BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur une équations aux dérivées partielles

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 36-48
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__36_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. E. Goursat.

1. L'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$s^2 - 4\lambda(x, y)pq = 0, \tag{1}$$

où $\lambda(x, y)$ est une fonction quelconque de x et de y, peut se ramener, par une transformation simple, à une équation linéaire qui se rapproche des équations à invariants égaux. Posons

$$p = u^2, \qquad q = v^2;$$

l'équation (1) nous donne

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\lambda}\, v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{\lambda}\, u, \end{cases}$$

et l'élimination de v entre ces deux relations conduit à l'équation linéaire

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \lambda}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda u = 0.$$

Si u est une intégrale de l'équation (3), on en déduira une intégrale de l'équation (1) par une quadrature

$$z = \int u^2\, dx + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy,$$

et l'on obtiendra ainsi toutes les intégrales de cette équation. Lorsque la fonction $\lambda(x, y)$ est réelle, à toute solution réelle de l'équation en u correspond une solution réelle de l'équation en z; si u est de la forme $i f(x, y)$, $f(x, y)$ étant une fonction réelle, z est encore réelle. D'ailleurs, à toute intégrale réelle de l'équation en z, correspond une fonction u qui est réelle ou qui est de la forme $i f(x, y)$. En remarquant que, quand on change u en iu, z se change en $-z$, on en conclut que, pour avoir toutes les intégrales réelles de l'équation (1), il suffit de connaître toutes les intégrales réelles de l'équation (3).

Les invariants de l'équation (3) ont pour valeurs

$$h = \lambda, \qquad k = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x\, \partial y} + \lambda;$$

les invariants de l'équation (E_1), obtenue en appliquant à l'équation (E) la transformation de Laplace $u_1 = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, ont pour valeurs

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x\, \partial y} = k, \qquad k_1 = h.$$

Ils sont donc égaux à ceux de l'équation (E) pris dans l'ordre inverse ; en d'autres termes, *l'équation adjointe de l'équation* (E) *a les mêmes invariants que l'équation* (E_1) *qu'on déduit de* (E) *par l'application d'une des transformations de Laplace.*

Si la suite de Laplace relative à l'équation (E) se termine dans un sens, du côté des indices positifs, par exemple, après n transformations, on sait que la suite relative à l'équation adjointe ou à l'équation (E_1) doit se terminer du côté des indices négatifs après n transformations également; comme, après une première transformation appliqué à (E_1), on retrouve (E), on en conclut que la suite de Laplace relative à (E) se termine, du côté des indices négatifs, après $n - 1$ transformations.

Toute équation linéaire (E), qui est telle que l'équation (E_1) qu'on en déduit par la première transformation de Laplace ait les mêmes invariants que l'équation adjointe de (E), peut se ramener à une équation de la forme (3). En effet, en changeant u en $K(x, y)u$, on peut toujours ramener l'équation linéaire à la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0\,;$$

les invariants ont les valeurs suivantes :

$$h = -c, \qquad k = \frac{\partial b}{\partial y} - c,$$

tandis que les invariants de la transformée (E_1) sont

$$h_1 = -c - \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial^2 \log c}{\partial x\,\partial y}, \qquad k_1 = -c.$$

Pour que les invariants h_1 et k_1 de cette équation soient identiques aux invariants k et h de l'adjointe, il suffira que l'on ait $h_1 = k$, ou

$$2\frac{\partial b}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \log c}{\partial x\,\partial y}\,;$$

l'équation doit donc être de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \log c}{\partial x} + X\right)\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,$$

et il suffit d'y remplacer u par $ue^{\int_{x_0}^{x} X\,dx}$ et c par $-\lambda$, pour retrouver l'équation (3).

