BULLETIN DE LA S. M. F.

R. BAIRE

Sur les séries à termes continus et tous de même signe

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 125-128
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__125_0>

SUR LES SÉRIES A TERMES CONTINUS ET TOUS DE MÊME SIGNE;

Par M. René Baire.

1. Je me propose de démontrer le théorème suivant, qui, à cause de la simplicité de son énoncé, me paraît présenter un certain intérêt.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit représentable par une série dont les termes sont des fonctions continues et sont, à partir d'un certain rang, tous de même signe, est qu'elle soit semi-continue, supérieurement dans le cas des termes négatifs, inférieurement dans le cas des termes positifs (1).

Je me bornerai, pour simplifier, au cas d'une seule variable, et j'étudierai le cas où les termes de la série finissent par être tous *négatifs* (ou nuls). En réunissant au besoin en un seul terme un certain nombre de termes au commencement de la série, on peut supposer que tous les termes sont négatifs ou nuls *à partir du second*. Cela étant, si f_ν est la somme des ν premiers termes, la suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ ne va jamais en croissant, c'est-à-dire qu'on a, quel que soit x,

$$f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq \ldots \geqq f_\nu(x) \geqq \ldots \geqq f(x),$$

f étant la somme de la série.

2. Le fait que la condition de l'énoncé est nécessaire est un cas particulier du théorème suivant :

Si une suite de fonctions semi-continues supérieurement f_1, $f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ a une limite f, avec la condition qu'on ait, quels que soient x et ν,

$$f_\nu(x) \geqq f(x),$$

f est aussi semi-continue supérieurement.

---

(1) $f(x)$ est dite ***semi-continue supérieurement*** si, quel que soit x_0 et quel que soit $\varepsilon > 0$, pour toutes les valeurs d'un certain intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$. on a

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

En effet, soit x_0 une valeur de x, et soit $\varepsilon > 0$. Comme on a

$$\lim_{\nu\,\infty} f_\nu(x_0) = f(x_0),$$

on peut trouver p entier tel que

$$f_p(x_0) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Comme f_p est semi-continue supérieurement, on a, quand x est dans un certain intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$,

$$f_p(x) < f_p(x_0) + \varepsilon$$

et, par suite,

$$f(x) \leqq f_p(x) < f_p(x_0) + \varepsilon < f(x_0) + 2\varepsilon.$$

La condition

$$f(x) < f(x_0) + 2\varepsilon$$

exprime que f est semi-continue supérieurement.

Les conditions de cet énoncé sont évidemment vérifiées dans le cas où les f_ν sont continues et ne vont pas en croissant, ce qui démontre que la condition du théorème du § 1 est nécessaire.

3. Reste à démontrer la réciproque. Soit f une fonction semi-continue supérieurement. J'ai donné, dans une Note parue dans ce Bulletin en 1900 (*Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues,* § 1 et § 4), un moyen de former simplement une suite de fonctions continues tendant vers f. Je reprends l'exposé de cette méthode dans le cas d'une variable.

Soit f définie dans l'intervalle $(0, 1)$. Je définis f_ν comme il suit : pour chaque nombre de la forme $\frac{\alpha}{2^\nu}$ (α entier), f_ν est égale au maximum de f dans l'intervalle $\left(\frac{\alpha - 1}{2^\nu}, \frac{\alpha + 1}{2^\nu}\right)$. Dans l'intervalle qui a pour extrémités deux nombres consécutifs de cette forme, f_ν varie linéairement.

La suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ tend vers f. Car, soit x_0 une valeur de x, et soit $\varepsilon > 0$; f étant semi-continue supérieurement, il y a un intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$ dans lequel on a

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

ν étant donné, soit α l'entier tel que

$$\frac{\alpha}{2^\nu} \leqq x_0 < \frac{\alpha+1}{2^\nu};$$

$f_\nu(x_0)$ est compris entre $f_\nu\left(\frac{\alpha}{2^\nu}\right)$ et $f_\nu\left(\frac{\alpha+1}{2^\nu}\right)$, qui sont respectivement égaux aux maxima de f dans les intervalles $\left(\frac{\alpha-1}{2^\nu}, \frac{\alpha+1}{2^\nu}\right)$, $\left(\frac{\alpha}{2^\nu}, \frac{\alpha+2}{2^\nu}\right)$; ces intervalles, qui contiennent tous deux x_0, sont, dès que ν dépasse une certaine valeur, contenus en entier dans $(x_0 - h, x_0 + h)$. A partir de ce moment, les maxima en question sont compris entre $f(x_0)$ et $f(x_0) + \varepsilon$; il en est donc de même pour $f_\nu(x_0)$.

