Bulletin de la S. M. F.

J. Hadamard

Sur un problème mixte aux dérivées partielles

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 208-224
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__208_1>

SUR UN PROBLÈME MIXTE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. HADAMARD.

1. Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, ayant la forme de Laplace

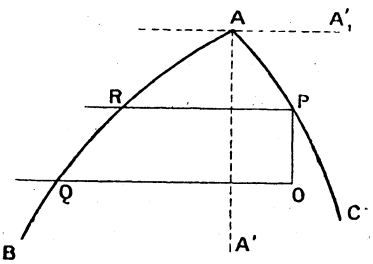
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0 \tag{1}$$

(équation qui admet pour caractéristiques les parallèles aux axes) et une ligne L.

Si celle-ci n'est coupée qu'en un point par une parallèle quelconque à l'axe des x et en un point par une parallèle à l'axe des y, une solution de l'équation (1) sera déterminée si l'on donne, en chaque point de L, les données de Cauchy, c'est-à-dire les valeurs de z et de ses dérivées premières.

Si, au contraire, la ligne L, tout en continuant à n'être coupée qu'en un seul point par une parallèle quelconque à l'axe des y, est composée de deux arcs BA, AC (*fig.* 1) tels que toute parallèle à l'axe des x qui rencontre l'un rencontre aussi l'autre (chacun d'eux n'étant d'ailleurs rencontré qu'en un point), le problème de Cauchy, comme l'a montré M. Picard, devient, en général, impossible par surabondance des données. Ainsi que je l'ai remarqué dans un article précédent ([1]), celui qu'il convient de lui substituer est un problème *mixte*, intermédiaire entre celui de Cauchy

Fig. 1.



et celui de Dirichlet, lequel consiste à se donner :

Sur l'un des deux arcs (AB par exemple) les données de Cauchy ;

Sur l'autre arc, AC, les valeurs de z seulement.

Cette dernière série de données est d'ailleurs supposée concorder avec la première au point A, c'est-à-dire fournir, en ce point, la même valeur pour z et la même valeur pour la dérivée de z prise suivant AC.

Le problème ainsi posé est possible et déterminé ([2]), ainsi que je l'ai établi dans l'article cité. Il peut, si l'on veut, se ramener à un autre qui a été étudié par M. Picard ([3]), puis par M. Goursat ([4]), et dans lequel on se donne les valeurs de l'inconnue z, d'une part sur AC, d'autre part sur une caractéristique issue de A, en l'espèce, la parallèle AA′ à l'axe des y.

([1]) *Sur l'intégrale résiduelle*, ce *Bulletin*, t. XXVIII, 1900, p. 81 et suiv.

([2]) Il est intéressant de rapprocher ce résultat de celui auquel est parvenu récemment M. Goursat (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 juin 1903) relativement au cas où les lignes AB et AC sont *dans un même angle* formé par les caractéristiques issues de A; on détermine alors une solution en se donnant uniquement les valeurs de z sur AB et sur AC. Au contraire, si AB et AC sont dans deux angles adjacents, le problème ainsi posé est indéterminé, comme l'observe M. Goursat. Notre remarque de 1900 consiste en ce qu'on le détermine en adjoignant aux données précédentes les dérivées premières de z sur AB. Enfin, si les deux segments de L sont dans deux angles opposés, les données à prendre seront, bien entendu, celles de Cauchy sur chacun d'eux.

([3]) *In* Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV, note I.

([4]) *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 303-308.

Le problème mixte (et non le problème de Cauchy) est celui qui intervient dans la plupart des questions dynamiques, dès qu'on abandonne le cas tout théorique d'un milieu indéfini en tous sens pour passer à celui d'un milieu limité. C'est à lui qu'on est conduit, en particulier, dans la théorie de la propagation de l'électricité le long d'un câble *limité au moins dans un sens*. Aussi les recherches sur cette théorie poursuivies, cette année, par M. Brillouin, dans son cours au Collège de France, m'ont-elles engagé à reprendre l'étude du problème mixte et à en chercher une solution analogue à celle qui résulte, pour le problème de Dirichlet, de la considération de la fonction de Green et, pour le problème de Cauchy relatif à l'équation (1), de la méthode de Riemann. C'est cette solution que je vais exposer : appliquée à l'équation des télégraphistes, elle conduit, bien entendu, aux résultats que M. Brillouin a obtenus par des calculs directs [1]. Elle permet même, comme nous le verrons, de simplifier la solution de M. Brillouin.

