complément apporté par M. Maillet [1] au théorème bien connu de M. Hadamard sur le module minimum d'une fonction entière. Ce défaut consiste en ce que les cercles décrits par M. Maillet autour des zéros avec un rayon constant, donné d'avance, peuvent recouvrir tout le plan dans le cas où le genre est supérieur à zéro, et alors le théorème n'aurait pas de sens.

---

[1] Voir *Journal de M. Jordan,* 1902. *Sur les fonctions entières et quasi-entières*

M. Wiman remplace le théorème de M. Maillet par le suivant :

Si l'on décrit autour de chaque zéro a_n *un cercle de rayon égal à* r_η^{-k}, *k étant un nombre aussi grand que l'on voudra, tous les points du plan, qui sont à l'extérieur de ces cercles, satisfont à l'inégalité*

$$|F(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}, \tag{1}$$

$F(z)$ *étant la fonction entière et* ρ *son ordre.*

M. Wiman ajoute l'énoncé suivant :

Si l'on exclut sur la circonférence de rayon r assez grand des parties dont la somme est inférieure à une partie quelconque (arbitrairement petite) des arcs restants, tous les autres points satisfont à l'inégalité (1).

En étudiant quelques propriétés [1] des fonctions à croissance régulière j'ai eu l'occasion de me servir du théorème de M. Hadamard complété et j'ai constaté que la démonstration même que donne M. Maillet dans son Mémoire permet d'établir une proposition plus précise que celle de M. Wiman.

En effet, M. Maillet, suivant l'ordre d'idées de M. Borel, montre que si l'on décrit autour des zéros $a_1, a_2, \ldots, a_m$ [2] des cercles de rayon η, l'inégalité

$$|F(z)| > e^{-r^{\sigma+\varepsilon}} \qquad (\sigma = \rho + \varepsilon_1) \tag{2}$$

sera satisfaite, s'il en est de même de l'inégalité

$$2^\sigma \left(\log\frac{r}{\eta} + \log 2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}\right) < r^\varepsilon. \tag{3}$$

Or, cette dernière inégalité est satisfaite dès que l'on prend

$$\eta = e^{-r^{\varepsilon_2}} \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon_2 < \varepsilon.$$

---

(1) Voir *Comptes rendus*, 20 juin 1904 : *Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes.*

(2) Je conserve ici les notations de M. Maillet et je prie le lecteur de s'y reporter pour la signification de l'entier m.

Étudions maintenant les arcs qui seront mis à part, sur la circonférence de rayon r, par les cercles exclus de rayon $e^{-r^{\varepsilon_2}}$.

Chacun de ces arcs sera évidemment inférieur à la circonférence du cercle exclu, qui lui correspond, et dont la longueur est égale à $2\pi e^{-r^{\varepsilon_2}}$.

D'autre part, le nombre de ces arcs est égal à m, qui est inférieur à $(2r)^{\sigma}$; donc, la somme totale des arcs qui seront exclus est inférieure à

$$2^{\sigma+1}\pi r^{\sigma} e^{-r^{\varepsilon_2}} < e^{-r^{\varepsilon_3}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_3 < \varepsilon_2.$$

On en déduit immédiatement le théorème suivant :

Si l'on exclut sur la circonférence de rayon r, assez grand, certains arcs de longueur totale inférieure à

$$e^{-r^{\alpha}},$$

α étant un nombre positif quelconque inférieur à ε, tous les autres points de la circonférence satisfont à l'inégalité

$$|F(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}$$

Ce théorème est visiblement plus précis que l'énoncé analogue de M. Wiman. C'est là, semble-t-il, la précision la plus extrême que l'on puisse exiger du théorème de M. Hadamard.