Ainsi l'on a, quel que soit x,

$$\lim_{\nu\,\infty} f_\nu(x) = f(x)$$

et de plus, quel que soit ν,

$$f_\nu(x) \geqq f(x).$$

Mais je dis qu'on a, en outre,

$$f_\nu(x) \geqq f_{\nu+1}(x).$$

Pour que cette inégalité soit démontrée pour toutes les valeurs de x, il suffit, si l'on tient compte de ce fait que f_ν et $f_{\nu+1}$ sont linéaires dans tout intervalle $\left(\frac{\alpha}{2^{\nu+1}}, \frac{\alpha+1}{2^{\nu+1}}\right)$ (α entier), de la vérifier lorsque x est de la forme $\frac{\alpha}{2^{\nu+1}}$.

Plaçons-nous dans ce cas, qui se subdivise en deux :

1° α est pair $= 2\beta$; $x = \frac{\alpha}{2^{\nu+1}} = \frac{\beta}{2^\nu}$.

$f_\nu(x)$ est égal au maximum de f dans l'intervalle $\left(\frac{\beta-1}{2^\nu}, \frac{\beta+1}{2^\nu}\right)$ ou $\left(\frac{\alpha-2}{2^{\nu+1}}, \frac{\alpha+2}{2^{\nu+1}}\right)$.

$f_{\nu+1}(x)$ est égal au maximum de f dans l'intervalle $\left(\frac{\alpha-1}{2^{\nu+1}}, \frac{\alpha+1}{2^{\nu+1}}\right)$ qui est contenu dans le précédent.

On a donc bien

$$f_{\nu+1}(x) \leqq f_\nu(x).$$

2° α est impair $= 2\beta + 1$; $x = \frac{\alpha}{2^{\nu+1}} = \frac{2\beta+1}{2^{\nu+1}}$.

$f_\nu(x)$ est égal à la demi-somme des nombres $f_\nu\left(\frac{\beta}{2^\nu}\right)$ et $f_\nu\left(\frac{\beta+1}{2^\nu}\right)$, respectivement égaux aux maxima de f dans les intervalles $\left(\frac{\beta-1}{2^\nu}, \frac{\beta+1}{2^\nu}\right)$ et $\left(\frac{\beta}{2^\nu}, \frac{\beta+2}{2^\nu}\right)$.

$f_{\nu+1}(x)$ est égal au maximum de f dans l'intervalle $\left(\frac{\alpha-1}{2^{\nu+1}}, \frac{\alpha+1}{2^{\nu+1}}\right)$ ou $\left(\frac{\beta}{2^\nu}, \frac{\beta+1}{2^\nu}\right)$ qui est contenu dans chacun des deux précédents.

Donc $f_{\nu+1}(x)$ est inférieur ou égal aux nombres $f_\nu\left(\frac{\beta}{2^\nu}\right)$ et $f_\nu\left(\frac{\beta+1}{2^\nu}\right)$ et aussi à leur demi-somme $f_\nu(x)$, ce qui vérifie la condition indiquée.

Il est ainsi établi qu'une fonction semi-continue supérieurement peut être considérée comme la limite d'une suite de fonctions continues allant en décroissant, ou encore comme la somme d'une série de fonctions continues à termes tous négatifs à partir du second. De même une fonction semi-continue inférieurement est la somme d'une série à termes continus et tous positifs à partir du second.

Ces résultats s'étendent au cas de n variables, en utilisant les méthodes indiquées aux § 1 et 4 de la Note citée, et introduisant dans les démonstrations qui précèdent des modifications évidentes.

On a ainsi un procédé de représentation *qui est spécial aux fonctions semi-continues.*