2. La formule que nous appliquerons sera toujours la formule fondamentale employée dans la méthode de Riemann [2] et que nous écrirons sous la forme suivante :

$$(2)\qquad \int \left[\frac{1}{2}\left(u\frac{dz}{d\nu} - z\frac{du}{d\nu}\right)ds + uz(b\,dx - a\,dy)\right] = 0,$$

dans laquelle

z est une solution régulière quelconque de l'équation proposée (1);
u, une solution régulière de l'équation adjointe;
s, l'arc de la ligne d'intégration, laquelle est supposée fermée;
ν, la direction *conormale* [3] à cette ligne, direction qui n'est autre que la symétrique, par rapport aux axes, de celle de la tangente, et qui est définie par les relations

$$\frac{dx}{d\nu} = \frac{dx}{ds}, \qquad \frac{dy}{d\nu} = -\frac{dy}{ds}.$$

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 23 mars 1903.
(2) Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, § 358, p. 75.
(3) D'Adhémar, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 11 février 1901.

Soit alors O (x', y') un point situé entre les lignes AB, AC et où l'on veut calculer la valeur de z. Menons par ce point la caractéristique $x =$ const.; nous considérerons uniquement le cas où cette caractéristique coupe [en un point P (x', y_1)] l'arc AC et non l'arc AB, le problème pouvant être considéré comme résolu (par la méthode de Riemann) dans le cas contraire. Par les points O, P menons les caractéristiques $y =$ const., qui coupent l'arc AB aux points Q, R respectivement.

Soit, d'autre part, U $(x, y; x', y')$ une fonction de x, y définie par les propriétés suivantes :

1° Entre les parallèles OQ, PR, elle se réduit à la fonction de Riemann $u(x, y; x', y')$ [1];

2° Au delà de PR, elle satisfait encore à l'équation adjointe, et se réduit, sur PR, à $u - u_P e^{\int_{x'}^{x} b\,dx}$, où

$$u_P = u(x', y_1; x', y') = e^{-\int_{y_1}^{y'} a(x', y)\,dy}; \tag{3}$$

3° Sur l'arc AP elle est nulle.

Cette fonction est, comme on le voit, discontinue sur PR. Les conditions 2° et 3° (qui concordent au point P, grâce au choix du facteur u_P) la définissent dans toute la portion du plan comprise entre PR et la parallèle à cette droite menée par le point A.

De même que la recherche de la fonction de Green est un cas particulier du problème de Dirichlet, la détermination de U, à l'aide des deux conditions précédentes, est évidemment un cas particulier du problème mixte (ou, plus exactement, du problème équivalent de MM. Picard et Goursat, auquel nous avons fait allusion tout à l'heure), l'équation (1) étant remplacée par son adjointe et la caractéristique AA', parallèle à l'axe des y, étant remplacée [comme nous le faisait prévoir une première solution théorique obtenue précédemment (2)] par la caractéristique PR, parallèle à l'axe des x. Quant à l'arc AP, il est le même dans les deux cas, de sorte que, comme nous devions également nous y

---

(1) Darboux, *loc. cit.*, p. 78.

(2) *Sur l'intégrale résiduelle*, n° 9, p. 83.

attendre (¹), la solution dépend essentiellement de la forme de cet arc.

Appliquons successivement la formule (2), où nous remplacerons u par U, au quadrilatère mixtiligne OPRQO, puis au triangle mixtiligne PARP, et ajoutons les résultats obtenus. L'intégrale prise le long de OP est, comme on sait (²), égale à $\frac{1}{2}[z_0 - (uz)_P]$, et celle qui est prise le long de QO, à $\frac{1}{2}[z_0 - (uz)_Q]$. De plus, une réduction toute semblable s'appliquera à l'ensemble des deux intégrales prises le long de PR. En effet, celles-ci, comme les premières, ne dépendent que des valeurs de z et de u sur PR *même*, puisque PR est caractéristique, de sorte que toute la partie de U qui est continue sur cette ligne s'éliminera dans l'addition et que la variation brusque [U] de U interviendra seule. Or cette variation vérifie, le long de PR, l'équation différentielle

$$\frac{d[\mathrm{U}]}{dx} - b[\mathrm{U}] = 0,$$

analogue à celle par laquelle sont déterminées les valeurs de u sur OQ. Donc la somme des deux intégrales prises le long de PR se réduit à $\frac{1}{2}u_P\left(z_R e^{\int_P^R b\,dx} - z_P\right)$.

