BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur un problème relatif aux lignes asymptotiques

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 12-18

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__12_1>

SUR UN PROBLÈME RELATIF AUX LIGNES ASYMPTOTIQUES;

Par M. E. Goursat.

1. On connaît un certain nombre de surfaces dont les lignes asymptotiques de l'un des systèmes sont des courbes égales. Ce sont les surfaces réglées, les surfaces de révolution et les surfaces hélicoïdes; il m'a paru intéressant de rechercher si l'on avait ainsi toutes les surfaces jouissant de cette curieuse propriété ([1]).

Le problème peut se formuler ainsi : *Trouver une courbe gauche* Γ, *telle qu'on puisse lui imprimer un mouvement continu, dans lequel elle reste constamment ligne asymptotique de la surface* S *qu'elle engendre.* Considérons la courbe mobile dans une de ses positions; soient M un point de cette courbe, Mt la tangente à la courbe en ce point, Mv la direction de la vitesse du point M à l'instant considéré, et MN la normale à la surface. Cette droite MN est normale à la vitesse d'un de ses points, le point M lui-même, et, d'autre part, elle est la binormale de la courbe Γ, puisqu'on suppose que Γ est une ligne asymptotique de S. Mais on sait que, dans un corps solide en mouvement, les droites qui, à un moment donné, sont normales à la vitesse d'un de leurs points appartiennent à un complexe linéaire ayant pour axe l'axe du mouvement hélicoïdal tangent. *Les courbes gauches* Γ *répondant à la question sont donc les courbes dont les binormales appartiennent à un complexe linéaire.*

Soit Γ une courbe gauche possédant cette propriété. Deux cas peuvent se présenter. Si les binormales appartiennent à *un seul* complexe linéaire, l'axe du mouvement hélicoïdal tangent coïncide à chaque instant avec l'axe du complexe, et le pas de la vis instan-

([1]) Cette Note était déjà rédigée quand j'ai appris, par une obligeante communication de M. Bricard, que M. Hazzidakis s'était occupé de cette question et de questions analogues (*Journal de Crelle*, t. 95, p. 120; t. 98, p. 49). Cependant, la solution que j'indique me paraît plus intuitive et plus affranchie de calcul; d'un autre côté, M. Hazzidakis n'a pas cherché à ramener à la forme la plus simple l'équation différentielle du second ordre dont dépend le problème.

tanée est constant aussi. Cet axe est donc fixe par rapport à la courbe mobile Γ et, par suite, il est fixe aussi dans l'espace. Le mouvement de la courbe Γ se réduit donc à un mouvement hélicoïdal, et la surface engendrée S est une surface hélicoïde. Si le pas de la vis instantanée est nul, le mouvement se réduit à une rotation, et les binormales à la courbe Γ rencontrent l'axe.

2. Pour obtenir d'autres solutions du problème, il faut donc que les binormales de la courbe Γ fassent partie d'une infinité de complexes linéaires et, par conséquent, appartiennent à une congruence linéaire. Supposons que nous ayons obtenu une courbe gauche Γ possédant cette propriété; les binormales appartiennent à une infinité de complexes linéaires dont les axes engendrent un conoïde de Plücker, et chaque génératrice de ce conoïde est l'axe d'un complexe linéaire déterminé qui renferme toutes les binormales de la courbe Γ. On connaîtra donc le lieu des axes des mouvements hélicoïdaux tangents dans le corps solide, que l'on peut supposer représenté par un trièdre trirectangle invariablement lié à la courbe Γ; de plus, on connaîtra aussi le pas de la vis instantanée correspondant à chacun de ces axes. Le problème se décompose donc de lui-même en deux problèmes distincts :

1° *Trouver les courbes gauches dont les binormales font partie d'une congruence linéaire;*

2° *Étant donnée une surface réglée* (Σ), *invariablement liée à un corps solide, trouver les mouvements de ce corps solide pour lesquels la surface* (Σ) *est le lieu des axes centraux, le pas de la vis instantanée étant donné pour chacune des génératrices de* (Σ).

3. Je m'occuperai d'abord de ce dernier problème. Dans le cas dont il s'agit, la surface réglée (Σ) est un conoïde de Plücker, mais la solution peut être présentée sous forme générale. Le corps solide en mouvement étant supposé réduit à un trièdre trirectangle, et les lettres p, q, r, ξ, η, ζ ayant la signification habituelle (¹), on sait que l'axe central du mouvement à l'instant t

(¹) Darboux, *Théorie des surfaces*, t. I, Chap. Iᵉʳ.

est représenté par les équations

$$(1)\qquad \frac{\xi + qz - ry}{p} = \frac{\eta + rx - pz}{q} = \frac{\zeta + py - qx}{r},$$

tandis que le pas de la vis instantanée a pour expression [1]

$$(2)\qquad \frac{\xi p + \eta q + \zeta r}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Soient

$$\begin{cases} x = ar + m, \\ y = br + n \end{cases}$$

les équations d'une génératrice G de la surface (Σ), a, b, m, n étant des fonctions d'une variable indépendante t, que l'on peut toujours regarder comme représentant le temps.