2. A toute équation de la forme (3), intégrable par la méthode de Laplace, correspond ainsi une équation (1) qui s'intégrera par des quadratures. La détermination des valeurs de λ pour lesquelles il en est ainsi revient, d'après ce qui précède, au problème suivant : *Trouver toutes les suites de Laplace, terminées dans les deux sens et composées d'un nombre pair* $2n$ *d'équations, telles que deux équations à égale distance des extrêmes aient les mêmes invariants disposés dans l'ordre inverse.* On peut obtenir la solution de ce problème par des considérations analogues à celles dont s'est servi M. Darboux pour obtenir toutes les équations à invariants égaux, pour lesquelles la suite de Laplace ne contient qu'un nombre fini d'équations. Il faut se servir d'équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante et d'*ordre pair,* équivalentes à leur adjointe, au lieu des équations d'ordre impair qui interviennent dans le problème traité par M. Darboux.

Lorsque l'équation (3) est intégrable par la méthode de Laplace, l'intégrale générale de l'équation (1) appartient à la première classe d'Ampère, ainsi qu'il résulte du théorème général suivant :

Si l'expression

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi(x, y, X, X', \ldots, X^{(p)}, Y, Y', \ldots, Y^{(p)})\,dx \\ \quad + \psi(x, y, X, X', \ldots, X^{(p)}, Y, Y', \ldots, Y^{(p)})\,dy, \end{array}\right.$$

où X *est une fonction arbitraire de* x, Y *une fonction arbitraire de* y, *et où* φ *et* ψ *renferment* X *et* Y *et leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé, est une différentielle exacte pour toutes les formes possibles des fonctions* X *et* Y, *on a*

$$\int \varphi\,dx + \psi\,dy = \int F(x, X, X', \ldots, X^{(p)})\,dx + \int F_1(y, Y, Y', \ldots, Y^{(p)})\,dy$$
$$+ F_2(x, y, X, \ldots, X^{(p-1)}, Y, Y', \ldots, Y^{(p-1)}),$$

F *ne renfermant que* x, X, X′, ..., $X^{(p)}$; F_1 *ne renfermant* *que y, Y, Y', ..., $Y^{(p)}$, et F_2 étant une fonction déterminée des variables qui y figurent* (1).

Supposons, pour fixer les idées, que les dérivées de l'ordre le plus élevé des fonctions X, Y, qui figurent dans φ et ψ sont celles d'ordre p, de telle sorte que l'une des dérivées $X^{(p)}$, $Y^{(p)}$ entre dans l'une au moins des fonctions φ et ψ, mais qu'il n'y entre aucune dérivée d'ordre supérieur à p. Par hypothèse, on doit avoir, pour toutes les formes possibles des fonctions X et Y,

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx},$$

en posant

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dy} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial Y} Y' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial Y^{(p-1)}} Y^{(p)} + \frac{\partial\varphi}{\partial Y^{(p)}} Y^{(p+1)}, \\ \frac{d\psi}{dx} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial X} X' + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial X^{(p-1)}} X^{(p)} + \frac{\partial\psi}{\partial X^{(p)}} X^{(p+1)}; \end{aligned}$$

on voit que $\frac{d\psi}{dx}$ ne contient pas $Y^{(p+1)}$ et que $\frac{d\varphi}{dy}$ ne contient pas $X^{(p+1)}$. Il faudra donc que l'on ait

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Y^{(p)}} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial X^{(p)}} = 0,$$

c'est-à-dire que φ ne contiendra les dérivées de la fonction Y que jusqu'à celles d'ordre $p-1$ au plus, et de même ψ ne contiendra les dérivées de X que jusqu'à celle d'ordre $p-1$ au plus. Alors $\frac{d\psi}{dx}$, et par suite $\frac{d\varphi}{dy}$, doit être une fonction linéaire de $X^{(p)}$. On doit donc avoir

$$\frac{\partial^2\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)}{[(\partial X^{(p)})]^2} = 0,$$

(1) La proposition s'étend sans difficulté aux expressions

$$\varphi_1\, dx_1 + \varphi_2\, dx_2 + \ldots + \varphi_n\, dx_n,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ renferment n fonctions arbitraires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement, et leurs dérivées en nombre fini, qui sont des différentielles totales exactes pour toutes les formes possibles des fonctions arbitraires.