Considérons enfin les termes relatifs à AR, RQ et AP. Les deux premiers ne dépendent que des données de Cauchy sur AB et sont entièrement connus. Enfin il en est de même du dernier, puisque, grâce à la troisième condition imposée à U, il ne contient pas $\frac{dz}{d\nu}$.

On obtient donc la solution du problème par la formule

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2}(uz)_Q + (uz)_P - \frac{1}{2}u_P e^{\int_P^R b\,dx} z_R \\ &\quad - \int_A^Q \left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{U}\frac{dz}{d\nu} - z\frac{d\mathrm{U}}{d\nu}\right)ds + \mathrm{U}z(b\,dx - a\,dy)\right] - \int_A^P \frac{1}{2}z\frac{d\mathrm{U}}{d\nu}ds. \end{aligned}\right.$$

3. L'intégrale prise de A à Q est, en réalité, la somme de deux

(¹) *Ibid.*, n° 10, p. 84.
(²) DARBOUX, *loc. cit.*

autres de nature différente, puisque la fonction U n'a pas la même forme lorsqu'on la considère le long de l'arc AR ou le long de l'arc RQ. Les coefficients de z et de $\frac{dz}{d\nu}$ sont même tous deux discontinus au point R. Cette discontinuité n'a rien qui doive nous surprendre. Si, en effet, on applique la méthode précédente à un problème physique quelconque, par exemple si l'on part de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0,$$

qui définit les mouvements des cordes vibrantes ou les mouvements rectilignes infiniment petits d'un gaz, la ligne AC correspondra aux conditions à l'extrémité; la ligne AB à l'état initial; l'arc QB de cette ligne (*fig.* 1) représentera la partie de l'état initial qui ne peut influer au lieu et à l'instant représentés par le point O; l'arc QR, la partie qui, dans les mêmes conditions, influe uniquement par ses ondes directes; l'arc RA, la partie qui agit à la fois par ondes directes et par ondes réfléchies à l'extrémité. La discontinuité dont nous avons parlé plus haut ne représente donc autre chose que le phénomène de la réflexion.

4. Si, au lieu des données de Cauchy sur AB, on donnait les valeurs de z sur AA', il suffirait de placer les points Q et R sur cette droite; la formule (4) deviendrait $\left(\text{en transformant, à l'aide d'une intégration par parties, le terme } \int U \frac{dz}{d\nu}\, ds = -\int U \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right)$

$$z_0 = (uz)_P + (uz)_Q - u_P\, e^{\int_P^R b\,dx} z_R - \int_A^Q z\,dy\left(\frac{\partial U}{\partial y} - aU\right) - \int_A^P \frac{1}{2} z \frac{dU}{d\nu}\, ds.$$

5. Notre fonction U présente une propriété de symétrie analogue à celle que possède la fonction de Riemann.

Autrement dit, si, en même temps que le point O qui sert à former la fonction U (en menant la parallèle OP à l'axe des y et la parallèle PR à l'axe des x), nous considérons un second point O' (*fig.* 2, 2 *bis*), par lequel nous menons la parallèle O'P' à l'axe des x, pour mener par P' la parallèle P'R' à l'axe des y (les demi-droites P'O', P'R' étant du même côté de la ligne AC), et si nous définissons une fonction Z des coordonnées d'un point M par les conditions suivantes :

1° Pour les positions du point M, situées du même côté de P'R que le point O', Z coïncidera avec la fonction de Riemann z relative aux points O' et M [solution de l'équation (1), lorsqu'on la considère comme fonction des coordonnées de M];

Fig. 2.

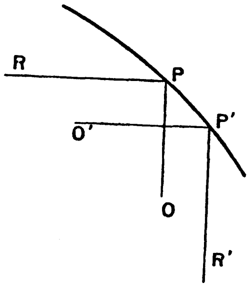
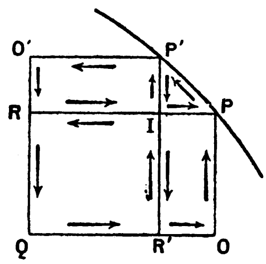


Fig. 2 *bis*.



