BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LÉAUTÉ

Note sur le tracé des engrenages par arcs de cercle ; perfectionnement de la méthode de Willis

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 99-110
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__99_0>

Note sur le tracé des engrenages par arcs de cercle; perfectionnement de la méthode de Willis; par M. H. Léauté.

(Séance du 8 mars 1876.)

Le but de ce travail est d'indiquer un perfectionnement de la méthode de Willis, pour le tracé des engrenages par arcs de cercle.

Ce nouveau procédé conduit, pour la forme de la dent, à une approximation qui est de beaucoup supérieure à celle que donne le procédé de Willis, et cela sans modifier les opérations à effectuer, sans exiger la moindre complication dans les calculs; l'odontographe est conservé, son angle seul est changé.

Le présent Mémoire est divisé en deux parties : dans la première, je chercherai quel est le cercle qui, dans une étendue déterminée, épouse le mieux la forme de la dent; dans la seconde, je remplacerai le cercle de Willis par un autre cercle plus avantageux, mais assujetti à cette condition de donner lieu à une suite d'opérations exactement de même nature que celles du tracé de Willis.

PREMIÈRE PARTIE.

RECHERCHE DU CERCLE QUI DIFFÈRE LE MOINS POSSIBLE D'UN ARC D'ÉPICYCLOÏDE DANS LE VOISINAGE DE SON POINT DE REBROUSSEMENT.

Je remarque d'abord que, dans le voisinage de son point de rebroussement, l'épicycloïde diffère très-peu d'une développante de cercle, c'est-à-dire que le contact entre l'épicycloïde et la développante osculatrice est d'un ordre supérieur à celui du contact ordinaire d'une courbe avec son cercle osculateur. L'écart entre les deux courbes sera encore diminué si l'on considère un arc fini, mais petit, et que, au lieu de la développante osculatrice au point de rebroussement, on prenne une développante tangente à l'épicycloïde en ce point et ayant même rayon de courbure moyen dans les deux parties qui doivent être substituées l'une à l'autre.

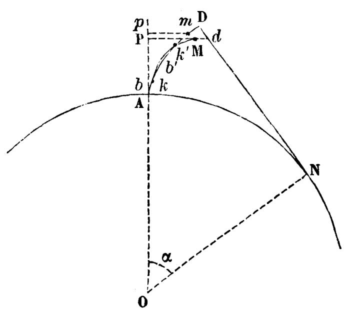
Je considérerai donc désormais une développante de cercle, me réservant, lorsqu'il s'agira d'une épicycloïde, de déterminer les éléments de la développante par les éléments moyens de l'épicycloïde.

Soient $Abb'D$ la portion de la développante considérée, R le rayon du cercle, α l'angle de l'élément situé en D avec le rayon AO, s la longueur de l'arc AD; on a

$$s = R\,\frac{\alpha^2}{2}.$$

La courbure de la développante allant constamment en diminuant à partir de A, on peut toujours trouver un cercle tel que Ad qui, partant de A, coupe la développante en deux autres points k et k' situés entre A et D. La distance des deux courbes aura donc deux maximums, l'un en b, l'autre en b'; ce sont deux maximums ordinaires, c'est-à-dire que la dérivée de la distance des deux courbes s'y annule. Il y aura, en outre, un maximum absolu en D, à l'extrémité de l'arc considéré.

Le cercle le plus avantageux sera celui pour lequel les deux plus



grands de ces maximums seront égaux; car, si cette condition n'était pas remplie, on pourrait tracer un autre cercle différant moins de la courbe que le cercle donné.

Cela posé, soient α_0, α'_0, α_1 les valeurs de α aux maximums b, b', D; ρ, ρ_0, ρ'_0, ρ_1 les rayons de courbure de la développante aux points α, α_0, α'_0, α_1; posons

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = x, \quad \frac{\alpha'_0}{\alpha_0} = x', \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = x_1.$$

Nommons β l'angle d'un élément quelconque du cercle qui doit remplacer la développante avec la ligne AO, et représentons un point du cercle par l'angle β correspondant.