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{\partial^2\varphi}{(\partial X^{(p)})^2}\right] = 0,$$

ce qui montre que $\frac{\partial^2\varphi}{(\partial X^p)^2}$ est indépendant de y, Y, Y′, ..., $Y^{(p-1)}$,

$$\frac{\partial^2\varphi}{(\partial X^p)^2} = v(x, X, X', X'', \ldots, X^{(p)}).$$

On en déduit que φ est de la forme

$$\begin{aligned}\varphi = \Phi(x, X, X', \ldots, X^{(p)}) &+ \Phi_1(x, y, X, X', \ldots, X^{(p-1)}, Y, Y', \ldots, Y^{(p-1)})\, X^{(p)}\\ &+ \Phi_2(x, y, X, X', \ldots, X^{(p-1)}, Y, \ldots, Y^{(p-1)}),\end{aligned}$$

et l'on démontrera de la même façon que ψ doit être de la forme

$$\begin{aligned}\psi = \Psi(y, Y, Y', \ldots, Y^{(p)}) &+ \Psi_1(x, y, X, X', \ldots, X^{(p-1)}, Y, Y', \ldots, Y^{(p-1)})\, Y^{(p)}\\ &+ \Psi_2(x, y, X, X', \ldots, X^{(p-1)}, Y, \ldots, Y^{(p-1)}).\end{aligned}$$

Le coefficient de $X^{(p)}Y^{(p)}$ est $\frac{\partial\Phi_1}{\partial Y^{(p-1)}}$ dans $\frac{d\varphi}{dy}$, et $\frac{\partial\Psi_1}{\partial X^{(p-1)}}$ dans $\frac{d\psi}{dx}$; on doit donc avoir

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial Y^{(p-1)}} = \frac{\partial\Psi_1}{\partial X^{(p-1)}},$$

ce qui montre que Φ_1 et Ψ_1 sont les dérivées partielles par rapport à $X^{(p-1)}$ et $Y^{(p-1)}$ respectivement d'une fonction

$$U(x, y, X, X', \ldots, X^{(p-1)}, Y, Y', \ldots, Y^{(p-1)}) = \int \Phi_1\, dX^{(p-1)} + \Psi_1\, dY^{(p-1)}.$$

La différentielle totale de cette fonction U a pour expression

$$\begin{aligned}dU = &\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial X}X' + \ldots + \frac{\partial U}{\partial X^{(p-2)}}X^{(p-1)}\right)dx\\ &+ \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial Y}Y' + \ldots + \frac{\partial U}{\partial Y^{(p-2)}}Y^{(p-1)}\right)dy\\ &+ \Phi_1 X^{(p)}\,dx + \Psi_1 Y^{(p)}\,dy,\end{aligned}$$

et l'on peut écrire

$$\int \varphi\, dx + \psi\, dy = \int \Phi\, dx + \int \Psi\, dy + U + \int \varphi_1\, dx + \psi_1\, dy,$$

en posant

$$\varphi_1 = \Phi_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial X} X' + \ldots + \frac{\partial U}{\partial X^{(p-2)}} X^{(p-1)}\right),$$
$$\psi_1 = \Psi_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial Y} Y' + \ldots + \frac{\partial U}{\partial Y^{(p-2)}} Y^{(p-1)}\right).$$

Remarquons maintenant que $\varphi_1\,dx + \psi_1\,dy$ doit être une différentielle exacte pour toutes les formes possibles des fonctions arbitraires X et Y, et que φ_1 et ψ_1 ne renferment les dérivées de ces fonctions que jusqu'à l'ordre $p - 1$ au plus. En répétant les mêmes opérations sur $\int \varphi_1\,dx + \psi_1\,dy$, et poursuivant l'application du procédé autant de fois qu'il est possible, on finira par arriver à une intégrale de la forme

$$\int \varphi_p(x, y, X)\,dx + \psi_p(x, y, Y)\,dy,$$

où l'expression $\varphi_p\,dx + \psi_p\,dy$ doit être une différentielle exacte pour toutes les formes possibles de X et de Y. On doit donc avoir

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial y} = \frac{\partial \psi_p}{\partial x};$$

or φ_p ne contient pas Y, il doit donc en être de même de $\frac{\partial \psi_p}{\partial x}$, c'est-à-dire que ψ_p est de la forme $P(y, Y) + Q(x, y)$.