2° Pour les positions de M situées au delà de P'R', mais en deçà de la ligne AC, Z sera également une solution de l'équation (1), prenant sur P'R' les valeurs $z - z_{P'} e^{\int_{P'}^{M} a\,dy}$ ($z_{P'}$ étant la valeur de z au point P') et sur l'arc P'C la valeur zéro. La valeur de Z au point O sera égale à la valeur de U au point O'.

Dans le cas où le point O' est du même côté de PR que le point O (*fig.* 2) et où, par conséquent, la fonction U coïncide avec la fonction de Riemann u, nous pouvons considérer cette proposition comme déjà démontrée, du moment que la fonction Z_0 coïncide, elle aussi, avec z_0, c'est-à-dire que le point O est du même côté que O' par rapport à P'R' : et c'est ce qui a manifestement lieu, car ce fait et celui duquel nous sommes partis (O et O' situés du même côté par rapport à PR) reviennent tous deux à dire que le point d'intersection de OP, O'P' est du même côté de la ligne AC que les points O, O' eux-mêmes.

Lorsque, au contraire, les lignes OP, O'P' ne se coupent pas entre elles avant de rencontrer AC (*fig.* 2 *bis*) [1], on peut établir

[1] En ce qui concerne la position relative des points O et O', il y a, géométriquement parlant, d'autres cas de figure à considérer que ceux qui sont représentés par les figures 2 et 2 *bis*, mais ceux-ci sont les seuls qui interviennent dans l'étude du problème mixte.

l'égalité $Z_0 = U_{0'}$, en montrant que la fonction $U_{0'}$, considérée comme fonction du point O, vérifie toutes les conditions qui caractérisent Z. Mais on peut aussi, ce qui revient au même en somme, employer encore la formule fondamentale (2). Soient, à cet effet, OQ une parallèle menée par O à l'axe des x, O'Q une parallèle menée par O' à l'axe des y; R, R' les points d'intersection de PR, P'R' avec O'Q, OQ respectivement; I, le point d'intersection de PR, P'R'.

On intégrera le long des trois rectangles OPIR', R'IRQ, IP'O'R et du triangle mixtiligne IPP'. Si l'on tient compte de la valeur des discontinuités éprouvées par les fonctions Z, U le long des lignes PR, P'R', on verra aisément que l'équation qui résulte des quatre formules ainsi obtenues se réduit à l'égalité annoncée.

6. Considérons l'équation des télégraphistes, réduite à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + z = 0;$$

l'étude de la propagation de l'électricité dans un fil indéfini dans un sens (¹) conduit à la détermination d'une solution de cette équation par les données suivantes :

1° Valeurs de z et de $\frac{\partial z}{\partial t}$ pour $t = 0$, $\xi \geqq 0$;

2° Valeurs de z pour $\xi = 0$, $t \geqq 0$.

Autrement dit, ramenant l'équation à la forme de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - z = 0 \tag{5}$$

par le changement de variables

$$\begin{cases} \xi = y - x, \\ t = y + x, \end{cases} \tag{6}$$

(¹) On sait que le cas du fil limité dans les deux sens ne présente aucune difficulté essentielle nouvelle, toute la question étant de tenir compte des réflexions successives dont chacune peut se calculer par les formules du texte. On devra diviser le plan des ξt (ou du moins la portion de ce plan définie par $t \geqq 0$, $0 \leqq \xi \leqq l$, où l est la longueur du câble) en régions en forme de triangles ou de losanges, telles qu'elles sont figurées dans mes *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique* (*fig.* 10, p. 148), les formules étant différentes pour chacune de ces régions.

nous sommes ramenés au problème qui vient d'être étudié, la ligne AB ayant pour équations

$$(7) \qquad t = y + x = 0, \qquad x \leqq 0, \qquad y \geqq 0$$

et la ligne AC

$$(8) \qquad \xi = x - y = 0, \qquad x \geqq 0, \qquad y \geqq 0.$$

La fonction de Riemann, u, symétrique, ici, par rapport aux deux points (x, y), (x', y') dont elle dépend, puisque l'équation est identique à son adjointe, a, comme on sait, la forme

$$(9) \qquad u = j\,[(x - x')(y - y')],$$

où la fonction j n'est autre, au changement près de l'argument en son carré, que la fonction de Bessel d'indice zéro :

$$(10) \qquad j(\mathrm{X}) = 1 + \frac{\mathrm{X}}{1} + \frac{\mathrm{X}^2}{(2!)^2} + \ldots + \frac{\mathrm{X}^n}{(n!)^2} + \ldots.$$

7. La forme de la fonction u suggère immédiatement un premier mode de solution du problème mixte, lorsque la ligne AC est représentée par l'équation (8) (ou, plus généralement, par l'équation $x - y = \text{const}$).

