

BULLETIN DE LA S. M. F.

E. BOREL

Sur l'approximation des nombres réels par les nombres quadratiques

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 157-184

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__157_0

© Bulletin de la S. M. F., 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR L'APPROXIMATION DES NOMBRES RÉELS PAR LES NOMBRES QUADRATIQUES;

Par M. ÉMILE BOREL.

Les nombres quadratiques sont les nombres de la forme

$$\frac{a \pm \sqrt{b}}{c},$$

a , b , c désignant des nombres entiers dont les deux derniers peuvent être supposés positifs. Pour rechercher les nombres quadratiques différant peu d'un nombre donné x , il revient au même de rechercher les nombres de la forme $a \pm \sqrt{b}$ qui diffèrent peu de cx . Si l'on se borne d'abord aux nombres de la forme $a + \sqrt{b}$, on voit que, a désignant un entier positif ou négatif, les nombres \sqrt{b} et cx écrits dans le système décimal ont des parties décimales très peu différentes.

On est ainsi conduit à ranger les nombres tels que \sqrt{b} , c'est-à-dire *les racines carrées des nombres entiers*, d'après l'ordre de grandeur de leur partie décimale. Ce travail ne présente aucune difficulté et est même très rapide, si l'on fait usage d'une Table de racines carrées; j'ai utilisé celle de Barlow.

Je publie ici, sans commentaires, la liste des racines des 500 premiers nombres (les carrés parfaits exclus), rangés par ordre de grandeur des parties décimales; la disposition même que j'ai adoptée suggérera des remarques qu'il est inutile d'énoncer. Signalons cependant l'existence de lacunes au voisinage des fractions irréductibles *simples*, lacunes d'autant plus étendues que ces fractions sont plus simples.

Parmi les applications d'une telle Table, on peut citer la recherche très aisée de quadratures approchées du cercle et de rectifications approchées de la circonférence. Si l'on cherche à insérer dans la Table les multiples de π , on trouve que 8π y est très voisin de $\sqrt{229}$;

on a

$$8\pi = 25,132\,741\,228\dots,$$
$$\sqrt{229} = 15,132\,746\,0\dots$$

On obtient

$$\frac{10 + \sqrt{229}}{8} = 3,141\,593\,2\dots,$$
$$\pi = 3,141\,592\,6\dots$$

L'erreur commise en prenant pour π la valeur $\frac{10 + \sqrt{229}}{8}$ est donc environ d'un demi-millionième. Si l'on remarque que l'on a

$$229 = 225 + 4 = 15^2 + 2^2,$$

on obtient aisément une construction géométrique très simple de la valeur approchée considérée, qui peut s'écrire

$$\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 1}.$$

Je me propose de revenir sur la question d'approximation des nombres réels par des nombres quadratiques; je me contente de signaler ici, en terminant, une difficulté qui se présente lorsqu'on veut définir les nombres quadratiques, *en général*, difficulté analogue à celle qui résulte de la double définition des courbes algébriques, en coordonnées ponctuelles et tangentielles et qui se présente dans bien d'autres questions.

Comme nous l'avons dit, tous les nombres quadratiques sont définis par la formule

$$(1) \quad x = \frac{a \pm \sqrt{b}}{c},$$

où a , b , c sont des entiers; le nombre x vérifie l'équation du second degré,

$$(2) \quad c^2x^2 - 2acx + a^2 - b = 0.$$

Il est clair que si a , b , c sont quelconques, les coefficients de cette équation n'auront pas, *en général*, de facteur commun; si on les désigne par A , B , C , on voit que le nombre x défini par la formule (1) vérifie une équation de la forme

$$(3) \quad Ax^2 + Bx + C = 0,$$

dont les coefficients A, B, C sont d'un ordre de grandeur qui est le *carré* de l'ordre de grandeur de a, \sqrt{b}, c .

Si, inversement, on se donne l'équation (3), on en déduit

$$(4) \quad x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{a' \pm \sqrt{b'}}{c'}$$

c'est-à-dire une expression analogue à (1), mais dans laquelle $a', \sqrt{b'}$ et c' sont de l'ordre de grandeur de A, B, C. Dans le cas où l'équation (3) est identique à l'équation (2), l'expression (4) ne devient identique à (1) qu'après la suppression du facteur $2c$ commun au numérateur et au dénominateur; mais si A, B, C sont quelconques il n'y a pas, *en général*, de facteur commun au numérateur et au dénominateur de l'expression (4).