On voit de même que φ_p doit être de la forme $M(x, X) + N(x, y)$, et la condition d'intégrabilité devient $\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

L'intégrale en question peut donc s'écrire

$$\int \varphi_p\,dx + \psi_p\,dy = \int M(x, X)\,dx + \int P(y, Y)\,dy + \int N\,dx + Q\,dy.$$

En réunissant tous les résultats obtenus, on obtient bien pour l'intégrale $\int \varphi\,dx + \psi\,dy$ une expression de la forme annoncée.

Remarque. — Si l'on suppose que les fonctions φ et ψ soient linéaires par rapport aux fonctions X, Y et à leurs dérivées, on retrouve le théorème démontré par M. Darboux (¹), et qui est d'un grand usage dans l'étude des équations linéaires. En effet, les fonctions φ et ψ sont alors de la forme

$$\varphi = A_0 X + A_1 X' + \ldots + A_p X^{(p)} + B_0 Y + B_1 Y' + \ldots + B_{p-1} Y^{(p-1)},$$
$$\psi = C_0 X + C_1 X' + \ldots + C_{p-1} X^{(p-1)} + D_0 Y + D_1 Y' + \ldots + D_p Y^{(p)},$$

A_i, B_i, C_i, D_i étant des fonctions déterminées de x et de y; si l'on pose

$$U = A_p X^{(p-1)} + D_p Y^{(p-1)},$$

on peut écrire

$$\int \varphi\, dx + \psi\, dy = U - \int \varphi_1\, dx + \psi_1\, dy,$$

φ_1 et ψ_1 étant des expressions de même forme que φ et ψ, qui ne renferment plus que les dérivées de X et de Y, jusqu'à l'ordre $p - 1$ au plus. En continuant ainsi, on arrivera à une expression

$$a X\, dx + b Y\, dy,$$

qui devra être une différentielle exacte pour toutes les formes possibles des fonctions X et Y, ce qui exige que a ne dépende que de la variable x, et que b ne dépende que de la variable y. Si ces fonctions ne sont pas nulles, on fera disparaître tous les signes de quadrature, en remplaçant X par $\frac{X'_1}{a}$ et Y par $\frac{Y'_1}{b}$, X_1 et Y_1 désignant deux nouvelles fonctions arbitraires de x et de y respectivement.

3. Lorsque la fonction $\lambda(x, y)$ est de la forme $\lambda = \frac{k}{(x+y)^2}$, k désignant une constante, les équations (1) et (3) deviennent respectivement

$$s^2 - \frac{4kpq}{(x+y)^2} = 0, \tag{1$'$}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{x+y} - \frac{ku}{(x+y)^2} = 0; \tag{3$'$}$$

(¹) *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 151.

si l'on forme la suite de Laplace relative à l'équation $(3)'$ du côté des indices positifs, on trouve que les invariants successifs ont pour valeurs

$$\frac{k}{(x+y)^2},\quad \frac{k-1}{(x+y)^2},\quad \frac{k-4}{(x+y)^2},\quad \ldots,\quad \frac{k-n^2}{(x+y)^2},\quad \ldots.$$

Pour que la suite soit limitée, il faut et il suffit, d'après cela, *que k soit le carré d'un nombre entier.*

Examinons les cas les plus simples. Si $k=1$, l'intégrale générale de l'équation $(3)'$, est

$$u = X' + \frac{Y-X}{x+y};$$

on a ensuite, d'après les formules (2),

$$v = (x+y)\frac{\partial u}{\partial y} = Y' + \frac{X-Y}{x+y},$$

et l'intégrale générale de l'équation

$$s = \frac{2\sqrt{pq}}{x+y} \tag{5}$$

est, d'après cela,

$$z = \int \left(X' + \frac{Y-X}{x+y}\right)^2 dx + \left(Y' + \frac{X-Y}{x+y}\right)^2 dy. \tag{6}$$