Si, en effet, on prend pour (x, y) un point de la droite AC et, pour le point (x', y'), successivement deux points Q, Q_1 symétriques l'un de l'autre par rapport à cette ligne, la fonction u aura évidemment la même valeur dans les deux cas.

Supposons, dès lors, qu'on se donne les valeurs de l'inconnue z sur AC et aussi sur la caractéristique AA', parallèle à l'axe des y. Il sera aisé de calculer z en tout point de l'autre caractéristique AA_1 menée par le point A et qui est l'image de la première par rapport à AC. Soient, en effet, Q un point de AA', Q_1 l'image de Q par rapport à AC, c'est-à-dire un point de AA'_1 ; P, le quatrième sommet (situé sur AC) du carré $\mathrm{AQQ}_1\mathrm{P}$.

Il suffit d'ajouter l'une à l'autre les deux formules

$$(11) \qquad \begin{cases} z_{\mathrm{Q}} = \dfrac{1}{2}(z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{P}}) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathrm{AP}} \left(u^{\mathrm{M}}_{\mathrm{Q}} \frac{dz}{d\nu} - z \frac{du^{\mathrm{M}}_{\mathrm{Q}}}{d\nu} \right) ds, \\ z_{\mathrm{Q}_1} = \dfrac{1}{2}(z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{P}}) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathrm{AP}} \left(u^{\mathrm{M}}_{\mathrm{Q}_1} \frac{dz}{d\nu} - z \frac{du^{\mathrm{M}}_{\mathrm{Q}_1}}{d\nu} \right) ds, \end{cases}$$

qui expriment (¹) z_Q et z_{Q_1} en fonction des valeurs de z et de ses dérivées sur AC, pour éliminer la dérivée conormale de z.

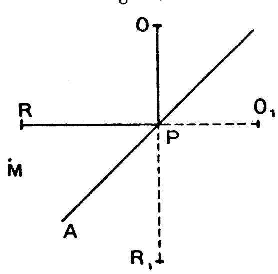
Connaissant les valeurs de cette quantité sur AA′ et sur AA'_1, on pourra la déterminer dans tout l'angle de ces deux droites par une formule connue (²).

Rien n'empêcherait d'ailleurs d'appliquer ce mode de calcul à la fonction U, qui est nulle sur AC et dont on connaît les valeurs sur la droite nommée plus haut PR. Sur la droite PR_1, prolongement de OP, les formules (11) donneront simplement $U_{R_1} = - U_R$ (pour $PR_1 = PR$), et la formule dont nous venons de parler fera connaître les valeurs cherchées par une quadrature; ce seront ces valeurs qu'il conviendra de reporter dans la formule (4).

Que l'on emploie l'un ou l'autre de ces deux procédés, on voit qu'on serait conduit, pour le calcul de z_0, à deux quadratures superposées. On retomberait ainsi sur des résultats semblables à ceux qu'a obtenus M. Brillouin, dans le travail cité.

8. La fonction U ne joue qu'un rôle secondaire dans le calcul

Fig. 3.



qui précède, puisqu'il peut être opéré sans son intervention. C'est elle, au contraire, qui va nous permettre d'en simplifier le résultat et de montrer que le coefficient de z ou de $\frac{dz}{d\nu}$, dans chacun des termes qui figurent sous le signe $\int$ au second membre de la for-

(¹) DARBOUX, *loc. cit.* Le changement du signe de l'intégrale définie lorsqu'on passe de la première formule (11) à la seconde correspond évidemment au changement de rôle qui se fait entre les points A et P, lorsqu'on passe du point Q au point Q_1.

(²) DARBOUX, *ibid.*, n° 359.

mule (4), peut s'exprimer explicitement sans nouvelle quadrature.