Puisque le point b est un maximum de distance pour les deux courbes, la normale en b à la développante est aussi normale au cercle ; le centre de ce cercle est donc sur le rayon de courbure ρ_0 en $\boldsymbol{b}$. Soit $\rho_0\varepsilon$ le rayon.

Les angles α et β sont toujours petits, de sorte que l'on peut prendre, pour mesure de l'écart des deux courbes, la différence des ordonnées menées perpendiculairement à AO ; de plus, comme ces courbes se suivent de près, on pourra, au degré d'approximation que comporte la question, comparer les points qui sont à une même distance de A, ces distances étant comptées sur les arcs de courbe.

L'ordonnée mp de la développante est

$$\int_0^\alpha \sin\alpha\, ds,$$

ou, si l'on veut, à cause de la petitesse de α,

$$\int_0^\alpha \alpha\, ds = \frac{2}{3} s_0\alpha_0 x^3 \quad (^1).$$

L'ordonnée MP du cercle est de même

$$\int_0^s \beta\, ds = s_0\alpha_0\left(x^2 - \frac{x^2}{2\varepsilon} + \frac{x^4}{4\varepsilon}\right) \quad (^2).$$

La différence des ordonnées mesurant l'écart des deux courbes est donc

$$z = \frac{s_0\alpha_0}{12}\left(\frac{3x^2-6}{\varepsilon} - 8x + 12\right)x^2.$$

---

(1) Car on sait que

$$s = \frac{R\alpha^2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{\alpha_0} = x;$$

par suite,

$$\int_0^\alpha \alpha\, ds = \int_0^\alpha R\alpha^2\, d\alpha = \int_0^x R\alpha_0^3 x^2\, dx = R\alpha_0^3\frac{x^3}{3} = \frac{2}{3}s_0\alpha_0 x^3.$$

(2) On a, en effet,

$$\beta = \alpha_0 + \frac{s - s_0}{\rho_0\varepsilon} = \alpha_0\frac{2\varepsilon - 1}{2\varepsilon} + \frac{s}{\rho_0\varepsilon} = \alpha_0\left(\frac{2\varepsilon-1}{2\varepsilon} + \frac{s}{R\varepsilon\alpha_0^2}\right);$$

Si l'on annule la dérivée de z, on trouve pour racines

$$x = 1, \quad x = 2\varepsilon - 1,$$

ce qui donne

$$\text{pour } x = 1, \qquad \alpha = \alpha_0, \quad z - z_0 = s_0\alpha_0\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\varepsilon}\right),$$

$$\text{pour } x = 2\varepsilon - 1, \quad \alpha = \alpha'_0, \quad z - z'_0 = s_0\alpha_0(2\varepsilon - 1)^3\frac{2 - (2\varepsilon - 1)}{12\varepsilon}.$$

Il suffit maintenant, pour obtenir le cercle cherché, d'exprimer que le maximum absolu z_1 à l'extrémité de l'arc est égal au plus grand des deux nombres z_0 et z'_0.

La donnée immédiate du problème est s_1, longueur de l'arc considéré, et $m_1 p_1$, ordonnée de l'extrémité de cet arc; mais on voit qu'on arrivera à la solution en supposant s_0 ou α_0 donné et cherchant, parmi les cercles tels que z_1 soit égal à z_0 ou z'_0, celui pour lequel l'erreur relative $\frac{z_1}{m_1 p_1}$ est la plus petite possible.

On opérera donc de la manière suivante :

α_0 étant supposé constant, on tracera une suite de cercles passant par le point A et ayant leurs centres sur la normale au point b correspondant à α_0 ; chacun de ces cercles sera supposé terminé au point s_1 tel que z_1 soit égal à la plus grande des deux quantités z_0 et z'_0 ; on cherchera ensuite celui pour lequel $\frac{z_1}{m_1 p_1}$ est le plus petit.

Cette manière d'opérer a ce grand avantage qu'elle n'introduit qu'un seul paramètre variable ε, au lieu de deux que l'on aurait eus en abordant le problème directement.

Il est bien entendu d'ailleurs que, lorsque je dis qu'on tracera une suite de cercles, il ne s'agit pas d'un tracé graphique, mais bien du calcul de leurs ordonnées successives ou plutôt du calcul de

---

d'où il résulte

$$\int_0^s \beta\, ds = \alpha_0\left(\frac{2\varepsilon - 1}{2\varepsilon}s + \frac{s^2}{2R\varepsilon\alpha_0^2}\right) = \frac{\alpha_0}{2\varepsilon}\left[(2\varepsilon - 1)\frac{R\alpha_0^2 x^2}{2} + R\frac{\alpha_0^2 x^4}{4}\right]$$
$$= \frac{R\alpha_0^3}{4\varepsilon}\left[(2\varepsilon - 1)x^2 + \frac{x^4}{2}\right] = s_0\frac{\alpha^0}{2\varepsilon}\left[(2\varepsilon - 1)x^2 + \frac{x^4}{2}\right] = s_0\alpha_0\left(x^2 - \frac{x^2}{2\varepsilon} + \frac{x^4}{4\varepsilon}\right).$$

C. Q. F. D

l'écart z. Ce qui va suivre prouvera que ce calcul n'est pas auss long qu'on pourrait le croire.

Puisque α_0 est le maximum le plus rapproché de A, les seuls cercles que nous ayons à considérer sont ceux pour lesquels

$$\alpha'_0 > \alpha_0,$$

c'est-à-dire

$$2\varepsilon - 1 > 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\varepsilon} < 1.$$

Calculons d'abord les z correspondant à $\varepsilon = 2$, et posons

$$z = \frac{s_0 \alpha_0}{12} y,$$

en représentant par y la quantité

$$y = \left(\frac{3x^2 - 6}{\varepsilon} - 8x + 12\right) x^2.$$

Nous verrons qu'il est ensuite facile de conclure de ce calcul la valeur de z pour une autre valeur de ε.

Dans le cas de $\varepsilon = 2$,

$$y = \left(\frac{3}{2} x^2 - 8x + 9\right) x^2.$$

La fonction entre crochets se calcule rapidement par la méthode des différences; nous avons réuni dans le tableau suivant les différentes valeurs de y correspondant à des valeurs de x comprises entre 1 et 3 :

x.	$\frac{3}{2} x^2 - 8x + 9$.	Δ.	Δ^2.	y.
1,0	2,500	— 0,485	0,03	2,500
1,1	2,015	— 0,455	»	2,438
1,2	1,560	— 0,425	»	2,246
1,3	1,135	— 0,395	»	1,918
1,4	0,740	— 0,365	»	1,450
1,5	0,375	— 0,335	»	0,844
1,6	0,040	— 0,305	»	0,102
1,7	— 0,265	— 0,275	»	— 0,765

x.	$\frac{3}{2}x^2 - 8x + 9$.	Δ.	Δ^2.	y.
1,8	— 0,540	— 0,245	0,03	— 1,749
1,9	— 0,785	— 0,215	»	— 2,834
2,0	— 1,000	— 0,185	»	— 4,000
2,1	— 1,185	— 0,155	»	— 5,226
2,2	— 1,340	— 0,125	»	— 6,486
2,3	— 1,465	— 0,095	»	— 7,750
2,4	— 1,560	— 0,065	»	— 8,986
2,5	— 1,625	— 0,035	»	—10,156
2,6	— 1,660	— 0,005	»	—11,222
2,7	— 1,665	+ 0,025	»	—12,138
2,8	— 1,640	+ 0,055	»	—12,858
2,9	— 1,585	+ 0,085	»	—13,330
3,0	— 1,500	+ 0,115	»	—13,500

Il faut maintenant calculer les valeurs de y correspondant à d'autres cercles, c'est-à-dire à d'autres valeurs de ε.

Or il est évident que, pour une même valeur de x et pour des valeurs de $\frac{1}{\varepsilon}$ croissant en progression arithmétique, les y diffèrent par une quantité constante et égale à $x^2(3x^2 - 6)$ si $\Delta\frac{1}{\varepsilon} = 1$.

Le tableau suivant donne les valeurs de ces différences pour des valeurs de x comprises entre 2 et 3 :

x.	$3x^2 - 6$.	Δ.	Δ^2.	$x^2(3x^2 - 6)$.
2,0	6,00	1,23	0,06	24,000
2,1	7,23	1,29	»	31,884
2,2	8,52	1,35	»	41,237
2,3	9,87	1,41	»	52,212
2,4	11,28	1,47	»	64,973
2,5	12,75	1,53	»	79,687
2,6	14,28	1,59	»	96,533
2,7	15,87	1,65	»	115,692
2,8	17,52	1,71	»	137,357
2,9	19,23	1,77	»	161,724
3,0	21,00	1,83	»	189,500

La détermination de x_1, et par suite celle de z_1, pourra se faire par un tracé graphique (¹). On commencera par construire à une échelle suffisante la courbe des y ayant x pour abscisse, relative au cas de $\frac{1}{\varepsilon} = 0{,}5$, ce qui se fait par le premier tableau. On en déduit ensuite autant d'autres cercles que l'on veut à l'aide du deuxième tableau. Cette opération est aisée, car il suffit de prendre sur chaque ordonnée, à partir de la courbe initiale, une série de points équidistants ; la distance de ces points sera le centième des chiffres portés sur le deuxième tableau si l'on veut tracer les courbes relatives à des valeurs de $\frac{1}{\varepsilon}$ différentes de $\frac{1}{100}$.

Ces courbes une fois tracées, on calcule les valeurs de y relatives aux deux maximums à l'aide des formules

$$y_0 = 4 - \frac{3}{\varepsilon}, \quad y'_0 = (2\varepsilon - 1)^3 \left(\frac{3}{\varepsilon} - 2\right),$$

et l'on cherche sur chaque courbe le point x_1 pour lequel y_1 est égal à la plus grande des valeurs précédentes.

Le tableau ci-dessous donne les résultats obtenus pour quatre valeurs de $\frac{1}{\varepsilon}$ différant de $\frac{1}{100}$ et comprenant la valeur inconnue de x_1 :

$\frac{1}{\varepsilon}$.	y_0.	y'_0.	x_1.
0,59	2,23	3,14	2,985
0,60	2,20	2,54	2,880
0,61	2,17	2,05	2,790
0,62	2,14	1,54	2,720

La quantité qui doit être minimum est $\frac{z_1}{m_1 p_1}$; or z_1 est proportionnel à y_1 et $m_1\, p_1$ est proportionnel à x_1^3 ; si l'on calcule la valeur

(¹) On n'a fait figurer dans le tableau ci-dessus que les valeurs de x supérieures à 2, car on cherche la valeur x_1 pour laquelle z_1 est égal au plus grand des deux nombres z_0 et z'_0 ; or cette valeur est forcément très-supérieure à l'abscisse du point d'intersection de la développante et du cercle situé le plus près de A, lequel point, étant à peu près symétrique de A par rapport à b, a son abscisse dans les environs de 2.

de $\frac{y_1}{x_1^3}$, on trouve

$\frac{1}{\varepsilon}$.	y_1.	$\frac{y_1}{x_1^3}$.
0,59	3,14	0,1180
0,60	2,54	0,1063
0,61	2,17	0,0999
0,62	2,14	0,1064

Le maximum cherché correspond donc à une valeur de $\frac{1}{\varepsilon}$ comprise entre 0,60 et 0,62 et voisine de 0,61.