Il est clair qu'il n'y a là aucun paradoxe, mais simplement la nécessité de définir nettement, dans chaque recherche particulière, ce que l'on entend par une irrationnelle quadratique *générée*; on peut la considérer comme définie par la formule (1) et regarder comme *cas particulier* le cas où, dans l'équation (2), les coefficients ont des facteurs communs; ou, au contraire, la regarder comme définie par l'équation (3) et regarder comme *cas particulier* le cas où la formule (4) peut se simplifier par la suppression d'un facteur commun à A et B, figurant au carré dans $B^2 - 4AC$.

$$\sqrt{485} = 22,0227155$$

$$\sqrt{442} = 21,0237960$$

$$\sqrt{401} = 20,0249844$$

$$\sqrt{362} = 19,0262976$$

$$\sqrt{325} = 18,0277564$$

$$\sqrt{290} = 17,0293864$$

$$\sqrt{257} = 16,0312195$$

$$\sqrt{226} = 15,0332964$$

$$\sqrt{197} = 14,0356688$$

$$\sqrt{170} = 13,0384048$$

040 à 079.

$$\sqrt{145} = 12,0415946$$

$$\sqrt{122} = 11,0453610$$

$$\sqrt{101} = 10,0498756$$

$$\sqrt{82} = 9,0553851$$

$$\sqrt{65} = 8,0622577$$

$$\sqrt{50} = 7,0710678$$

$$\sqrt{486} = 22,0454077$$

$$\sqrt{443} = 21,0475652$$

$$\sqrt{402} = 20,0499377$$

$$\sqrt{353} = 19,0525589$$

$$\sqrt{326} = 18,0554701$$

$$\sqrt{291} = 17,0587221$$

$$\sqrt{258} = 16,0623784$$

$$\sqrt{227} = 15,0665192$$

$$\sqrt{487} = 22,0680765$$

$$\sqrt{198} = 14,0712473$$

$$\sqrt{444} = 21,0713075$$

$$\sqrt{403} = 20,0748599$$

$$\sqrt{171} = 13,0766968$$

$$\sqrt{364} = 19,0787840$$

080 à 119.

$$\sqrt{37} = 6,0827625$$

$$\sqrt{146} = 12,0830460$$

$$\sqrt{327} = 18,0831413$$

$$\sqrt{488} = 22,0907220$$

$$\sqrt{123} = 11,0905365$$

$$\sqrt{292} = 17,0880075$$

$$\sqrt{259} = 16,0934769$$

$$\sqrt{445} = 21,0950231$$

$$\sqrt{26} = 5,0990195$$

$$\sqrt{102} = 10,0995049$$

$$\sqrt{228} = 15,0996689$$

$$\sqrt{404} = 20,0997512$$

$$\sqrt{365} = 19,1049732$$

$$\sqrt{199} = 14,1067360$$

$$\sqrt{83} = 9,1104336$$

$$\sqrt{328} = 18,1107703$$

$$\sqrt{172} = 13,1148770$$

$$\sqrt{489} = 22,1133444$$

$$\sqrt{293} = 17,1172428$$

$$\sqrt{446} = 21,1187121$$

120 à 159.

$$\sqrt{17} = 4,1231056$$

$$\sqrt{66} = 8,1240384$$

$$\sqrt{147} = 12,1243557$$

$$\sqrt{260} = 16,1245155$$

$$\sqrt{405} = 20,1246118$$

$$\sqrt{366} = 19,1311265$$

$$\sqrt{229} = 15,1327460$$

$$\sqrt{124} = 11,1355287$$

$$\sqrt{490} = 22,1359436$$

$$\sqrt{329} = 18,1383571$$

$$\sqrt{51} = 7,1414284$$

$$\sqrt{200} = 14,1421356$$

$$\sqrt{447} = 21,1423745$$

$$\sqrt{294} = 17,1464282$$

$$\sqrt{103} = 10,1488916$$

$$\sqrt{406} = 20,1494417$$

$$\sqrt{173} = 13,1529464$$

$$\sqrt{261} = 16,1554944$$

$$\sqrt{367} = 19,1572441$$

$$\sqrt{491} = 22,1585198$$

— 164 —
160 à 199.