Soit, en effet, $O_1(x, y)$ l'image du point O par rapport à AC (*fig.* 3), c'est-à-dire un point obtenu en portant sur la droite RP, prolongée au delà du point P, une longueur PO_1 égale à PO.

Considérons la fonction

$$(12) \qquad u_O^M - u_{O_1}^M.$$

Nous avons déjà utilisé, il y a un instant, deux propriétés de cette fonction : celle de satisfaire à l'équation et celle de s'annuler sur AC.

Mais il est également évident, d'après sa forme même, que cette fonction possède la troisième propriété caractéristique de la fonction U, celle qui est relative aux valeurs sur PR. Sur cette dernière droite, en effet, le terme $u_{O_1}^M$ se réduit à l'unité, et, d'autre part, cette valeur est aussi celle que prend la discontinuité $u_P e^{\int_{x'}^{x} b\,dx}$ de la fonction U.

Donc l'expression (12) *représente la fonction* U *cherchée.*

La formule (4) peut, par conséquent, s'écrire immédiatement. Les dérivées normales qui interviennent dans cette formule seront prises par rapport à t sur AB et par rapport à ξ sur AC; sur cette dernière droite, d'ailleurs, la dérivée conormale du second terme de l'expression (12) vient doubler celle du premier.

Dès lors, si l'on désigne par j et j_1 les valeurs que prend la fonction j lorsqu'on y remplace l'argument X successivement par les expressions

$$\frac{1}{4}[(t-t')^2-(\xi-\xi')^2], \quad \frac{1}{4}[(t-t')^2-(\xi+\xi')^2];$$

par j' et j'_1 les valeurs que prend, dans les mêmes conditions, la dérivée $j'(X)$, on aura

$$z(\xi', t') = z_P + \frac{1}{2}(z_Q - z_R) + \frac{1}{2}\int_0^r \left[(j-j_1)\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{t'}{2}z(j'-j'_1)\right]d\xi$$
$$+ \frac{1}{2}\int_r^q \left(j\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{t'}{2}zj'\right)d\xi + \frac{1}{2}\xi'\int_0^p zj'\,dt,$$

où q, r sont les abscisses des points Q, R, savoir

$$q = t' + \xi', \qquad r = t' - \xi',$$

et $p = r = t' - \xi'$ la valeur de t correspondant au point P.

9. Il est intéressant de comparer le calcul tel que nous venons de le faire avec celui qui s'était présenté à nous tout d'abord (n° 7). En particulier, nous avions indiqué le moyen de former (moyennant une quadrature) la fonction U.

Égalons l'expression ainsi obtenue à l'expression (12); il est aisé de voir que nous obtiendrons l'identité suivante, relative à la fonction j :

$$\int_0^c j[a(c-t)]\,.\,bj'(bt)\,dt = j(ac+bc) - j(ac),$$

ou, si l'on veut,

$$\int_{t=0}^{t=1} j[a(1-t)]\,d[j(bt)] = j(a+b) - j(a), \tag{13}$$

en faisant $c = 1$, ce qui ne diminue pas la généralité.

Autrement dit, si nous faisons correspondre, à un point quelconque (X, Y) du plan, un second point de coordonnées $j(\mathrm{X})$, $j(\mathrm{Y})$, et que le premier point décrive le triangle rectangle dont les côtés, dirigés suivant les axes de coordonnées, ont pour longueurs a et b, le second point décrira une figure dont l'aire sera $j(a+b) - j(a) - j(b) + j(0)$.

On démontre directement sans difficulté l'identité (13) en remplaçant la fonction j par son développement en série (9) et utilisant la valeur connue de l'intégrale $\int_0^1 (1-t)^p t^{q-1}\,dt$.

D'autre part, *cette identité est caractéristique de la fonction* j et pourrait, par conséquent, servir à définir la fonction de Bessel [à un facteur constant près figurant dans l'argument, et qui sera déterminé si l'on adjoint la condition $j'(0) = 1$]; il suffit, en effet (du moins si l'on suppose la fonction continue ainsi que sa dérivée), de faire $b = 0$ après avoir divisé par t pour retomber sur l'équation linéaire à laquelle satisfait j.