Si l'on applique à cette expression le théorème général qui vient d'être démontré, on trouve qu'elle peut encore s'écrire

$$z = -\frac{(Y-X)^2}{x+y} + \int X'^2\,dx + \int Y'^2\,dy.$$

Pour faire disparaître les quadratures, il suffira d'introduire deux nouvelles variables indépendantes α et β, en posant

$$X' = \alpha,\qquad Y' = \beta,\qquad x = \varphi''(\alpha),\qquad y = \psi''(\beta),$$

ce qui nous donne

$$X = \int X'\,dx = \int \alpha\,\varphi'''(\alpha)\,d\alpha = \alpha\,\varphi''(\alpha) - \varphi'(\alpha),$$

$$\int X'^2\,dx = \int \alpha^2\varphi'''(\alpha)\,d\alpha = \alpha^2\varphi''(\alpha) - 2\alpha\varphi'(\alpha) + 2\varphi(\alpha),$$

et de même

$$Y = \beta\psi''(\beta) - \psi'(\beta),$$

$$\int Y'^2\,dy = \beta^2\psi'''(\beta) - 2\beta\psi'(\beta) + 2\psi(\beta).$$

L'intégrale générale de l'équation (5) est donc représentée par les formules

$$(7)\quad \begin{cases} x = \varphi''(\alpha), \qquad y = \psi''(\beta), \\ z = \alpha^2\varphi''(\alpha) - 2\alpha\varphi'(\alpha) + 2\varphi(\alpha) + \beta^2\psi''(\beta) - 2\beta\psi'(\beta) + 2\psi(\beta), \\ \qquad - \dfrac{[\alpha\psi''(\alpha) - \varphi'(\alpha) - \beta\psi''(\beta) + \psi'(\beta)]^2}{\varphi''(\alpha) + \psi''(\beta)}, \end{cases}$$

α et β étant deux paramètres variables, φ et ψ deux fonctions arbitraires. On remarquera que l'intégrale générale de cette équation contient explicitement les deux fonctions arbitraires, sans que cette équation appartienne à la classe étudiée par M. Moutard.

Lorsque $k = 4$, l'intégrale générale de l'équation (3) est

$$u = X'' - \frac{4X'}{x+y} + \frac{6X}{(x+y)^2} + \frac{2Y'}{x+y} - \frac{6Y}{(x+y)^2},$$

et la valeur correspondante de v est

$$v = \frac{x+y}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = Y'' - \frac{4Y'}{x+y} + \frac{6Y}{(x+y)^2} + \frac{2X'}{x+y} - \frac{6X}{(x+y)^2}.$$

L'intégrale générale de l'équation

$$s = \frac{4\sqrt{pq}}{x+y}$$

est donc représentée par la formule

$$z = \int u^2\,dx + v^2\,dy,$$

qui devient, en appliquant le théorème général,

$$z = \int X''^2 dx + \int Y''^2 dy - 4\frac{X'^2 + Y'^2}{x+y} + 12\frac{XX' + YY'}{(x+y)^2} + \frac{4X'Y'}{x+y}$$
$$- 12\frac{XY' + X'Y}{(x+y)^2} - 12\frac{(X-Y)^2}{(x+y)^3}.$$

Je citerai, comme autre exemple d'équation à laquelle on peut appliquer la transformation précédente, l'équation $s^2 = 4pq$, qui a été rencontrée par M. Thomas Craig dans certains problèmes de la théorie des surfaces, et que l'on ramène ainsi à l'équation bien connue $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u$.

4. La transformation qui vient d'être étudiée peut être rattachée à une question plus générale. D'après la façon même dont nous avons obtenu l'équation (3), si nous posons

$$M = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \qquad N = -u^2,$$

nous avons l'identité

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{2}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log \lambda}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda u\right).$$

Pour abréger, convenons d'appeler *multiplicateur* d'une équation linéaire

$$F(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0 \tag{8}$$

toute fonction μ renfermant les variables x, y, z, et les dérivées partielles de z jusqu'à un ordre quelconque, telle que le produit $\mu F(z)$ soit de la forme

$$\mu F(z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y},$$

M et N étant également des fonctions déterminées de x, y, z, et des dérivées partielles de z par rapport à x et à y. Nous voyons que $\dfrac{2}{\lambda}\dfrac{\partial u}{\partial y}$ est un multiplicateur pour l'équation linéaire (3).