$$\sqrt{10} = 3,1622777$$

$$\sqrt{38} = 6,1644140$$

$$\sqrt{84} = 9,1651514$$

$$\sqrt{448} = 21,1660105$$

$$\sqrt{148} = 12,1655251$$

$$\sqrt{230} = 15,1657509$$

$$\sqrt{330} = 18,1659021$$

$$\sqrt{407} = 20,1742410$$

$$\sqrt{295} = 17,1755640$$

$$\sqrt{201} = 14,1774469$$

$$\sqrt{125} = 11,1803399$$

$$\sqrt{492} = 22,1810730$$

$$\sqrt{368} = 19,1833261$$

$$\sqrt{63} = 8,1853528$$

$$\sqrt{262} = 16,1864141$$

$$\sqrt{174} = 13,1909060$$

$$\sqrt{449} = 21,1896201$$

$$\sqrt{331} = 18,1934054$$

$$\sqrt{27} = 5,1961524$$

$$\sqrt{104} = 10,1980390$$

$$\sqrt{408} = 20,1990099$$

$$\sqrt{231} = 15,1986842$$

200 à 239.

$$\sqrt{493} = 22,2036033$$

$$\sqrt{296} = 17,2046505$$

$$\sqrt{149} = 12,2065556$$

$$\sqrt{369} = 19,2093727$$

$$\sqrt{202} = 14,2126704$$

$$\sqrt{450} = 21,2132034$$

$$\sqrt{263} = 16,2172747$$

$$\sqrt{332} = 18,2208672$$

$$\sqrt{409} = 20,2237484$$

$$\sqrt{494} = 22,2261108$$

$$\sqrt{52} = 7,2111026$$

$$\sqrt{85} = 9,2195445$$

$$\sqrt{126} = 11,2249722$$

$$\sqrt{175} = 13,2287566$$

$$\sqrt{232} = 15,2315462$$

$$\sqrt{297} = 17,2336879$$

$$\sqrt{370} = 19,2353841$$

$$\sqrt{451} = 21,2367606$$

$$\sqrt{5} = 2,2360680$$

240 à 279.

$$\sqrt{18} = 4,2426407$$

$$\sqrt{39} = 6,2449980$$

$$\sqrt{68} = 8,2462113$$

$$\sqrt{150} = 12,2474487$$

$$\sqrt{264} = 16,2480768$$

$$\sqrt{105} = 10,2468508$$

$$\sqrt{203} = 14,2478068$$

$$\sqrt{333} = 18,2482876$$

$$\sqrt{410} = 20,2484567$$

$$\sqrt{495} = 22,2485955$$

$$\sqrt{452} = 21,2602916$$

$$\sqrt{371} = 19,2613603$$

$$\sqrt{298} = 17,2626765$$

$$\sqrt{233} = 15,2643375$$

$$\sqrt{176} = 13,2664992$$

$$\sqrt{127} = 11,2694277$$

$$\sqrt{496} = 22,2710575$$

$$\sqrt{86} = 9,2736185$$

$$\sqrt{411} = 20,2731349$$

$$\sqrt{334} = 18,2756669$$

$$\sqrt{265} = 16,2788206$$

280 à 319.

$$\sqrt{33} = 7,2801099$$

$$\sqrt{204} = 14,2828569$$

$$\sqrt{453} = 21,2837967$$

$$\sqrt{151} = 12,2882057$$

$$\sqrt{372} = 19,2873015$$

$$\sqrt{28} = 5,2915026$$

$$\sqrt{299} = 17,2916165$$

$$\sqrt{497} = 22,2934968$$

$$\sqrt{106} = 10,2956301$$

$$\sqrt{412} = 20,2977831$$

$$\sqrt{234} = 15,2970585$$

$$\sqrt{335} = 18,3030052$$

$$\sqrt{177} = 13,3041347$$

$$\sqrt{69} = 8,3066239$$

$$\sqrt{454} = 21,3072758$$

$$\sqrt{266} = 16,3095064$$

$$\sqrt{373} = 19,3132079$$

$$\sqrt{128} = 11,3137085$$

$$\sqrt{498} = 22,3159136$$

$$\sqrt{11} = 3,3166248$$

$$\sqrt{205} = 14,3178211$$

320 à 359.

$$\sqrt{300} = 17,3205081$$

$$\sqrt{413} = 20,3224014$$

$$\sqrt{40} = 6,3245553$$

$$\sqrt{87} = 9,3273791$$

$$\sqrt{152} = 12,3288280$$

$$\sqrt{235} = 15,3297097$$

$$\sqrt{336} = 18,3303028$$

$$\sqrt{455} = 21,3307290$$

$$\sqrt{499} = 22,3383079$$

$$\sqrt{374} = 19,3390796$$

$$\sqrt{267} = 16,3401346$$

$$\sqrt{178} = 13,3416641$$

$$\sqrt{107} = 10,3440804$$

$$\sqrt{414} = 20,3469899$$

$$\sqrt{54} = 7,3484692$$

$$\sqrt{301} = 17,3493516$$

$$\sqrt{206} = 14,3527001$$

$$\sqrt{456} = 21,3541565$$

$$\sqrt{19} = 4,3588989$$

$$\sqrt{129} = 11,3578167$$

$$\sqrt{337} = 18,3575598$$

360 à 399.

$$\sqrt{500} = 22,3606798$$

$$\sqrt{256} = 15,3622915$$

$$\sqrt{373} = 19,3649167$$

$$\sqrt{70} = 8,3666003$$

$$\sqrt{153} = 12,3693169$$

$$\sqrt{268} = 16,3707055$$

$$\sqrt{415} = 20,3715488$$

$$\sqrt{457} = 21,3775583$$

$$\sqrt{302} = 17,3781472$$

$$\sqrt{179} = 13,3790882$$

$$\sqrt{88} = 9,3808315$$

$$\sqrt{338} = 18,3847763$$

$$\sqrt{29} = 5,3851648$$

$$\sqrt{207} = 14,3874946$$

$$\sqrt{376} = 19,3907194$$

$$\sqrt{108} = 10,3923048$$

$$\sqrt{237} = 15,3948043$$

$$\sqrt{416} = 20,3960781$$

$$\sqrt{458} = 21,400346$$

$$\sqrt{430} = 20,736456$$

$$\sqrt{41} = 6,4031242$$

$$\sqrt{339} = 18,4119526$$

$$\sqrt{2} = 1,4142136$$

$$\sqrt{417} = 20,4205779$$

$$\sqrt{419} = 20,4720853$$

$$\sqrt{269} = 16,4012195$$

$$\sqrt{377} = 19,4164878$$

$$\sqrt{180} = 13,4164079$$

$$\sqrt{303} = 17,4068952$$

$$\sqrt{154} = 12,4096736$$

$$\sqrt{51} = 7,4161985$$

$$\sqrt{208} = 13,4222051$$

$$\sqrt{238} = 15,4272486$$

$$\sqrt{270} = 16,4316767$$

$$\sqrt{304} = 17,4355958$$

$$\sqrt{340} = 18,4390889$$

$$\sqrt{71} = 8,4261498$$

$$\sqrt{89} = 9,4339811$$

440 à 479.

$$\sqrt{109} = 10,4403056$$

$$\sqrt{378} = 19,4422221$$

$$\sqrt{418} = 20,4450483$$

$$\sqrt{131} = 11,4455231$$

$$\sqrt{460} = 21,4476106$$

$$\sqrt{6} = 2,4494897$$

$$\sqrt{155} = 12,4498996$$

$$\sqrt{181} = 13,4536240$$

$$\sqrt{209} = 14,4568323$$

$$\sqrt{239} = 15,4596248$$

$$\sqrt{221} = 16,4620776$$

$$\sqrt{12} = 3,4641016$$

$$\sqrt{305} = 17,4642492$$

$$\sqrt{341} = 18,4661853$$

$$\sqrt{379} = 19,4679223$$

$$\sqrt{20} = 4,4721360$$

$$\sqrt{419} = 20,4694895$$

$$\sqrt{461} = 21,4709106$$

$$\sqrt{30} = 5,4772256$$

480 à 519.