10. On peut se demander s'il existe une relation du même genre

entre les fonctions de Bessel d'indice non nul. C'est ce qui a lieu, en effet; pour le voir, nous multiplierons une telle fonction par une puissance de la variable et nous la considérerons sous la forme

$$j_p(X) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^{p+m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(p+m+1)}.$$

La fonction ainsi écrite est liée à la fonction J_p, telle qu'on la considère habituellement ([1]), par la relation

$$j_p(X) = (-X)^{\frac{p}{2}} J_p(2\sqrt{-X}).$$

Nous prendrons deux quelconques j_p, j_q des fonctions ainsi définies, les indices p, q étant toutefois positifs (ou, plus exactement, l'indice q positif ou nul et p supérieur à -1) et nous formerons l'intégrale

$$\int_{t=0}^{t=1} j_p[a(1-t)]\, d[j_q(bt)]. \tag{14}$$

La quantité sous le signe $\int$ est une série double dont le terme général est

$$\frac{a^{p+m} b^{q+n} (1-t)^{p+m} d(t^{q+n})}{m!\, n!\, \Gamma(p+m+1)\Gamma(q+m+1)} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty).$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{t=1} (1-t)^{p+m} d(t^{q+n}) &= (q+n)\int_0^1 (1-t)^{p+m} t^{q+n-1}\, dt \\ &= \frac{\Gamma(p+m+1)\Gamma(q+n+1)}{\Gamma(p+q+m+n+1)}.\end{aligned}$$

Il est, dès lors, clair que l'intégrale (14) est égale à

$$\frac{a^p b^q}{(a+b)^{p+q}} j_{p+q}(a+b)$$

si q est différent de zéro, et à cette même quantité diminuée de $j_p(a)$ si q est nul.

11. Les raisonnements qui viennent d'être développés (n° 8)

([1]) *Voir*, par exemple, JORDAN, *Cours d'analyse*, t. III, Ch. II.

ne sont pas particuliers à l'équation d'Euler : ils reposent, au fond, sur ce seul fait que l'équation ne change pas de forme quand on y permute x et y.

Pour toute équation à invariants égaux

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \lambda z = 0,$$

où λ est symétrique en x et en y, ces raisonnements sont valables et prouvent que la fonction U a la valeur (12), lorsque la ligne AC a pour équation $x - y = 0$.

Considérons, par exemple, l'équation d'Euler, que l'on peut réduire à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\beta(\beta - 1)}{(x - y)^2} z = 0. \tag{15}$$

Elle offre le genre de symétrie dont nous venons de parler relativement à la droite $x - y = 0$; seulement celle-ci est une ligne singulière, de sorte qu'il n'y a point lieu de la considérer à notre point de vue actuel.

Mais l'équation (15) présente également la même symétrie relativement à toute droite $x + y =$ const. : une telle droite pourra donc être prise pour la ligne AC, et nous pourrons résoudre le problème ainsi posé.

12. L'équation (15) est celle qui régit le mouvement rectiligne d'un gaz contenu dans un tube cylindrique. Les données par lesquelles il est le plus naturel de déterminer un tel mouvement sont constituées par l'état initial du fluide et les mouvements des pistons placés aux extrémités du tube.

Ce problème est, dans le cas général, beaucoup plus difficile encore que celui dont nous venons de nous occuper. L'équation du mouvement n'est, en effet, ramenée à la forme (15) que moyennant une transformation de Legendre, de sorte que x et y sont des fonctions de la vitesse et de la densité, et l'on ignore comment cette dernière quantité varie au voisinage du piston mobile, autrement dit ([1]), les données fournies par le mouvement de ce piston sont relatives à une ligne *inconnue* du plan des xy.

([1]) *Voir* mes *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, n° 180, p. 172-173.

Il est toutefois un cas où le problème rentre dans la catégorie qui vient d'être étudiée : c'est celui du *piston fixe*. Alors, pour $a = 0$, la vitesse, égale à $\frac{x+y}{2}$, est constamment nulle, et il en est de même [1] de la variable z.

Par conséquent, non seulement nous sommes ramenés à notre problème mixte, mais même *à un cas dans lequel nous savons résoudre ce problème.*

Il en serait de même si la vitesse du piston était constante. On serait encore ramené au problème mixte, mais dans un cas non résolu jusqu'ici, si, au lieu de se donner le mouvement du piston, on s'imposait la condition que la pression au contact de ce piston fût égale à une constante donnée.

13. Les calculs du n° **11** conduisent évidemment à des identités analogues à celles du n° **9**, mais relatives à la série hypergéométrique.