En écrivant que la génératrice coïncide avec l'axe central (1) à l'instant t et que l'expression (2) est une fonction connue de t, on établit *cinq* relations entre p, q, r, ξ, η, ζ et la variable t. On peut donc prendre arbitrairement une de ces six fonctions de t, et le mouvement le plus général répondant à la question dépend d'une fonction arbitraire. La détermination effective de ces mouvements se ramène, comme on le sait, à l'intégration du système

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q, \\ \dfrac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r, \\ \dfrac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p \end{cases}$$

et à des quadratures. L'intégration du système (3) se ramène lui-même à l'intégration de l'équation de Riccatti

$$(4)\qquad \frac{d\sigma}{dt} = - ir\sigma + \frac{q - ip}{2} + \frac{q + ip}{2}\sigma^2.$$

Cette équation s'intégrera par des quadratures dès qu'on en connaîtra une solution particulière. Or, si l'on écrit qu'elle admet pour solution une fonction donnée $\sigma = f(t)$, on établit entre

---

[1] Kœnigs, *Leçons de Cinématique*, p. 105.

p, q, r et t une nouvelle relation qui permettra de déterminer ξ, η, ζ, p, q, r en fonction de t. En définitive, si l'on connaît une courbe gauche Γ dont les binormales appartiennent à une congruence linéaire, on obtiendra par des quadratures tous les mouvements à un paramètre dans lesquels cette courbe Γ engendre une surface S dont elle reste ligne asymptotique dans toutes ses positions. Ces mouvements dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable indépendante.

4. Pour avoir des surfaces répondant à la question, il suffirait donc de connaître des courbes gauches Γ dont les binormales appartiennent à une congruence linéaire. La recherche de ces courbes conduit à une équation différentielle du second ordre qui ne paraît pas intégrable. Je développerai seulement les calculs en supposant que les droites focales de la congruence sont rectangulaires. Prenons pour axe des x la perpendiculaire commune à ces deux droites, pour origine le point à égale distance des deux droites, et pour axes Oz et Oy des parallèles à ces droites. Elles seront représentées respectivement, dans ce système d'axes, par les équations

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} z = 0, \\ x = h, \end{array} \right. \qquad \Delta' \left\{ \begin{array}{l} y = 0, \\ x = -h; \end{array} \right.$$

toute droite D de la congruence sera représentée par des équations de la forme

$$(5) \qquad y = \lambda(x + h), \qquad z = \mu(x - h),$$

λ et μ étant deux paramètres variables. Lorsque l'on établit une relation arbitraire entre λ et μ, cette droite engendre une surface réglée dont les droites Δ et Δ' sont deux directrices rectilignes. Nous allons chercher quelle relation on doit établir entre λ et μ pour que les droites D ainsi obtenues soient les binormales d'une courbe gauche Γ. Soient x, y, z les coordonnées du point où la courbe Γ admet la droite D pour binormale; ces coordonnées vérifient les relations (5), et l'on doit avoir en outre

$$(6) \qquad dx + \lambda\, dy + \mu\, dz = 0,$$

$$(7) \qquad d^2x + \lambda\, d^2y + \mu\, d^2z = 0.$$

La dernière de ces conditions peut être remplacée, comme on le sait, par la suivante

$$(8) \qquad d\lambda\, dy + d\mu\, dz = 0$$

obtenue en différentiant la première (6), et le problème revient à trouver cinq fonctions x, y, z, λ, μ d'une variable indépendante vérifiant les quatre équations (5), (6) et (8).

Des relations (5) on tire

$$dy = (x+h)\, d\lambda + \lambda\, dx, \qquad dz = (x-h)\, d\mu + \mu\, dx,$$

et, en portant ces expressions de dy et dz dans (6) et (8), il vient

$$(9) \qquad (1+\lambda^2+\mu^2)\, dx + x(\lambda\, d\lambda + \mu\, d\mu) + h(\lambda\, d\lambda - \mu\, d\mu) = 0,$$

$$(10) \qquad (\lambda\, d\lambda + \mu\, d\mu)\, dx + x(d\lambda^2 + d\mu^2) + h(d\lambda^2 - d\mu^2) = 0.$$

On tire de ces équations

$$(11) \quad dx[d\lambda^2 + d\mu^2 + (\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda)^2] + 2h(\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda)\, d\lambda\, d\mu = 0,$$

$$(12) \quad x[d\lambda^2 + d\mu^2 + (\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda)^2] + h[(1+\mu^2)\, d\lambda^2 - (1+\lambda^2)\, d\mu^2] = 0;$$

en différentiant l'équation (12), il vient encore

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & dx[d\lambda^2 + d\mu^2 + (\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda)^2] \\ & + 2x[d\lambda\, d^2\lambda + d\mu\, d^2\mu + (\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda)(\lambda\, d^2\mu - \mu\, d^2\lambda)] \\ & + 2h[(1+\mu^2)\, d\lambda\, d^2\lambda - (1+\lambda^2)\, d\mu\, d^2\mu + d\lambda\, d\mu(\mu\, d\lambda - \lambda\, d\mu)] = 0. \end{aligned} \right.$$