Avant d'aller plus loin, il est bon de s'assurer que, lorsqu'on augmente x_1, l'erreur relative $\frac{y_1}{x_1^3}$ va en augmentant. Or cette erreur est proportionnelle à

$$\frac{3x_1}{\varepsilon} + \left(12 - \frac{6}{\varepsilon}\right)\frac{1}{x_1} - 8,$$

quantité dont le minimum est donné par

$$x_1 = \sqrt{4\varepsilon - 2}.$$

Cette valeur de x_1 est réelle lorsque ε est plus grand que 0,5, ce qui est le cas actuel. A partir de ce minimum, la fonction est constamment croissante avec x_1; or ici ε est plus petit que $\frac{1}{0,6}$ ou, si l'on veut, que 1,7; le minimum a donc lieu pour une valeur de x_1 plus petite que 2,2, c'est-à-dire inférieure à la plus petite des valeurs inscrites dans le tableau ci-dessus; par suite, quand x_1 augmente, l'erreur relative $\frac{y_1}{x_1^3}$ va bien en augmentant, ce qui est nécessaire pour que la solution trouvée réponde à la question.

On peut calculer avec plus d'approximation la valeur de ε qui correspond au minimum en faisant passer une parabole dont l'axe est parallèle à Oy par les trois points

$$x = 0,60, \quad x = 0,61, \quad x = 0,62,$$
$$y = 0,1063, \quad y = 0,0999, \quad y = 0,1064,$$

et cherchant le point le plus bas de cette parabole.

On trouve alors

$$\frac{1}{\varepsilon} = 0,609,$$

d'où il résulte

$$\varepsilon = 1,642, \quad x_1 = 2,78, \quad \frac{1}{x_1} = 0,36,$$

valeurs qui conduisent à la règle suivante :

Pour remplacer par un cercle une épicycloïde ou une développante dans une portion Ad voisine de son point de rebroussement A, il faut prendre sur la courbe un point b tel, que l'angle de la normale en ce point avec la normale en A soit les 0,36 de l'angle de la normale en d avec cette même normale en A, mener la normale en b et décrire un cercle ayant son centre sur cette normale, passant par A, et dont le rayon soit égal à $1,642\rho_0$, en désignant par ρ_0 le rayon de courbure en b.

Cette règle permettrait évidemment d'obtenir dans chaque cas particulier le cercle le plus avantageux pour le profil d'une dent ; mais cela exigerait quelques raisonnements, et le but que nous nous proposons est d'arriver à un tracé identique, comme opérations à effectuer, au tracé de Willis. La seconde partie de ce travail conduira à ce résultat.

SECONDE PARTIE.

TRACÉ PRATIQUE DES DENTS D'ENGRENAGE PAR ARCS DE CERCLE.

On peut admettre que la saillie des dents en dehors de la circonférence primitive est d'environ les 0,31 du pas. C'est la moyenne des proportions données par les différents auteurs.

On sait aussi que dans les engrenages à épicycloïde, engendrés par le cercle qui a pour rayon $\frac{3a}{\pi}$, a étant le pas, c'est-à-dire dans les engrenages adoptés par Willis, l'amplitude de prise σ_1 est donnée par la formule suivante, si l'on prend le pas pour unité :

$$\sigma_1 = \sqrt{h\frac{1}{\pi}\frac{6N}{N+6}},$$

h étant le rapport entre la saillie des dents et le pas, N le nombre de dents.

La plus petite valeur de N étant 12, on voit que σ_1 varie depuis 0,63 jusqu'à 0,77; l'amplitude de prise est donc, en moyenne, les 0,70 du pas.

Ainsi l'arc Ad de la circonférence primitive déterminé par la normale dD à l'extrémité de la dent peut être regardé comme égal aux 0,70 du pas.

Mais, si je considère un point m quelconque sur le profil de la dent, il est évident que l'arc AM déterminé sur la circonférence primitive par la normale mM en m est proportionnel à l'angle de mM avec la tangente en A à la circonférence primitive, c'est-à-dire à l'angle que nous avons nommé α.