$$\sqrt{42} = 6,4807407$$

$$\sqrt{56} = 7,4833148$$

$$\sqrt{72} = 8,4852814$$

$$\sqrt{90} = 9,4868330$$

$$\sqrt{110} = 10,4880885$$

$$\sqrt{132} = 11,4891253$$

$$\sqrt{182} = 13,4907376$$

$$\sqrt{210} = 14,4913767$$

$$\sqrt{272} = 16,4924225$$

$$\sqrt{342} = 18,4932420$$

$$\sqrt{462} = 21,4941853$$

$$\sqrt{156} = 12,4899960$$

$$\sqrt{240} = 15,4919334$$

$$\sqrt{307} = 17,4928557$$

$$\sqrt{380} = 19,4935887$$

$$\sqrt{420} = 20,4939015$$

$$\sqrt{463} = 21,5174348$$

$$\sqrt{421} = 20,5182845$$

$$\sqrt{381} = 19,5192213$$

520 à 559.

$$\sqrt{343} = 18,5202592$$

$$\sqrt{307} = 17,5214155$$

$$\sqrt{273} = 16,5227116$$

$$\sqrt{241} = 15,5241747$$

$$\sqrt{211} = 14,5258390$$

$$\sqrt{183} = 13,5277493$$

$$\sqrt{157} = 12,5299641$$

$$\sqrt{133} = 11,5325626$$

$$\sqrt{111} = 10,5356538$$

$$\sqrt{91} = 9,5393920$$

$$\sqrt{464} = 21,5406592$$

$$\sqrt{422} = 20,5426386$$

$$\sqrt{73} = 8,5440037$$

$$\sqrt{382} = 19,5448203$$

$$\sqrt{340} = 18,5472370$$

$$\sqrt{57} = 7,5498344$$

$$\sqrt{308} = 17,5499288$$

$$\sqrt{274} = 16,5529454$$

$$\sqrt{43} = 6,5574385$$

$$\sqrt{242} = 15,5563492$$

560 à 599.

$$\sqrt{212} = 14,5602198$$

$$\sqrt{465} = 21,5638587$$

$$\sqrt{184} = 13,5646600$$

$$\sqrt{423} = 20,5669683$$

$$\sqrt{31} = 5,5677644$$

$$\sqrt{158} = 12,5698051$$

$$\sqrt{383} = 19,5703858$$

$$\sqrt{134} = 11,5758369$$

$$\sqrt{345} = 18,5741756$$

$$\sqrt{309} = 17,5783958$$

$$\sqrt{51} = 4,5825757$$

$$\sqrt{112} = 10,5830052$$

$$\sqrt{275} = 16,5831240$$

$$\sqrt{243} = 15,5884573$$

$$\sqrt{466} = 21,5870331$$

$$\sqrt{424} = 20,5912603$$

$$\sqrt{92} = 9,5916630$$

$$\sqrt{213} = 14,5945195$$

$$\sqrt{384} = 19,5959179$$

600 à 639.

$$\sqrt{185} = 13,6014705$$

$$\sqrt{74} = 8,6023253$$

$$\sqrt{13} = 3,6055513$$

$$\sqrt{467} = 21,6101828$$

$$\sqrt{135} = 11,6189500$$

$$\sqrt{244} = 15,6204994$$

$$\sqrt{385} = 19,6214169$$

$$\sqrt{420} = 20,6397674$$

$$\sqrt{346} = 18,6010752$$

$$\sqrt{276} = 16,6132477$$

$$\sqrt{425} = 20,6155281$$

$$\sqrt{468} = 21,6333077$$

$$\sqrt{311} = 17,6351921$$

$$\sqrt{186} = 13,6381817$$

$$\sqrt{310} = 17,6068169$$

$$\sqrt{159} = 12,6095202$$

$$\sqrt{58} = 7,6157731$$

$$\sqrt{347} = 18,6279360$$

$$\sqrt{214} = 14,6287388$$

$$\sqrt{113} = 10,6301458$$

$$\sqrt{44} = 6,6332496$$

640 à 679.

$$\sqrt{277} = 16,6433170$$

$$\sqrt{93} = 9,6436508$$

$$\sqrt{386} = 19,6468827$$

$$\sqrt{7} = 2,6457513$$

$$\sqrt{160} = 12,6491106$$

$$\sqrt{245} = 15,6524758$$

$$\sqrt{348} = 18,6547581$$

$$\sqrt{469} = 21,6564078$$

$$\sqrt{32} = 5,6568542$$

$$\sqrt{427} = 20,6639783$$

$$\sqrt{75} = 8,6602570$$

$$\sqrt{136} = 11,6619038$$

$$\sqrt{215} = 14,6623783$$

$$\sqrt{312} = 17,6635217$$

$$\sqrt{470} = 21,6794834$$

$$\sqrt{387} = 19,6723156$$

$$\sqrt{278} = 16,6733320$$

$$\sqrt{187} = 13,6747943$$

$$\sqrt{114} = 10,6770783$$

680 à 719.

$$\sqrt{349} = 18,6815471$$

$$\sqrt{59} = 7,6811457$$

$$\sqrt{246} = 15,6843871$$

$$\sqrt{428} = 20,6881609$$

$$\sqrt{161} = 12,6885775$$

$$\sqrt{12} = 4,6904158$$

$$\sqrt{313} = 17,6918060$$

$$\sqrt{94} = 9,6953597$$

$$\sqrt{216} = 14,6969385$$

$$\sqrt{388} = 19,6977156$$

$$\sqrt{471} = 21,7025344$$

$$\sqrt{279} = 16,7032931$$

$$\sqrt{137} = 11,7046999$$

$$\sqrt{45} = 6,7082039$$

$$\sqrt{350} = 18,7082869$$

$$\sqrt{188} = 13,7113092$$

$$\sqrt{429} = 20,7123152$$

$$\sqrt{247} = 15,7162336$$

$$\sqrt{76} = 8,7177979$$

720 à 759.

$$\sqrt{314} = 17,7200451$$

$$\sqrt{115} = 10,7238053$$

$$\sqrt{389} = 19,7230829$$

$$\sqrt{472} = 21,7255610$$

$$\sqrt{162} = 12,7279221$$

$$\sqrt{217} = 14,7309199$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508$$

$$\sqrt{280} = 16,7332005$$

$$\sqrt{351} = 18,7349940$$

$$\sqrt{430} = 20,7364414$$

$$\sqrt{14} = 3,7416574$$

$$\sqrt{33} = 5,7445626$$

$$\sqrt{60} = 7,7459667$$

$$\sqrt{95} = 9,7467943$$

$$\sqrt{138} = 11,7473401$$

$$\sqrt{248} = 15,7480157$$

$$\sqrt{189} = 13,7477271$$

$$\sqrt{315} = 17,7482393$$

$$\sqrt{390} = 19,7484177$$

$$\sqrt{473} = 21,7485632$$

760 à 799.

$$\sqrt{431} = 20,7605395$$

$$\sqrt{352} = 18,7616630$$

$$\sqrt{281} = 16,7630546$$

$$\sqrt{218} = 14,7648231$$

$$\sqrt{163} = 12,7671453$$

$$\sqrt{116} = 10,7703296$$

$$\sqrt{77} = 8,7749644$$

$$\sqrt{474} = 21,7715411$$

$$\sqrt{391} = 19,7737199$$

$$\sqrt{316} = 17,7763888$$

$$\sqrt{249} = 15,7797338$$

$$\sqrt{46} = 6,7823300$$

$$\sqrt{190} = 13,7840488$$

$$\sqrt{432} = 20,7846097$$

$$\sqrt{353} = 18,7882942$$

$$\sqrt{139} = 11,7898261$$

$$\sqrt{282} = 16,7928556$$

$$\sqrt{475} = 21,7944947$$

$$\sqrt{23} = 4,7958315$$

$$\sqrt{96} = 9,7979590$$

$$\sqrt{219} = 14,7986486$$

$$\sqrt{392} = 19,7989895$$

800 à 839.