En retranchant membre à membre les relations (11) et (13), il reste, en divisant par 2,

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & x[d\lambda\, d^2\lambda + d\mu\, d^2\mu + (\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda)(\lambda\, d^2\mu - \mu\, d^2\lambda)] \\ & + h[(1+\mu^2)\, d\lambda\, d^2\lambda - (1+\lambda^2)\, d\mu\, d^2\mu + 2 d\lambda\, d\mu(\mu\, d\lambda - \lambda\, d\mu)] = 0. \end{aligned} \right.$$

Enfin, en éliminant x entre les deux relations (12) et (14), on obtient l'équation différentielle cherchée entre λ et μ. La variable μ étant prise pour variable indépendante, on a $d^2\mu = 0$, et l'équation s'écrit

$$\begin{aligned} & [(1+\mu^2)\, d\lambda\, d^2\lambda + 2 d\lambda\, d\mu(\mu\, d\lambda - \lambda\, d\mu)][d\lambda^2 + d\mu^2 + (\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda)^2] \\ & = [(1+\mu^2)\, d\lambda^2 - (1+\lambda^2)\, d\mu^2][(1+\mu^2)\, d\lambda - \lambda\mu\, d\mu]\, d^2\lambda, \end{aligned}$$

ou, en posant $\lambda' = \dfrac{d\lambda}{d\mu}$, $\lambda'' = \dfrac{d^2\lambda}{d\mu^2}$,

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \{2\lambda'(1+\lambda^2+\mu^2) - \lambda\mu[1+\lambda'^2 + (\lambda - \mu\lambda')^2]\}\lambda'' \\ & \qquad + 2\lambda'(\mu\lambda' - \lambda)[1+\lambda'^2 + (\lambda - \mu\lambda')^2] = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation prend une forme plus simple si on lui applique la transformation de Legendre, en posant

$$X = \lambda', \qquad Y = \mu\lambda' - \lambda;$$

on a ensuite

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \mu, \qquad Y'' = \frac{dY'}{dX} = \frac{1}{\lambda''},$$

et inversement

$$\mu = Y', \qquad \lambda = XY' - Y, \qquad \lambda' = X, \qquad \lambda'' = \frac{1}{Y''}.$$

L'équation transformée est donc

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2XY(1 + X^2 + Y^2)Y'' \\ & \quad + 2X[1 + Y'^2 + (XY' - Y)^2] - Y'(XY' - Y)(1 + X^2 + Y^2) = 0; \end{aligned} \right.$$

c'est une équation de la forme (1)

$$(17)\qquad \frac{d^2Y}{dX^2} + a_1\left(\frac{dY}{dX}\right)^3 + 3a_2\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + 3a_3\frac{dY}{dX} + a_4 = 0,$$

les coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 étant des fonctions des variables X, Y seulement, qui ont ici les valeurs suivantes

$$a_1 = 0, \qquad 3a_2 = \frac{1}{2Y} - \frac{Y}{1 + X^2 + Y^2}, \qquad 3a_3 = \frac{1}{2X} - \frac{2X}{1 + X^2 + Y^2},$$

$$a_4 = \frac{1 + Y^2}{Y(1 + X^2 + Y^2)}.$$

Observons que les coefficients a_2 et a_3 satisfont à la condition

$$\frac{\partial a_3}{\partial Y} = 2\frac{\partial a_2}{\partial X};$$

on pourra donc amener l'équation (16) à la forme simple

$$(18)\qquad \frac{d^2V}{dX^2} = F(X, V),$$

en prenant pour inconnue nouvelle une fonction V(X, Y) satis-

(1) Les équations de cette espèce ont été étudiées par M. Roger Liouville (*Journal de l'École Polytechnique,* Cahiers LVII et LIX), et l'on pourrait essayer d'appliquer à l'équation (16) les méthodes de ce géomètre.

faisant aux deux relations compatibles

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = 3a_2 \frac{\partial V}{\partial Y}, \qquad 2\frac{\partial^2 V}{\partial X\,\partial Y} = 3a_3 \frac{\partial V}{\partial Y},$$

d'où l'on tire

$$\log \frac{\partial V}{\partial Y} = \int \frac{3a_3}{2}\, dX + 3a_2\, dY.$$

En remplaçant a_3 et a_2 par leurs valeurs, on a ici

$$\log \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{1}{4}\log X + \frac{1}{2}\log Y - \frac{1}{2}\log(1 + X^2 + Y^2),$$

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = X^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{Y}{1 + X^2 + Y^2}}.$$

et, par suite,

$$V = X^{\frac{1}{4}} \int \frac{Y\, dY}{\sqrt{Y(1 + X^2 + Y^2)}}.$$

On voit que, dans l'équation réduite (18), entreraient des transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques.