L. AUTONNE

Sur quelques propriétés des matrices hypohermitiennes n-aires

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 268-271

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__268_1>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES MATRICES HYPOHERMITIENNES n-aires;

Par M. L. AUTONNE.

1° Je me propose de compléter certains résultats énoncés dans mes publications antérieures :

I. — *Sur l'Hermitien* (Rendiconti du Cercle mathématique de Palerme, 1902).

II. — *Sur les groupes linéaires réels et orthogonaux* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1902).

III. — *Sur l'Hypohermitien* (même Recueil, 1903).

IV. — *Sur la canonisation des formes bilinéaires* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1903).

Je supposerai aussi connues du lecteur les propriétés des matrices bilinéaires telles que les a exposées M. Frobenius dans ses remarquables travaux, notamment :

V. — *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (J. f. r. u. a. M., t. 84, p. 1).

VI. — *Ueber die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen* (Sitzungsberichte de l'Académie des Sciences de Berlin, 1896, p. 7) [1].

2° Soit A une hypohermitienne n-aire. L'équation caractéristique (ω)

$$|xE - A| = (x - a)^g (x - b)^h (x - c)^k \ldots = 0,$$
$$n = g + h + k + \ldots$$

aura l racines *distinctes* $a, b, c, \ldots$. Les successifs (*Elementartheiler*) seront tous simples et seront $x - a, \ldots, x - b, \ldots, x - c, \ldots$.

Enfin les racines $a, b, c, \ldots$ de (ω) seront des nombres réels, positifs ou nuls.

Désignons par $\psi(x)$ le polynome

$$\psi(x) = x^l + \ldots = (x - a)(x - b)(x - c)\ldots$$

L'équation de degré minimum à laquelle satisfait la matrice A est $\psi(A) = 0$. Toute fonction rationnelle $f(A)$ peut, sous le bénéfice de $\psi(A) = 0$, s'écrire

$$f(A) = d_0 A^{l-1} + d_1 A^{l-2} + \ldots + d_{l-2} A + d_{l-1} E;$$

le polynome $f(x)$ est

$$f(x) = d_0 x^{l-1} + \ldots + d_{l-2} x + d_{l-1}.$$

Comme les successifs sont tous simples pour l'hypohermitienne A, le *cas d'exception* (V, p. 25, théorème V) ne se présente pas. L'équation caractéristique afférente à $f(A)$ sera

$$|xE - f(A)| = [x - f(a)]^g [x - f(b)]^h \ldots = 0,$$

et les successifs, encore tous simples, seront

$$x - f(a), \quad x - f(b), \quad x - f(c), \quad \ldots.$$

A et $f(A)$ admettent évidemment les mêmes canonisantes et, si A a été canonisée, il en est de même pour $f(A)$.

---

(1) Je renverrai à cette liste simplement en rappelant le chiffre romain qui désigne chaque travail.

3° Tout cela posé, passons à la première question, qui nous occupera :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que $f(A)$ soit aussi une hypohermitienne?

Comme A et $f(A)$ se laissent en même temps canoniser par une même *canonisante unitaire,* il faut et il suffit *évidemment, pour rendre $f(A)$ hypohermitienne, que les quantités*

$$f(a),\quad f(b),\quad f(c),\quad \ldots$$

soient réelles et non négatives.

Le rang q d'une hypohermitienne n-aire est donné par la relation : $n - q =$ le nombre des racines nulles dans l'équation caractéristique.

Ce rang q est, en général, différent pour $f(A)$.

4° Voici maintenant le second problème qui nous occupera.

J'ai démontré (III) que, A étant une hypohermitienne n-aire quelconque, il existait toujours une et une seule hypohermitienne $B = A^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{A}$ telle que $B^m = A$; $m =$ entier positif. La méthode donnée pour la construction de B est fondée sur la canonisation préalable de A et n'est satisfaisante qu'en théorie. Le calcul direct devient bien vite impraticable (*voir,* par exemple, I, 26°, le cas $m = n = 2$).

On va chercher s'il est possible d'exprimer $A^{\frac{1}{m}}$ par une fonction rationnelle $f(A)$ (2°).

Nommons α, β, γ, ... les nombres réels et non négatifs, qui sont les racines $m^{\text{ièmes}}$ *arithmétiques* de a, b, c, ... En vertu de ce qui précède, il suffit de faire

$$f(a) = \alpha,\qquad f(b) = \beta,\qquad f(c) = \gamma,\qquad \ldots,$$

c'est-à-dire de définir les coefficients d_r du polynome f par les l relations

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum\limits_r d_r a^{l-1-r} = \alpha, \\ \sum\limits_r d_r b^{l-1-r} = \beta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r = 0,\ 1,\ \ldots,\ l-1, \end{cases}$$

où le déterminant des l inconnues d_r est $\neq$ o, puisque les l racines a, b, c, ... sont toutes distinctes.

Ce calcul des d_r se résume d'ailleurs dans une formule unique

$$(2)\qquad 0 = \begin{vmatrix} A^{l-1} & A^{l-2} & \dots & A^2 & A & E & A^{\frac{1}{m}} \\ a^{l-1} & a^{l-2} & \dots & a^2 & a & 1 & \alpha \\ b^{l-1} & b^{l-2} & \dots & b^2 & b & 1 & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

obtenue en éliminant les l inconnues d_r entre les l relations (1) et $(A) = A^{\frac{1}{m}}$.

5° Comme application facile, extrayons la racine carrée d'une hermitienne binaire H, de déterminant *un*. C'est le cas $m = n = 2$ (déjà traité, I, 26°).

Il viendra

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \qquad |H| = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1;$$

$$\psi(x) = |xE - H| = x^2 - x(h_{11} + h_{22}) + 1 = (x-a)(x-b);$$

$$ab = \alpha\beta = 1.$$

La formule (2) donne, après départ de $\alpha - \beta$,

$$\begin{vmatrix} H & E & H^{\frac{1}{2}} \\ a & 1 & \alpha \\ b & 1 & \beta \end{vmatrix} = 0,$$

$$H^{\frac{1}{2}} = \frac{H + E}{\alpha + \beta} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} h_{11} + 1 & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} + 1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\tau = (\alpha + \beta)^{-1};$$

il viendra

$$\tau^{-2} = \alpha^2 + \beta^2 + 2 = h_{11} + h_{22} + 2,$$

car

$$a = \alpha^2, \qquad b = \beta^2; \qquad ab = \alpha\beta = 1; \qquad a + b = h_{11} + h_{22}.$$

Cela est bien d'accord avec le calcul ancien (I, 26°).