$$\sqrt{317} = 17,8044938$$

$$\sqrt{164} = 12,8062485$$

$$\sqrt{433} = 20,8086520$$

$$\sqrt{61} = 7,8102497$$

$$\sqrt{250} = 15,8113883$$

$$\sqrt{354} = 18,8148877$$

$$\sqrt{117} = 10,8166538$$

$$\sqrt{476} = 21,8174242$$

$$\sqrt{191} = 13,8202750$$

$$\sqrt{283} = 16,8226038$$

$$\sqrt{393} = 19,8242276$$

$$\sqrt{8} = 2,8284271$$

$$\sqrt{34} = 5,8309519$$

$$\sqrt{73} = 8,8317609$$

$$\sqrt{140} = 11,8321596$$

$$\sqrt{220} = 14,8323970$$

$$\sqrt{318} = 17,8325545$$

$$\sqrt{434} = 20,8326667$$

840 à 879.

$$\sqrt{477} = 21,8403297$$

$$\sqrt{355} = 18,8414437$$

$$\sqrt{251} = 15,8429795$$

$$\sqrt{165} = 12,8452326$$

$$\sqrt{97} = 9,8488578$$

$$\sqrt{394} = 19,8494332$$

$$\sqrt{284} = 16,8522995$$

$$\sqrt{47} = 6,8556546$$

$$\sqrt{192} = 13,8564065$$

$$\sqrt{435} = 20,8566536$$

$$\sqrt{319} = 17,8605711$$

$$\sqrt{118} = 10,8627805$$

$$\sqrt{478} = 21,8632111$$

$$\sqrt{221} = 14,8660687$$

$$\sqrt{356} = 18,8679623$$

$$\sqrt{15} = 3,8729833$$

$$\sqrt{62} = 7,8740079$$

$$\sqrt{141} = 11,8743422$$

$$\sqrt{352} = 15,8745079$$

$$\sqrt{395} = 19,8746064$$

880 à 919.

$$\sqrt{436} = 20,8806130$$

$$\sqrt{285} = 16,8819430$$

$$\sqrt{166} = 12,8840987$$

$$\sqrt{479} = 21,8860686$$

$$\sqrt{79} = 8,8881944$$

$$\sqrt{320} = 17,8885438$$

$$\sqrt{193} = 13,8924440$$

$$\sqrt{357} = 18,8944436$$

$$\sqrt{24} = 4,8989795$$

$$\sqrt{98} = 9,8994949$$

$$\sqrt{222} = 14,8996644$$

$$\sqrt{396} = 19,8997487$$

$$\sqrt{437} = 20,9045450$$

$$\sqrt{253} = 15,9059737$$

$$\sqrt{119} = 10,9087121$$

$$\sqrt{480} = 21,9089023$$

$$\sqrt{286} = 16,9115345$$

$$\sqrt{35} = 5,9160798$$

$$\sqrt{142} = 11,9163753$$

$$\sqrt{321} = 17,9164729$$

920 à 959.

$$\sqrt{358} = 18,9208879$$

$$\sqrt{167} = 12,9228480$$

$$\sqrt{397} = 19,9248588$$

$$\sqrt{48} = 6,9282032 \quad \sqrt{194} = 13,9283883 \quad \sqrt{438} = 20,9284495$$

$$\sqrt{481} = 21,9317122$$

$$\sqrt{223} = 14,9331845$$

$$\sqrt{63} = 7,9372539$$

$$\sqrt{254} = 15,9373775$$

$$\sqrt{287} = 16,9410743$$

$$\sqrt{322} = 17,9443584$$

$$\sqrt{80} = 8,9442719$$

$$\sqrt{359} = 18,9472953$$

$$\sqrt{398} = 19,9499373$$

$$\sqrt{99} = 9,9498744$$

$$\sqrt{439} = 20,9523268$$

$$\sqrt{482} = 21,9544984$$

$$\sqrt{120} = 10,9544512$$

$$\sqrt{143} = 11,9582607$$

960 à 999.

$$\sqrt{168} = 12,9614814$$

$$\sqrt{195} = 13,9642400$$

$$\sqrt{224} = 14,9666295$$

$$\sqrt{255} = 15,9687194$$

$$\sqrt{288} = 16,9703627$$

$$\sqrt{323} = 17,9722008$$

$$\sqrt{360} = 18,9736660$$

$$\sqrt{399} = 19,9749844$$

$$\sqrt{440} = 20,9761770$$

$$\sqrt{483} = 21,9772610$$