Étant donnée une équation linéaire quelconque (8), on sait qu'il existe toujours une infinité de multiplicateurs $u(x, y)$ ne renfermant que les variables indépendantes x et y; pour que $u(x,y)$ soit un multiplicateur de $F(z)$, il faut et il suffit que u vérifie une équation linéaire de même forme, qui est dite *équation adjointe de la première*

$$(9)\qquad G(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right)u = 0.$$

Si les coefficients a, b, c de l'équation (8) sont quelconques, on reconnaît aisément qu'il n'existe pas d'autres multiplicateurs que les fonctions $u(x, y)$ qui satisfont à l'équation adjointe. Sans vouloir entrer ici dans l'étude détaillée de cette question, nous montrerons comment on peut prévoir *a priori* l'existence de cas très étendus où il existe des multiplicateurs, renfermant non seulement les variables x et y, mais aussi z et ses dérivées, jusqu'à un ordre aussi élevé qu'on le veut.

Rappelons d'abord l'identité

$$(10)\qquad uF(z) - zG(u) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y},$$

où l'on a posé

$$M = auz + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$
$$N = buz + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Supposons que l'équation proposée $F(z) = 0$ soit telle que l'on puisse passer de cette équation à son adjointe par une de ces transformations (m, n), étudiées si complètement par M. Darboux. En d'autres termes, supposons que l'intégrale générale de l'équation (9) est donnée par la formule

$$(11)\qquad u = Az + B_1\frac{\partial z}{\partial x} + \ldots + B_m\frac{\partial^m z}{\partial x^m} + C_1\frac{\partial z}{\partial y} + \ldots + C_n\frac{\partial^n z}{\partial y^n},$$

$A, B_1, \ldots, B_m, C_1, \ldots, C_n$ étant des fonctions déterminées de x et de y et z l'intégrale générale de l'équation $F(z) = 0$. Si l'on substitue l'expression précédente à la place de u dans $G(u)$, le résultat devra être identiquement nul, pourvu que z vérifie l'équation $F(z) = 0$; on aura donc, en supposant u remplacé par l'expression (11), une identité de la forme

$$G(u) = \alpha F(z) + \sum \beta_{ik} \frac{\partial^{i+k} F(z)}{\partial x^i \partial y^k}, \tag{12}$$

les coefficients α et β_{ik} ne dépendant que de x et de y. Si l'on fait la même substitution dans l'identité (10), on arrive à une nouvelle relation de la forme

$$\alpha' F(z) + \sum \beta'_{ik} \frac{\partial^{i+k} F(z)}{\partial x^i \partial y^k} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{13}$$

P, Q α', β'_{ik} renfermant x, y et z et les dérivées partielles de z. Maintenant, une suite d'intégrations par parties permet de ne laisser dans le premier membre que des termes divisibles par $F(z)$. Par exemple, si i est positif, on peut écrire

$$\beta'_{ik} \frac{\partial^{i+k} F(z)}{\partial x^i \partial y^k} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\beta'_{ik} \frac{\partial^{i+k-1} F(z)}{\partial x^{i-1} \partial y^k}\right] - \frac{\partial \beta'_{ik}}{\partial x} \frac{\partial^{i+k-1} F(z)}{\partial x^{i-1} \partial y^k},$$

et l'on a une formule analogue pour diminuer l'indice k d'une unité. En continuant ainsi et en faisant passer toutes les dérivées dans le second membre, on finira par arriver à une identité de la forme

$$\mu F(z) = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y},$$

μ pouvant contenir les dérivées partielles de z jusqu'à un ordre quelconque, pourvu que m et n soient assez grands. Cette fonction μ est, d'après l'identité finale, un multiplicateur pour l'équation $F(z) = 0$.

On retrouve la transformation considérée au début de ce travail en supposant que la transformée (E_1) de l'équation (8) a les mêmes invariants que l'adjointe de cette équation; on peut alors passer de l'équation (8) à son adjointe par une transformation de la forme

$$u = A \frac{\partial z}{\partial y} + B z.$$