Or il faut trouver un point b tel que l'angle α correspondant soit les 0,36 de celui qui correspond à l'extrémité D; pour cela, il suffit, d'après ce qui précède, de prendre

$$AB = 0,36\,Ad,$$

et, comme Ad est égal à $0,70\,a$, il en résulte

$$AB = \frac{a}{4}.$$

Il faut maintenant connaître la normale Bb; or cette normale, interceptant sur le cercle générateur un arc égal à $\frac{1}{24}$ de la circonférence, l'angle de Bb avec la tangente en B à la circonférence primitive est de

$$\frac{360}{48} = 7^\circ 30'.$$

Nous prendrons donc pour angle fixe de l'odontographe $7^\circ 30'$ au lieu de 15 degrés que prend Willis, et tandis qu'il place le sommet de cet instrument en un point distant de A de $\frac{a}{2}$, nous le placerons au point distant seulement de $\frac{a}{4}$.

Il ne nous reste plus qu'à trouver la grandeur du rayon avec lequel on doit tracer l'arc de cercle. Or nous avons vu que ce rayon était égal à $1,64\rho_0$, en désignant par ρ_0 le rayon de courbure en b; mais on sait que

$$\rho_0 = \frac{12a}{\pi} \sin\frac{\pi}{24}\left(\frac{N+6}{N+12}\right),$$

c'est-à-dire sensiblement

$$\rho_0 = 0,50\,\frac{N+6}{N+12}\,a.$$

Le rayon du cercle devra donc être

$$a \times 1,64 \times 0,50\,\frac{N+6}{N+12} = 0,82\,\frac{N+6}{N+12}\,a.$$

Cette formule est identiquement de même forme que celle de Willis, de sorte que non-seulement les opérations manuelles du tracé, mais encore les calculs, sont les mêmes que dans le procédé de Willis.

Nous n'avons considéré dans tout ce qui précède que la face de la dent; pour passer au tracé du flanc, il suffit de changer N en — N, ce qui donne pour le rayon du cercle

$$0,82\,\frac{N-6}{N-12}\,a.$$

En résumé, voici comment on tracera par le nouveau procédé un engrenage de pas a, à n dents :

1° *Pour la face.* — On prendra un arc AB égal à $\frac{a}{4}$; on mènera par l'odontographe la droite BC faisant avec la circonférence primitive un angle de 7° 30', et l'on décrira un arc de cercle passant par A, ayant son centre sur BC et pour rayon $0,82\,\frac{N+6}{N+12}\,a$;

2° *Pour le flanc.* — On prendra un arc AB' égal à $\frac{a}{4}$, on mènera B'C' faisant avec la circonférence primitive un angle de 7° 30', et l'on décrira un arc de cercle passant par A, ayant son centre sur B'C' et pour rayon $0,82\,\frac{N-6}{N-12}\,a$.

En somme, on fera identiquement la construction de Willis, mais en remplaçant l'arc $\frac{a}{2}$ par l'arc $\frac{a}{4}$, l'odontographe à 15 degrés par l'odontographe à $7°30'$, et le rayon de $0{,}50 \frac{N \pm 6}{N \pm 12} a$ par un rayon de $0{,}82 \frac{N \pm 6}{N \pm 12} a$.

Grâce à ces modifications, l'approximation sera considérablement augmentée; on peut s'en rendre compte aisément.

L'écart entre l'épicycloïde et le cercle est, en effet, comme nous l'avons vu,

$$\frac{R\alpha_0^3}{24}\left(\frac{3x^2-6}{\varepsilon} - 8x + 12\right)x_2.$$

Pour comparer le procédé de Willis au procédé proposé, il suffit de comparer dans les deux cas les valeurs de cette quantité.

Les erreurs les plus fortes se produisent dans les deux procédés pour l'extrémité de la dent : c'est ce qui fixe la valeur de x; dans le tracé de Willis, $x = 1{,}4$, $\varepsilon = 1$, $\alpha_0 = \frac{a}{2}$; dans le tracé proposé, $x = 2{,}78$, $\varepsilon = 1{,}642$, $\alpha_0 = \frac{a}{4}$. Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression ci-dessus, on trouve que l'approximation obtenue est plus de six fois plus forte par le nouveau procédé que par le procédé de Willis.