La question du problème mixte n'est pas d'ailleurs seule à les fournir. Toute expression qui représente la fonction de Riemann relative à une équation du type (1) donne lieu à de telles identités; on les obtiendra en utilisant la formule qui exprime une intégrale de l'équation en fonction de ses valeurs sur deux caractéristiques.

Soient, en effet, $O'(x', y')$; $O(x, y)$ deux points du plan; $x = x_1$, une parallèle à l'axe des y qui coupe en P, P' les parallèles à l'axe des x menées par O, O'. La quantité $u(O, O')$, lorsqu'on l'envisage comme fonction du point O', est une solution de l'équation proposée; comme telle, elle peut être considérée comme définie par ses valeurs sur les deux caractéristiques PO, PP' et calculée en O' d'après ces données : on a ainsi l'identité

$$\int_{y'}^{y} u(x, y; x_1, \eta) \left[\frac{\partial}{\partial \eta} u(x_1, \eta; x', y') - a(x_1, \eta) u(x_1, \eta; x', y') \right] d\eta$$
$$= u(x, y; x', y') - u(x, y; x_1, y') e^{\int_{x'}^{x_1} b(x, y') dx}$$

En appliquant à l'équation d'Euler et de Poisson, on trouvera,

---

(1) *Loc. cit.*, n° 170, p. 162-163.

pour la série hypergéométrique $F(\beta, \beta', 1, \sigma)$, l'identité

$$\int_{t=0}^{t=\infty}\left(1-\frac{1-a}{1+at}\right)^{\beta'} F\left(\beta, \beta', 1, \frac{1-a}{1+at}\right).d\left[\left(1-\frac{1-b}{1+\frac{b}{t}}\right)^{\beta} F\left(\beta, \beta', 1, \frac{1-b}{1+\frac{b}{t}}\right)\right]$$
$$= a^{\beta'} b^{\beta} F(\beta, \beta', 1, 1-ab) - a^{\beta'} F(\beta, \beta', 1, 1-a) \qquad (a>0,\ b>0)$$

à laquelle on pourrait donner diverses formes en utilisant les diverses transformations que l'on peut effectuer sur la série hypergéométrique. On pourrait, par exemple, écrire

$$\int_{u=0}^{u=1} F\left[\beta, 1-\beta', 1, \left(1-\frac{1}{a}\right)u\right].dF\left[\beta', 1-\beta, 1, \left(1-\frac{1}{b}\right)(1-u)\right]$$
$$= b^{\beta-\beta'} F\left(\beta', 1-\beta, 1, 1-\frac{1}{ab}\right) - F\left(\beta', 1-\beta, 1, 1-\frac{1}{a}\right).$$

Il y aurait, d'ailleurs, intérêt à établir directement cette formule : on arriverait ainsi, sans doute, à la généraliser, comme nous l'avons fait au n° 10 pour la formule (13).

14. Je présenterai, en terminant, une remarque relative au problème mixte relatif à l'espace.

J'ai fait observer, dans mon article *sur l'intégrale résiduelle* ([1]), que le principe de Huyghens cesse de s'appliquer à l'équation du son

$$\Delta z - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{dt^2} = 0,$$

lorsque l'on considère, relativement à cette équation, le problème mixte et non le problème de Cauchy.

Il semble que, là encore, la forme du domaine joue un rôle essentiel. Si, en effet, au lieu de la sphère que j'avais envisagée dans l'article cité, on prend comme surface initiale le plan $x=0$, sur lequel on se donnera les valeurs de z pendant que z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ seront donnés pour $t=0$, $x \geqq 0$, il est aisé de voir que le principe de Huyghens subsiste.

On peut, en effet, résoudre le problème mixte ainsi posé, en considérant l'image O_1 du point O par rapport au plan en ques-

---

([1]) N° 15, p. 88.

tion et formant non seulement la fonction classique $u = \frac{1}{r} f(r + at)$, mais la fonction analogue dans laquelle les rayons vecteurs sont comptés à partir du point O_1 et non du point O.

Il suffira de substituer la différence de ces deux fonctions à la première d'entre elles, dans la solution de Kirchhoff, pour l'appliquer au cas actuel; et l'on constatera sans difficulté que les seules données qui interviennent dans la solution sont relatives à des multiplicités doublement (et non triplement) étendues.